PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГАУССОВСКИХ МЕР

ЛЕДА Д. МИНКОВА, ДИМИТР И. ХАДЖИЕВ

Приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности и вид совместной плотности двух гауссовских мер при предположении, что одна из них соответствует гауссовскому мартингалу. Описывается класс гауссовских процессов, эквивалентных гауссовскому мартингалу.

1. Введение. Пусть P и P_0 — две гауссовские меры, заданные на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ с σ-алгеброй $\mathfrak{F}_\infty=\mathfrak{F}_\infty^Y=\sigma(Y_t, t\in R_+)$, порожденной некоторой случайной функцией $Y=(Y_t(\omega))$, $t\in R_+=[0, \infty)$, $\omega\in\Omega$.

В этой работе приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности (взаимной абсолютной непрерывности) гауссовских мер P_0 и P в предположении, что случайный процесс (Y, P_0) является гауссовским мартингалом с непрерывными справа и допускающими пределы слева траекториями.

Заметим прежде всего, что поскольку (Y, P_0) и (Y, P) — гауссовские процессы, то меры P и P_0 на σ-алгебре $\mathfrak{F}_\infty^Y$ либо эквивалентны $(\mathsf{P}\sim\mathsf{P}_0)$, либо сингулярны $(\mathsf{P}\perp\mathsf{P}_0)$. Следовательно, невыполнение упомянутых выше условий эквивалентности будет необходимым и достаточным условием сингулярности P и P_0.

Проблеме эквивалентности гауссовских мер в разных предположениях посвящена обширная литература. Обзор имеющихся результатов можно найти в [4, 7]. Однако всего несколько работ связано с мартингальным подходом к гауссовским процессам и мерам. Среди них следует особо выделить статью Хитсуды [8], где приводятся условия эквивалентности винеровской мере. Следуя в основном [8] и используя характеризацию гауссовских мартингалов, установленную в [6], мы показываем, что гауссовская мера P эквивалентна мера P_0 гауссовского мартингала тогда, когда (Y, P) является гауссовским полумартингалом с гауссовской мартингальной частью и гауссовским сносом определенного вида. При этом устанавливается вид производной Радона — Никодима $d\mathsf{P}/d\mathsf{P}_0$. Некоторые применения этих результатов помещены в конце статьи. Подобные утверждения об эквивалентности мер, соответствующих гауссовских процессам, содержатся и в [9, 10]. Результаты настоящей работы отличаются от них главным образом тем, что мы характеризуем процесс (Y, P) как полумартингал. Это обстоятельство особено важно для задач статистики случайных процессов.

Частный случай гауссовских мер с нулевым средним значением рассматривается в совместном докладе [11] и опубликован в [12]. Поэтому здесь некоторые результаты приводятся схематично.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 7, 1984, с. 163—169.

2. Обозначения и комментарии. Мы используем терминологию и результаты работы [6]. Измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{F}^Y_\infty)$ и случайная функция $Y=(Y_t)$, $t\in R_t$, считаются фиксированными.

Пусть (Y, P_0) — гауссовский мартингал с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями. Так как $\mathsf{E}_0 Y_t=\mathsf{E}_0 Y_0=\mathrm{const}$, $t\in R_+$, где E_0 — ожидание по мере P_0, то без ограничения общности можно считать эту константу равной нулю. При этом удобно рассматривать траектории случайной функции Y при $t<0$, полагая $Y_t(\omega)=0$, $t<0$, $\omega\in\Omega$.

Обозначим $\Delta Y_s=Y_s-Y_{s-}=Y_s-\lim\limits_{n\uparrow s} Y_n$, $s\in R_+$, и пусть $\langle Y\rangle^0_t=\mathrm{cov}_0(Y_t, Y_t)=\mathsf{E}_0 Y_t^2$, $t\in R_+$ — квадратичная характеристика мартингала (Y, P_0). Множество $S=\{t\in R_+ : \Delta\langle Y\rangle^0_t>0\}$ не более чем счетно. Для удобства обозначаем $s_0=0$, $S\setminus\{0\}=\{s_n, n\geqq 1\}$ и $a_n=\Delta\langle Y\rangle^0_{s_n}$, $n\geqq 0$. Согласно [6], гауссовский мартингал (Y, P_0) допускает представление

$$Y_t=Y^c_t+\sum_{0\leqq s_n\leqq t}\Delta Y_{s_n},\quad t\in R_+, \tag{1}$$

с непрерывным гауссовским мартингалом (Y^c, P_0), $Y^c_0=0$.

С неубывающей и непрерывной справа неслучайной функцией $\langle Y\rangle^0$ мы связываем два класса борелевских функций:

$$\mathscr{L}^2(R_+, \langle Y\rangle^0)=\{\alpha=\alpha(t),\ t\in R_+ : \int_{(0,\infty)}\alpha^2(t)d\langle Y\rangle^0_t<\infty\},$$

$$\mathscr{L}^2(R_+\times R_+, \langle Y\rangle^0)=\{L=L(t, s),\ t,\ s\in R_+ : \int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} L^2(t, s)d\langle Y\rangle^0_s d\langle Y\rangle^0_t<\infty\}.$$

Ясно, что $\mathscr{L}^2(R_+, \langle Y\rangle^0)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\alpha, \beta)=\int_{(0,\infty)}\alpha(t)\beta(t)d\langle Y\rangle^0_t$, а $\mathscr{L}^2(R_+\times R_+, \langle Y\rangle^0)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(L, K)=\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)}L(t, s)\times K(t, s)d\langle Y\rangle^0_s d\langle Y\rangle^0_t$. Далее мы не различаем элементов этих пространств, совпадающих в смысле соответствующих норм: $\alpha=\beta$, если $\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(\alpha-\beta, \alpha-\beta)}=0$, и $L=K$, если $\|L-K\|=\sqrt{(L-K, L-K)}=0$.

Случайная функция Y порождает неубывающее семейство σ-алгебр $\mathfrak{F}^Y=(\mathfrak{F}^Y_t)$, где

$$\mathfrak{F}^Y_t=\sigma(Y_s, s\leqq t),\quad t\in R_+, \tag{2}$$

а также неубывающее семейство σ-алгебр $\mathfrak{F}^Y_-=(\mathfrak{F}^Y_{t-})$, где

$$\mathfrak{F}^Y_{t-}=\sigma(Y_s, s<t),\quad t\in R_+. \tag{3}$$

Когда рассматривается случайный процесс (Y, P), P — любая вероятностная мера на $\mathfrak{F}^Y_\infty$, мы считаем, что все эти σ-алгебры пополнены P-нулевыми множествами из $\mathfrak{F}^Y_\infty$, сохраняя те же обозначения и для пополнений. Поскольку пополнения σ-алгебры относительно эквивалентных мер совпадают, это не будет приводить к недоразумениям.

Вероятностную меру P на $(\Omega, \mathfrak{F}^Y_\infty)$ будем называть гауссовской, если (Y, P) — гауссовский случайный процесс.

Предположим теперь, что P — гауссовская мера на $(\Omega, \mathfrak{F}^Y_\infty)$, и обозначим

$$\mu_n=\mathsf{E}(\Delta Y_{s_n}|\mathfrak{F}^Y_{s_n-}),\quad \sigma_n=\mathsf{E}(\Delta Y_{s_n}-\mu_n)^2,\quad n\geqq 0, \tag{4}$$

(E — ожидание по мере P). По теореме о нормальной корреляции [3] условное P-распределение величины ΔY_{s_n} относительно $\mathfrak{F}^Y_{s_n-}$ является гауссовским (нормальным) $N(\mu_n, \sigma_n)$, $n \geqq 0$.

Любая гауссовская мера P на $\mathfrak{F}^Y_\infty$ характеризуется (двумя) функциональными параметрами (A, B) — средним значением $A = A(t) = \mathsf{E}Y_t$, $t \in R_+$, и ковариационной функцией $B = B(t, s) = \operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \mathsf{E}[(Y_t - A(t))((Y_s - A(s))]$, $s, t \in R_+$. В частности, мера P_0, соответствующая гауссовскому мартингалу (Y, P_0), характеризуется средним значением $A_0 = A_0(t) = \mathsf{E}_0 Y_t = 0$ и ковариационной функцией $B_0(t, s) = \operatorname{cov}_0(Y_t, Y_s) = \langle Y\rangle^0_{t\wedge s}$, $s, t \in R_+$, а величина ΔY_{s_n} по мере P_0 не зависит от $\mathfrak{F}^Y_{s_n-}$ и распределена по закону $N(0, a_n)$, $n \geqq 0$.

Задача об эквивалентности мер P и P_0 рассматривается сначала в двух частных постановках, к которым потом сводится общий случай.

3. Эквивалентность в случае $B = B_0$. Предположим, что гауссовская мера P имеет ту же ковариационную функцию, что и мера P_0, соответствующая гауссовскому мартингалу (Y, P_0).

Согласно [4, гл. II, теорема 3], меры P и P_0 эквивалентны тогда и только тогда, когда существует единственная гауссовская величина $Z = Z_\infty(\omega)$, принадлежащая замыканию в среднеквадратическом смысле относительно P_0 линейного пространства, натянутого на величины Y_t, $t \in R_+$, и такая, что

$$A(t) = \mathsf{E}_0(Y_t Z_\infty), \quad t \in R_+. \tag{5}$$

Рассмотрим гауссовский мартингал (Z, P_0), определенный соотношением $Z_t = \mathsf{E}_0(Z_\infty \mid \mathfrak{F}^Y_t)$, $t \in R_+$. В силу лемм 1 и 2 из [2], процесс (Z, P_0) допускает единственное представление

$$Z_t = \int_{[0, t]} \alpha(s) dY_s, \tag{6}$$

где $\alpha(0) = \operatorname{cov}_0(Z_\infty, Y_0)\cdot a_0^{\oplus}$ (Символ $b^{\oplus}$ означает b^{-1}, если $b \neq 0$, и 0, если $b = 0$) и

$$\mathsf{E}_0 Z^2_\infty = \int_{[0, \infty)} \alpha^2(s) d\langle Y\rangle^0_s < \infty. \tag{7}$$

Тем самым, существует (единственная) функция $\alpha = \alpha(t)$, $t \in R_+$, $\alpha \in \mathfrak{F}^2(R_+, \langle Y\rangle^0)$, удовлетворяющая (6), а согласно (5) и свойствам стохастических интегралов, удовлетворяющая также соотношению

$$A(t) = \int_{[0, t]} \alpha(s) d\langle Y\rangle^0_s, \quad t \in R_+. \tag{8}$$

Мы получаем следующее утверждение (ср. с примером 3 — [4, с. 35]).

Теорема 1. *Если $B = B_0$, то меры P и P_0 эквивалентны тогда и только тогда, когда среднее значение $A = A(t)$, $t \in R_+$, допускает представление* (8) *с функцией $\alpha = dA/d\langle Y\rangle^0 \in \mathscr{L}^2(R_+, \langle Y\rangle^0)$. При этом производная Радона — Никодима меры P относительно P_0 имеет вид*

$$d\mathsf{P}/d\mathsf{P}_0 = \exp\left\{\int_{[0,\infty)} \alpha(s) dY_s - \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} \alpha^2(s) d\langle Y\rangle^0_s\right\} \tag{9}$$

(см. (6) и [4, теорема 3, гл. II]

4. Эквивалентность в случае $A = A_0 = 0$. Пусть среднее значение A гауссовской меры P равно нулю ($A = A_0 = 0$). Эта ситуация, подробно рассмотренная в [12], с той лишь разницей, что при $a_0>0$ величина (Y_0, P_0) не является постоянной, а задает некоторое начальное значение мартингала (Y, P_0), отличное от нулевого, но независящее от последующих приращений. Приведем нужные результаты, опуская подробности.

Теорема 2. *Если $A=A_0=0$, то соотношение $\mathsf{P}\sim\mathsf{P}_0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует:*

1) *гауссовский мартингал (X, P) со средним значением 0 и квадратичной характеристикой $\langle X\rangle_t=\operatorname{cov}(X_t, X_t)=\langle Y\rangle_t^0$, $t\in R_+$, и*

2) *сильное* (т. е. $L(s,u)=0$ *при* $s\leq u$) *ядро Вольтерры* $L=L(s,u)\in\mathscr{L}^2(R_+\times R_+, \langle Y\rangle^0)$ *такие, что*

$$Y_t=\widetilde{X}_t-\int\limits_{[0,t]}\Big(\int\limits_{(0,s]}L(s,u)d\widetilde{X}_u\Big)d\langle\widetilde{X}\rangle_s,$$

где

$$\widetilde{X}_t=X_t^c+\sum_{0\ s_n\leq t}\sqrt{\sigma_n\,a_n^{\oplus}}\,.\,\Delta X_{s_n},\quad t\in R_+, \tag{10}$$

и

$$\sum_{s_n\in S}(1-\sigma_n/a_n)^2<\infty. \tag{11}$$

При этом процесс (X, P) и ядро L единственны и

$$\frac{d\mathsf{P}_0}{d\mathsf{P}}=\exp\Big\{\int\limits_{(0,\infty)}\Big(\int\limits_{(0,s)}L(s,u)d\widetilde{X}_u\Big)d\widetilde{X}_s^c-\frac{1}{2}\int\limits_{(0,\infty)}\Big(\int\limits_{(0,s]}L(s,u)d\widetilde{X}_u\Big)^2d\langle\widetilde{X}^c\rangle_s\Big\}.$$

$$\prod_{s_n\in S}\sqrt{\frac{\sigma_n}{a_n}}\exp\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{a_n}\Big)\Big(\Delta\widetilde{X}_{s_n}-\sigma_n\int\limits_{(0,s_n]}L(s_n,u)d\widetilde{X}_u\Big)^2\Big\},$$

$$\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{P}_0}=\exp\Big\{\int\limits_{(0,\infty)}\Big(\int\limits_{(0,s]}K(s,u)dY_n\Big)dY_s^c-\frac{1}{2}\int\limits_{(0,\infty)}\Big(\int\limits_{(0,s]}K(s,u)dY_n\Big)^2d\langle Y^c\rangle_s\Big\}.$$

$$\prod_{s_n\in S}\sqrt{\frac{a_n}{\sigma_n}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{a_n}\Big)(\Delta Y_{s_n})^2+\frac{\mu_n}{\sigma_n}\Delta Y_{s_n}-\frac{\mu_n^2}{2\sigma_n}\Big\},$$

где $K=K(s,u)$ — сильное ядро Вольтерры, резольвентное к $L=L(s,u)$ в пространстве $\mathscr{L}^2(R_+\times R_+, \langle Y\rangle^0$ (см. [12]) *и μ_n, $\sigma_n>0$ определены в* (4).

Доказательство теоремы приводится по схеме, указанной в [12].

5. Общий случай. Пусть $\mathsf{E}Y_t=A(t)$ и $\operatorname{cov}(Y_t, Y_s)=B(t, s)$, t, $s\in R_+$. Обозначим через $\widetilde{\mathsf{P}}$ гауссовскую меру на $\mathfrak{F}_\infty^Y$ со средним A и ковариационной функцией B: $\widetilde{\mathsf{E}}Y_t=A(t)$ и $\widetilde{\operatorname{cov}}(Y_t, Y_s)=\widetilde{\mathsf{E}}(Y_t-A(t))(Y_s-A(s))=\langle Y\rangle_{t\wedge s}^0$, $t,s\in R_+$ Согласно [4, гл. 2, теорема 1] меры P и P_0 эквивалентны на $\mathfrak{F}_\infty^Y$ тогда и только тогда, когда эквивалентны меры P, $\widetilde{\mathsf{P}}$ и P_0. При этом

$$\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{P}_0}=\frac{d\mathsf{P}}{d\widetilde{\mathsf{P}}}\cdot\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}_0}. \tag{12}$$

Меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ и P_0 различаются только средним значением, и ввиду теоремы 1 среднее значение A допускает представление (8) с функцией $\alpha \in \mathscr{L}^2(R_+, \langle Y\rangle^0)$, а плотность $d\widetilde{\mathsf{P}}/d\mathsf{P}_0$ описывается правой частью формулы (9). Далее эквивалентность $\mathsf{P}\sim\widetilde{\mathsf{P}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}^0\sim\widetilde{\mathsf{P}}^0$, где P^0 и $\widetilde{\mathsf{P}}^0$ — гауссовские меры со средним нуль и ковариационными функциями B соответственно B и B^0 (см. [4, (8), с. 29]). Заметим, что $\mathsf{P}^0=\mathsf{P}_0$ и, следовательно, $\mathsf{P}\sim\widetilde{\mathsf{P}}$ равносильно тому, что $\mathsf{P}^0\sim\mathsf{P}_0$. Необходимое и достаточное условие эквивалентности мер P^0 и P_0 приводится в теореме 2, где описан и вид плотности $d\mathsf{P}^0/d\mathsf{P}_0$. Условие $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}_0$ означает также, что функция A является допустимым сдвигом для меры P_0 (в терминологии [5]). Поэтому, используя формулу (4) из [5, с. 140), получаем, что

$$\frac{d\mathsf{P}}{d\widetilde{\mathsf{P}}}(Y)=\frac{d\mathsf{P}^0}{d\mathsf{P}_0}(Y-A)\ . \tag{13}$$

Окончательно, при предположении, что $\mathsf{P}\sim\mathsf{P}_0$ из (9), (12) и (13), следует представление

$$\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{P}_0}=\exp\{\int\limits_{(0,\infty)}\int\limits_{(0,s]}K(s,u)d(Y_u-A(u))d(Y_s^c-A^c(s))$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(0,\infty)}(\int\limits_{(0,s]}K(s,u)d(Y_u-A(u)))^2d\langle Y^c\rangle_s^0\}.$$
$$\prod_{s_n\in S}\sqrt{\frac{a_n}{\sigma_n}}\exp\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{a_n}\Big)(\Delta Y_{s_n}-\Delta A(s_n))^2+\frac{\mu_n^0}{\sigma_n}(\Delta Y_{s_n}-\Delta A(s_n))-\frac{(\mu_n^0)^2}{2\sigma_n}\}$$
$$\times\exp\{\int\limits_{[0,\infty)}\alpha(s)dY_s-\frac{1}{2}\int\limits_{[0,\infty)}\alpha^2(s)d\langle Y\rangle_s^0\},$$

где $\mu_n^0=\mathsf{E}^0(\Delta Y_{s_n}\mid\mathfrak{F}^Y_{s_n-})=\mu_n-\Delta A(s_n)=\mu_n-\alpha(s_n)a_n$, $s_n\in S$, E^0 — ожидание по мере P^0 и K — некоторое сильное ядро Вольтерры.

Таким образом получаем общее утверждение.

Теорема 3. *Соотношение* $\mathsf{P}\sim\mathsf{P}_0$ *справедливо тогда и только тогда, когда существуют:*

1) *гауссовский мартингал* (X,P) *со средним* 0 *и квадратичной характеристикой* $\langle X\rangle_t=\operatorname{cov}(X_t,X_t)=\langle Y\rangle_t^0$, $t\in R_+$,

2) *сильное ядро Вольтерры* $L\in\mathscr{L}^2(R_+\times R_+,\langle Y\rangle^0)$,

3) *неслучайная функция* $\alpha\in\mathscr{L}^2(R_+\langle Y\rangle^0)$ *такие, что*

$$Y_t=\widetilde{X}_t-\int\limits_{(0,t]}(\int\limits_{(0,s]}L(s,u)d\widetilde{X}_u)d\langle\widetilde{X}\rangle_s+\int\limits_{[0,t]}\widetilde{\alpha}(s)d\langle\widetilde{X}\rangle_s, \tag{14}$$

где $\widetilde{X}$ *определено в* (10)

$$\widetilde{\alpha}(s)=\begin{cases}\alpha(s), & s\overline{\in}S\\ \dfrac{\sigma_n}{a_n}\cdot\alpha(s_n), & s=s_n\in S\end{cases}$$

и выполняется условие (11). *Функция* α и L *единственны, а соответствующая плотность определяется по формуле*

$$(15)\quad \frac{dP}{dP_0}(Y)=\exp\{\int_{[0,\infty)}[\int_{(0,s]}K(s,u)dY_n-\int_{(0,s]}K(s,u)\alpha(u)d\langle Y\rangle_u^0+\alpha(s)]dY_s^c$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)}[\int_{(0,s]}K(s,u)dY_u-\int_{(0,s]}K(s,u)\alpha(u)d\langle Y\rangle_u^0+\alpha(s)]^2 d\langle Y^c\rangle_c^0\}.$$

$$\prod_{s_n\in S}\sqrt{\frac{a_n}{\sigma_n}}\exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_n}-\frac{1}{a_n}\right)(\Delta Y_{s_n})^2+\frac{\mu_n}{\sigma_n}\Delta Y_{s_n}-\frac{\mu_n^2}{2\sigma_n}\},$$

где K — сильное ядро Вольтерры, резольвентное к L в $\mathscr{L}^2(R_+\times R_+,\langle Y\rangle^0)$, а μ_n и σ_n определены в (2).

6. Каноническое представление гауссовских процессов, эквивалентных гауссовскому мартингалу. Представляет интерес задача описания всех гауссовских процессов (Y, P), порождающих в пространстве траекторий меры, эквивалентные мере гауссовского мартингала. Эти процессы принято называть процессами, эквивалентными гауссовскому мартингалу. Из теоремы 3 ясно, что это семимартингалы с гауссовской мартингальной частью и со сносом определенного вида. Удобно описывать гауссовский процесс (Y, P), эквивалентныйг ауссовскому мартингалу, в терминах его (гауссовской) мартингальной части $(M, P)=(\widetilde{X}, P)$.

Теорема 4. *Гауссовский процесс (Y, P) эквивалентен некоторому гауссовскому мартингалу тогда и только тогда, когда имеет вид*

$$(16)\qquad Y_t=M_t+\int_{[0,t]}\gamma_s d\langle M\rangle_s,$$

где (M, P) — гауссовский мартингал и

$$(17)\qquad \gamma_s=\alpha(s)-\int_{(0,s]}L(s,u)dM_u$$

с некоторой функцией $\alpha\in\mathscr{L}^2(R_+,\langle M\rangle)$ и сильным ядром Вольтерры $L\in\mathscr{L}^2(R_+\times R_+,\langle M\rangle)$. Представление (16), (17) *единственно. В этом случае существует мера P_0 на $\mathfrak{F}_\infty^Y$ такая, что $P_0\sim P$, процессы (Y, P_0) и (M, P) имеют одно и то же распределение и*

$$\frac{dP}{dP_0}=\exp\{\int_{[0,\infty)}\bar{\gamma}_s dY_s-\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)}\bar{\gamma}_s^2 d\langle M\rangle_s\},$$

где

$$\bar{\gamma}_s=\begin{cases}\alpha(s)+\int_{[0,s]}K(s,u)dY_u-\int_{[0,s]}K(s,u)\alpha(u)d\langle M\rangle_u, & \bar{s}\in S\\ \mu_n/\sigma_n, & s=s_n\in S,\end{cases}$$

и K — сильное ядро Вольтерры, резольвентное к L в $\mathscr{L}^2(R_+\times R_+,\langle M\rangle)$.

Все интересные свойства гауссовского процесса Y, эквивалентного гауссовскому мартингалу, можно вывести из представления (16), (17), которое мы называем каноническим представлением. В частности, класс всех процессов Y описывается (функциональными) параметрами $\langle M\rangle$, α, L. Это приводит к определенным удобствам при моделировании таких процессов и решении статистических и оптимизационных задач. Приведем еще два полезных следствия.

Следствие 1. *Семейство σ-алгебр $\mathfrak{F}^Y$ порождается гауссовским мартингалом M:*

$$(18)\qquad \mathfrak{F}_t^Y=\mathfrak{F}_t^M,\ t\in R_+.$$

В частности, отсюда следует, что семейство $\mathfrak{F}^Y$ непрерывно справа. Хотя сам процесс Y не является процессом с независимыми приращениями, соответствующий ему поток σ-алгебр порождается таким процессом.

Обозначим

$$q(ds, dx) = \sum_{s_n \in S} \varepsilon_{s_n}(ds)[\varepsilon_{\Delta M_{s_n}}(dx) - (2\pi\sigma_n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n}\right)dx] \tag{19}$$

— компенсированную меру скачков гауссовского мартингала $(M, \mathfrak{F}^Y, \mathrm{P})$ ($\varepsilon_z(.)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке z). Согласно [1], имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. *Каждый локальной мартингал* $(N, \mathfrak{F}^Y, \mathrm{P})$ *имеет интегральное представление*

$$N_t = \int_{(0,t]} \lambda_s dM_s^c + \int_{[0,t]\times(R\setminus\{0\})} \varphi(s, x) q(ds, dx), \tag{20}$$

с некоторыми $\mathfrak{F}^Y$-предсказуемым процессом λ *и $\mathfrak{F}^Y$-предсказуемой случайной функцией* $\varphi(s, x)$, *удовлетворяющими соответствующим условиям интегрируемости* (подробнее см. [1]).

Из (19) следует, что $N_t = N_t^c + \Sigma_{s_n \in S} \Delta N_{s_n}$, т. е. (локальные) мартингалы относительно потока $\mathfrak{F}^Y$ могут иметь скачки лишь в (неслучайные) моменты $s_n \in S$ (ср. с (1)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Григелионис. О мартингальной характеризации случайных процессов с независимыми приращениями. *Литовский мат. сб.*, **17**, 1977, 75—86.
2. Р. Ш. Липцер. Гауссовские мартингалы и обобщение фильтра Калмана-Бьюси. *Теория вероятн. примен.*, **20**, 1975, № 2, 292—308.
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва, 1974.
4. Ю. А. Розанов. Гауссовские бесконечномерные распределения. *Труды МИАН СССР*, **108**, 1968.
5. А. В. Скороход. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Москва, 1975.
6. Д. И. Хаджиев. О структуре гауссовских мартингалов. *Сердика*, **4**, 1978, 224—231.
7. S. D. Chatterji, V. Mandrekar. Equivalence and singularity of Gaussian measures and applications. — In: Probabilistic Analysis and Related Topics (Ed. A. T. Bharucha-Ried). Vol. 1. New York — San Francisco — London, 1978, 169—197.
8. M. Hitsuda. Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process. *Osaka J. Math.*, **5**, 1968, 299—312.
9. M. Hitsuda, H. Watanabe. On a causal and causally invertible representation of equivalent Gaussian processes. — In: Multivar. Analysis. Vol. 4, Amsterdam — New York — Oxford, 1977, 247—265.
10. G. Kallianpur, H. Oodaira. Non-anticipative representations of equivalent Gaussian processes. *Ann. Probab.*, **1**, 1973, 104—122.
11. L. D. Minkova, D. I. Hadziev. Representation of Gaussian processes equivalent to Gaussian martingale. — In: 12th EMS, Varna, Bulgaria, 3—7 September 1979.
12. L. D. Minkova, D. I. Hadžiev. Representation of Gaussian processes equivalent to a Gaussian martingale. *Stochastics*, **3**, 1980, 251—266.

Пловдивский университет
4000 Пловдив
Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 29. 6. 1982