PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

# ИНВАРИАНТЫ УЛЬМА-КАПЛАНСКОГО ГРУППЫ НОРМИРОВАННЫХ ЕДИНИЦ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР АБЕЛЕВЫХ $p$-ГРУПП НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ, В КОТОРОМ $p$ ОБРАТИМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

НАКО А. НАЧЕВ

Пусть $G$ — абелева $p$-группа, $L$ — коммутативное кольцо с единицей, в котором простое число $p$ обратимо, $q$ — любое простое число (не требуется $p \neq q$) и $S_q(LG)=S_q$ — силовская $q$-подгруппа группы нормированных единиц группового кольца $LG$. Для любого натурального числа $n$ обозначим через $Z(\xi_n)$ фактор-кольцо кольца многочленов $Z[x]$ по циклотомичному многочлену $\Phi_{p^n}(x)=x^{p^{n-1}(p-1)}+\ldots+x^{p^{n-1}}+1$. Иными словами, кольцо $Z(\xi_n)$ получается из кольца целых чисел, присоединяя элемент $\xi_n$, для которого $\Phi_{p^n}(\varepsilon_n)=0$. Естественным образом получается кольцевой гомоморфизм $Z(\xi_n)\to Z(\xi_{n+1})$, если подобрать $\xi_{n+1}$ так, что $\xi_{n+1}^p=\xi_n$ ($n=1, 2, \ldots$). Таким образом, возникает возрастающая цепочка

$$Z \to Z(\xi_1) \to Z(\xi_2) \to \ldots \to Z(\xi_n) \to \ldots,$$

объединение которой обозначим через $\overline{Z}$.

Предположим, что, если $G$ имеет показатель $p^n$ (бесконечный показатель), то существует кольцевой гомоморфизм $Z(\xi_n)\to L(\overline{Z}\to L)$. В такой ситуации мы будем исследовать группу $S_q(LG)$. Основной результат этой работы выглядит так.

Пусть $f_\alpha(G)$ — $\alpha$-й инвариант Ульма — Капланского группы $G$ [5, с. 182], где $\alpha$ — любое порядковое число, $L_q$ — силовская $q$-подгруппа мультипликативной группы кольца $L$, $S_q^*$ — максимальная делимая подгруппа группы $S_q$, и максимальная делимая подгруппа $L_q^*$ группы $L_q$ разлагается в прямое произведение квазициклических групп $Z(q^\infty)$ типа $q^\infty$, мощность множества которого равняется $\nu$, т. е.

$$L_q^* \cong \prod_{\nu} Z(q^\infty).$$

Тогда, если $|G|$ — мощность группы $G$, то

$$f_\alpha(S_q)=(|G|-1)f_\alpha(L_q)$$

и

$$S_q^* \cong \prod_{(|G|-1)\nu} Z(q^\infty).$$

Пусть $LG$ — групповое кольцо абелевой $p$-группы $G$ над коммутативным кольцом $L$ с единицей, в котором простое число $p$ обратимо, и $S_q(LG)$ — силовская $q$-подгруппа группы нормированных единиц кольца $LG$ ($q$ — простое число). Описание группы $S_p(LG)$, когда $L$ и $G$ счетны, дано в [1]. В настоящей работе вычисляются инварианты Ульма—Капланского группы $S_q(LG)$, когда $L$ и $G$ имеют любые мощности при условии, что существует кольцевой гомоморфизм $Z(\xi_n)\to L$ (соответственно, $\overline{Z}\to L$), где $p^n$ — показатель группы $G$ (соответственно, бесконечный показатель).

*ПЛИСКА Български математически студии. Том 8, 1986, с. 21—33.*

Замечание. Из существования кольцевого гомоморфизма $Z(\xi_n)\to L$ (соответственно, $\bar{Z}\to L$) не следует его единственность. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь ввиду некоторый фиксированный такой гомоморфизм.

В работе используются следующие обозначения:

$|A|$ — мощность множества $A$;

$\operatorname{Im}\varphi$ — образ отображения $\varphi$;

$\langle\cdots\rangle$ — подгруппа, порожденная ...;

$\operatorname{supp} x$ — носитель элемента $x$ группового кольца $LG$ ([2, с. 5]);

$O_x=\langle\operatorname{supp} x\rangle$ — опорная подгруппа носителя элемента $x$;

$1_A$ — тождественное отображение $A$ на себя;

$L[q]=\{a\in L \mid a^q=1\}$;

$E$ — образ группы $\langle\xi_1, \xi_2, \dots\rangle$ при гомоморфизме $Z(\xi_n)\to L$, или $\bar{Z}\to L$;

$\varepsilon_n$ — образ элемента $\xi_n$ при гомоморфизме $Z(\xi_n)\to L$ или $\bar{Z}\to L$.

Очевидно кольцо $Z(\xi_n)$ (соответственно, $\bar{Z}$) содержит коциклическую группу с кообразующим элементом $\xi_1$. Образ этой группы при гомоморфизме $Z(\xi_n)\to L$ (соответственно, $\bar{Z}\to L$) мы уже обозначили через $E$. Нетрудно видеть, что эта группа изоморфно отображается на $E$. Поэтому, положив $\operatorname{Hom}(G, E)=\mathscr{X}$, мы видим, что $\mathscr{X}$ группа характеров группы $G$, которой будем записывать аддитивно, а через $g^\chi$ — образ элемента $g\in G$ через $\chi\in\mathscr{X}$. Если $H$ — подгруппа группы $G$, то положим

$$\mathscr{X}_H=\{\chi\in\mathscr{X} \mid \chi|_H=0\}, \tag{1}$$

где $\chi|_H$ — ограничение $\chi$ на подгруппе $H$. Очевидно $\mathscr{X}_H$ — подгруппа группы $\mathscr{X}$. Из гомологической алгебры хорошо известно, что $\mathscr{X}/\mathscr{X}_H\cong\operatorname{Hom}(H, E)$, а если $H$ — конечная подгруппа группы $G$, то $\operatorname{Hom}(H, E)\cong H$ ([6, с. 218, теорема 13.2.1]). Поэтому для конечных подгрупп $H$ следует

$$|\mathscr{X}/\mathscr{X}_H|=|H|. \tag{2}$$

Имеет место следующее утверждение:

(3) Лемма. *Если $H_1$, $H_2$ — подгруппы группы $G$, причем $H_1\subseteq H_2$, то $\mathscr{X}_{H_2}\subseteq\mathscr{X}_{H_1}$.*

Доказательство очевидно.

(4) Лемма. *Если $H_1$, $H_2$ — подгруппы группы $G$, то $\mathscr{X}_{H_1\cap H_2}=\mathscr{X}_{H_1}+\mathscr{X}_{H_2}$.*

Доказательство. Включение $\mathscr{X}_{H_1}+\mathscr{X}_{H_2}\leq\chi_{H_1\cap H_2}$ следует из леммы (3). Пусть теперь $\chi\in\mathscr{X}_{H_1\cap H_2}$. Определим отображение $\chi' : H_1H_2\to E$, полагая

$$(h_1h_2)^{\chi'}=h_1^\chi \tag{5}$$

для любых $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$. Отображение $\chi'$ определено корректно, так как если $h_1'h_2'=h_1h_2$, где $h_1'\in H_1$, $h_2'\in H_2$, то $h_1^{-1}h_1'=h_2h_2'^{-1}=h\in H_1\cap H_2$, откуда $h_1'=h_1h$ и

$$(h_1'h_2')^{\chi'}=h_1'^\chi=(h_1h)^\chi=h_1^\chi\cdot 1=h_1^\chi=(h_1h_2)^{\chi'}.$$

Нетрудно видеть, что $\chi'$ — гомоморфизм групп. Тогда из инъективности группы типа $p^\infty$ следует существование гомоморфизма $\chi_2 : G\to E$, такой, что

$$\chi_2|_{H_1H_2}=\chi'. \tag{6}$$

Докажем, что $\chi_2\in\mathscr{X}_{H_2}$. Действительно, если $h_2\in H_2$, то, используя формулы (6) и (5), получим

$$h_2^{\chi_2|_{H_2}} = h_2^{\chi_2} = h_2^{\chi_3|_{H_1H_2}} = (1 \, . \, h_2)^{\chi'} = 1.$$

Опять из этих формул обнаружим, что $\chi - \chi_2 \in \mathscr{X}_{H_1}$. В самом деле, если $h_1 \in H_1$, то

$$h_1^{(\chi-\chi_2)|_{H_1}} = h_1^{\chi-\chi_2} = h_1^{\chi} h_1^{-\chi_2} = h_1^{\chi}(h_1^{-1})^{\chi_2|_{H_1H_2}} = h_1^{\chi}(h_1^{-1} \, . \, 1)^{\chi'} = h_1^{\chi}(h_1^{-1})^{\chi} = 1.$$

Таким образом, $\chi \in \mathscr{X}_{H_1} + \mathscr{X}_{H_2}$, что и требовалось.

Более легко доказывается лемма, двойственная к лемме (4).

(7) Лемма. *Если $H_1, H_2$ — подгруппы группы $G$, то $\mathscr{X}_{H_1H_2} = \mathscr{X}_{H_1} \cap \mathscr{X}_{H_2}$.*

(8) Лемма. *Пусть $\mathscr{X}_g = \{\chi \in \mathscr{X} \mid g^{\chi} = 1\}$, где $g \in G$. Тогда $\mathscr{X}_g$ подгруппа группы $\mathscr{X}$, причем если $g \neq 1$, то $\mathscr{X}_g \neq \mathscr{X}$. Кроме того, $\bigcap_{\chi \in \mathscr{X}} \operatorname{Ker} \chi = 1$.*

Доказательство. Очевидно $\mathscr{X}_g$ — подгруппа группы $\mathscr{X}$. Пусть $1 \neq g \in G$. Если $p^n$ — порядок элемента $g$, то $n > 0$, ибо $g \neq 1$. Определим гомоморфизм $\langle g \rangle \to \langle \varepsilon_n \rangle$ при помощи отображения $g^k \longrightarrow \varepsilon_n^k$, где $\varepsilon_n$ — образ элемента $\xi_n$ при гомоморфизме $Z(\xi_n) \to L(\bar{Z} \to L)$. Как уже отмечалось, этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $\chi : G \to E$. Тогда $g^{\chi} = \varepsilon_n \neq 1$, поэтому $\chi \notin \mathscr{X}_g$, т. е. $\mathscr{X}_g \neq \mathscr{X}$. Таким образом, для каждого $g \neq 1$ существует $\chi \in \mathscr{X}$, такой, что $g \notin \operatorname{Ker} \chi$, т. е. $\bigcap_{\chi \in \mathscr{X}} \operatorname{Ker} \chi = 1$.

(9) Лемма. *Если $g \in G$ и $M$ — полная система представителей группы $\mathscr{X}$ по подгруппе $\mathscr{X}_g$, то множество*

$$g^M = \{g^{\chi} \mid \chi \in M\},$$

*является подгруппой группы $E$.*

Доказательство. Если $\chi_1, \chi_2 \in M$, то $g^{\chi_1}(g^{\chi_2})^{-1} = g^{\chi_1 - \chi_2}$. Однако $\chi_1 - \chi_2 \in \chi_3 + \mathscr{X}_g$ для некоторого $\chi_3 \in M$, т. е. $\chi_1 - \chi_2 = \chi_3 + \chi'$, где $\chi' \in \mathscr{X}_g$. Тогда $g^{\chi_1 - \chi_2} = g^{\chi_3 + \chi'} = g^{\chi_3} \in g^M$. Следовательно, $g^M$ — подгруппа группы $E$.

Далее будем использовать следующий очевидный факт: если $\chi \in \mathscr{X}$ и $T$ — полная система представителей конечной подгруппы $H$ группы $G$ по $\operatorname{Ker} \chi|_H$, то

$$\sum_{h \in H} h^{\chi} = \sum_{t \in T} |\operatorname{Ker} \chi|_H| \, t^{\chi}. \tag{10}$$

(11) Лемма. *Если $H$ — конечная подгруппа группы $G$, и $M$ — полная система представителей группы $\mathscr{X}$ по подгруппе $\mathscr{X}_H$, то для любого $\chi \in M$ имеет место*

$$\sum_{g \in H} g^{\chi} = \begin{cases} |H|, & \text{если } \chi = 0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq 0, \end{cases} \tag{12}$$

*а для любого $g \in H$ —*

$$\sum_{\chi \in M} g^{\chi} = \begin{cases} |M|, & \text{если } g = 1, \\ 0, & \text{если } g \neq 1. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\chi \in M$. Для $\chi = 0$ формула (12) очевидна. Если теперь $\chi \neq 0$, то $|H/\operatorname{Ker} \chi|_H| = p^m$, где $m > 0$. Выберем полную систему представителей $T$ подгруппы $H$ по $\operatorname{Ker} \chi|_H$. Тогда из формулы (10) вытекает

$$\sum_{g \in H} g^{\chi} = \sum_{t \in T} |\operatorname{Ker} \chi|_H| \, t^{\chi} = |\operatorname{Ker} \chi|_H| \sum_{i=0}^{p^m - 1} \varepsilon_m^i = 0.$$

Далее, если $g=1$, то формула (13) очевидна. Пусть $g\neq 1$. Заметим, что сумма $\Sigma_{\chi \in M} g^{\chi}$ не зависит от выбранной системы представителей $M$. В самом деле, если $M'$ — другая такая система, то для каждого $\chi' \in M'$ однозначно соответствует $\chi \in M$, такой, что $\chi'=\chi+\chi''$, где $\chi'' \in \mathscr{X}_H$. Тогда

$$\sum_{\chi' \in M'} g^{\chi'} = \sum_{\chi \in M} g^{\chi+\chi''} = \sum_{\chi \in M} g^{\chi} g^{\chi''} = \sum_{\chi \in M} g^{\chi}.$$

Пусть $M_1$ — полная система представителей группы $\mathscr{X}$ по подгруппе $\mathscr{X}_g$, а $M_2$ — полная система представителей $\mathscr{X}_g$ по $\mathscr{X}_H$. Тогда в качестве $M$ можно взять систему $M_1+M_2$, поскольку она является полной системой представителей $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$. Любой элемент $\chi \in M$ можно однозначно представить в виде $\chi_1+\chi_2$, где $\chi_1 \in M_1$, $\chi_2 \in M_2$. Ввиду леммы 9 множество $g^{M_1}$ является подгруппой группы $E$ порядка $p^k$, причем $k>0$, так как $g\neq 1$, и можно сослаться на лемму 8. Отсюда

$$\sum_{\chi \in M} g^{\chi} = \sum_{\chi_1 \in M_1} \sum_{\chi_2 \in M_2} g^{\chi_1+\chi_2} = \sum_{\chi_1 \in M_1} g^{\chi_1} \sum_{\chi_2 \in M_2} g^{\chi_2} = |M_2| \sum_{\chi_1 \in M_1} g^{\chi_1} = |M_2| \sum_{i=0}^{p^k-1} \varepsilon_k^i = 0.$$

Этим лемма доказана.

Далее определим множество $F(L, G)=F$ всех функций $f:\mathscr{X}\to L$, для каждой из которых существует конечная подгруппа $H$ группы $G$ со следующим свойством:

(*) если $\chi_1|_H=\chi_2|_H$, то $f(\chi_1)=f(\chi_2)$,

для всех $\chi_1$, $\chi_2 \in \mathscr{X}$. Будем говорить, что $f$ ассоциирована с подгруппой $H$ и используем запись $f\sim H$.

Определим операции сложение и умножение в $F$ и умножение функций из $F$ с элементами кольца $L$ следующим образом:

$$(f_1+f_2)(\chi)=f_1(\chi)+f_2(\chi), \quad (f_1 f_2)(\chi)=f_1(\chi)f_2(\chi), \quad (af)(\chi)=af(\chi),$$

где $f_1$, $f_2$, $f \in F$, $\chi \in \mathscr{X}$, $a \in L$. Нетрудно видеть, что если $f_1\sim H_1$, $f_2\sim H_2$, то $f_1+f_2 \sim H_1H_2$, $f_1 f_2 \sim H_1H_2$ и $af_1\sim H_1$, т. е. $f_1+f_2$, $f_1f_2$, $af_1 \in F$. Далее легко проверить, что $F$ является $L$-алгеброй.

(14) Лемма. *Если $f\sim H_1$ и $f\sim H_2$, то $f\sim H_1 \cap H_2$.*

Доказательство. Пусть $\chi_1|_{H_1\cap H_2}=\chi_2|_{H_1\cap H_2}$, где $\chi_1$, $\chi_2 \in \mathscr{X}$. Тогда $(\chi_1-\chi_2)|_{H_1\cap H_2}=0$. Отсюда и из леммы (4) вытекает $\chi_1-\chi_2 \in \mathscr{X}_{H_1\cap H_2}=\mathscr{X}_{H_1}+\mathscr{X}_{H_2}$. Следовательно, $\chi_1-\chi_2=\chi_1'+\chi_2'$, где $\chi_1' \in \mathscr{X}_{H_1}$, $\chi_2' \in \mathscr{X}_{H_2}$, откуда $\chi_1-\chi_1'=\chi_2+\chi_2'=\chi$. Ограничив $\chi$ на $H_1$ и $H_2$, соответственно, мы получим

$$\chi|_{H_1}=(\chi_1-\chi_1')|_{H_1}=\chi_1|_{H_1}-\chi_1'|_{H_1}=\chi_1|_{H_1},$$

$$\chi|_{H_2}=(\chi_2+\chi_2')|_{H_2}=\chi_2|_{H_2}+\chi_2'|_{H_2}=\chi_2|_{H_2}.$$

Отсюда и из условия леммы вытекает $f(\chi)=f(\chi_1)$ и $f(\chi)=f(\chi_2)$, что дает $f(\chi_1)=f(\chi_2)$. Следовательно, $f\sim H_1 \cap H_2$.

(15) Лемма. *Множество $\mathscr{M}$ всех подгрупп группы $G$, ассоциированных с функцией $f \in F$, образует фильтр в структуре конечных подгрупп группы $G$, в котором есть наименьший элемент. Его будем называть опорной подгруппой функции $f$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из леммы (3) и леммы (14). Существование наименьшего элемента следует из условия минимальности, которое выполняется в структуре конечных подгрупп любой группы.

Определим отображение $\varphi: LG \to F$ следующим образом: если $x=\Sigma_{g \in H} x_g g \in LG$, где $H \supseteq \langle \operatorname{supp} x \rangle$ и $\chi \in \mathscr{X}$, то

$$(x\varphi)(\chi)=\sum_{g \in H} x_g g^{\chi}. \tag{16}$$

Отображение $\varphi$ корректно определено. В самом деле, если $\chi_1|_H=\chi_2|_H$, где $\chi_1, \chi_2 \in \mathscr{X}$, то

$$(x\varphi)(\chi_1)=\sum_{g \in H} x_g g^{\chi_1|H}=\sum_{g \in H} x_g g^{\chi_1|H}=\sum_{g \in H} x_g g^{\chi_2|H}=\sum_{g \in H} x_g g^{\chi_2}=(x\varphi)(\chi_2).$$

Таким образом, $x\varphi \sim H$ и, значит, $x\varphi \in F$.

Подгруппа $H=\langle \operatorname{supp} x \rangle$, где $x \in LG$, назовем опорной подгруппой элемента $x$. Ее будем обозначать $O_x$. Такое обозначение будем использовать и для функции из $F$.

(17) Лемма. *Отображение $\varphi: LG \to F$ сохраняет опорные подгруппы, т. е. $O_x=O_{x\varphi}$ для всех $x \in LG$.*

Доказательство. Мы уже доказали, что $x\varphi \sim O_x$. Поэтому $O_{x\varphi} \subseteq O_x$. Допустим, что $O_{x\varphi} \neq O_x$. Тогда найдется элемент $g \in O_x \setminus O_{x\varphi}$, такой, что $x_g \neq 0$. Полагая $O_{x\varphi}=H'$ и $O_x=H$, выберем полные системы представителей смежных классов $M_1$ и $M_2$ соответственно группы $\mathscr{X}$ по подгруппе $\mathscr{X}_{H'}$ и группы $\mathscr{X}_{H'}$ по $\mathscr{X}_H$. Тогда система

$$M=M_1+M_2 \tag{18}$$

является полной системой представителей группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$. Используя формулы (16), (13) и (2), получаем

$$\sum_{\chi \in M}(x\varphi)(\chi)g^{-\chi}=\sum_{\chi \in M}\sum_{h \in H} x_h h^{\chi} g^{-\chi}=\sum_{h \in H} x_h \sum_{\chi \in M}(hg^{-1})^{\chi}=|M|\,x_g=|H|\,x_g.$$

Вычислим эту сумму еще одним способом. С этой целью выберем любой характер $\chi \in M$ и представим его в виде $\chi=\chi_1+\chi_2$, где $\chi_1 \in M_1$, $\chi_2 \in M_2$ согласно формуле (18). Тогда имеем $(\chi_1+\chi_2)|_{H'}=\chi_1|_{H'}+\chi_2|_{H'}=\chi_1|_{H'}$ и так как $x\varphi \sim H'$, то $(x\varphi)(\chi_1+\chi_2)=(x\varphi)(\chi_1)$. Кроме того, $|M_2|=p^k>1$, поскольку из $H' \subset H$ вытекает $\mathscr{X}_H \subset \mathscr{X}_{H'}$ и из $H' \neq H$ вытекает $\mathscr{X}_H \neq \mathscr{X}_{H'}$. Отсюда получаем

$$\sum_{\chi \in M}(x\varphi)(\chi)g^{-\chi}=\sum_{\chi_1 \in M_1}\sum_{\chi_2 \in M_2}(x\varphi)(\chi_1+\chi_2)g^{-\chi_1-\chi_2}=\sum_{\chi_1 \in M_1}\sum_{\chi_2 \in M_2}(x\varphi)(\chi_1)g^{-\chi_1}g^{-\chi_2}$$
$$=\sum_{\chi_1 \in M_1}(x\varphi)(\chi_1)g^{-\chi_1}\sum_{\chi_2 \in M_2}g^{-\chi_2}=0.$$

Следовательно, $|H|\,x_g=0$. Так как $|H|=p^s$ и $p$ обратимо в $L$, то $x_g=0$, что противоречит выбору $g$.

(19) Теорема. *Отображение $\varphi: LG \to F$ является изоморфизмом $L$-алгебр.*

Доказательство. Если $x, y \in LG$, $H_1 \supseteq \langle \operatorname{supp} x \rangle$, $H_2 \supseteq \langle \operatorname{supp} y \rangle$, $H_1H_2=H$ и $\chi \in \mathscr{X}$, то

$$((x+y)\varphi)(\chi)=\sum_{g \in H}(x_g+y_g)g^{\chi}=\sum_{g \in H_1} x_g g^{\chi}+\sum_{g \in H_2} y_g g^{\chi}$$
$$=(x\varphi)(\chi)+(y\varphi)(\chi)=(x\varphi+y\varphi)(\chi).$$

откуда следует $(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi$. Аналогично доказывается, что $(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$ и $(ax)\varphi = a(x\varphi)$, где $a \in L$. Таким образом $\varphi$ — гомоморфизм $L$-алгебр.

Построим теперь отображение $\psi: F(L, G) \to LG$ следующим образом: если $f \in F(L, G)$ и $f \sim H$, то

$$(20)\qquad (f\psi)_g = \begin{cases} \frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f(\chi) g^{-\chi}, & \text{если } g \in H, \\ 0, & \text{если } g \in G \setminus H, \end{cases}$$

где $M$ — полная система представителей группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$. Очевидно для фиксированной подгруппы $H$, ассоциированной с $f$, елемент $f\psi$ не зависит от выбора системы $M$, так как любая такая система имеет одну и ту же мощность, а значения $f(\chi)$ и $g^{-\chi}$ зависят только от класса смежности с представителем $\chi$ по $\mathscr{X}_H$. Покажем, что этот элемент не зависит и от выбора подгруппы $H$, ассоциированной с функцией $f$. В самом деле, пусть $H_0$ — опорная подгруппа функции $f$. Выберем полные системы представителей $M_0$ и $M_0'$ соответственно группам $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_{H_0}$ и $\mathscr{X}_{H_0}$ по $\mathscr{X}_H$. Это возможно, поскольку $H_0 \subseteq H$ и, значит, $\mathscr{X}_H \subseteq \mathscr{X}_{H_0} \subseteq \mathscr{X}$. Тогда $M = M_0 + M_0'$ является полной системой представителей группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$. Поэтому любой характер $\chi \in M$ однозначно можно представить в виде $\chi = \chi_0 + \chi_0'$, где $\chi_0 \in M_0$, $\chi_0' \in M_0'$. Отсюда вытекает

$$(21)\qquad \frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f(\chi) g^{-\chi} = \frac{1}{|M|} \sum_{\chi_0 \in M_0} f(\chi_0) g^{-\chi_0} \sum_{\chi_0' \in M_0'} g^{-\chi_0'}.$$

Если теперь $g \in H_0$, то $\Sigma_{(\chi_0' \in M_0')} g^{-\chi_0'} = |M_0'|$, и так как $|M| = |M_0| . |M_0'|$, из формулы (21) следует

$$\frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f(\chi) g^{-\chi} = \frac{1}{|M_0|} \sum_{\chi_0 \in M_0} f(\chi_0) g^{-\chi_0}.$$

Если же $g \in H \setminus H_0$, то из леммы (11) (формула (13)) следует

$$\Sigma_{(\chi_0' \in M_0')} g^{-\chi_0'} = 0, \text{ откуда } (1/|M|) \Sigma_{(\chi \in M)} f(\chi) g^{-\chi} = 0.$$

Наконец, если $g \in G \setminus H$, то рассматриваемая сумма заведомо равняется нулю. Таким образом формула (20) корректно определена.

Покажем, что $\psi$ — гомоморфизм $L$-алгебр. Пусть $f_1, f_2 \in F$ и $H$ — подгруппа группы $G$, ассоцирована с $f_1, f_2, f_1+f_2, f_1 f_2$. Будем использовать, что если $x = \Sigma_{h \in H} x_h h$, $y = \Sigma_{h \in H} y_h h$ — элементы из $LG$, то коеффициент

$$(22)\qquad (xy)_g = \sum_{h \in H} x_{gh^{-1}} y_h.$$

Докажем, что $(f_1 f_2)\psi = (f_1\psi)(f_2\psi)$. Действительно, выбирая полную систему представителей $M$ группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$ и используя формулы (22), (20), (12) и (2) для любого $g \in H$ будем иметь

$$((f_1\psi)(f_2\psi))_g = \sum_{h \in H} (f_1\psi)_{gh^{-1}} (f_2\psi)_h = \sum_{h \in H} \frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f_1(\chi) (gh^{-1})^{-\chi} \frac{1}{|M|} \sum_{\chi' \in M} f_2(\chi') h^{-\chi'}$$

$$=\frac{1}{|M|^2}\sum_{h\in H}\sum_{\chi\in M}\sum_{\chi'\in M} f_1(\chi)f_2(\chi')(gh^{-1})^{-\chi}h^{-\chi'}$$

$$=\frac{1}{|M|^2}\sum_{\chi\in M}\sum_{\chi'\in M} f_1(\chi)f_2(\chi')g^{-\chi}\sum_{h\in H}h^{\chi-\chi'}=\frac{|M|}{|M|^2}\sum_{\chi\in M}f_1(\chi)f_2(\chi)g^{-\chi}$$

$$=\frac{1}{|M|}\sum_{\chi\in M}(f_1f_2)(\chi)g^{-\chi}=((f_1f_2)\psi)_g.$$

Если $g\in G\setminus H$, то для $h\in H$ имеет место $gh^{-1}\in G\setminus H$ и по формуле (20) имеем $(f_1\psi)_{gh^{-1}}=0$, $((f_1f_2)\psi)_g=0$, откуда согласно формуле (22) опять получаем $((f_1\psi)(f_2\psi))_g=((f_1f_2)\psi)_g$. Таким образом $(f_1f_2)\psi=(f_1\psi)(f_2\psi)$. Равенства $(f_1+f_2)\psi=f_1\psi+f_2\psi$ и $(af)\psi=a(f\psi)$, где $a\in L$, доказываются тривиально.

Далее докажем, что

$$\varphi\psi=1_{LG}. \tag{23}$$

В самом деле, пусть $x\in LG$ и $H$ — опорная подгруппа элемента $x$. Согласно лемме (9), $H$ — опорная подгруппа функции $x\varphi$. Тогда, если $M$ — полная система представителей группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$, то из формулы (20), (16) и (13) следует

$$(x(\varphi\psi))_g=((x\varphi)\psi)_g=\frac{1}{|M|}\sum_{\chi\in M}(x\varphi)(\chi)g^{-\chi}=\frac{1}{|M|}\sum_{\chi\in M}\sum_{h\in H}x_hh^{\chi}g^{-\chi}$$

$$=\frac{1}{|M|}\sum_{h\in H}x_h\sum_{\chi\in M}(hg^{-1})^{\chi}=\frac{|M|}{|M|}x_g=x_g$$

для любого $g\in H$. Если $g\in G\setminus H$, то опять $x_g=0=(x(\varphi\psi))_g$, откуда $x(\varphi\psi)=x$ Это доказывает (23).

Докажем также, что

$$\psi\varphi=1_F. \tag{24}$$

Действительно, пусть $f\in F$, $f\sim H$ и $\chi\in\mathscr{X}$. Из формулы (20) видно, что $H\supseteq O_{f\psi}$. Тогда, выбирая полную систему представителей $M$ группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$ и используя формулы (16), (20) и (13), получаем

$$(f(\psi\varphi))(\chi)=((f\psi)\varphi)(\chi)=\sum_{g\in H}(f\psi)_g g^{\chi}=\sum_{g\in H}\frac{1}{|M|}\sum_{\chi'\in M}f(\chi')g^{-\chi'}g^{\chi}$$

$$=\frac{1}{|M|}\sum_{\chi'\in M}f(\chi')\sum_{g\in H}g^{\chi-\chi'}=\frac{|M|}{|M|}f(\chi)=f(\chi).$$

Отсюда $f(\psi\varphi)=f$, что дает (24). Формулы (23) и (24) показывают, что $\varphi$ и $\psi$ — взаимно обратные изоморфизмы, что и требовалось доказать.

Отметим, что алгебру $F(L, G)$ можно рассматривать и как функтор. Пусть $L$ — фиксированное коммутативное кольцо с единицей, в котором простое число $p$ обратимо. Кольцу $L$ сопоставим наибольшее натуральное число $n$, для которого существует кольцевой гомоморфизм $Z(\xi_n)\to L$, или символ $\infty$, если существует кольцевой гомоморфизм $\bar{Z}\to L$. Обозначим тогда через $\mathfrak{a}$ категорию всех абелевых $p$-групп, показатель которых не превышает число $p^n$ в первом случае, или категорию всех абелевых $p$-групп во втором случае. Пусть $\mathscr{A}$ обозначает категорию $L$-алгебр. Каждой группе $G\in\mathfrak{a}$ можно сопоставить $L$-алгебру $F(L, G)\in\mathscr{A}$. Таким образом имеем отображение объектов категории $\mathfrak{a}$ в категорию $\mathscr{A}$. Если $\mu: G\to G'$ — гомоморфизм групп, где $G, G' \in \mathfrak{a}$, то можно получить $L$-гомоморфизм $F(\mu): F(L, G) \to F(L, G')$ следующим образом: гомоморфизм $\mu$ индуцирует гомоморфизм $\mu^*: \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, поскольку функтор Hom контравариантен по первому аргументу [4, с. 38]. Тогда положим

(25) $$fF(\mu) = f\mu^*,$$

для всех $f \in F(L, G)$. Очевидно $f\mu^*$ отображает $\mathcal{X}'$ в $L$ и нетрудно видеть, что, если $f \sim H$, то $f\mu^* \sim H\mu$, так что $f\mu^* \in F(L, G')$. Стандартным образом. доказываются формулы

$$(f_1+f_2)F(\mu) = f_1F(\mu) + f_2F(\mu), \quad (f_1f_2)F(\mu) = (f_1F(\mu))(f_2F(\mu)) \text{ и } (af)F(\mu) = a(fF(\mu))$$

где $f_1, f_2 \in F(L, G)$ и $a \in L$, что означает гомоморфность отображения $F(\mu)$ Далее доказывается, что $F(\mu\mu') = F(\mu)F(\mu')$ и $F(1_G) = 1_{F(L, G)}$, где $\mu: G \to G'$ и $\mu': G' \to G''$ — групповые гомоморфизмы. Таким образом $F$ — ковариантный функтор.

Напомним, что алгебру $LG$ тоже можно рассматривать как функтор.

(26) Теорема. *Гомоморфизм* $\varphi: LG \to F$ *естествен.*

Доказательство. Надо доказать коммутативность следующей диаграммы [3, с. 16]

(27) $$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "\varphi(G)"] \arrow[d, "\Phi(\mu)"'] & F(L, G) \arrow[d, "F(\mu)"] \\ LG' \arrow[r, "\varphi(G')"] & F(L, G'), \end{tikzcd}$$

где $\mu: G \to G'$ — гомоморфизм групп, а $\Phi(\mu)$ определяется формулой

(28) $$x\Phi(\mu) = \sum_{g \in H} x_g g^{\mu},$$

где $x = \Sigma_{(g \in H)} x_g g \in LG$, а $H$ — конечная подгруппа группы $G$, содержащей опорную подгруппу элемента $x$. Действительно, если $x \in LG$ и $\chi' \in \mathcal{X}'$, то, используя формулы (28), (16) и (25), получаем

$$(x(\Phi(\mu)\varphi(G')))(\chi') = (((x\Phi(\mu))\varphi(G'))(\chi') = ((\sum_{g \in H} x_g g^{\mu})\varphi(G'))(\chi')$$

$$= \sum_{g \in H} x_g g^{\mu\chi'} = (x\varphi(G))(\mu\chi') = (x\varphi(G)\mu^*)(\chi') = (((x\varphi(G))F(\mu))(\chi') = (x(\varphi(G)F(\mu)))(\chi').$$

Отсюда $\Phi(\mu)\varphi(G') = \varphi(G)F(\mu)$, что доказывает коммутативность диаграммы (27). Следовательно, гомоморфизм $\varphi$ естествен.

(29) Лемма. *Если* $V(LG)$ *— группа нормированных единиц групповой алгебры* $LG$, *а* $U(F)$ *— мультипликативная группа алгебры* $F$ *и* $\varphi$ *— отображение, определенное формулой* (16), *то* $(V(LG))\varphi = V(F)$, *где*

$$V = V(F) = \{f \in U(F) \mid f(0) = 1\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in V(LG)$. Тогда

(30) $$x = \sum_{g \in H} x_g g, \quad \sum_{g \in H} x_g = 1.$$

Очевидно $x\varphi \in U(F)$. Кроме того, из (16) вытекает

$$(x\varphi)(0) = \sum_{g \in H} x_g g^0 = \sum_{g \in H} x_g = 1.$$

Следовательно, $x\varphi \in V(F)$.

Наоборот, пусть $f \in V(F)$. Покажем, что $f\psi \in V(LG)$. Действительно, из формул (20), (12), (2) и определения $V(F)$ получается

$$\sum_{g \in H} (f\psi)_g = \sum_{g \in H} \frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f(\chi) g^{-\chi} = \frac{1}{|M|} \sum_{\chi \in M} f(\chi) \sum_{g \in H} g^{-\chi} = \frac{|H|}{|H|} f(0) = 1.$$

Отсюда следует, что $f\psi$ — нормированный элемент алгебры $LG$. Кроме того, он обратим, так как $f$ — обратима и $\psi$ — изоморфизм. Поэтому $f\psi \in V(LG)$. Ввиду соотношения $\psi\varphi = 1_F$ (см. формулу (24)), следует $(f\psi)\varphi = f$, что доказывает лемму.

Пусть $q$ — фиксированное простое число. Если обозначим через $V_q(LG) = S(LG)$ и $V_q(F) = S(F) = S$ силовские $q$-подгруппы соответственно групп $V(LG)$ и $V(F)$, то из предыдущей леммы следует, что $(S(LG))\varphi = S$. Поскольку $\varphi$ — изоморфизм, то инварианты Ульма — Капланского группы $S(LG)$ совпадают с соответствующими инвариантами группы $S$. Этим результатом воспользуемся в дальнейшем.

(31) Лемма. *Для любого порядкового числа* $\alpha$ *имеет место* $F^{q^\alpha} = \Phi_\alpha$, *где*

$$\Phi_\alpha = \{ f \in F \mid f(\chi) \in L^{q^\alpha} \text{ для всех } \chi \in \mathscr{X} \}.$$

Доказательство. Для $\alpha = 0$ лемма очевидна. Допустим, что лемма верна для всех $\beta < \alpha$. Легко видеть, что для предельного порядкового числа $\alpha$ имеет место $\Phi_\alpha = \bigcap_{(\beta<\alpha)} \Phi_\beta$. Поэтому

$$F^{q^\alpha} = \bigcap_{\beta<\alpha} F^{q^\beta} = \bigcap_{\beta<\alpha} \Phi_\beta = \Phi_\alpha.$$

Допустим теперь, что $\alpha - 1$ существует. Тогда, если $f \in F^{q^\alpha}$, то $f \in (F^{q^{\alpha-1}})^q = (\Phi_{\alpha-1})^q$. Следовательно, $f = f_1^q$, где $f_1 \in \Phi_{\alpha-1}$. Поэтому для всех $\chi \in \mathscr{X}$ будем иметь

$$f(\chi) = f_1^q(\chi) = (f_1(\chi))^q \in (L^{q^{\alpha-1}})^q = L^{q^\alpha}.$$

Обратно, пусть $f \in \Phi_\alpha$. Тогда $f(\chi) \in L^{q^\alpha} = (L^{q^{\alpha-1}})^q$. Значит для всякого $\chi \in \mathscr{X}$ существует $a_\chi \in L^{q^{\alpha-1}}$, такое, что $f(\chi) = (a_\chi)^q$. При этом значения элементов $a_\chi$ можно выбирать так, что если $\chi_1|_H = \chi_2|_H$, то $a_{\chi_1} = a_{\chi_2}$ для всех $\chi_1, \chi_2 \in \mathscr{X}$, где $H$ — опорная подгруппа функции $f$. Тогда, положив $f_1(\chi) = a_\chi$ для любого $\chi \in \mathscr{X}$, получим функцию $f_1 \sim H$, для которой справедливо соотношение $f_1 \in \Phi_{\alpha-1} = F^{q^{\alpha-1}}$. Кроме того, $f_1^q(\chi) = (f_1(\chi))^q = a_\chi^q = f(\chi)$, т. е $f_1^q = f$, откуда $\Phi_\alpha \subseteq F^{q^\alpha}$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует

(32) $$S^{q^\alpha} = \{ f \in V \mid f(\chi) \in L_q^{q^\alpha} \text{ для всех } \chi \in \mathscr{X} \},$$

где $L_q$ — силовская $g$-подгруппа мультипликативной группы кольца $L$.

(33) Лемма. *Для нижнего слоя* $S[q]$ *группы* $S$ *имеет место*

$$S[q] = \{ f \in V \mid f(\chi) \in L_q[q] \text{ для всех } \chi \in \mathscr{X} \}.$$

Доказательство. Если $f \in S[q]$, то $f \in V$ и $f^q = 1$, где $1(\chi) = 1$ для всех $\chi \in \mathscr{X}$ (единичный элемент алгебры $F$). Тогда $(f(\chi))^q = f^q(\chi) = 1(\chi) = 1$, т. е. $f(\chi) \in L_q[q]$.

Обратно, если $f \in V$ и $f(\chi) \in L_q[q]$ для всех $\chi \in \mathscr{X}$, то $f^q(\chi) = (f(\chi))^q = 1 = 1(\chi)$ и значит $f^q = 1$, т. е. $f \in S[q]$.

Из этой леммы и формулы (32) следует

(34) $$S^{q^\alpha}[q] = \{f \in V \mid f(\chi) \in L_q^{q^\alpha}[q] \text{ для всех } \chi \in \mathscr{X}\}.$$

Из формулы (32) следует, что $S^{q^\alpha} = 1$ тогда и только тогда, когда $G = 1$, или $L_q^{q^\alpha} = 1$.

(35) Лемма. *Нееденичная группа $S^{q^\alpha}$ делима тогда и только тогда, когда $L_q^{q^\alpha}$ — делимая группа, т. е. $L_q^{q^\alpha} = L_q^{q^{\alpha+1}}$.*

Доказательство. Если $L_q^{q^\alpha} = L_q^{q^{\alpha+1}}$, то из (32) следует $S^{q^\alpha} = S^{q^{\alpha+1}}$, т. е. $S^{q^\alpha}$ — делимая группа.

Пусть теперь $S^{q^\alpha} = S^{q^{\alpha+1}}$ и $a \in L_q^{q^\alpha}$. Фиксируем неединичную конечную подгруппу $H$ группы $G$ и определим функцию $f: \mathscr{X} \to L$ формулой

(36) $$f(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi \in \mathscr{X}_H, \\ a, & \text{если } \chi \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_H. \end{cases}$$

Тогда $f \in S^{q^\alpha} = S^{q^{\alpha+1}}$ и из (32) видно, что $f(\chi) \in L_q^{q^{\alpha+1}}$ для любого $\chi \in \mathscr{X}$. Выбрав $\chi \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_H$, получим, что $a \in L_q^{q^{\alpha+1}}$. Следовательно, $L_q^{q^\alpha} = L_q^{q^{\alpha+1}}$.

(37) Следствие. *Если $S^*$ — максимальная делимая подгруппа группы $S$, то $S^* = \{f \in S \mid f(\chi) \in L_q^*$ для всех $\chi \in \mathscr{X}\}$.*

Доказательство. Поскольку $S^* = S^{q^\alpha} = S^{q^{\alpha+1}}$для некоторого порядкового числа $\alpha$, то из леммы (35) имеем $L_q^* = L_q^{q^\alpha} = L_q^{q^{\alpha+1}}$. Тогда, если $f \in S^*$, то из формулы (32) вытекает $f(\chi) \in L_q^*$ для всякого $\chi \in \mathscr{X}$. Обратное утверждение следует опять из леммы (35) и формулы (32).

(38) Лемма. Функции $f_1$ и $f_2$ группы $S^{q^\alpha}[q]$ принадлежат различным смежным классам по $S^{q^{\alpha+1}}[q]$ тогда и только тогда, когда существует $\chi \in \mathscr{X}$, такой, что $f_1(\chi)$ и $f_2(\chi)$ принадлежат различным смежным классам по $L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$.

Доказательство этой леммы следует из формулы (34).

(39) Предложение. *Если по крайней мере одно из кардинальных чисел $|G|$ и $f_\alpha(L_q)$ бесконечно, где $\alpha$ — порядковое число, то $|S^{q^\alpha}[q]/S^{q^{\alpha+1}}[q]| \leq \max(|G|, f_\alpha(L_q))$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех конечных подгрупп группы $G$, а $M$ — полная система представителей группы $L_q^{q^\alpha}[q]$ по подгруппе $L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$. Для любой конечной подгруппы $H$ группы $G$ определим множество $\mathscr{A}_H$ всех функций $f \in V$ с опорной подгруппой $H$ и область значений $M$. Обозначим через $N_H$ полную систему представителей группы $\mathscr{X}$ по $\mathscr{X}_H$, а через $M^{N_H}$ множество всех функций из $N_H$ в $M$. Ограничив каждую функцию $f \in \mathscr{A}_H$ на подмножестве $N_H$, мы получим отображение из $\mathscr{A}_H$ в $M^{N_H}$, причем инъективное, поскольку любая функция из $\mathscr{A}_H$ имеет опорную подгруппу $H$. Таким образом

(40) $$|\mathcal{A}_H| \leq |M^{N_H}|.$$

Кроме того, $|M^{N_H}| = |M|^{|N_H|}$, а из формулы (2) имеем $|N_H| = |\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_H| = |H|$. Отсюда и из формулы (40) вытекает

(41) $$|\mathcal{A}_H| \leq |M|^{|H|}.$$

Далее положим $\mathcal{B} = \bigcup_{H \in \mathfrak{G}} \mathcal{A}_H$. Легко понять, что это раздельное объединение, так как функции из разных $\mathcal{A}_H$ имеют различные опорные подгруппы. Поэтому

(42) $$|\mathcal{B}| = \sum_{H \in \mathfrak{G}} |\mathcal{A}_H|.$$

С другой стороны, множество $\mathcal{B}$ есть полная система представителей группы $S^{q^\alpha}[q]$ по подгруппе $S^{q^{\alpha+1}}[q]$ — это немедленно следует из леммы (38). Тогда $|S^{q^\alpha}[q]/S^{q^{\alpha+1}}[q]| = |\mathcal{B}|$. Отсюда и из формул (42) и (41) следует

(43) $$|S^{q^\alpha}[q]/S^{q^{\alpha+1}}[q]| \leq \sum_{H \in \mathfrak{G}} |M|^{|H|}.$$

Если теперь $f_\alpha(L_q)$ — конечное кардинальное число, то поскольку $f_\alpha(L_q) = |M|$, правая часть в неравенстве (43) есть сумма конечных кардинальных чисел и их число равняется $|\mathfrak{G}|$, т. е. она равна $|\mathfrak{G}|$. Но в этом случае группа $G$ должна быть бесконечной, поэтому $|\mathfrak{G}| = |G|$ и наше утверждение доказано.

Пусть теперь $f_\alpha(L_q)$ — бесконечное кардинальное число, а $G$ — конечная группа. Тогда $\mathfrak{G}$ также конечное множество, а $|M|^{|H|} = |M|$, поэтому правая часть в (43) равняется $|M| = f_\alpha(L_q)$. Значит и в этом случае утверждение верно.

Пусть наконец $f_\alpha(L_q)$ и $|G|$ — бесконечные кардинальные числа. Тогда $|M|^{|H|} = |M|$ и $|\mathfrak{G}| = |G|$, поэтому правая часть в (43) равняется $|G| . |M| = \max(|G|, f_\alpha(L_q))$. Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

(44) Основная теорема. *Пусть $G$ — абелева $p$-группа, $L$ — коммутативное кольцо с единицей, в котором простое число $p$ обратимо, $q$ — любое простое число и $S$ — силовская $q$-подгруппа группы нормированных единиц групповой алгебры $LG$. Предположим, что если $G$ имеет показатель $p^n$ (соответственно бесконечный показатель), то существует кольцевой гомоморфизм $Z(\xi_n) \to L$ (соответственно $\overline{Z} \to L$). Если $\alpha$ — порядковое число, то пусть $f_\alpha(S)$ и $f_\alpha$ $(L_q)$ $\alpha$-й инвариант Ульма — Капланского соответственно групп $S$ и $L_q$, $L_q$-силовская $q$-подгруппа мультипликативной группы кольца $L$, $S^*$—максимальная делимая подгруппа группы $S$ и максимальная делимая подгруппа $L_q^*$ группы $L_q$ разлагается в прямое произведение квазициклических групп типа $q^\infty$, мощность множества которых равняется $\nu$, т. е.*

(45) $$L_q^* \cong \prod_{\nu} Z(q^\infty).$$

*Тогда*

(46) $$f_\alpha(S) = (|G| - 1) f_\alpha(L_q),$$

(47) $$S^* \cong \prod_{(|G|-1)\nu} Z(q^\infty).$$

Доказательство. Если $L_q^{q^\alpha}=L_q^{q^{\alpha+1}}$, то в силу леммы (35) $S$ — делимая группа. Поскольку в этом случае $f_\alpha(L_q)=0$, то формула (46) имеет место.

Пусть $L_q^{q^\alpha}\neq L_q^{q^{\alpha+1}}$. Рассмотрим следующие случаи:

1) Если $|G|$ и $f_\alpha(L_q)$ — конечные кардинальные числа, то

$$S\cong\prod_{|G|-1}L_q,\quad S^{q^\alpha}\cong\prod_{|G|-1}L_q^{q^\alpha}, \tag{48}$$

откуда следует (46).

2) Пусть по крайней мере одно из кардинальных чисел $|G|$ и $f_\alpha(L_q)$ бесконечно.

2.1) Пусть $|G|\geqq f_\alpha(L_q)$. Как и раньше, обозначим через $\mathfrak{G}$ множество всех конечных подгрупп группы $G$. В силу бесконечности группы $G$ имеем $|G|=|\mathfrak{G}|$. Зафиксируя элемент $a\in L_q^{q^\alpha}[q]\diagdown L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$, определим для каждой подгруппы $H$ множества $\mathfrak{G}$ функцию $f_H:\mathfrak{X}\to L$ формулой (см. (36)):

$$f_H(\chi)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi\in\mathfrak{X}_H,\\ a, \text{ если } \chi\in\mathfrak{X}\diagdown\mathfrak{X}_H.\end{cases} \tag{49}$$

Очевидно $f_H\sim H$ и так как $f_H(0)=1$, $a\in L_q^{q^\alpha}[q]$, то $f_H\in S^{q^\alpha}[q]$. Если $H, H'\in\mathfrak{G}$ и $H\neq H'$, то $\mathfrak{X}_H\neq\mathfrak{X}_{H'}$. Тогда найдется элемент $\chi\in\mathfrak{X}_{H'}\diagdown\mathfrak{X}_H$, причем $(f_Hf_{H'}^{-1})(\chi)=a\notin L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$. Отсюда, в силу леммы (38), вытекает $f_Hf_{H'}^{-1}\notin S^{q^{\alpha+1}}[q]$. Следовательно, $|S^{q^\alpha}[q]/S^{q^{\alpha+1}}[q]|\geqq|G|$. Тогда из предложения (39) следует (46).

2.2) Пусть $f_\alpha(L_q)>|G|$. Отметим, что $G\neq 1$, так как в противном случае $S=1$ и нечего доказывать. Тогда можно выбрать конечную неединичную подгруппу $H$ группы $G$. Зафиксируем эту группу и полную систему представителей $M$ группы $L_q^{q^\alpha}[q]$ по $L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$. Для всякого $a\in M$ определим функцию $f_a:\mathfrak{X}\to L$ формулой (49). Опять видно, что $f_a\sim H$ и $f_a\in S^{q^\alpha}[q]$. Если $a$, $b\in M$ и $a\neq b$, то $(f_a^{-1}f_b)(\chi)=a^{-1}b\notin L_q^{q^{\alpha+1}}[q]$ для некоторого $\chi\in\mathfrak{X}\diagdown\mathfrak{X}_H$. Такое $\chi$ существует, поскольку $H\neq 1$. Отсюда, в силу леммы (38), вытекает $f_a^{-1}f_b\notin S^{q^{\alpha+1}}[q]$, т. е. $|S^{q^\alpha}[q]/S^{q^{\alpha+1}}[q]|\geqq|M|=f_\alpha(L_q)$. Тогда из предложения (39) следует (46).

Теперь докажем формулу (47). С этой целью рассмотрим следующие случаи:

1) Если $|G|$ — конечное кардинальное число, то имеет место (48), откуда следует

$$S^*\cong\prod_{|G|-1}L_q^*.$$

Отсюда и из формулы (45) следует (47).

2) Пусть $|G|$ — бесконечное кардинальное число. Обозначим через $L_q^*[q]$ нижний слой максимальной делимой группы $L_q^*$. Сначала докажем

$$|S^*[q]|\leqq|G|\,.\,|L_q^*[q]|. \tag{50}$$

С этой целью обозначим через $\mathfrak{G}$ множество всех конечных подгрупп группы $G$. Для любой конечной подгруппы $H$ группы $G$ определим множество

$\mathscr{A}_H$ всех функций $f\in S^*[q]$ с опорной подгруппой $H$. Обозначим через $N_H$ полную систему представителей группы $\mathfrak{X}$ по $\mathfrak{X}_H$, а через $(L_q^*[q])^{N_H}$ множество всех функций из $N_H$ в $L_q^*[q]$. Ограничив каждую функцию $f\in\mathscr{A}_H$ на подмножестве $N_H$, мы получим инъективное отображение из $\mathscr{A}_H$ в $(L_q^*[q]^{N_H}$, поскольку любая функция из $\mathscr{A}_H$ имеет опорную подгруппу $H$. Следовательно, $|\mathscr{A}_H|\leqq|(L_q^*[q]^{N_H}|$. Далее получается $|(L_q^*[q])^{N_H}|=|L_q^*[q]|^{|H|}$, так что имеет место неравенство

$$|\mathscr{A}_H|\leqq|L_q^*[q]|^{|H|}. \tag{51}$$

Нетрудно видеть, что объединение множеств $\mathscr{A}_H$ для всех $H\in\mathfrak{G}$ раздельное и что это объединение равняется $S^*[q]$. Отсюда и из неравенства (51) получается

$$|S^*[q]|\leqq\sum_{H\in\mathfrak{G}}|L_q^*[q]|^{|H|}. \tag{52}$$

Если теперь $|L_q^*]q]|$ конечное кардинальное число, то поскольку $|\mathfrak{G}|=|G$ правая часть в (52) равняется $|G|$ и неравенство (50) справедливо. Если же $|L_q^*[q]|$ бесконечное, то неравенство (50) опять имеет место, так как правая часть в (52) равняется $|G|.|L_q^*[q]|$.

Для доказательства формулы (47) рассмотрим два подслучая случая 2)

(2.1) Пусть $|G|\geqq|L_q^*[q]|$. Если $L_q^*[q]=1$, то $\nu=0$ и формула (47) имеет место, поскольку $S^*=1$. Если $L_q^*[q]\neq1$, то выберем элемент $a\in L_q^*[q]$, $a\neq1$ и для каждой конечной подгруппы $H$ группы $G$ определим функцию $f_H$, как в (49). Множество всех таких функций является подмножеством множества $S^*[q]$ и имеет мощность $|G|$. Отсюда и из неравенства (50) следует (47).

2.2 Пусть $|L_q^*[q]|\geqq|G|$. Зафиксируем некоторую конечную неединичную подгруппу $H$ группы $G$ и для каждого $a\in L_q^*[q]$ определим функцию $f_a$ формулой (49). Опять видно, что множество всех таких функций есть подмножество множества $S^*[q]$ и имеет мощность $|L_q^*[q]$. Тогда из неравенства (50) следует (47).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман, А. Р. Росса. Силовська $p$-підгруппа групповоі алгебры зчисленноі абелевоі $p$-группи. Доповіді АН УРСР, 10, 1968, 870—872.
2. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
3. И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. Москва, 1972.
4. А. Картан, С. Эйленберг. Гомологическая алгебра. Москва, 1960.
5. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. Москва, 1974.
6. М. Холл. Теория групп. Москва, 1962.

*Пловдивский университет*
*4000 Пловдив Болгария*

*Поступила 7. 7. 1981*