PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ТОЖДЕСТВА ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ В МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

РУСАЛИН С. НИКОЛАЕВ

Доказывается, что все тождества от трех переменных в матричной алгебре второго порядка над полем характеристики нуль являются следствиями тождеств $[[x, y]^2, z]=0$ и $[[x, y], [x, z], x]=0$.

Конечная базируемость многообразия $\operatorname{var} M_2(K)$, порожденного алгеброй матриц второго порядка $M_2(K)$ над полем K характеристики нуль, доказана Размысловым [1]. После того, как Дренски [2] показал, что стандартное тождество $s_4(x, y, z, t)=0$ и тождество Холла $[[x, y]^2, x]=0$ образуют минимальный базис этого многообразия, вызывает интерес задача о нахождении базисов тождеств от двух и трех переменных, впервые поставленная Бахтуриным [3] для тождеств от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ матриц второго порядка со следом 0. В работах автора [4, 5] получены базисы тождеств от двух переменных в алгебрах $M_2(K)$ и $sl(2, K)$, а в настоящей работе решается задача о тождествах от трех переменных в ассоциативном случае. Доказывается следующая теорема:

Теорема. *Все тождества от трех переменных в алгебре $M_2(K)$ матриц второго порядка над полем K характеристики нуль являются следствиями тождества Холла*

$$[[x, y]^2, z]=0 \tag{1}$$

и тождества

$$[[x, y], [x, z], x]=0. \tag{2}$$

Последнее тождество выполняется в $M_2(K)$, так как получается из стандартного тождества $s_4(x, y, z, t)=0$ заменой t на x^2.

В первой части работы вводятся обозначения и даются некоторые предварительные сведения, подробное изложение которых можно найти в работах Дренского [6] и Попова [7]. Во второй части выводятся некоторые следствия из тождеств (1) и (2), с помощью которых получен базис линейного пространства $\Gamma_n(\operatorname{var} M_2(K))$, а в третьей доказывается упомянутая теорема.

1. Пусть K — поле характеристики 0. Обозначим многообразие алгебр, порожденное тождествами (1) и (2), через $\mathfrak{N}$, а через $\mathfrak{M}$ — многообразие $\operatorname{var} M_2(K)$. Очевидно $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Относительно свободные алгебры этих многообразий обозначим через $F(\mathfrak{N})$ и $F(\mathfrak{M})$, а S_n — модули собственных полилинейных многочленов (т. е. многочленов, представленных в виде линейных комбинаций произведений правонормированных коммутаторов) от переменных

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — через $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ и $\Gamma_n(\mathfrak{M})$. Известно (см. [8]), что все тождества алгебры с единицей являются следствиями ее собственных полилинейных тождеств. Ввиду полной приводимости S_n-модулей, изучение $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ и $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ сводится к изучению их неприводимых компонент. Следовательно, можно применять технику диаграмм Юнга (см. [9]). В силу существования естественного гомоморфизма алгебр $F(\mathfrak{N}) \to F(\mathfrak{M})$ и гомоморфизмов линейных пространств $\Gamma_n(\mathfrak{N}) \to \Gamma_n(\mathfrak{M})$, $n=2, 3, \ldots$, являющихся также модульными гомоморфизмами, теорема будет доказана если покажем, что любой диаграмме Юнга D_λ, соответствующей разбиению λ числа n, $\lambda=(p, q, r)$, $p \geq q \geq r$, $p+q+r=n$, соответствует не более чем один неприводимый подмодуль $\Gamma_n(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом, который не является тождеством алгебры $M_2(K)$. Это означает, что нужно увидеть как действуют симметризаторы Юнга диаграммы D_λ на порождающие элементы пространства $\Gamma_n(\mathfrak{N})$.

Мы будем пользоваться следующим замечанием, дающим возможность в большой степени упростить проводимые подсчеты [см. [6, 7]): если многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порождает неприводимый S_n-модуль M, то многочлен $\bar{f}_{D\lambda}$, являющийся полной симметризацией многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно диаграммы D_λ, т. е. получающийся из $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заменой всех букв, индексы которых лежат в одной строке диаграммы, одной и той же буквой, порождает неприводимый GL_n-модуль $\bar{M}$. Следовательно, мы имеем право работать только в GL_n-модуле $\bar{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$ многочленов степени n записанных на трех буквах — x, y и z. Действию симметризаторов Юнга на порождающие элементы S_n-модулей отвечает следующее действие на порождающие элементы соответствующих GL_n-модулей: кососимметризировать эти элементы по всем возможным тройкам (x, y, z) (соответствующих столбцам диаграммы D_λ длины 3) и по всем возможным парам (x, y) (соответствующих столбцам длины 2).

Правонормированный коммутатор $[x, y, x, \ldots, x]$ длины $k+2$ будем обозначать $[x, y, x^{(k)}]$.

Если степень многочлена $f(x, y, z)$ по x равна k, выражением „в тождестве $f(x, y, z)=0$ заменяем x_i на $\varphi_i(x, y, z)$" будем обозначать следующую последовательность действий: линеаризуем $f(x, y, z)$ по x, обозначая новые переменные буквами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а после этого заменяем x_i на $\varphi_i(x, y, z)$, $i=1, 2, \ldots, k$, где $\varphi_i(x, y, z)$ — заданные многочлены.

2. В этой части выведем некоторые следствия из тождеств (1) и (2), и найдем порождающие элементы пространства $\Gamma_n(\mathfrak{N})$.

Так как из тождества (1) следует тождество Холла с двумя буквами, порождающее все тождества с двумя буквами в $M_2(K)$, мы можем пользовать все результаты работы [4]. Из тождеств (1) и (2) легко следует тождество

$$[[x, y][x, z], x]=0. \tag{3}$$

Из (3) при $x_1=y$, $x_2=x_3=x$ получаем

$$[[x, y][x, z], y]=-[[x, y][y, z], x]. \tag{4}$$

Из тождества $[[x, y]^2, y]=0$ при $y_1=z$, $y_2=y_3=y$ следует

$$[[x, y] \circ [x, z], y]=0. \tag{5}$$

Согласно [10], линейное пространство $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ порождается произведениями коммутаторов, в которых переменные упорядочены (скажем лексикографически), начиная со второй позиции, т. е. в нашем случае можно рассматривать только коммутаторы вида $[*, x^{(k)}, y^{(l)}, z^{(m)}]$, $k, l, m \geqq 0$. Такие коммутаторы дальше будем называть правильными. Докажем следующую лемму:

Лемма. *Линейное пространство $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ порождается полными линеаризациями произведений коммутаторов, в которых участвует не более чем один коммутатор длины больше двух, находящийся на последнем месте в произведении, т. е. произведений вида* $[*, *][*, *]\cdots[*, *][*, *, \ldots, *]$.

Доказательство. Произведения указанного в лемме вида будем называть „хорошими“. Сравнение вида $\varphi(x, y, z) \equiv 0$ будет означать, что многочлен $\varphi(x, y, z)$ представим как линейную комбинацию „хороших“ произведений коммутаторов.

Из тождества (4) и тождества Якоби имеем

$$[x, y, x][y, z]+[x, y, y][x, z]=-[x, y][x, z, y]-[x, y][y, z, x]$$
$$=-[x, y][x, y, z]-2[x, y][y, z, x].$$

Из тождества (5)

$$[x, y, y][x, z]=-[x, y][x, z, y]-[x, z][x, y, y]-[x, z, y][x, y].$$

Аналогично

$$[x, y, x][y, z]=-[x, y][y, z, x]-[y, z][x, y, x]-[y, z, x][x, y].$$

Из последних трех равенств, учитывая (1) и тождество Якоби, получаем тождества

$$[x, y, x][y, z]=(1/2)([x, y][x, y, z]+[x, z][x, y, y]-[y, z][x, y, x])-[x, y][x, z, y$$

$$[x, y, y][x, z]=(1/2)([x, y][x, y, z]+[y, z][x, y, x]-[x, z][x, y, y])-[x, y][x, z, y]$$

В последнем тождестве заменяем y_1 на z, y_2 на y:

$$[x, y, z][x, z]=(1/2)([y, z][x, z, x]-[x, y][x, z, z]-[x, z][x, z, y]).$$

Из этого тождества при $x_1=y$, $x_2=x$ получаем

$$[x, y, z][y, z]=(1/2)([y, z][y, z, x]-[x, y][x, z, z]-[x, z][x, z, y]).$$

Для остальных произведений тройного и двойного коммутаторов приложимы тождества (1) и (3).

Покажем, что произведения двух коммутаторов длины три представимы через „хороших“. Из тождеств (1), (4) и (3) имеем

$$[y, z, x][x, y, x]=-[y, z][x, y, x^{(2)}]+[[y, z][x, y, x], x]=-[y, z][x, y, x^{(2)}]$$
$$+[[y, z][x, y], x, x]=-[y, z][x, y, x^{(2)}]-[[x, z][x, y], y, x],$$

т. е.

$$[y, z, x][x, y, x]=-[y, z][x, y, x^{(2)}]+[[x, z][x, y], [x, y]]. \tag{6}$$

Согласно тождествам (3) и (4),

$$[[x, y][x, z], y, z]=-[[x, y][y, z], x, z]=-[[x, y][y, z], [x, z]]-[[x, y][y, z], z, x]$$
$$=-[[x, y][y, z], [x, z]]+[[x, z][y, z], y, x]=-[[x, y][y, z], [x, z]]$$

$$-[[x, z]\,[y, z], [x, y]]+[[x, z]\,[y, z], x, y]=-[[x, y]\,[y, z], [x, z]]-[[x, z]\,[y, z],$$
$$[x, y]]+[[x, z]\,[x, y], z, y]=-[[x, y]\,[y, z], [x, z]]-[[x, z]\,[y, z], [x, y]]$$
$$-[[x, z]\,[x, y], [y, z]]+[[x, z]\,[x, y], y, z].$$

Но из тождества (5) следует, что $[[x, z]\,[x, y], y]=-[[x, y]\,[x, z], y]$, или

(7) $$[[x, y]\,[x, z], y, z]=(1/2)\,[[y, z], [x, z], [x, y]]$$

и, учитывая снова (5),

(8) $$[[x, y]\,[x, z], z, y]=(1/2)\,[[y, z], [x, y], [x, z]].$$

Из тождества Якоби и (7) получаем

$$[x, y, z]^2=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]+[[x, y]\,[x, y, z], z]=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]$$
$$+[[x, y]\,[x, z, y], z]-[[x, y]\,[y, z, x], z]=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]+[[x, y]\,[x, z], y, z]$$
$$-[[x, y]\,[y, z], x, z]-[[x, y, y]\,[x, z], z]+[[x, y, x]\,[y, z], z].$$

Из тождества $[[z, y]\,[x, z], z]=0$ при $z_1=[x, y]$, $z_2=z_3=z$ следует

$$-[[x, y, y]\,[x, z], z]=[[y, z]\,[x, y, y], z]-[[y, z]\,[x, z], [x, y]].$$

Аналогично, из $[[z, x]\,[y, z], z]=0$ следует

$$[[x, y, x]\,[y, z], z]=-[[x, z]\,[x, y, y], z]+[[x, z]\,[y, z], [x, y]].$$

Следовательно, учитывая тождества (7), (8), тождество Якоби и (1), получаем

$$[x, y, z]^2=-[x, y]\,[x, y\, z^{(2)}]+(1/2)\,[[y, z], [x, z], [x, y]]-(1/2)\,[[x, z], [y, z], [x, y]$$
$$+[[x, z], [y, z], [x, y]]+[[y, z]\,[x, y], x, z]-[[y, z, x]\,[x, y], z]-[[x, z]\,[x, y], y, z]$$
$$+[[x, z, y]\,[x, y], z]=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]+[[x, z], [y, z], [x, y]]+[[x, y, z]\,[x, y], z]$$
$$=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]+[[x, z], [y, z], [x, y]]-[[x, y]\,[x, y, z], z],$$

или

$$[x, y, z]^2=-[x, y]\,[x, y, z^{(2)}]+(1/2)\,[[x, z], [y, z], [x, y]].$$

Из этого тождества при $z_1=x$, $z_2=z$ имеем

(9) $$[x, y, x]\circ[x, y, z]=-[x, y]\,[x, y, x, z]-[x, y]\,[x, y, z, x]+(1/2)\,[[x, z],$$
$$[y, x], [x, y]]=-2[x, y]\,[x, y, x, z]+[x, y]\,[x, y, [x, z]]+[x, y]\,[x, z, [x, y]]$$
$$=-2[x, y]\,[x, y, x, z].$$

Согласно тождествам (3) и (4),

$$[x, y, x]\,[x, y, z]=[x, y]\,[x, y, [x, z]]+[x, y, z]\,[x, y, x]-[[x, y]\,[x, y, x], z]$$
$$-[[x, y]\,[x, z, x], y].$$

Согласно [4, тождество (12)], $[[x, y]\,[x, y, x], y]=2[x, y]^3$. Отсюда, заменой y_1 на z, y_2 и y_3 на y, учитывая тождество Якоби, (4) и (6), имеем

$$[[x, y]\,[x, y, x], z]+[[x, y]\,[x, z, x], y]=-[[x, z]\,[x, y, x], y]+4[x, y]^2[x, z]$$

$$+2[x,y]\,[x,z]\,[x,y]=2[x,y]\,[x,z]\,[x,y]+4[x,y]^2[x,z]-[x,z]\,[x,y,x\,y]$$
$$-[x,z,y]\,[x,y,x]=2[x,y]\,[x,z]\,[x,y]+4[x,y]^2[x,z]-[x,z]\,[x,y,x,\,y]$$
$$-[x,y,z]\,[x,y,x]-[y,z,x]\,[x,y,x]=2[x,y]\,[x,z]\,[x,y]+4[x,y]^2\,[x,z]$$
$$-[x,z]\,[x,y,x,y]-[x,y,z]\,[x,y,x]+[y,z]\,[x,y,x^{(2)}]-[[x,z]\,[x,y],[x,y]]$$
$$=3[x,y]\,[x,z]\,[x,y]+3[x,y]^2[x,z]-[x,z]\,[x,y,x,y]+[y,z]\,[x,y,x^{(2)}]$$
$$-[x,y,z]\,[x,y,x].$$

Следовательно,

$$[x,y,x]\,[x,y,z]-2[x,y,z]\,[x,y,x]=-2[x,y]^2[x,z]$$

(10) $$-4[x,y]\,[x,z[\,[x,y]+[x,z]\,[x,y,x,y]-[y,z]\,[x,y,x^{(2)}].$$

Из тождеств (9) и (10) получаем

$$[x,y,x]\,[x,y,z]=-(4/3)\,[x,y]\,[x,y,x,z]-(2/3)\,[x,y]^2[x,z]-(4/3)\,[x,y]\,[x,z]\,[x,y]$$
$$+(1/3)\,[x,z]\,[x,y,x,y]-(1/3)\,[y,z]\,[x,y,x^{(2)}].$$

Аналогично, $[x,y,z]\,[x,y,x]\equiv 0$.

Согласно тождеству Якоби,

$$[x,z,x]\,[x,y,z]=[x,z,x]\,[x,z,y]-[x,z,x]\,[y,z,x],$$

т. е. произведение $[x,z,x]\,[x,y,z]$ сводится к рассмотренным случаям. Из сравнения $[x,y,x]\,[x,y,z]\equiv 0$ при $y_1=z$, $y_2=y$ следует

$$[x,y,x]\,[x,z,z]=-[x,z,x]\,[x,y,z]\equiv 0,$$

а при $x_1=y$, $x_2=x_3=x$, $-[x,y,y]\,[x,y,z]\equiv 0$.

Из последнего сравнения при $y_1=z$, $y_2=y_3=y$ получаем

$$[x,y,y]\,[x,z,z]\equiv-[x,y,z]^2-[x,z,y]\,[x,y,z],$$

а из $[x,z,x]\,[x,y,z]\equiv 0$ при $x_1=y$, $x_2=x_3=x$ следует

$$[y,z,x]\,[x,y,z]+[x,z,y]\,[x,y,z]\equiv 0,$$

т. е. $[x,z,y]\,[x,y,z]\equiv(1/2)\,[x,y,z]^2\equiv 0$.

Следовательно, любое произведение из двух тройных коммутаторов можно представить через „хорошие“ произведения.

Проведем индукцию по длине второго множителя в произведениях, у которых первый множитель — коммутатор длины три. Для любого k, удовлетворяющее неравенства $4\leq k\leq n+1$, имеем

$$[x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k]\,[y_1,y_2]=-[x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}]\,[y_1,y_2,x_k]+[[x_1,x_2,\ldots,$$
$$x_{k-1}]\,[y_1,y_2],x_k]=[x_1,\ldots,x_{k-2}]\,[y_1,y_2,x_k,x_{k-1}]-[[x_1,\ldots,x_{k-2}]\,[y_1,y_2,x_k],$$
$$x_{k-1}]+[[x_1,\ldots,x_{k-2}]\,[y_1,y_2],x_{k-1},x_k]-[[x_1,\ldots,x_{k-2}]\,[y_1,y_2,x_{k-1}],x_k]=\cdots$$
$$=(-1)^{k-3}[x_1,x_2,x_3]\,[y_1,y_2,x_k,\ldots,x_4]+(-1)^{k-2}[[x_1,x_2,x_3]\,[y_1,y_2,x_k,\ldots,x_5],x_4]$$
$$+\cdots+[[x_1,x_2,x_3]\,[y_1,y_2],x_4,x_5,\ldots,x_k].$$

К участвующим в последней сумме произведениям коммутаторов приложимо индукционное предположение. Следовательно, любое произведение коммутатора длины $\leqq n+1$ и двойного представимо через „хорошие".

Аналогичным образом показывается, что произведение двух длинных коммутаторов (т. е. коммутаторов длины больше двух), сумма длин которых $l \leqq n+3$, сравнимо по модулю „хороших" произведений с произведениями тройного на коммутатор длины $l-3$.

Очевидно, что при описанных выше преобразованиях, при помощи которых уменьшается длина первого множителя в произведениях, в некоторых коммутаторах нарушится порядок букв. Но так как любая транспозиция двух букв сводится к транспозиции соседних букв, то ясно, что представимость этих коммутаторов через правильные осуществима за счет появления двойных коммутаторов на некоторых местах в длинном коммутаторе, т. е. упорядочение букв в длинном коммутаторе выполнимо по модулю „хороших" произведений.

Рассмотрим теперь произведения тройного на коммутатор длины $n+1$. Разобьем возможные случаи на две группы:

а) В тройном коммутаторе участвуют две буквы. Длинный коммутатор запишем в виде $[u, *, *]$, где u — коммутатор длины $n-1$. Согласно тождеству (3),

$$[x, y, x]\,[u, *, x] = -[x, y]\,[u, *, x^{(2)}],\ [x, y, x]\,[u, x, y]$$
$$= [x, y, x]\,[u, [x, y]] - [x, y]\,[u, y, x^{(2)}],\ [x, y, x]\,[u, y, y]$$
$$= -[x, y]\,[u, y, y, x] + [[x, y]\,[u, y, y], x].$$

Из тождества $[[x, y]\,[z, y], x] = -[[x, y], [z, x], y]$ при $z=[u, y]$ следует, что

$$[x, y, x]\,[u, y, y] = -[x, y]\,[u, y, y, x] + [[x, y]\,[u, [x, y]], y].$$

Длинного коммутатора нельзя представить в виде, в котором был записан в рассмотренных трех случаях, только если он один из следующих коммутаторов: $[z, x, z^{(n-1)}]$, $[z, y, z^{(n-1)}]$, $[z, y, y, z^{(n-2)}]$ или $[x, y, z, z^{(n-2)}]$. Действительно, если буква x встречается более чем один раз, то коммутатор сравним по модулю „хороших" произведений с коммутатором вида $[u, *, x]$, а если буква y встречается более чем два раза — с коммутатором вида $[u, y, y]$.

Если $n=3$, согласно (1),

$$[x, y, x]\,[x, y, z, z] = -[x, y]\,[x, y, z, z, x] + [[x, y]\,[x, y, z, z], x]$$
$$= -[x, y]\,[x, y, z, z, x] + [[x, y]\,[x, y, z], z, x].$$

Но, согласно тождеству (3) и тождеству Якоби,

$$[[x, y]\,[x, y, z], z, x] = [[x, y]\,[x, z, y], z, x] + [[x, y]\,[z, y, x], z, x],$$
$$[[x, y]\,[z, y, x], z, x] = [[x, y]\,[y, z, x], [x, z]].$$

Из тождества (8) $[[x, y]\,[z, y], z, x] = (1/2)\,[[x, z], [x, y], [z, y]]$ при $z_1=[x, z]$, $z_2=z$, следует

$$[[x, y]\,[x, z, y], z, x] = -[[x, y]\,[z, y], [x, z], x] - (1/2)\,[[x, z, x], [x, y], [z, y]]$$
$$+ (1/2)\,[[x, z], [x, y], [x, z, y]].$$

Следовательно $[x, y, x][x, y, z^{(2)}]\equiv 0$.

Пусть $n>3$. Тогда

$$[x, y, x][x, y, z^{(n-1)}]=-[x, y][x, y, z^{(n-1)}, x]+[[x, y][x, y, z^{(n-1)}], x]$$

$$=-[x, y][x, y, z^{(n-1)}, x]+[[x, y][x, y, z^{(n-2)}], z, x]-[[x, y, z][x, y, z^{(n-2)}], x],$$

$$[[x, y][x, y, z^{(n-2)}], z, x]=-[[x, y][x, y, z^{(n-2)}], [x, z]]+[[x, y][x, y, z^{(n-2)}], x, z].$$

Из тождества (3) при $x_1=[x, y, z^{(n-3)}]$, $x_2=x_3=x$, следует

$$[[x, y][x, y, z^{(n-2)}], x, z]=-[[x, y][x, z], [x, y, z^{(n-3)}]]-[[x, y, z^{(n-3)}, y][x, z], x, z].$$

Учитывая тождество (3), имеем

$$[[x, y, z^{(n-3)}, y][x, z], x, z]=-[[x, y, z^{(n-4)}, [y, z]][x, z], x, z]+[[x, y, z^{(n-4)},$$

$$y, z][x, z], [x, z]],$$

т. е. при $n>3$ выполнено $[x, y, x][x, y, z^{(n-1)}]\equiv 0$.

Из сравнения $[x, y, x][x, y, z^{(n-1)}]\equiv 0$ при $y_1=z$, $y_2=y$, следует

$$[x, z, x][x, y, z^{(n-1)}]-[x, y, x][z, x, z^{(n-1)}]\equiv 0.$$

Первое произведение здесь — из рассмотренных в начале этого пункта. Следовательно, и $[x, y, x][z, x, z^{(n-1)}]\equiv 0$.

Из сравнения $[x, z, x][z, y, z^{(n-1)}]\equiv 0$ при $z_1=y$, $z_i=z$, $i\geq 2$, имеем

$$[x, y, x][z, y, z^{(n-1)}]=-\sum_{i=1}^{n-2}[x, z, x][z, y, z^{(i)}, y, z^{(n-2-i)}].$$

Согласно [4, лемма 1], сумма в правой стороне сравнима с произведением $[x, z, x][z, y, y, z^{(n-2)}]$. Если $n\geq 4$, это произведение из уже рассмотренных. Пусть $n=3$. Тогда

$$[x, z, x][z, y, y, z]=-[x, z][z, y, y, z, x]+[[x, z][z, y, y, z], x].$$

В тождестве (4) $[[x, z][y, z], x]=-[[x, z][y, x], z]$, положим $y=[z, y, y]$. Учитывая тождества (1) и (3), получаем

$$[x, z, x][z, y, y, z]\equiv[[x, z][z, y, y, x], z]\equiv[[x, z][z, y, x, y], z]\equiv[[x, z][x, y, z, y], z$$

$$-[[x, z][x, z, y, y], z]=[[x, z][x, y, [z, y]], z]-[[x, z][x, z, y], y, z]$$

$$\equiv[[x, z][x, z, y], z, y].$$

В тождестве (7) $[[x, z][x, y], z, y]=(1/2)[[z, y], [x, y], [x, z]]$ заменяем x_1 на $[x, z]$, x_2 — на x. Учитывая тождество (3), имеем

$$[[x, z][x, z, y], z, y]\equiv-[[x, z, z][x, y], z, y]=-[[x, z][x, y], z, z, y]$$

$$=[[x, z][z, y], x, z, y]=[[x, z][z, y], [x, z], y]\equiv 0,$$

т. е. и $[x, y, x][z, y, z^{(n-1)}]\equiv 0$. Из этого сравнения при $z_1=y$, $z_i=z$, $i\geq 2$, получаем, учитывая снова результаты работы [4], что и

$$[x, y, x][z, y, y, z^{(n-2)}]\equiv 0.$$

б) Произведения вида $[x, y, z][u, *, *]$. Из сравнения $[x, y, x][u, *, *]\equiv 0$ при $x_1=z$, остальные $x_i=x$, следует

$$[x, y, z][u, *, *]+[z, y, x][u, *, *]\equiv-[x, y, x]([u, *, *]|_{x_1=z})\equiv 0.$$

Аналогично из сравнения $[x, y, y]\,[u, *, *]\equiv 0$ при $y_1 = z$ получаем

$$[x, y, z]\,[u, *, *]+[x, z, y]\,[u, *, *]\equiv 0.$$

Из этих двух сравнений и из тождества Якоби следует $[x, y, z]\,[u, *, *]\equiv 0$. **Этим** мы доказали, что любое произведение тройного коммутатора на длинный представимо через „хорошие" произведения, а так как уже отмечено, что любое произведение двух длинных коммутаторов представимо через произведение тройного на длинное, лемма доказана.

3. Мы уже готовы доказать упомянутую в введении теорему:

Т е о р е м а. *Все тождества от трех переменных в алгебре* $M_2(K)$ *являются следствиями тождеств* (1) *и* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отметили в первой части работы, теорема будет доказана, если покажем, что любой диаграмме Юнга с тремя строками соответствует не более, чем один неприводимый подмодуль $\Gamma_n(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом, который не является тождеством алгебры $M_2(K)$, а для этого нужно кососимметризировать порождающие элементы, указанные в лемме, по всем тройкам (x, y, z) и парам (x, y). Будем считать, что буква x соответствует первой строке, буква y — второй, а буква z — третьей строке диаграммы D_λ, т. е. если $\lambda=(p, q, r)$, то степени рассматриваемых многочленов по x, y, и z будут соответственно равны p, q, и r.

Буквы, относительно которых кососимметризуем, будем связывать знаком ⊓⊓ (⊔⊔) над (под) элементами, в записи которых они участвуют. Так, например, тождество Якоби при помощи этого обозначения можно записать так: $[x, y, z]=0$.

В этом пункте сравнения будут по модулю произведений коммутаторов меньшей длины, чем длин коммутаторов в данном произведении.

Учитывая лемму, разобьем возможные случаи следующим образом в зависимости от числа коммутаторов, в которых находятся отмеченные буквы, и от длин этих коммутаторов.

I. Три буквы в длинном коммутаторе $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p)}]$. Здесь возможны следующие случаи:

I. 1. $[x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, y, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}] = [x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, y, y^{(n-1-j)}, z^{(p)}]+[x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, z, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, x, z^{(p-1-k)}] + [x, y, x^{(i)}, z, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, x, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, y, z^{(p-1-k)}]$. Согласно результатам работы [4], $[x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, y, y^{(n-1-j)}, z^{(p)}]]\equiv 0$. Учитывая тождества (1), (2) и (3), имеем

$$[x. y, x^{(i)}, z, x^{(m-1-i)}, y^{(n)}]=[x, y, x^{(m-1)}, z, x, y^{(n)}]=[x, y, x^{(m-1)}, z, y^{(m)}]$$
$$-[x, y, x^{(m-2)}, [x, z], y^{(n)}]\equiv[x, y, x^{(m-1)}, [z, y], y^{(n-1)}]+[x, y, x^{(m-1)}, y, z, y^{(n-1)}]$$
$$\equiv[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n-1)}, z, y]\equiv[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n)}, z].$$

Аналогично

$$[x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, z, y^{(n-1-j)}]\equiv[x, y, x^{(m-1)}, y^{(j+1)}, z, y^{(n-1-j)}]$$
$$\equiv[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n)}, z],$$

следовательно,

$$[x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}z, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, x, z^{(p-1-k)}] \equiv 0.$$

Точно так же доказывается, что и

$$[x, y, x^{(i)}, z, x^{(m-1-i)}, y^{(j)}, x, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, y, z^{(p-1-k)}] \equiv 0.$$

I. 2. $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}]$. Как в п. I. 1, учитывая тождества (1), (2) и (3), имеем

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p)}] \equiv [x, y, z, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p-1)}],$$

$$[y, z, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(k)}, x, z^{(p-1-k)}] \equiv [y, z, x, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p-1)}],$$

$$[z, x, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(k)}, y, z^{(p-1-k)}] \equiv [z, x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p-1)}].$$

Следовательно, в силу тождества Якоби, $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}] \equiv 0.$

II. Две буквы в длинном и одна в двойном коммутаторе.

$$[x, y] [x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(n)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}]$$

$$= [x, y] [x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(n)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}] - [x, z[[x, y, x^{(i)}, x, x^{(m-1-i)}, y^{(n)}, z^{(k)}, y, z^{(p-1-k)}],$$

как в п. I. Аналогично рассматривается и случай

$$[x, y] [x, y, x^{(m)}, y^{(j)}, y, y^{(n-1-j)}, z^{(k)}, z, z^{(p-1-k)}]$$

и т. д. Ясно также, что наличие других множителей между двойным коммутатором, в котором находится одна из отмеченных букв, и длинным коммутатором не имеет значения.

Случай, когда одна из первых двух букв в длинном коммутаторе или обе участвуют в кососимметризировании, как и случай, когда участвует только одна буква из длинного коммутатора, рассмотрим позже в зависимости от конкретного вида диаграммы.

III. Три буквы в трех двойных коммутаторах. Из тождества (5) следует тождество

$$(11) \qquad [x, y] [x, z] [y, z] = -[x, z] [x, y] [y, z] + [y, z] ([x, y] \circ [[x, z]).$$

Следовательно, учитывая и тождество Холла (1), можем считать, что рассматриваемые три двойных коммутатора — последовательные множители. Тогда имеем

$$[x, y] [y, z] [x, z] = [x, y] [y, z] [x, z] + [z, y] [x, z] [x, y] = [[x, y], [y, z]] [x, z]$$

$$+ [y, z] [[x, y], [x, z]] + [[y, z], [x, z]] [x, y].$$

В силу тождества Холла

$$[x, y][x, y][x, z]=[x, y]^2[x, z]-[x, y][x, z][x, y]=[x, y][[x, y], [x, z]]$$
$$=-[[x, y], [x, z]][x, y]$$

и т. д. Однако, $[[x, y], [x, z]]=[x, y][y, z]$, т. е. этот случай сводится к следующему.

IV. Три буквы из двух двойных коммутаторов. Здесь нужно рассмотреть следующие случаи:

$$\text{IV. 1. } [x, y][z, x][y, z][x, y]=[x, y][z, x][y, z][x, y]+[z, x][y, x][y, z][x, y]$$
$$+[x, y][z, x][y, x][y, z]+[z, x][y, x]^2[y, z]-[x, y][z, y][x, z][y, z]$$
$$-[y, z][x, y][x, z][x, y]-[y, z][x, y]^2[z, x]-[x, y][z, y][x, y][z, x]$$
$$=[x, y]\circ([y, z][x, z][x, y]+[z, x][y, x][y, z]+[x, y][z, x][y, z]$$
$$+[y, z][x, y][z, x])=[x, y]\circ([x, y][z, x][y, z])-[x, y]\circ([z, x][y, z][x, y]$$
$$+[x, y][z, y][z, x]).$$

Из тождеств (7) и (8) имеем

$$[z, x][y, z][x, y]=[x, y][z, x][y, z]+[[z, x][y, z], [x, y]]$$
$$=[x, y][z, x][y, z]+(1/2)[[z, x], [y, z], [x, y]],$$
$$[x, y][z, y][z, x]=[z, x][x, y][z, y]+(1/2)[[x, y], [z, y], z, x]].$$

Следовательно,

$$[z, x][y, z][x, y]+[x, y][z, y][z, x]=[x, y][z, x][y, z]-[z, x][x, y][y, z]$$
$$-(1/2)[[x, y], [z, x], [y, z]]=(1/2)([x, y][z, x][y, z]+[z, x][y, x][y, z]$$
$$+[y, z][x, z][x, y]+[y, z][x, y][z, x])$$
$$=(1/2)([x, y][z, x][y, z]-[z, y][y, x][x, y]-[x, y][z, y][z, x]),$$

или $[z, x][y, z][x, y]+[x, y][z, y][z, x]=(1/3)[x, y][z, x][y, z]$. Значит,

$$[x, y][z, x][y, z][x, y]=(2/3)[x, y]\circ([x, y][z, x][y, z].$$

Аналогично и в случаях

$$\text{IV. 2. } [x, y][z, x][y, z][x, y],$$

$$\text{IV. 3. } [x, y][z, x][y, z][x, y]$$

все выражается через произведения $[x, y][z, x][y, z]$ на двойном коммутаторе.

Для $[x, y][z, x][y, z]$ прямым подсчетом получается, что оно равно $[x, y][z, x][y, z]$. Следовательно, дальше достаточно рассматривать кососимметризирования по буквам из соседних двойных коммутаторов или, как следует из сделанных выкладок, одна из них—первая буква длинного коммутатора. Если после кососимметризирования по всем тройкам (x, y, z) останутся „свободные“ пары (x, y) (т. е. в диаграмме D_λ есть столбцы длины два), будем использовать результаты работы [4], где показано, что диаграмме D_λ с двумя строками, соответствующей разбиению $\lambda=(p+q+1, q)$ числа $n=p+2q+1$, отвечает только один неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(2)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом $[x, y]^q[x, y, x^{(p)}]$. Пусть теперь $\lambda=(k+l+m, l+m, m)$ — разбиение числа $n=3m+2l+k$, D_λ — соответствующая диаграмма Юнга. Возможны следу ющие случаи: 1) $k=l=0$, т. е. все столбцы диаграммы D_λ имеют длину три;

1а) m — четное. Так как уменьшение длин участвующих длинных коммутаторов при кососимметризированиях вида I и II очевидно означает, что выделяются новые двойные коммутаторы, ясно, что после всех кососимметризирований (в которых в этом случае участвуют все буквы), останутся только двойные коммутаторы. Следовательно, диаграмме соответствует только один неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом

$$d_1(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{m/2}.$$

1б) m — нечетное. Здесь нужно рассмотреть произведения вида $[x, y]\times[z, x][y, z][x, y, z]$. В силу тождества Якоби $[x, y, z]=0$, прямым подсчетом проверяется, что

$$[x, y][z, x][y, z][x, y, z]=[x, y][z, x][y, z][x, y, z]=[x, y][z, x][y, z][x, y, z]$$

$$=[x, y][z, x][y, z][x, y, z]=\cdots=[x, y][z, x][y, z][x, y, z],$$

т. е. в этом случае диаграмме D_λ соответствует только неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом

$$d_2(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{(m-3)/2}[x, y][z, x][y, z][x, y, z].$$

2) $l=0, k>0$. Здесь нужно рассмотреть следующие случаи кососимметризирования, которых мы до сих пор не отмечали:

2а) $[x, y][z, x][x, y][z, x]$. Легко проверяется, учитывая тождество Холла, что выполняются равенства

$$[x, y][z, x][x, y][z, x]=[x, y][z, x][x, y][z, x]=[x, y][z, x][x, y][z, x]$$
$$=[x, y][z, x][x, y][z, x]$$

и т. д.

2б) $[x, y][z, y][z, x, x, \dots, x]$. В силу тождества (3) имеем $[x, y][z, y][z, x, x, \dots, x]=[[x, y][z, x][y, z, x^{(2)}], x, \dots, x]$. Следовательно, достаточно рассмотреть только случай $[x, y][z, x][y, z, x^{(2)}]$:

$$[x, y][z, x][y, z, x^{(2)}]+[x, y][z, y][z, x, x^{(2)}]+[y, z][x, z][x, y, x^{(2)}]$$
$$+[y, z][x, y][z, x, x^{(2)}]+[z, x][y, z][x, y, x^{(2)}]+[z, x][y, x][y, z, x^{(2)}]$$
$$=[[x, y], [z, y]][z, x, x^{(2)}]+[[y, z], [x, z]][x, y, x^{(2)}]+[[x, z], [x, y]][y, z, x^{(2)}]$$
$$=[[[x, y], [z, y]][z, x], x, x]+[[x, y], [z, y], x, x][z, x]+[[[y, z], [x, z]][x, y], x, x]$$
$$+[[y, z], [x, z], x, x][x, y]+[[[x, z], [x, y]][y, z], x, x]=2([x, y][z, x][x, y][z, x])$$
$$+[[[x, y], [z, y]][z, x]+[[y, z], [x, z]][x, y]+[[x, z], [x, y]][y, z], x, x].$$

Из тождества (4) $[[y, z]\circ[x, z], x]=0$, заменой y на $[x, y]$, z_1 на $[y, z]$, z_2 на z, получаем

$$[[[x, y], [y, z]]\circ[x, z], x]-[[x, y, z]\circ[y, z, x], x]=0.$$

Аналогично из тождества $[[y, z]\circ[x, y], x]=0$ при $y_1=[y, z]$, $y_2=y$, $z=[x, z]$ следует

$$[[[y, z], [x, z]]\circ[x, y], x]=-[[x, z, y]\circ[y, z, x], x].$$

Следовательно, согласно тождеству Якоби,

$$[[[x, y], [y, z]]\circ[x, z]+[[y, z]\circ[x, z]]\circ[x, y], x]=-2[[x, y, z]^2, x]=0.$$

Из последнего равенства, заменой x на y и обратно, получаем

$$[[[y, x], [x, z]]\circ[y, z], y]=-[[[x, z], [y, z]]\circ[y, x], y],$$

что дает при $y_1=x$, $y_2=y_3=y$

$$[[[x, z], [x, y]]\circ[y, z], x]=[[[x, z], [y, z][\circ[x, y], x]$$

и аналогичным образом, заменой x на z и, обратно —

$$[[[x, z], [x, y]]\circ[y, z], x]=[[[y, z], [x, y]]\circ[x, z], x].$$

Следовательно,

$$[[[x, z], [x, y]\circ[y, z], x]=[[[x, y], [y, z]]\circ[x, z], x]=[[[y, z], [x, z]]\circ[x, y], x]=0.$$

Так как

$$[[x, y], [z, y]][z, x]+[[y, z], [x, z]][x, y]+[[x, z], [x, y]][y, z]$$
$$=[z, x][[x, y], [z, y]]+[x, y][[y, z], [x, z]]+[y, z][[x, z], [x, y]],$$

то выполняется равенство

$$[x, y]\,[z, x]\,[x, y]\,[z, x] = (1/2)\,[x, y]\,[z, x]\,[y, z, x^{(2)}],$$

т. е. результаты кососимметризирований вида 2а) и 2б) совпадают.

2в) В силу равенства $[y, z]\,[x, y]\,[z, x, \ldots] = [y, z]\,[x, y]\,[z, x, \ldots]$, которое легко проверить прямым подсчетом, остается рассмотреть только кососимметризирование следующего вида:

$$\begin{aligned}[y, z]\,[x, y]\,[z, x, x, \ldots] = [y, z]\,[x, y]\,[z, x, x, \ldots] + [z, x]\,[x, y]\,[z, x, y, \ldots]\\ + [x, y]^2[z, x, z, \ldots] + [y, z]\,[z, x]\,[y, x, x, \ldots] + [z, x]^2[y, x, y, \ldots]\\ + [x, y]\,[z, x]\,[y, x, z, \ldots].\end{aligned}$$

Согласно тождеству Якоби,

$$[z, x]\,[x, y]\,[z, x, y, \ldots] = [z, x]\,[x, y]\,[z, y, x, \ldots] - [z, x]\,[x, y]\,[x, y, z, \ldots],$$

$$[x, y]\,[z, x]\,[y, x, z, \ldots] = [x, y]\,[z, x]\,[y, z, x, \ldots] - [x, y]\,[z, x]\,[x, z, y, \ldots].$$

В силу тождеств (1) и (2),

$$\begin{aligned}&[x, z]\,[x, y]\,[x, y, z] - [x, y]\,[x, z]\,[z, x, y] = -[x, z]\,[x, y, z]\,[x, y] + [x, y]\,[x, z, y]\,[z, x]\\ &= [x, z, z]\,[x, y]^2 - [[x, z]\,[x, y], z]\,[x, y] + [x, y, y]\,[x, z]^2 - [[x, y]\,[x, z], y]\,[x, z]\\ &= -[x, y]^2[z, x, z] - [x, z]^2[y, x, y] + [[x, z]\,[z, y], x]\,[x, y] + [[x, y]\,[y, z], x]\,[x, z]\\ &= -[x, y]^2[z, x, z] - [x, z]^2[y, x, y] - [x, z]\,[z, y]\,[x, y, x] - [x, y]\,[y, z]\,[x, z, x]\\ &\quad + [[x, z]\,[z, y]\,[x, y] + [x, y]\,[y, z]\,[x, z], x].\end{aligned}$$

Из тождества (11) получаем

$$\begin{aligned}[x, y]\,[y, z]\,[x, z] - [x, z]\,[y, z]\,[x, y] = -[y, z]\,[x, y]\,[x, z] + [x, z]\,([x, y] \circ [y, z])\\ -[x, z]\,[y, z]\,[x, y] = [x, z]\,[x, y]\,[y, z] - [y, z]\,[x, y]\,[x, z].\end{aligned}$$

Из доказанного в 2б) тождества $[[[x, z], [x, y]] \circ [y, z], x] = 0$ и (11) следуют равенства

$$\begin{aligned}[x, y]\,[y, z]\,[x, z] - [x, z]\,[y, z]\,[x, y], x] = (1/2)\,[[x, y]\,[y, z]\,[x, z] - [x, z]\,[y, z]\,[x, y],\\ + [x, z]\,[x, y]\,[y, z] - [y, z]\,[x, y]\,[x, z], x] = (1/2)\,[[y, z]\,[x, z]\,[x, y]\\ - [x, y]\,[x, z]\,[y, z] + [x, z]\,[x, y]\,[y, z] - [y, z]\,[x, y]\,[x, z], x]\\ = (1/2)\,[[[x, z], [x, y]] \circ [y, z], x] = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$[y, z]\,[x, y]\,[z, x, x, \ldots] - [y, z]\,[x, y]\,[z, x, x, \ldots].$$

Окончательно, когда $l = 0$, $k > 0$, имеем: диаграмме D_λ соответствует только неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом

$$d_3(x, y, z) = ([x, y]\,[z, x]\,[y, z])^{(m-1)/2}[x, y]\,[z, x, x^{(k-1)}],$$

если m нечетное, и многочленом

$$d_4(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{(m-2)/2}[x, y][z, y][z, x, x^{(k)}],$$

если m — четное.

3) $k=l\neq 0$, т. е. в диаграмме D_λ есть столбцы длины два.

Аналогичными рассмотрениями, как в предыдущем случае, с учетом упомянутых выше результатов работы [4], получаем: диаграмме D_λ соответствует только неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом

$$d_5(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{m/2}[x, y]^k,$$

если m — четное, многочленом

$$d_6(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{(m-1)/2}[x, y][z, x, y][x, y]^{k-1},$$

если m — нечетное.

Точно также и в случае

4) $0\neq l<k$, диаграмме D_λ соответствует только неприводимый подмодуль $\overline{\Gamma}_n^{(3)}(\mathfrak{N})$, порождаемый многочленом

$$d_7(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{m/2}[x, y]^{l-1}[x, y, x^{(k)}],$$

если m — четное, и многочленом

$$d_8(x, y, z)=([x, y][z, x][y, z])^{(m-1)/2}[x, y]^{l-1}[x, y][z, [x, y], x^{(k)}],$$

если m — нечетное.

То, что многочлен $[x, y][z, x][y, z]$ не является тождеством алгебры $M_2(K)$, следует из работы Дренского [2]. Для остальных множителей это проверяется на конкретных матрицах. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика* **12**, 1973, 83—113.
2. В. С. Дренски. Минимальный базис тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика* **20**, 1981, № 3, 282—290.
3. Ю. А. Бахтурин. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$. *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, 1979, вып. 5, 205—208.
4. Р. С. Николаев. Тождества от двух переменных в матричной алгебре второго порядка над полем характеристики нуль, *Сердика*, **10**, 1984, 11—18.
5. Р. С. Николаев. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики нуль. *Плиска* **8**, 1986, 65—76.
6. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сборник*, **115**, № 1, 98—115.
7. А. П. Попов. Тождества тензорного квадрата алгебры Грассмана. *Алгебра и логика*, **21**, 1982, 442—471.
8. W. Spech. Gesetze in Ringen. I. *Math. Z.*, **52**, 1950, No 5, 557—589.
9. A. Kerber. Representations of permutation groups I. *Lecture Notes in Math.*, **240**, 1971.
10. П. А. Сидеров. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем. *Плиска*, **2**, 1981, 143—152.

Высший машинно-электротехнический институт
9010 Варна Болгария

Поступила 17. 10. 1983