СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ " К Л И М Е Н Т О Х Р И Д С К И "

МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ -"Катедра висш анализ "

=-=

№ 4

Маунг Таунг Мийнт

СЪЩЕСТВУВАНЕ И КОНСТРУКЦИЯ НА РЕЗОНАНСНИ ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА КЛАСИ ОТ АВТОНОМНИ СИСТЕМИ ОТ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ СЪС МАЛЪК ПАРАМЕТЪР ПРИ ПОЛУНЕЧЕТНИ ПОЛИНОМНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ.

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на научна степен " кандидат на физико - математическите науки ".

РЪКОВОДИТЕЛ НА КАТЕДРА И НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ:

Проф. Д-р. Акад. Л. Илиев.

СОФИЯ - Март 1971 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

§.7. Построяване на периодични решения и периодите им при полиноми от втора степен, когато началните условия се определят от случаите II и IV .

§.8. Анулиране на коефициентите пред вековите членове.

§.9. Приспособяване на метода от § 6 към случаите I и III при общо третиране на задачата.

§.10. Построяване на периодични решения и тяхните периоди за полиномни нелинейности от втора степен за случаите I и III / последователни приближения и анулиране на коефициентите пред вековите членове /.

§.11. Анулиране на коефициентите пред вековите членове при полиноми от трета степен и намиране на някои елементи от конструкцията на периодичните решения за този случай /схема на решението за намиране на a, при случая I, II, III, IV /.

IV. Г Л А В А Т Р Е Т А .

§.12. Един механичен модел при полиномни нелинейности от трета степен, когато резонансната характеристика κ е по-голяма от три.

§.13. Числено намиране на условията за периодичност и за построяване на периодичните решения при модела за случаите I и III, и намиране на съответните κ .

§.14. Числено намиране при модела на съвкупноста от стойности на резонансната характеристика за случаите II и IV.

V. И З В О Д И И З А К Л Ю Ч Е Н И Я.

Цитирана литература.

I. У В О Д .

§.1. УСЛОВИЯ ЗА ПЕРИОДИЧНОСТ ПРИ АВТОНОМНИ СИСТЕМИ ОТ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С МАЛЪК ПАРАМЕТЪР ПРИ ПОЛУНЕЧЕТНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ.

Да означим с $G^{(n)}$ съвкупността от нелинейните автономни системи диференциални уравнения от вида:

$$\psi^{\cdot\cdot} = C\,\psi + \lambda^2 f(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot}) \tag{1.1}$$

където λ^2 е малък параметър, а $C = (C_{jk})$ е постоянна квадратна матрица от $n^{\text{-ти}}$ ред с различни и отрицателни собствени стойности

$$-k_1^2 < -k_2^2 < -k_3^2 < \cdots\cdots\cdots < -k_n^2$$

Освен това

$$\psi = Colon(\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots \psi_n)$$

и

$$f(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot}) = Colon\left(f_1(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot}), f_2(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot}), \cdots, f_n(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot})\right)$$

където

$$f_j(\lambda^2, \psi, \psi^{\cdot}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{2\nu} g_{j\nu}(\psi, \psi^{\cdot}), \qquad j = 1, 2, 3, \cdots n \tag{1.2}$$

Предполага се, че функциите $g_{j\nu}(\psi, \psi^{\cdot})$ са аналитични спрямо всяка една от своите $2n$ на брой променливи и освен това, се предполага, че са удовлетворени равенствата:

$$g_{j\nu}(-\psi, \psi^{\cdot}) = -g_{j\nu}(\psi, \psi^{\cdot}) \tag{1.3}$$

Развитията по степените на λ^2 от десните страни на (1.2) са сходящи в околността на точката $\lambda = 0$. Движенията на редица динамични системи се описват от представители на въведеното множество $G^{(n)}$. Тук на първо място трябва да бъдат посочени основните работи [1] и [2] на Г. Брадистилов, които послужиха като основа за изследване и на други автори [3], [5] и т. н. т.

Съществуват интересни изследвания върху автономни системи, чиито десни страни притежават свойства аналогични и по-общи от тези отбелязани чрез равенствата (1.3). Казаното се потвърждава от работите [13], [15], [16], [17] и [18]. В двете монографии [11] и [9] са доказани теореми засягащи периодични решения на системи от вида (1.1), в случаи когато няма връзка между собствените стойности на матрицата C

Поради зависимостите (1.3) множеството $G^{(n)}$ има свойство изразено със следната теорема:

$T_1^{(1)}$. Нека $\psi(t)$ е решение на системата $(1.1) \in G^{(n)}$, както $\psi(0)=0$. Тогава, ако $\psi(q^*)=0$, където $q^*>0$, то решението $\psi(t)$ е периодично с период $2q^*$.

Доказателството на тази теорема се базира на свойството според което $(-1)\psi(2q^*-t)$ е също решение на $(1.1) \in G^{(n)}$, щом като $\psi(t)$ е решение. Повече подробности относно значението и доказателството на тази теорема могат да се видят, както в работите [1] и [2] така и в работите [10] и [12]. В понататъшните изследвания, $T_1^{(1)}$ ще играе важна роля.

§.2. УСЛОВИЯ ЗА ПЕРИОДИЧНОСТ ПРИ РЕЗОНАНСНИ СЛУЧАИ /НАЧАЛНИ УСЛОВИЯ И СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ/ .

Да означим с $G^{(n)}_{(k)}$ снова подмножество на $G^{(n)}$, което се получава когато

(2.1) $$k_\mu = k . k_n$$

където k е цяло по-голямо или равно на две и

$$\mu = 1, 2, 3, - - - - - - - , n-1.$$

Ако системата $(1.1) \in G^{(n)}_{(k)}$, бележим с $\lambda^{(\mu)} = (\lambda_{\mu_1}, \lambda_{\mu_2}, \dots, \lambda_{\mu_n})$ ненулев собствен вектор на матрицата C ,отговарящ на собствената стойност $(-1)\, k_\mu^2$.Специално когато $n=2$, $(\lambda_{11}, \lambda_{12})$ е решение на системата

(2.2) $$(c_{11} + k^2 k_2^2)\lambda_{11} + c_{12}\lambda_{12} = 0 \;, \quad c_{21}\lambda_{11} + (c_{22} + k^2 k_2^2)\lambda_{12} = 0 \;,$$

а двойката числа $(\lambda_{21}, \lambda_{22})$ се опедeля от системата

(2.3) $$(c_{11} + k_2^2)\lambda_{21} + c_{12}\lambda_{12} = 0 \;, \quad c_{21}\lambda_{21} + (c_{22} + k_2^2)\lambda_{22} = 0$$

с $G^{(n)}_{(0)}(k)$ ще означаваме $G^{(n)}(k)$ в случая когато $\lambda^2 = 0$.

Да означим с $\varphi_0(t)$ снова решение на $(1.1) \in G^{(2)}_{(0)}(k)$, което се получава при начални условия

(2.4) $$\varphi(0) = 0 \;, \quad \varphi'(0) = p + q\,\nu$$

където ν е реален параметър,а векторите p и q се определят от равенствата:

$$(2.5)\quad \begin{array}{ll} \mathrm{I}:\ p=\lambda^{(1)},\ q=k\lambda^{(2)}; & \mathrm{II}:\ p=\lambda^{(2)},\ q=k\lambda^{(1)} \\ \mathrm{III}:\ p=\lambda^{(1)},\ q=\frac{1}{k}\lambda^{(2)}; & \mathrm{IV}:\ p=\lambda^{(2)},\ q=\frac{1}{k}\lambda^{(1)} \end{array}$$

в зависимост от това кой от посочените четири случая се разглежда. Следователно:

$$(2.6)\qquad \psi_0(t) = r\,\sin kk_2 t + s\,\sin k_2 t$$

където векторите r и s имат стойности

$$(2.7)\quad \begin{array}{ll} \mathrm{I}:\ r=\frac{1}{kk_2}\lambda^{(1)},\ s=\frac{kN}{k_2}\lambda^{(2)}; & \mathrm{II}:\ r=\frac{N}{k}\lambda^{(1)},\ s=\frac{1}{k_2}\lambda^{(2)} \\ \mathrm{III}:\ r=\frac{1}{kk_2}\lambda^{(1)},\ s=\frac{N}{kk_2}\lambda^{(2)}; & \mathrm{IV}:\ r=\frac{N}{k^2k_2}\lambda^{(1)},\ s=\frac{1}{k_2}\lambda^{(2)} \end{array}$$

Като се използва един метод от работа [4] и се приложи по подходящ начин теорема $T_1^{(1)}$, се доказва в работа [12] следната теорема:

$T_1^{(2)}$. Нека $Q_i(t)$ е решение на системата

$$(2.8)\qquad \ddot{Q}_i = c_{i1}Q_1 + c_{i2}Q_2 + g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20}),\ i=1,2.$$

при начални условия $Q_i(0) = \dot{Q}_i(0) = 0$ и нека $\varepsilon=+1$, когато k е четно, а $\varepsilon=-1$ когато k е нечетно. Ако параметърът N е прост корен на уравнението

$$(2.9)\qquad (\varepsilon r_1 k - s_1)\,Q_2\!\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - (\varepsilon r_2 k - s_2)\,Q_1\!\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = 0$$

то решението $\psi(t)$ на системата (1.1) $\in C^{(2)}(K)$ с начални условия $\psi(0)=0$ и $\dot{\psi}(0)=p+q[N+\beta(\lambda^{(2)})]$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}[\pi + \delta(\lambda^2)]$

Да отбележим, че в горната теорема $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ означават достатъчно малки по абсолютна стойност скаларни функции на малкия параметър λ^2. Ще отбележим още, че $\beta(0)=\delta(0)=0$

От казаното за функциите $Q_i(t)$ е ясно, че те имат формата

$$Q_i(t) = \frac{\lambda_{1i}}{\Delta k k_2}\int_0^t [\lambda_{21} g_{21}(u) - \lambda_{22} g_{11}(u)] \sin k k_2 (u-t)\,du + \tag{2.10}$$
$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}\int_0^t [\lambda_{12} g_{11}(u) - \lambda_{11} g_{21}(u)] \sin k_2 (u-t)\,du$$

От тук нататък със Δ ще означаваме

$$\Delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

С оглед на понататъшни наши разглеждания ще въведем още тук и някои други функции.

Означаваме с $P_i(t)$ онова решение на системата $G^{(2)}_{(0)}(k)$ което се получава при начални условия $P(0)=0$ и $P'(0)=q$
Следователно важат формулите:

$$\mathrm{I,III}:\quad P_i(t) = x_{1i}\sin k_2 t;\ \mathrm{I}: x_{i1} = \frac{\lambda_{2i}k}{k_2};\ \mathrm{III}: x_{1i} = \frac{\lambda_{2i}}{k k_2}$$

(2.11)

$$\mathrm{II,IV}:\quad P_i(t) = x_{2i}\sin k k_2 t;\ \mathrm{II}: x_{2i} = \frac{\lambda_{1i}}{k_2};\ \mathrm{IV}: x_{2i} = \frac{\lambda_{1i}}{k^2 k_2};$$

Най-сетне да означим с $R_i(t)$ онова решение на системата

$$\ddot{R}_i = c_{i1} R_1 + c_{i2} R_2 + \bar{g}_{i1}(t) \tag{2.12}$$

което се получава при начални условия

$$R(0) = \dot{R}(0) = 0 \tag{2.13}$$

Тук $\bar{g}_{i1}(t)$ са функции дефинирани чрез равенствата

$$\begin{aligned} \bar{g}_{i1}(t) &= \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_1} P_1(t) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_2} P_2(t) + \\ &+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1} \dot{P}_1(t) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2} \dot{P}_2(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

От казаното е ясно, че функциите $R_i(t)$ притежават структурата на функциите $Q_i(t)$, само че сега е необходимо във формулите (2.10) $g_{i1}(u)$ да бъде заместено с $\bar{g}_{i1}(u)$. По-точно имаме:

$$\begin{aligned} R_i(t) &= \frac{\lambda_{1i}}{\Delta k k_2} \int_0^t [\lambda_{21} \bar{g}_{21}(u) - \lambda_{22} \bar{g}_{11}(u)] \sin k k_2 (u-t)\, du + \\ &+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2} \int_0^t [\lambda_{12} \bar{g}_{11}(u) - \lambda_{11} \bar{g}_{21}(u)] \sin k_2 (u-t)\, du \end{aligned} \tag{2.15}$$

II. ГЛАВА ПЪРВА.

§.3. СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ ПРИ ПОЛУНЕЧЕТНИ ПОЛИНОМНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН КОГАТО $k=2$.

Тук ще изучим условието за периодичност (2.9) от теорема $T_1^{(2)}$ в случай, когато функциите $g_{i1}(t)$, удовлетворяващи основните равенства (1.3), са полиноми от втора степен по отношение на $(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$. При това най-напред ще разглеждаме специалните случаи, когато цялото число k, което характеризира множеството $G^{(n)}(k)$, е равно на числото две. В литературата се срещат редица изследвания на системи диференциални уравнения, нелинейните части на които имат полиномен вид, но когато собствените стойности на матрицата C не са свързани, както в нашия случай, с цяло число от типа на k. В други публикации пък, се разглеждат за разлика от нас, неавтономни случаи. В казаната насока, могат да се посочат например работите [7] и [8].

В този параграф ние ще следваме пътя от работа [20] в която обаче, съответната класа $G^{(2)}(k)$ не се предполага в нормален вид.

Може да се докаже, че всички полиноми на $(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$ от втора степен, които са нечетни спрямо ψ_1, ψ_2, се дават с формулата:

(3.1) $A\psi_1\dot{\psi}_1 + B\psi_1\dot{\psi}_2 + C\psi_2\dot{\psi}_1 + D\psi_2\dot{\psi}_2 + E\psi_1 + F\psi_2$.

Следователно от сега нататък, функциите $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ ще бъдат избрани съгласно равенствата

$$g_{11}(\psi_1,\psi_2,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2) = a_{13}\psi_1\dot{\psi}_1 + a_{14}\psi_1\dot{\psi}_2 + a_{23}\psi_2\dot{\psi}_1 + a_{24}\psi_2\dot{\psi}_2 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

(3.2)

$$g_{21}(\psi_1,\psi_2,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2) = b_{13}\psi_1\dot{\psi}_1 + b_{14}\psi_1\dot{\psi}_2 + b_{23}\psi_2\dot{\psi}_1 + b_{24}\psi_2\dot{\psi}_2 + b_1\psi_1 + b_2\psi_2.$$

Когато в множеството $G^{(n)}(K)$ е извършен изборът (3.2), то това множество ще се означава с $G_2^{(n)}(K)$. От всичко казано до тук, следва, че в настоящия параграф, ще се изучат условията за периодичност (2.9) от теорема $T_1^{(2)}$, когато системата (1.1) принадлежи на множеството $G_2^{(2)}(2)$.

Най-напред е необходимо да се пресметне $g_{i1}(u)$. Това става, като в (3.2) заместим $\psi, \dot{\psi}$ съответно с $\psi_0, \dot{\psi}_0$, от формулите (2.6). Така се получава равенството

(3.3)

$$\begin{aligned} g_{11}(u) = {} & (a_{13}r_1^2 + a_{14}r_1r_2 + a_{23}r_1r_2 + a_{24}r_2^2)kk_2 \sin kk_2u \cos kk_2u + \\ & + (a_{13}r_1s_1 + a_{14}r_1s_2 + a_{23}r_2s_1 + a_{24}r_2s_2)k_2 \sin kk_2u \cos k_2u + \\ & + (a_{13}r_1s_1 + a_{14}r_2s_1 + a_{23}r_1s_2 + a_{24}r_2s_2)kk_2 \sin k_2u \cos kk_2u + \\ & + (a_{13}s_1^2 + a_{14}s_1s_2 + a_{23}s_1s_2 + a_{24}s_2^2)k_2 \sin k_2u \cos k_2u + \\ & + (a_1r_1 + a_2r_2)\sin kk_2u + (a_1s_1 + a_2s_2)\sin k_2u. \end{aligned}$$

По аналогичен път, като се използува второто от равенствата (3.2) и формулите (2.6), се получава израз за $g_{21}(u)$. Той има същата конструкция, каквато има $g_{11}(u)$ от (3.3), но сега, вместо коефициентите a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_1 и a_2 идват коефициентите b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_1 и b_2.

Получените изрази за $g_{11}(u)$ и $g_{21}(u)$ заместваме в формулите (2.10), както освен това, вземеме $t=\frac{\pi}{k_2}$, така получаваме равенствата

$$
\begin{aligned}
Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta k_2^2}\Big[\lambda_{21}\left(b_{13}s_1^2+b_{14}s_1s_2+b_{23}s_1s_2+b_{24}s_2^2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}s_1^2+a_{14}s_1s_2+a_{23}s_1s_2+a_{24}s_2^2\right)+ \\
& +\frac{\pi\lambda_{1i}}{4\Delta k_2^2}\Big[\lambda_{21}\left(b_1r_1+b_2r_2\right)-\lambda_{22}\left(a_1r_1+a_2r_2\right)\Big]- \\
& -\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2}\Big[\lambda_{12}\left(a_{13}r_1s_1+a_{14}r_1s_2+a_{23}r_2s_1+a_{24}r_2s_2\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}r_1s_1+b_{14}r_1s_2+b_{23}r_2s_1+b_{24}r_2s_2\right)\Big]+ \\
& +\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}\Big[\lambda_{12}\left(a_{13}r_1s_1+a_{14}r_2s_1+a_{23}r_1s_2+a_{24}r_2s_2\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}r_1s_1+b_{14}r_2s_1+b_{23}r_1s_2+b_{24}r_2s_2\right)\Big]+ \\
& -\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2}\Big[\lambda_{12}\left(a_1s_1+a_2s_2\right)-\lambda_{11}\left(b_1s_1+b_2s_2\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

След заместване на $Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ от (3.4) в (2.9) ще получим търсеното условие за параметъра N. Да не забравяме, че в този параграф се разглежда случая $k=2$. Освен това, ще разгледаме подробно всеки един от случаите I, II, III, IV, съгласно равенствата (2.5).

В случая I условието (2.9), съгласно казаното по-горе, приема вида

$$
AN^3+BN=0 \tag{3.5}
$$

където коефициентите A и B са

$$A = \frac{1}{k_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^2 + b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{22}^2\right) - \lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^2 + a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{22}^2\right)\right]$$

$$B = \frac{1}{4}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}\right) - \lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12}\right)\right] - \left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22}\right)\right]$$

$$(3.6)\qquad - \frac{1}{4}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

Вече сме в състояние да формулираме съответните теореми

$T_1^{(3)}$. Нека величината B от (3.6) да бъде различна от нула. Тогава решението $\psi(t)$ на системата $G_2^{(2)}(2)$, при начални условия $\psi(0)=0$, $\dot\psi(0)=\lambda^{(1)}+2\lambda^{(2)}[\beta(\lambda^2)]$ е периодично с период $\frac{2}{k_2}[\pi+\delta(\lambda^2)]$. Тук $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ са две достатъчно малки функции на малкия параметър λ^2.

Горната теорема отговаря на случая $N=0$.

$T_2^{(3)}$. Да предположим, че е изпълнено условието

$$(3.7)\qquad AB < 0,$$

където A и B се определят от равенствата (3.6). Тогава решението $\psi(t)$ на системата $G_2^{(2)}(2)$, при начални условия

$$(3.8)\qquad \psi(0)=0\,,\ \psi'(0)=\lambda^{(1)}+2\lambda^{(2)}\left[\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}+\beta(\lambda^2)\right]$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$.

Аналогични резултати се получават и за случая III. Сега условието (3.5) се запазва, но кофициентите A и B имат други стойности. По-точно имаме

$$A=\frac{1}{16k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2)-\lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2)\right]$$

$$B=\frac{1}{4}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\right]-\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\right]-$$

$$(3.9)\qquad -\frac{1}{4}\left[\lambda_{21}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]$$

Да формулираме съответните резултати за случая II. Като вземем предвид (3.4) и r_i, s_i от II на (2.7) и заместим в (2.9) $(\varepsilon=+1,\ k=2)$, ще получим уравнението

$$(3.10)\qquad AN^2+BN+C=0$$

където кофициентите A , B и C се определят чрез равенствата

$$A=\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]-$$

$$(3.11)\qquad -\frac{1}{2}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]$$

$$B=\frac{1}{4}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\right]-\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\right]$$

$$C=\frac{1}{8k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2)-\lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2)\right]$$

$T_3^{(3)}$. Нека са изпълнени условията $B^2-4AC>0$; където A, B, C, се определят от равенствата (3.11). Твърди се тогава, че съществуват $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$, такива, че решението $\psi(t)$ на системата, $G_2^{(2)}(2)$, получено при начални условия

$$\psi(0)=0\,,\quad \dot\psi(0)=\overset{(2)}{\lambda}+2\overset{(1)}{\lambda}\left[\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}+\beta(\lambda^2)\right]$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$.

За случая IV резултатът е аналогичен. Условието (3.10) за N се запазва, обаче A, B, C, сега имат вида:

$$A=\frac{1}{4}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]$$

$$B=\frac{1}{4}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\right]-\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\right]$$

(3.12)

$$C=\frac{1}{2k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2)-\lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2)\right]$$

В случая IV началните условия имат вида

$$\psi(0)=0\,,\quad \dot\psi(0)=\overset{(2)}{\lambda}+\frac{1}{2}\overset{(1)}{\lambda}\left[\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}+\beta(\lambda^2)\right]$$

§.4. СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ ЗА НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН ПРИ k ПО-ГОЛЯМО ОТ ДВЕ.

В настоящият параграф ще се изучат условията за периодичност (2.9), от теорема $T_1^{(2)}$, когато системата (1.1) принадлежи на множеството $G_2^{(2)}(k)$.

Обясненията които направихме по-горе, в § 3 за функциите $g_{i1}(t)$ спрямо $(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ са валидни и тук, но разликата е само в това, че сега резонансната характеристика k е по-голяма от две.

Със помощта на (3.2), (3.3), (2.7) и (2.10) при $t=\frac{\pi}{k_2}$ получаваме равенствата

$$Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\varepsilon\lambda_{1i}\pi}{2\Delta k k_2^2}\left[\lambda_{21}(b_1r_1+b_2r_2)-\lambda_{22}(a_1r_1+a_2r_2)\right]- \tag{4.1}$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2}\left[\lambda_{12}(a_1s_1+a_2s_2)-\lambda_{11}(b_1s_1+b_2s_2)\right]$$

Ако заместим $Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ от (4.1) в (2.9), ще получим търсеното условие за параметър N, когато резонансната характеристика k е по-голяма от две.

Когато разгледаме подробно всеки един от случаите I, II, III, IV, съгласно (2.7) установихме, че условието за параметъра N приема за всичките случаи един и същи вид:

$$AN=0 \tag{4.2}$$

където

$$A=\frac{1}{k}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12}\right)-\lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12}\right)\right]-$$

$$(4.2)\qquad -k\left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22}\right)\right]$$

Сега сме в състояние да формулираме теорема $T_1^{(4)}$.

$T_1^{(4)}$. Нека величината A от (4.2) да бъде различна от нула. Тогава решението $\psi(t)$ на системата $G_2^{(2)}(K)$, което има съответно начални условия

I $\qquad \psi(0)=0,\quad \dot\psi(0)=\overset{(1)}{\lambda}+k\overset{(2)}{\lambda}\left[\beta(\lambda^2)\right]$

II $\qquad \psi(0)=0,\quad \dot\psi(0)=\overset{(2)}{\lambda}+k\overset{(1)}{\lambda}\left[\beta(\lambda^2)\right]$

III $\qquad \psi(0)=0,\quad \dot\psi(0)=\overset{(1)}{\lambda}+\frac{1}{k}\cdot\overset{(2)}{\lambda}\left[\beta(\lambda^2)\right]$

IV $\qquad \psi(0)=0,\quad \dot\psi(0)=\overset{(2)}{\lambda}+\frac{1}{k}\overset{(1)}{\lambda}\left[\beta(\lambda^2)\right]$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$. Тук $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ са две достатъчно малки по абсолютна стойност функции на малкия параметър λ^2.

§.5. УСЛОВИЯ ЗА ПЕРИОДИЧНОСТ ПРИ ПОЛУНЕЧЕТНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН, КОГАТО РЕЗОНАНСНАТА ХАРАКТЕРИСТИКА k Е ПО-ГОЛЯМА ОТ ТРИ.

В настоящия параграф ще изучим условието за периодичност (2.9) от теорема $T_1^{(2)}$ в случая когато функциите g_{i1} удовлетворяващи основните равенства (1.3), са полиноми от трета степен спрямо $(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$. По-точно ще разгледаме случая когато резонансната характеристика k, която характеризираше множеството $G^{(n)}(k)$, е по-голяма от три. В литературата се срещат редица изследвания на системи диференциални уравнения нелинейните части на които имат полиномен вид, но когато собствените стойности на матрицата C не са свързани, както в нашия случай, с цяло число от типа на k. В други публикации пък, се разглеждат, за разлика от нас, неавтономни системи, на - пример работите [7] и [8].

Тук ще следваме пътя от работа [20], в която, за разлика от нас, съответната класа $G^{(2)}(k)$ не се предполага в нормален вид. Сега функцията $g_{11}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ има вида:

$$
\begin{aligned}
g_{11}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = {} & a^{(0,0)}_{(0,1)} \psi_2 + a^{(0,1)}_{(0,1)} \psi_2 \dot{\psi}_2 + a^{(0,2)}_{(0,1)} \psi_2 \dot{\psi}_2^2 + a^{(1,0)}_{(0,1)} \psi_2 \dot{\psi}_1 + \\
& + a^{(1,1)}_{(0,1)} \psi_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + a^{(2,0)}_{(0,1)} \psi_2 \dot{\psi}_1^2 + a^{(0,0)}_{(0,3)} \psi_2^3 + a^{(0,0)}_{(1,0)} \psi_1 + \\
& + a^{(0,1)}_{(1,0)} \psi_1 \dot{\psi}_2 + a^{(0,2)}_{(1,0)} \psi_1 \dot{\psi}_2^2 + a^{(1,0)}_{(1,0)} \psi_1 \dot{\psi}_1 + a^{(1,1)}_{(1,0)} \psi_1 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + \\
& + a^{(2,0)}_{(1,0)} \psi_1 \dot{\psi}_1^2 + a^{(0,0)}_{(1,2)} \psi_1 \psi_2^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)} \psi_1^2 \psi_2 + a^{(0,0)}_{(3,0)} \psi_1^3 .
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Функцията $g_{21}(u)$ има същата конструкция каквато и има $g_{11}(u)$ от (5.1), но сега вместо коефициентите $a^{(0,0)}_{(0,1)}$, $a^{(0,1)}_{(0,1)}$, $a^{(0,2)}_{(0,1)}$, $a^{(1,0)}_{(0,1)}$, $a^{(1,1)}_{(0,1)}$, $a^{(2,0)}_{(0,1)}$, $a^{(0,0)}_{(0,3)}$, $a^{(0,0)}_{(1,0)}$, $a^{(0,1)}_{(1,0)}$, $a^{(0,2)}_{(1,0)}$, $a^{(1,0)}_{(1,0)}$, $a^{(0,0)}_{(3,0)}$, $a^{(1,1)}_{(1,0)}$, $a^{(2,0)}_{(1,0)}$, $a^{(0,0)}_{(1,2)}$, $a^{(0,0)}_{(2,1)}$ идват коефициентите $b^{(0,0)}_{(0,1)}$, $b^{(0,1)}_{(0,1)}$, $b^{(0,2)}_{(0,1)}$, $b^{(1,0)}_{(0,1)}$, $b^{(1,1)}_{(0,1)}$, $b^{(2,0)}_{(0,1)}$, $b^{(0,0)}_{(0,3)}$, $b^{(0,0)}_{(1,0)}$, $b^{(0,1)}_{(1,0)}$, $b^{(0,2)}_{(1,0)}$, $b^{(1,0)}_{(1,0)}$, $b^{(1,1)}_{(1,0)}$, $b^{(2,0)}_{(1,0)}$, $b^{(0,0)}_{(1,2)}$, $b^{(0,0)}_{(2,1)}$, $b^{(0,0)}_{(3,0)}$

Сега ще означим с $G^{(n)}_{3}(K)$ онова подмножество на $G^{(n)}(K)$ в което е извършен изборът g_{i1} от типа на (5.1). От всичко казано по-горе става ясно, че тук ще се изучат условията за периодичност (2.9) от теорема $T^{(2)}_{1}$, когато системата (1.1) принадлежи на множеството $G^{(2)}_{3}(K)$.

Първо ще пресметнем $g_{11}(u)$, като в (5.1) заместим ψ, ψ° съответно с ψ_0, ψ_0° от формулите (2.6). Така се получават равенствата

$$
\begin{aligned}
g_{11}(u) = {} & A_1 \sin k\tfrac{k}{2}u + A_2 \sin\tfrac{k}{2}u + A_3 \sin k\tfrac{k}{2}u \cos k\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_4 \sin\tfrac{k}{2}u \cos k\tfrac{k}{2}u + A_5 \sin k\tfrac{k}{2}u \cos\tfrac{k}{2}u + A_6 \sin\tfrac{k}{2}u \cos\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_7 \sin k\tfrac{k}{2}u \cos^2 k\tfrac{k}{2}u + A_8 \sin\tfrac{k}{2}u \cos^2 k\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_9 \sin k\tfrac{k}{2}u \cos^2\tfrac{k}{2}u + A_{10} \sin\tfrac{k}{2}u \cos^2\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_{11} \sin k\tfrac{k}{2}u \cos k\tfrac{k}{2}u \cos\tfrac{k}{2}u + A_{12} \sin\tfrac{k}{2}u \cos\tfrac{k}{2}u \cos k\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_{13} \sin\tfrac{k}{2}u \cdot \sin^2 k\tfrac{k}{2}u + A_{14} \sin k\tfrac{k}{2}u \sin^2\tfrac{k}{2}u + \\
& + A_{15} \sin^3 k\tfrac{k}{2}u + A_{16} \sin^3\tfrac{k}{2}u
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

където са въведени означенията:

$$(5.3)\qquad A_1 = a^{(0,0)}_{(0,1)} r_2 + a^{(0,0)}_{(1,0)} r_1 ;$$

$$A_2 = a^{(0,0)}_{(0,1)} s_2 + a^{(0,0)}_{(1,0)} s_1 ;$$

$$A_3 = \kappa\kappa_2 \left[a^{(0,1)}_{(0,1)} r_2^2 + a^{(1,0)}_{(0,1)} r_1 r_2 + a^{(0,1)}_{(1,0)} r_1 r_2 + a^{(1,0)}_{(1,0)} r_1^2 \right],$$

$$A_4 = \kappa\kappa_2 \left[a^{(0,1)}_{(0,1)} r_2 s_2 + a^{(1,0)}_{(0,1)} r_1 s_2 + a^{(0,1)}_{(1,0)} r_2 s_1 + a^{(1,0)}_{(1,0)} r_1 s_1 \right],$$

$$A_5 = \kappa_2 \left[a^{(0,1)}_{(0,1)} r_2 s_2 + a^{(1,0)}_{(0,1)} r_2 s_1 + a^{(0,1)}_{(1,0)} r_1 s_2 + a^{(1,0)}_{(1,0)} r_1 s_1 \right],$$

$$A_6 = \kappa_2 \left[a^{(0,1)}_{(0,1)} s_2^2 + a^{(1,0)}_{(0,1)} s_1 s_2 + a^{(0,1)}_{(1,0)} s_1 s_2 + a^{(1,0)}_{(1,0)} s_1^2 \right]$$

$$A_7 = \kappa^2\kappa_2^2 \left[a^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)} r_1 r_2^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)} r_1^2 r_2 + a^{(1,1)}_{(1,0)} r_1^2 r_2 + a^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^3 + a^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 r_2^2 \right]$$

$$A_8 = \kappa^2\kappa_2^2 \left[a^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^2 s_2 + a^{(1,1)}_{(0,1)} r_1 r_2 s_2 + a^{(2,0)}_{(0,1)} r_1^2 s_2 + a^{(0,2)}_{(1,0)} s_1 r_2^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)} r_1 r_2 s_1 + a^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^2 s_1 \right],$$

$$A_9 = \kappa_2^2 \left[a^{(0,2)}_{(0,1)} r_2 s_2^2 + a^{(1,1)}_{(0,1)} r_2 s_1 s_2 + a^{(2,0)}_{(0,1)} r_2 s_1^2 + a^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 s_2^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)} r_1 s_1 s_2 + a^{(2,0)}_{(1,0)} r_1 s_1^2 \right],$$

$$A_{10} = \kappa_2^2 \left[a^{(0,2)}_{(0,1)} s_2^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)} s_1 s_2^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)} s_1^2 s_2 + a^{(0,2)}_{(1,0)} s_1 s_2^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)} s_1^2 s_2 + a^{(2,0)}_{(1,0)} s_1^3 \right]$$

$$A_{11} = \kappa\kappa_2^2 \left[2a^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^2 s_2 + a^{(1,1)}_{(0,1)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) r_2 + 2a^{(2,0)}_{(0,1)} r_1 r_2 s_1 + a^{(1,1)}_{(1,0)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) r_1 + 2a^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^2 s_1 + 2a^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 r_2 s_2 \right],$$

$$A_{12} = \kappa\kappa_2^2 \left[2a^{(0,2)}_{(0,1)} r_2 s_2^2 + a^{(1,1)}_{(0,1)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_2 + 2a^{(2,0)}_{(0,1)} r_1 s_1 s_2 + 2a^{(0,2)}_{(1,0)} r_2 s_1 s_2 + a^{(1,1)}_{(1,0)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_1 + 2a^{(2,0)}_{(1,0)} r_1 s_1^2 \right],$$

$$A_{13} = \left[3a^{(0,0)}_{(0,3)} r_2^2 s_2 + a^{(0,0)}_{(1,2)} r_2^2 s_1 + 2a^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 r_2 s_2 + a^{(0,0)}_{(2,1)} r_1^2 s_2 + 2a^{(0,0)}_{(2,1)} r_1 r_2 s_1 + 3a^{(0,0)}_{(3,0)} r_1^2 s_1 \right],$$

$$A_{14} = \left[3a^{(0,0)}_{(0,3)} r_2 s_2^2 + a^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 s_2^2 + 2a^{(0,0)}_{(1,2)} r_2 s_1 s_2 + a^{(0,0)}_{(2,1)} r_2 s_1^2 + 2a^{(0,0)}_{(2,1)} r_1 s_1 s_2 + 3a^{(0,0)}_{(3,0)} r_1 s_1^2 \right]$$

$$A_{15} = \left[a^{(0,0)}_{(0,3)} r_2^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 r_2^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)} r_1^2 r_2 + a^{(0,0)}_{(3,0)} r_1^3 \right]$$

$$A_{16} = \left[a^{(0,0)}_{(0,3)} s_2^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)} s_1 s_2^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)} s_1^2 s_2 + a^{(0,0)}_{(3,0)} s_1^3 \right]$$

По аналогичен начин се получава равенството за $g_{21}(u)$ което има същата конструкция каквато има $g_{11}(u)$ от (5.2), но сега вместо коефициентите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}$ със $a^{(0,0)}_{(0,1)}, a^{(0,1)}_{(0,1)}, a^{(0,2)}_{(0,1)}, a^{(1,0)}_{(0,1)}, a^{(1,1)}_{(0,1)}, a^{(2,0)}_{(0,1)}, a^{(0,0)}_{(0,3)}$, $a^{(0,0)}_{(1,0)}, a^{(0,1)}_{(1,0)}, a^{(0,2)}_{(1,0)}, a^{(1,0)}_{(1,0)}, a^{(1,1)}_{(1,0)}, a^{(2,0)}_{(1,0)}, a^{(0,0)}_{(1,2)}, a^{(0,0)}_{(2,1)}, a^{(0,0)}_{(3,0)}$ имаме коефициентите $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}$, $B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16}$ със $b^{(0,0)}_{(0,1)}, b^{(0,1)}_{(0,1)}, b^{(0,2)}_{(0,1)}, b^{(1,0)}_{(0,1)}, b^{(1,1)}_{(0,1)}, b^{(2,0)}_{(0,1)}$, $b^{(0,0)}_{(0,3)}, b^{(0,0)}_{(1,0)}, b^{(0,1)}_{(1,0)}, b^{(0,2)}_{(1,0)}, b^{(1,0)}_{(1,0)}, b^{(1,1)}_{(0,1)}, b^{(2,0)}_{(1,0)}, b^{(0,0)}_{(1,2)}, b^{(0,0)}_{(2,1)}, b^{(0,0)}_{(3,0)}$

По-точно получаваме формулата:

$$
\begin{aligned}
g_{21}(u) = {} & B_1 \sin kk_2 u + B_2 \sin k_2 u + B_3 \sin kk_2 u \cos kk_2 u + \\
& + B_4 \sin k_2 u \cos kk_2 u + B_5 \sin kk_2 u \cos k_2 u + \\
& + B_6 \sin k_2 u \cos k_2 u + B_7 \sin kk_2 u \cos^2 kk_2 u + \\
& + B_8 \sin k_2 u \cos^2 kk_2 u + B_9 \sin kk_2 u \cos^2 k_2 u + \\
& + B_{10} \sin k_2 u \cos^2 k_2 u + B_{11} \sin kk_2 u \cos kk_2 u \cos k_2 u + \\
& + B_{12} \sin k_2 u \cos k_2 u \cos kk_2 u + B_{13} \sin k_2 u \sin^2 kk_2 u + \\
& + B_{14} \sin kk_2 u \sin^2 k_2 u + B_{15} \sin^3 kk_2 u + B_{16} \sin^3 k_2 u
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

където са в сила означенията:

$$B_1 = b^{(0,0)}_{(0,1)} r_2 + b^{(0,0)}_{(1,0)} r_1 \;, \tag{5.5}$$

$$B_2 = b^{(0,0)}_{(0,1)} s_2 + b^{(0,0)}_{(1,0)} s_1 \;,$$

$$B_3 = \kappa\kappa_2 \left[b^{(0,1)}_{(0,1)} r_2^2 + b^{(1,0)}_{(0,1)} r_1 r_2 + b^{(0,1)}_{(1,0)} r_1 r_2 + b^{(1,0)}_{(1,0)} r_1^2 \right]$$

$$B_4 = \kappa\kappa_2 \left[b^{(0,1)}_{(0,1)} r_2 s_2 + b^{(1,0)}_{(0,1)} r_1 s_2 + b^{(0,1)}_{(1,0)} r_2 s_1 + b^{(1,0)}_{(1,0)} r_1 s_1 \right]$$

$$B_5 = \kappa_2 \left[b^{(0,1)}_{(0,1)} r_2 s_2 + b^{(1,0)}_{(0,1)} r_2 s_1 + b^{(0,1)}_{(1,0)} r_1 s_2 + b^{(1,0)}_{(1,0)} r_1 s_1 \right]$$

$$B_6 = \kappa_2 \left[b^{(0,1)}_{(0,1)} s_2^2 + b^{(1,0)}_{(0,1)} s_1 s_2 + b^{(0,1)}_{(1,0)} s_1 s_2 + b^{(1,0)}_{(1,0)} s_1^2 \right]$$

$$B_7 = \kappa\kappa_2^2 \left[b^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)} r_1 r_2^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)} r_1^2 r_2 + b^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 r_2^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)} r_1^2 r_2 + b^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^3 \right]$$

$$B_8 = \kappa^2\kappa_2^2 \left[b^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^2 s_2 + b^{(1,1)}_{(0,1)} r_1 r_2 s_2 + b^{(2,0)}_{(0,1)} r_1^2 s_2 + b^{(0,2)}_{(1,0)} r_2^2 s_1 + b^{(1,1)}_{(1,0)} r_1 r_2 s_1 + b^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^2 s_1 \right]$$

$$B_9 = \kappa_2^2 \left[b^{(0,2)}_{(0,1)} r_2 s_2^2 + b^{(1,1)}_{(0,1)} r_2 s_1 s_2 + b^{(2,0)}_{(0,1)} r_2 s_1^2 + b^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 s_2^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)} r_1 s_1 s_2 + b^{(2,0)}_{(1,0)} r_1 s_1^2 \right]$$

$$B_{10} = \kappa_2^2 \left[b^{(0,2)}_{(0,1)} s_2^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)} s_1 s_2^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)} s_1^2 s_2 + b^{(0,2)}_{(1,0)} s_1 s_2^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)} s_1^2 s_2 + b^{(2,0)}_{(1,0)} s_1^3 \right]$$

$$B_{11} = \kappa\kappa_2^2 \left[2b^{(0,2)}_{(0,1)} r_2^2 s_2 + b^{(1,1)}_{(0,1)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) r_2 + 2b^{(2,0)}_{(0,1)} r_1 r_2 s_1 + 2b^{(0,2)}_{(1,0)} r_1 r_2 s_2 + b^{(1,1)}_{(1,0)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) r_1 + 2b^{(2,0)}_{(1,0)} r_1^2 s_1 \right]$$

$$B_{12} = \kappa\kappa_2^2 \left[2b^{(0,2)}_{(0,1)} r_2 s_2^2 + b^{(1,1)}_{(0,1)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_2 + 2b^{(2,0)}_{(0,1)} r_1 s_1 s_2 + 2b^{(0,2)}_{(1,0)} r_2 s_1 s_2 + b^{(1,1)}_{(1,0)} (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_1 + 2b^{(2,0)}_{(1,0)} r_1 s_1^2 \right]$$

$$B_{13} = \left[3b^{(0,0)}_{(0,3)} r_2^2 s_2 + b^{(0,0)}_{(1,2)} r_2^2 s_1 + 2b^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 r_2 s_2 + b^{(0,0)}_{(2,1)} r_1^2 s_2 + 2b^{(0,0)}_{(2,1)} r_1 s_1 r_2 + 3b^{(0,0)}_{(3,0)} r_1^2 s_1 \right]$$

$$B_{14} = \left[3b^{(0,0)}_{(0,3)} r_2 s_2^2 + b^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 s_2^2 + 2b^{(0,0)}_{(1,2)} r_2 s_1 s_2 + b^{(0,0)}_{(2,1)} r_2 s_1^2 + 2b^{(0,0)}_{(2,1)} r_1 s_1 s_2 + 3b^{(0,0)}_{(3,0)} r_1 s_1^2 \right]$$

$$B_{15} = \left[b^{(0,0)}_{(0,3)} r_2^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)} r_1 r_2^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)} r_1^2 r_2 + b^{(0,0)}_{(3,0)} r_1^3 \right]$$

$$B_{16} = \left[b^{(0,0)}_{(0,3)} s_2^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)} s_1 s_2^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)} s_1^2 s_2 + b^{(0,0)}_{(3,0)} s_1^3 \right]$$

Ако заместим получените изрази за $g_{11}(u)$ и $g_{21}(u)$ във формулите (2.10) при $t = \frac{\pi}{k_2}$, получаваме равенствата:

$$
\begin{aligned}
Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{\varepsilon \pi \lambda_{1i}}{\Delta k k_2^2}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{21} B_1 - \lambda_{22} A_1\right) + \frac{1}{8}\left(\lambda_{21} B_7 - \lambda_{22} A_7\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_{21} B_9 - \lambda_{22} A_9\right)\right] + \\
& + \frac{\varepsilon \pi \lambda_{1i}}{\Delta k k_2^2}\left[\frac{1}{4}\left(\lambda_{21} B_{14} - \lambda_{22} A_{14}\right) + \frac{3}{8}\left(\lambda_{21} B_{15} - \lambda_{22} A_{15}\right)\right] - \\
& - \frac{\pi \lambda_{2i}}{\Delta k_2^2}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{12} A_2 - \lambda_{11} B_2\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_{12} A_8 - \lambda_{11} B_8\right) + \frac{1}{8}\left(\lambda_{12} A_{10} - \lambda_{11} B_{10}\right)\right] - \\
& - \frac{\pi \lambda_{2i}}{\Delta k_2^2}\left[\frac{1}{4}\left(\lambda_{12} A_{13} - \lambda_{11} B_{13}\right) + \frac{3}{8}\left(\lambda_{12} A_{16} - \lambda_{11} B_{16}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

където $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}$, и $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16}$ се дават от формулите (5.3) и (5.5).

След заместване на $Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ от (5.6) в (2.9) установяваме, че търсеното условие за параметъра N във всичките четири случая I, II, III, IV, има вида:

$$A N^3 + B N = 0 \tag{5.7}$$

Коефициентите A и B имат различни стойности за различните случаи.

За случая I коефициентите A и B от (5.7) имат стойности:

$$\Delta=\frac{K}{4K_2}\Big\{\lambda_{21}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2\Big]\Big\}$$

$$-\frac{K\lambda_{22}}{4K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]+$$

$$+\frac{K\lambda_{21}}{4K_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]-$$

$$-\frac{K\lambda_{22}}{4K_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]-$$

$$-\frac{K^3\lambda_{12}}{8K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{22}^2\lambda_{21}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{22}^2\lambda_{21}+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3\Big]+$$

$$+\frac{K^3\lambda_{11}}{8K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3\Big]-$$

$$-\frac{3K^3\lambda_{12}}{8K_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3\Big]+$$

$$+\frac{3K^3\lambda_{11}}{8K_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3\Big]$$

(5.8)

$$B=\frac{1}{2KK_2}\Big\{\lambda_{21}\Big[b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}+b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\Big]-\lambda_{22}\Big[a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}+a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{\lambda_{21}}{8KK_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{22}}{8KK_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3\Big]+$$

$$+\frac{3\lambda_{21}}{8K^3K_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3\Big]-$$

$$-\frac{3\lambda_{22}}{8K^3K_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3\Big]-$$

$$-\frac{K}{2K_2}\Big\{\lambda_{12}\Big[a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\Big]-\lambda_{11}\Big[b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\Big]\Big\}$$

$$-\frac{K}{4K_2}\Big\{\lambda_{12}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{K\lambda_{11}}{4K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{12}}{4KK_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^3\lambda_{21}+2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{12}+3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]+$$

$$+\frac{\lambda_{11}}{4KK_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+[illegible]+2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]$$

За случая II коефициентите **A** и **B** от (5.9) имат стойности:

$$
\begin{aligned}
A = {} & \frac{k\lambda_{21}}{8k_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{k\lambda_{22}}{8k_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3 \Big] + \\
& + \frac{3\lambda_{21}}{8kk_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{3\lambda_{22}}{8kk_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12} + a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{k^3\lambda_{12}}{4k_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22} + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22} + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21} + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21} \Big] + \\
& + \frac{k^3\lambda_{11}}{4k_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22} + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22} + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21} + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21} \Big] - \\
(5.9)\quad & - \frac{k\lambda_{12}}{4k_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^2\lambda_{21} + 2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22} + 2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + 3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21} \Big] + \\
& + \frac{k\lambda_{11}}{4k_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^2\lambda_{21} + 2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22} + 2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + 3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21} \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = {} & \frac{1}{2kk_2}\Big\{ \lambda_{21}\Big[b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12} + b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11} \Big] - \lambda_{22}\Big[a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12} + a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11} \Big] \Big\} + \\
& + \frac{\lambda_{21}}{4kk_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] \\
& - \frac{\lambda_{22}}{4kk_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{21}}{4kk_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + 2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{22}\lambda_{21} + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + 2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + 3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{22}}{4kk_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + 2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + 2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + 3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{k}{2k_2}\Big\{ \lambda_{12}\Big[a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21} \Big] - \lambda_{11}\Big[b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21} \Big] \Big\} - \\
& - \frac{k\lambda_{12}}{8k_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3 \Big] + \\
& + \frac{k\lambda_{11}}{8k_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3 \Big] - \\
& - \frac{3k\lambda_{12}}{8k_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3 \Big] + \\
& + \frac{3k\lambda_{11}}{8k_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3 \Big];
\end{aligned}
$$

За случая III коефициентите A и B от (5.7) имат стойности:

$$A=\frac{\lambda_{21}}{4K^3K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{22}}{4K^3K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]+$$

$$+\frac{\lambda_{21}}{4K^3K_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{22}}{4K^3K_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2+2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2+2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}+3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{12}}{8KK_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{22}^2\lambda_{21}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{22}^2\lambda_{21}+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3\Big]+$$

$$+\frac{\lambda_{11}}{8KK_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{22}^2\lambda_{21}+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3\Big]-$$

$$-\frac{3\lambda_{12}}{8KK_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3\Big]+$$

$$+\frac{3\lambda_{11}}{8KK_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3\Big],$$

(5.10)

$$B=\frac{1}{2KK_2}\Big[\lambda_{21}\Big\{b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}+b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\Big\}-\lambda_{22}\Big\{a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}+a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\Big\}\Big]+$$

$$+\frac{\lambda_{21}}{8KK_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{22}}{8KK_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3\Big]+$$

$$+\frac{3}{8K^3K_2^3}\Big[\lambda_{21}\Big\{b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3\Big\}-\lambda_{22}\Big\{a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3\Big\}\Big]-$$

$$-\frac{K}{2K_2}\Big[\lambda_{12}\Big\{a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\Big\}-\lambda_{11}\Big\{b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\Big\}\Big]-$$

$$-\frac{K\lambda_{12}}{4K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]+$$

$$+\frac{K\lambda_{11}}{4K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]-$$

$$-\frac{\lambda_{12}}{4KK_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]+$$

$$+\frac{\lambda_{11}}{4KK_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}+b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^2\lambda_{21}\Big]$$

За случая IV кoефициентите A и B от (5.7) имат стойности:

$$
\begin{aligned}
\Delta = {} & \frac{\lambda_{21}}{8K^4K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{11} + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{22}}{8K^4K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{12}^2\lambda_{11} + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}^3 \Big] + \\
& + \frac{3\lambda_{21}}{8K^6K_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{3\lambda_{22}}{8K^6K_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{11}^2 + a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}^3 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{12}}{4K^2K_2^2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{12}^2 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{12}^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{11}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{11}^2 \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{11}}{4K^2K_2^2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{12}^2 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{12}^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{22}\lambda_{11}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{11}^2 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{12}}{4K^4K_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}\lambda_{12}^2 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{12}^2 + 2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{22}\lambda_{11}^2 + 2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + 3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}\lambda_{11}^2 \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{11}}{4K^4K_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}\lambda_{12}^2 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{12}^2 + 2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{22}\lambda_{11}^2 + 2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} + 3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}\lambda_{11}^2 \Big];
\end{aligned}
$$

(5.11)

$$
\begin{aligned}
B = {} & \frac{1}{2K^2K_2}\Big[\lambda_{21}\big\{ b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12} + b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11} \big\} - \lambda_{22}\big\{ a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{12} + a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{11} \big\} \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{21}}{4K^2K_2^2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{22}}{4K^2K_2^2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + A^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{1}{2K_2}\Big[\lambda_{12}\big\{ a^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21} \big\} - \lambda_{11}\big\{ b^{(0,0)}_{(0,1)}\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(1,0)}\lambda_{21} \big\} \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{21}}{4K^2K_2^3}\Big[3b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + 2b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + 2b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + 3b^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{22}}{4K^2K_2^3}\Big[3a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + 2a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + 2a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + 3a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 \Big] - \\
& - \frac{\lambda_{12}}{8K_2}\Big[a^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3 + a^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + a^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2 + a^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3 \Big] + \\
& + \frac{\lambda_{11}}{8K_2}\Big[b^{(0,2)}_{(0,1)}\lambda_{22}^3 + b^{(1,1)}_{(0,1)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(2,0)}_{(0,1)}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + b^{(0,2)}_{(1,0)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(1,1)}_{(1,0)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2 + b^{(2,0)}_{(1,0)}\lambda_{21}^3 \Big] - \\
& - \frac{3\lambda_{12}}{8K_2^3}\Big[a^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3 + a^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + a^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2 + a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3 \Big] + \\
& + \frac{3\lambda_{11}}{8K_2^3}\Big[b^{(0,0)}_{(0,3)}\lambda_{22}^3 + b^{(0,0)}_{(1,2)}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + b^{(0,0)}_{(2,1)}\lambda_{22}\lambda_{21}^2 + a^{(0,0)}_{(3,0)}\lambda_{21}^3 \Big];
\end{aligned}
$$

Сега сме в състояние да формулираме съответните теореми.

$T_1^{(5)}$. Нека величината B от (5.7) да бъде различна от нула. Твърди се тогава, че съществуват $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ такива, че решението $\psi(t)$ на системата $G_3^{(2)}(K)$, получено при начални условия

$$\psi(0)=0, \quad \dot{\psi}(0)=\overset{(1)}{\lambda}+K\overset{(2)}{\lambda}\left[\beta(\lambda^2)\right] \tag{5.12}$$

е периодично с период $\frac{2}{K_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$.

Тази теорема отговаря на случая $N=0$.

$T_2^{(5)}$. Да предположим, че е изпълнено условието $AB<0$. Твърди се тогава, че съществуват $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ такива, че решението $\psi(t)$ на системата $G_3^{(2)}(K)$ получено при начални условия

$$\psi(0)=0, \; \dot{\psi}(0)=\overset{(1)}{\lambda}+K\overset{(2)}{\lambda}\left[\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}+\beta(\lambda^2)\right] \tag{5.13}$$

е периодично с период $\frac{2}{K_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$.

В горните теореми $T_1^{(5)}$ и $T_2^{(5)}$, $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ са две достатъчно малки функции на малкия параметър λ^2. Теоремите отговарят на случая I, когато коефициентите A и B се вземат от формулите (5.8).

Аналогични резултати се получават и за случаите II, III, IV. Условието (5.7) се запазва за всички случаи, но коефициентите A и B имат други стойности.

За случая II, коефициентите A и B се дават от формулите (5.9) и началните условия са

(5.14) $$\psi(0)=0\,,\quad \dot{\psi}(0)=\overset{(2)}{\lambda}+k\overset{(1)}{\lambda}\left[\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}+\beta(\overset{2}{\lambda})\right]$$

За случая III, A и B имат стойности от (5.10) при начални условия:

(5.15) $$\psi(0)=0\,,\ \dot{\psi}(0)=\overset{(1)}{\lambda}+\frac{1}{k}\overset{(2)}{\lambda}\left[\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}+\beta(\overset{2}{\lambda})\right]$$

За случая IV, коефициентите A и B се вземат от формулите (5.11) и началните условия са:

(5.16) $$\psi(0)=0\,,\ \dot{\psi}(0)=\overset{(2)}{\lambda}+\frac{1}{k}\overset{(1)}{\lambda}\left[\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}+\beta(\overset{2}{\lambda})\right]$$

В началните условия (5.14), (5.15) и (5.16) за съответните теореми, членът $\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}$ изчезва в случаите когато параметърът N е равен на нула.

III. ГЛАВА ВТОРА.

§.6. ЕДИН НАЧИН ЗА КОНСТРУИРАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ И НА ТЯХНИТЕ ПЕРИОДИ НА АВТОНОМНИ СИСТЕМИ С ПОЛУНЕЧЕТНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ В СЛУЧАИТЕ НА РЕЗОНАНС.

В настоящия параграф ще изложим един начин за конструиране на периодични решения и на тяхните периоди на автономни системи с полунечетни нелинейности в случаите на резонанс. В този случай като основа ще следваме както пътя от работа [12], така и от работа [2].

Тук периодът $\frac{2}{k_2}\left[\pi + \delta(\lambda^2)\right]$ на периодичното решение $\psi(t,\beta,\lambda)$ от $T_1^{(2)}$ на § 2 ще потърсим във вида:

$$\frac{2}{k_2}\left[\pi + \delta(\lambda^2)\right] = \frac{2\pi}{k_2}\left(1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^6 + \cdots\right) \tag{6.1}$$

като се използува известната смяна на независимата променлива на А. М. Ляпунов $t = \tau\left(1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots\right)$

системата $(1.1) \in G^{(2)}(K)$ се трансформира в

$$\begin{aligned}\ddot{\psi}_i &= \left(1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots\right)^2\Big[c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k} g_{ik}\Big(\psi_1, \psi_2, \frac{\dot{\psi}_1}{1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots}, \frac{\dot{\psi}_2}{1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{6.2}$$

при начални условия:

$$\psi_i(0,\beta,\lambda) = 0, \quad \dot{\psi}_i(0,\beta,\lambda) = \left\{p_i + q_i\left[N + \beta(\lambda^2)\right]\right\}\left(1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots\right) \tag{6.3}$$

Понеже, развитията на δ и β съдържат само четните степени на λ и $\beta = \delta = 0$ при $\lambda = 0$, получаваме:

$$\beta(\lambda^2) = b_1\lambda^2 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^6 + \cdots \tag{6.4}$$

Следователно

$$\psi_i(\tau,\lambda^2) = \psi_{i,0}(\tau) + \psi_{i,1}(\tau)\lambda^2 + \psi_{i,2}(\tau)\lambda^4 + \cdots \tag{6.5}$$

Функциите $\psi_{i,m}(\tau)\ (m=0,1,2,\cdots)$ от (6.5), периодични с период $\frac{2\pi}{k_2}$, ще бъдат определени, както и коефициентите $a_1, a_2, \ldots,$ от развитието (6.1) на периода $\frac{2}{k_2}[\pi+\delta(\lambda^2)]$ както се използуват специалните условия за периодичност от теоремите $T_1^{(1)}$ и $T_1^{(2)}$.

От (6.3) и (6.5) следват началните условия

$$\psi_{i,0}(0) = \psi_{i,1}(0) = \psi_{i,2}(0) = \cdots = 0 \tag{6.6}$$

и

$$\begin{gathered}[p_i + q_{ei}^{N} + q_i(b_1\lambda^2 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^6 + \cdots)](1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + \cdots) = \\ = \dot\psi_{i,0}(0) + \dot\psi_{i,1}(0)\lambda^2 + \dot\psi_{i,2}(0)\lambda^4 + \cdots\end{gathered} \tag{6.7}$$

Като използуваме (6.5), (6.2), (6.6), (6.7) и (2.6) получаваме

$$\psi_{i,0}(\tau) = r_i \sin k k_2\tau + s_i \sin k_2\tau, \quad (i=1,2) \tag{6.8}$$

Ако заместим (6.5) в (6.2) и приравним коефициентите пред λ^2 получаваме линейната нехомогенна система

$$\ddot\psi_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_1(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) + g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20}) \tag{6.9}$$

при начални условия:

(6.10) $$\psi_{i,1}(0)=0,\quad \dot{\psi}_{i,1}(0)=a_1(p_i+q_i N)+b_1 q_i,\ (i=1,2)$$

Поради подходящо избраните стойности на p_i и q_i от (2.5), непознаването на b_1 няма да бъде причина да не се използуват началните скорости от (6.10).

Общото решение на системата (6.9) е

(6.11) $$\psi_i(\tau)=\lambda_{1i}(C_1\cos kk_2\tau+D_1\sin kk_2\tau)+\lambda_{2i}(C_2\cos k_2\tau+D_2\sin k_2\tau)+\xi_{i,1}(\tau)$$

Тук $\xi_{i,1}(\tau)$, което представлява някое частно решение на системата (6.9), е периодично с период $\frac{2\pi}{k_2}$. Това е така понеже решенията $\psi_{i,1}(\tau)$ притежават това свойство:

Като се използува $T_1^{(4)}$ спрямо системата (6.9), се получава

(6.12) $$\xi_{i,1}(\tau)=\bar{\xi}_{i,1}(\tau)+Q_i(\tau)$$

при

(6.13) $$\xi_{i,1}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0,\quad \xi_{i,1}(0)=\dot{\xi}_{i,1}(0)=0$$

Тук $\bar{\xi}_{i,1}(\tau)$ е онова решение на системата получена от (6.9), чрез премахване на $g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})$ което има начални условия:

$$\bar{\xi}_{i,1}(0)=\dot{\bar{\xi}}_{i,1}(0)=0$$

Следователно:

(6.14) $$\bar{\xi}_{i,1}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0$$

Аналогично с формулата (2.10), функциите $\overline{\xi}_{i,1}(\tau)$ имат вида :

$$\overline{\xi}_{i,1}(\tau)=\frac{2\lambda_{1i}a_1}{\Delta k k_2}\int_0^\tau\left[\lambda_{21}(c_{21}\psi_{10}+c_{22}\psi_{20})-\lambda_{22}(c_{11}\psi_{10}+c_{12}\psi_{20})\right]\sin kk_2(u-\tau)\,du \tag{6.15}$$
$$+\frac{2\lambda_{2i}a_1}{\Delta k_2}\int_0^\tau\left[\lambda_{12}(c_{11}\psi_{10}+c_{12}\psi_{20})-\lambda_{11}(c_{21}\psi_{10}+c_{22}\psi_{20})\right]\sin k_2(u-\tau)\,du$$

От (6.15), (6.8), (2.7), (2.2), (2.3), следва

$$\overline{\xi}_{i,1}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\pi(\varepsilon k r_i-s_i)\,a_1 \tag{6.16}$$

Като заместим (6.16) в (6.14) получаваме

$$a_1=\frac{Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(s_i-\varepsilon k r_i)},\qquad(i=1,2) \tag{6.17}$$

Така се определя първият коефициент a_1 от развитието (6.7) на периода $\frac{2}{k_2}\left[\pi+\delta(\lambda^2)\right]$. Съгласно $T_1^{(2)}$, a_1 не зависи от избора на индекса i във (6.17).

Сега за да определим функциите $\psi_{i,1}(\tau)$ използваме (6.10) и (6.11). И така

$$\psi_{i,1}(\tau)=\lambda_{1i}D_{11}\sin kk_2\tau+\lambda_{2i}D_{21}\sin k_2\tau+\xi_{i,1}(\tau) \tag{6.18}$$

където, поради непознаването на b_1, засега можем да определим само един от двата коефициента D_{11}, D_{21}. Именно от (6.10) и (2.5) получаваме:

$$\text{(6.19)}\qquad \mathrm{I,III}\quad D_{11}=\frac{a_1}{kk_2}\qquad\qquad \mathrm{II,IV}\quad D_{21}=\frac{a_1}{k_2}$$

Ако заместим развитията (6.5) в системата (6.2) и приравним коефициентите пред λ^4, намираме системата

$$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_2(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) + 2a_1(c_{i1}\psi_{11} + c_{i2}\psi_{21}) +$$

$$(6.20) \qquad + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_1}\cdot\psi_{11} + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_2}\psi_{21} +$$

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1}\cdot\dot{\psi}_{11} + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2}\dot{\psi}_{21} + \varphi_{i,2}(\tau)$$

при начални условия, съгласно (6.6) и (6.7),

$$(6.21) \qquad \psi_{i,2}(0) = 0\,, \quad \dot{\psi}_{i,2}(0) = a_2(p_i + q_i N) + (b_2 + b_1 a_1)q_i$$

Тук $\varphi_{i,2}(\tau)$ означава функцията

$$\varphi_{i,2}(\tau) = a_1^2(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) + 2a_1 g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20}) + g_{i2}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})$$

$$(6.22) \qquad - a_1\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1}\cdot\dot{\psi}_{10} - a_1\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2}\cdot\dot{\psi}_{20}$$

Ако вземем случаите II и IV, съгласно равенствата (6.18) и (2.2), системата (6.20) приема вида:

$$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_2(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) - 2a_1 k^2 k_2^2 \lambda_{11}\sin kk_2\tau\cdot D_{11}$$

$$+ \rho\cdot D_{11}\Big[\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_1}\cdot P_1(\tau) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_2}P_2(\tau) +$$

$$(6.23) \qquad + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1}\cdot\dot{P}_1(\tau) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2}\cdot\dot{P}_2(\tau)\Big] + \phi_{i,2}(\tau)$$

където $\rho = k_2$ или $\rho = k^2 k_2$, съответно за случаите II и IV, а функциите $\phi_{i,2}(\tau)$ имат вида:

$$\phi_{i,2}(\tau) = 2\,a_1\,[\,c_{i1}\,\xi_{11}(\tau) + c_{i2}\,\xi_{21}(\tau)] - 2\,a_1^2\,k_2\,\lambda_{2i}\,\sin k_2\tau +$$

(6.24)
$$+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial\psi_1}\left[\frac{\lambda_{21}\,a_1}{k_2}\sin k_2\tau+\xi_{11}(\tau)\right]+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial\psi_2}\left[\frac{\lambda_{22}\,a_1}{k_2}\sin k_2\tau+\xi_{21}(\tau)\right]$$

$$+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial\dot\psi_1}\left[\lambda_{21}\,a_1\cos k_2\tau+\dot\xi_{11}(\tau)\right]+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial\dot\psi_2}\left[\lambda_{22}\,a_1\cos k_2\tau+\dot\xi_{21}(\tau)\right]+\varphi_{i,2}(\tau)$$

Тук функциите $\phi_{i,2}(\tau)$ удовлетворяват релациите

(6.25)
$$\phi_{i,2}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right) = -\,\phi_{i,2}(\tau)$$

Общото решение на системата (6.23) е

(6.26)
$$\psi_i(\tau) = \lambda_{1i}(C_1\cos kk_2\tau + D_1\sin kk_2\tau) + \lambda_{2i}(C_2\cos k_2\tau + D_2\sin k_2\tau) + \xi_{i,2}(\tau)$$

където $\xi_{i,2}(\tau)$ е частно решение на системата (6.23). От вида на линейната нехомогенна система (6.23) следва:

(6.27)
$$\xi_{i,2}(\tau) = \bar\xi_{i,2}(\tau) + \eta_i(\tau) + \zeta_i(\tau) + \mu_i^{(2)}(\tau)$$

при начални условия $\xi_{i,2}(0) = \dot\xi_{i,2}(0) = 0$

Тук $\bar\xi_{i,2}(\tau)$ е решение, за което $\bar\xi_{i,2}(0) = \dot{\bar\xi}_{i,2}(0) = 0$ на системата, която се получава от (6.9) чрез премахване на g_{i1} и заместване на a_1 с a_2.

По аналогия с формулата (6.16) получаваме

(6.28)
$$\bar\xi_{i,2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \pi(\varepsilon k r_i - s_i)\,a_2$$

Освен това $\eta_i(\tau)$ е решение на системата

$$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 - 2\, a_1 k^2 k_2^2 \sin k k_2 \tau \cdot D_{11}\lambda_{1i} \tag{6.29}$$

при начални условия $\eta_i(0) = \dot{\eta}_i(0) = 0$. Следователно

$$\eta_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \varepsilon \pi k \lambda_{1i} D_{11}\, a_1 \tag{6.30}$$

$\zeta_i(\tau)$ означава онова частно решение на системата, което се получава от (2.12) след като заместим $\bar{g}_{i1}(\tau)$ със $\rho D_{11}\bar{g}_{i1}(\tau)$, което има начални условия $\zeta_i(0) = \dot{\zeta}_i(0) = 0$. Така получаваме

$$\zeta_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \rho\, D_{11}\, R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) \tag{6.31}$$

Най-сетне $\mu_i^{(2)}(\tau)$ означава частното решение на системата

$$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + \Phi_{i,2}(\tau) \tag{6.32}$$

при начални условия $\mu_i^{(2)}(0) = \dot{\mu}_i^{(2)}(0) = 0$. Следователно

$$\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \frac{\varepsilon \lambda_{1i}}{\Delta k k_2}\int_0^{\pi/k_2}\left[\lambda_{21}\Phi_{22}(u) - \lambda_{22}\Phi_{12}(u)\right]\sin k k_2 u\, du$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}\int_0^{\pi/k_2}\left[\lambda_{12}\Phi_{12}(u) - \lambda_{11}\Phi_{22}(u)\right]\sin k_2 u\, du \tag{6.33}$$

От (6.21) и (6.26) получаваме

$$\psi_i(\tau) = \lambda_{1i} D_{12}\sin k k_2 \tau + \lambda_{2i} D_{22}\sin k_2 \tau + \xi_{i,2}(\tau) \tag{6.34}$$

където:

(6.35) $$D_{22} = \frac{a_2}{k_2}$$

Като приложим теорема $T_1^{(1)}$ при $q = \frac{\pi}{k_2}$ относно системата (6.34), получаваме условието

(6.36) $$\xi_{i,2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = 0$$

От (6.27), (6.28), (6.30), (6.31), (6.36) следва алгебричната система

(6.37) $$\pi(\varepsilon k r_i - s_i)\, a_2 + D_{11}\left[\varepsilon \pi k \lambda_{1i} \cdot a_1 + \rho R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] = -\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$$

която определя a_2 и D_{11}.

Последната система притежава едно единствено решение съгласно теорема $T_1^{(2)}$.

След като определиме a_1, a_2, $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau)$ от развитията (6.1) и (6.5), ще обобщим разглежданията, тоест ще потърсим коефициента a_{m+1} и функциите $\psi_{i,m}(\tau)$, ако са дадени коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_m$ и функциите $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau), \dots, \psi_{i,m-1}(\tau)$. Освен това нека

(6.38) $$\psi_{i,m}(\tau) = \lambda_{1i} \cdot D_{1m} \sin k k_2 \tau + \lambda_{2i} D_{2m} \sin k_2 \tau + \xi_{i,m}(\tau),$$

където функциите $\xi_{i,m}(\tau)$ са периодични с период $\frac{2\pi}{k_2}$ и

$$\xi_{i,m}(0) = \dot{\xi}_{i,m}(0) = 0$$

От (6.38) и (6.27) следва:

$$a_m\,(p_i + q_i . N) + q_i(---) = \kappa\kappa_2 \lambda_{1i} . D_{1m} + \kappa_2 \lambda_{2i} D_{2m}, \tag{6.39}$$

където коефициентът (....) е непознат. Въпреки това поради подходящия подбор на p_i и q_i от (6.39) намираме

$$D_{2m} = \frac{a_m}{\kappa_2} \tag{6.40}$$

Ако заместим (6.5) в (6.2) и приравним коефициентите пред λ^{2m+2}, ще получим системата

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi}_i = {} & c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_{m+1}(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) + \\
& + 2a_1(c_{i1}\psi_{1m} + c_{i2}\psi_{2m}) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_1} . \psi_{1m} + \\
& + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_2} . \psi_{2m} + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1} \dot{\psi}_{1m} + \\
& + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot{\psi}_{10}, \dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2} . \dot{\psi}_{2m} + \varphi_{i,m+1}(\tau).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

която се удовлетворява от функциите $\psi_{i,m+1}(\tau)$. Тук $\varphi_{i,m+1}(\tau)$ означават функциите:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i,m+1}(\tau) = &(a_m a_1 + a_{m-1} a_2 + \dots + a_1 a_m)(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) + \\
&+ c_m (c_{i1}\psi_{11} + c_{i2}\psi_{21}) + c_{m-1}(c_{i1}\psi_{12} + c\psi_{22}) + \dots + \\
&+ c_2 (c_{i1}\psi_{1,m-1} + c_{i2}\psi_{2,m-1}) + c_m P^{(1)}_{i0}(\tau) + c_{m-1} P^{(1)}_{i1}(\tau) + \\
&+ c_{m-2} P^{(1)}_{i2}(\tau) + \dots + c_1 P^{(1)}_{i,m-1}(\tau) + c_{m-1} P^{(2)}_{i,0}(\tau) + c_{m-2} P^{(2)}_{i1}(\tau) + \\
&+ c_{m-3} P^{(2)}_{i2}(\tau) + \dots + c_0 P^{(2)}_{i,m-1}(\tau) + c_{m-2} P^{(3)}_{i0}(\tau) + \\
&+ c_{m-3} P^{(3)}_{(2,1)}(\tau) + \dots + c_0 P^{(3)}_{i,m-2}(\tau) + \dots + \\
&+ \dots + \\
&+ c_1 P^{(m)}_{(i,0)}(\tau) + c_0 P^{(m)}_{i1}(\tau) + c_0 P^{(m+1)}_{i0}(\tau) + \frac{1}{m!}\overline{\omega}_m(\tau,0) + \\
&+ \frac{1}{m!}\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial \psi_1} \sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s} s!\,\overline{P}_{m-s}(a_1, a_2, \dots, a_{m-s})\psi_{1s} + \\
&+ \frac{1}{m!}\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot\psi_{10},\dot\psi_{20})}{\partial \dot\psi_2} \sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s} s!\,\overline{P}_{m-s}(a_1, a_2, \dots a_{m-s})\psi_{2s}
\end{aligned} \tag{6.42}
$$

където

$$
\begin{aligned}
&c_m = a_m + a_{m-1} a_1 + a_{m-2} a_2 + \dots + a_1 a_{m-1} + a_m, \quad m = 0,1,2\dots \\
&\overline{P}_{m-s}(a_1, a_2, \dots, a_{m-s}) = \text{производната } \left[\frac{1}{a(\lambda)^2}\right] \text{при } \lambda^2 = 0 \\
&a(\lambda^2) = 1 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^6 + \dots \\
&P^{(k)}_{i0}(\tau) = g_{ik}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20}); \quad i = 1,2; \quad k = 1,2,\dots m+1 \\
&B_i(\tau,\lambda^2) = \frac{1}{a(\lambda^2)} \quad \dot\psi(\tau,\lambda^2) \qquad i = 1,2 \\
&n!\,P^{(k)}_{in}(\tau) = g^{(n)}_{ik}\left[\psi_1(\tau,0), \psi_2(\tau,0), B_1(\tau,0), B_2(\tau,0)\right] \quad n = 1,2\dots m
\end{aligned} \tag{6.43}
$$

След като е получена системата (6.41), разсъжденията върху нея са аналогични на тези, които бяха направени по-горе при определянето на a_2 и $\psi_{i,1}(\tau)$. Като се приложи специалното условие за периодичност от теорема $T_1^{(1)}$ при $q=\frac{\pi}{k_2}$ на функциите $\xi_{i,m+1}(\tau)$, ще получим за определянето на a_{m+1} и D_{1m} линейна система с детерминанта, която е различна от нула съгласно теорема $T_1^{(2)}$. Така са определени окончателно, както функциите $\psi_{i,m}(\tau)$, така и коефициентът a_{m+1} от развитието (6.1) на периода, след като познаваме $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $\psi_{i,0}(\tau)$

$\psi_{i,1}(\tau), \psi_{i,2}(\tau), \ldots\ldots\ldots \psi_{i,m-2}(\tau), \psi_{i,m-1}(\tau).$

§.7. ПОСТРОЯВАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ И ПЕРИОДИТЕ ИМ ПРИ ПОЛИНОМИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН, КОГАТО НАЧАЛНИТЕ УСЛОВИЯ СЕ ОПРЕДЕЛЯТ ОТ СЛУЧАИТЕ II И IV.

В настоящия параграф ще направим едно приложение на резултатите от §6, §2, §3, §4, върху построяването на периодични решения и намирането на техните периоди при полиноми от втора степен, когато началните условия се определят от случаите II иIV. С други думи, тук ние ще потърсим коефициентите a_1, a_2, a_3, ...от периода $\frac{2}{k_2}\left[\pi + \delta(\lambda^2)\right]$ от (6.1) и последователните приближения $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau)$, ...от (6.5) когато началните условия се определят от случаите II и IV.

На първо място ще потърсим кофицента a_1 от периода (6.1). Като заместим (4.1) и (2.7) в (6.17), получаваме за случая II

$$a_1 = \frac{AN+B}{CN+D} \tag{7.1}$$

където за N е в сила релацията (4.2) и освен това

$$A = \varepsilon \lambda_{1i}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]$$

$$B = -k\lambda_{2i}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]$$

(7.2)

$$C = -2\Delta k k_2^2 \varepsilon \lambda_{1i}$$

$$D = 2\Delta k k_2^2 \lambda_{2i}$$

Равенството (7.1) е валидно за случая когато резонансната характеристика κ е по-голяма от две. Аналогичен резултат се получава и за случая IV. В последния случай условието (7.1) се запазва, но A, B, C и D имат следните стойности:

$$A = \epsilon \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right]$$

$$B = -\kappa^3 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right]$$

$$C = 2 \Delta \kappa^2 \kappa_2^2 \epsilon \lambda_{1i}$$

$$D = 2 \Delta \kappa^3 \kappa_2^2 \lambda_{2i}$$

Чрез използуване на (2.7), (3.4) и (6.17), получаваме коефициентът a_1 за случая II, когато цялото число κ е равно на две:

$$a_1 = \frac{AN + B}{CN + D} \tag{7.3}$$

където N се дава от уравнението (3.10). Освен това A, B, C, D от (7.3) имат стойностите:

$$\begin{aligned} A = {} & 4\kappa_2 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + a_{14} \lambda_{12} \lambda_{21} + a_{23} \lambda_{11} \lambda_{22} + a_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + b_{14} \lambda_{12} \lambda_{21} + b_{23} \lambda_{11} \lambda_{22} + b_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) \right] \\ & - 2\kappa_2 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + a_{14} \lambda_{11} \lambda_{22} + a_{23} \lambda_{12} \lambda_{21} + a_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + b_{14} \lambda_{11} \lambda_{22} + b_{23} \lambda_{12} \lambda_{21} + b_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) \right] \\ & + 2\kappa_2 \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right] \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} B = {} & \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_{13} \lambda_{21}^2 + b_{14} \lambda_{21} \lambda_{22} + b_{23} \lambda_{21} \lambda_{22} + b_{24} \lambda_{22}^2) - \lambda_{22} (a_{13} \lambda_{21}^2 + a_{14} \lambda_{21} \lambda_{22} + a_{23} \lambda_{21} \lambda_{22} + a_{24} \lambda_{22}^2) \right] \\ & - 4\kappa_2 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right] \end{aligned}$$

$$C = -16 \Delta \kappa_2^3 \lambda_{11}$$

$$D = 8 \Delta \kappa_2^3 \lambda_{2i}$$

Аналогичен резултат се получава и за случая IV, когато резонансната характеристика k е равна на две. Условието (7.3) се запазва, но A, B, C, D имат други стойности. Те са:

$$A = k_2 \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right] +$$

$$+ 2k_2 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + a_{14} \lambda_{12} \lambda_{21} + a_{23} \lambda_{11} \lambda_{22} + a_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + b_{14} \lambda_{12} \lambda_{21} + b_{23} \lambda_{11} \lambda_{22} + b_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) \right]$$

(7.5)

$$B = 2\lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_{13} \lambda_{21}^2 + b_{14} \lambda_{21} \lambda_{22} + b_{23} \lambda_{21} \lambda_{22} + b_{24} \lambda_{22}^2) - \lambda_{22} (a_{13} \lambda_{21}^2 + a_{14} \lambda_{21} \lambda_{22} + a_{23} \lambda_{21} \lambda_{22} + a_{24} \lambda_{22}^2) \right]$$

$$- k_2 \left[\lambda_{12} (a_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + a_{14} \lambda_{11} \lambda_{22} + a_{23} \lambda_{12} \lambda_{21} + a_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_{13} \lambda_{11} \lambda_{21} + b_{14} \lambda_{11} \lambda_{22} + b_{23} \lambda_{12} \lambda_{21} + b_{24} \lambda_{12} \lambda_{22}) \right]$$

$$- 8k_2 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right]$$

$$C = -8 \Delta k_2^3 \lambda_{1i}.$$

$$D = 16 \Delta k_2^3 \lambda_{2i}.$$

За случаите II и IV функциите $\psi_{i0}(\tau)$ от (6.5) се получават чрез съответно заместване на r_i и s_i от (2.7) в системата (6.8).

И така за случая II имаме

$$\psi_{i,0}(\tau) = \frac{N}{k_2} \lambda_{1i} \sin k k_2 \tau + \frac{1}{k_2} \lambda_{2i} \sin k_2 \tau, \quad (i = 1,2) \tag{7.6}$$

и за случая IV

$$\psi_{i,0}(\tau) = \frac{N}{k^2 k_2} \lambda_{1i} \sin k k_2 \tau + \frac{1}{k_2} \lambda_{2i} \sin k_2 \tau \,, \quad (i = 1, 2) \tag{7.7}$$

В равенствата (7.6) и (7.7) параметърът N се дава от условието (4.2) и цялото число k е по-голямо от две.

За случая когато резонансната характеристика k е равна на две, функциите $\psi_{i,0}(\tau)$ се получават чрез заместването на $k = 2$ във формулите (7.6) и (7.7).

Сега ще пресметнем функциите $\psi_{i,1}(\tau)$. По принцип това става от равенствата (6.18), в които непознатите членове са $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ и D_{11}. Функциите $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ се вземат от равенството (6.12), където е необходимо да пресметнем $Q_i(\tau)$ и $\bar{\xi}_{j_{i,1}}(\tau)$.

Първо ще намерим $Q_i(\tau)$.

С помоща на условията (2.10) и (3.3) по аналогия на формулата (3.4), намерихме

$$\begin{aligned} Q_i(\tau) = {} & A'_{1i} \sin k k_2 \tau + A'_{2i} \tau \cos k k_2 \tau + A'_{3i} \sin k_2 \tau + \\ & + A'_{4i} \tau \cos k_2 \tau + A'_{5i} \sin 2 k_2 \tau + A'_{6i} \sin k k_2 \tau \cos k k_2 \tau + \\ & + A'_{7i} \sin k k_2 \tau \cos k_2 \tau + A'_{8i} \sin k_2 \tau \cos k k_2 \tau \end{aligned} \tag{7.8}$$

където:

$$A'_{1i}=-\frac{\lambda_{1i}}{3\Delta KK_2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)-\frac{\lambda_{1i}}{(4K^2-1)\Delta K_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)-\frac{(2K^2-1)\lambda_{1i}}{(4K^2-1)\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)+$$

$$+\frac{\lambda_{1i}}{(K^2-4)\Delta KK_2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)-\frac{\lambda_{1i}}{2\Delta K^2K_2^2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)+$$

$$+\frac{\lambda_{1i}}{(K^2-1)\Delta KK_2^2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)+\frac{\lambda_{2i}}{(K^2-1)\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5).$$

$$A'_{2i}=\frac{\lambda_{1i}}{2\Delta KK_2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5).$$

$$A'_{3i}=-\frac{\lambda_{1i}}{(K^2-1)\Delta K_2^2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)-\frac{2K\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1)-\frac{(K^2-2)\lambda_{2i}}{(K^2-4)\Delta KK_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)+$$

$$+\frac{K\lambda_{2i}}{(K^2-4)\Delta K_2}(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)-\frac{\lambda_{2i}}{3\Delta K_2}(\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4)- \tag{7.9}$$

$$-\frac{K\lambda_{2i}}{(K^2-1)\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5)-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6).$$

$$A'_{4i}=\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6).$$

$$A'_{5i}=-\frac{\lambda_{1i}}{(K^2-4)\Delta K_2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)+\frac{\lambda_{2i}}{6\Delta K_2}(\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4).$$

$$A'_{6i}=+\frac{\lambda_{1i}}{3\Delta KK_2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)+\frac{K\lambda_{2i}}{(4K^2-1)\Delta K_2}(\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1)$$

$$A'_{7i}=-\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta(2K+1)KK_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)-\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta(2K-1)K_2K}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)+$$

$$+\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4(2K+1)}+\frac{1}{4(2K-1)}\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)\left(\frac{3}{2(K-1)(K+2)}\right)+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)\left(\frac{1}{2}-\frac{K}{4(K+2)}-\frac{K}{(4K-8)}\right)$$

$$A'_{8i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4(2K+1)}-\frac{1}{4(2K-1)}\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{2(K+2)}+\frac{1}{2(K-1)}\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)\left(\frac{K}{4(K+2)}+\frac{K}{4(K-2)}\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)\left(\frac{1}{4(2K-1)}-\frac{1}{4(2K+1)}\right);$$

Тук A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, се вземат от следните уравнения:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a_{13} r_1^2 + a_{14} r_1 r_2 + a_{23} r_1 r_2 + a_{24} r_2^2 ;\\
A_2 &= a_{13} r_1 s_1 + a_{14} r_1 s_2 + a_{23} r_2 s_1 + a_{24} r_2 s_2 ;\\
A_3 &= a_{13} r_1 s_1 + a_{14} r_2 s_1 + a_{23} r_1 s_2 + a_{24} r_2 s_2 ;\\
A_4 &= a_{13} s_1^2 + a_{14} s_1 s_2 + a_{23} s_1 s_2 + a_{24} s_2^2 ;\\
A_5 &= a_1 r_1 + a_2 r_2 ;\\
A_6 &= a_1 s_1 + a_2 s_2 ;\\
B_1 &= b_{13} r_1^2 + b_{14} r_1 r_2 + b_{23} r_1 r_2 + b_{24} r_2^2 ;\\
B_2 &= b_{13} r_1 s_1 + b_{14} r_1 s_2 + b_{23} r_2 s_1 + b_{24} r_2 s_2 ;\\
B_3 &= b_{13} r_1 s_1 + b_{14} r_2 s_1 + b_{23} r_1 s_2 + b_{24} r_2 s_2 ;\\
B_4 &= b_{13} s_1^2 + b_{14} s_1 s_2 + b_{23} s_1 s_2 + b_{24} s_2^2 ;\\
B_5 &= b_1 r_1 + b_2 r_2 ;\\
B_6 &= b_1 s_1 + b_2 s_2 ,
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

В равенството (7.8), κ е цяло по-голямо от две число.

Когато резонансната характеристика κ е равна на две, функциите $Q_i(\tau)$ имат вида:

$$Q_i(\tau)=A_{1i}\sin 2K_2\tau\cos 2K_2\tau+A_{2i}\sin 2K_2\tau\cos K_2\tau+$$

$$+A_{3i}\sin K_2\tau\cos 2K_2\tau+A_{4i}\sin K_2\tau+A_{5i}\tau\cos K_2\tau+ \tag{7.11}$$

$$+A_{6i}\sin 2K_2\tau+A_{7i}\tau\cos 2K_2\tau+A_{8i}\sin 3K_2\tau+$$

$$+A_{8i}\sin 4K_2\tau\,,$$

кьдето:

$$A_{8i}=\frac{\lambda_{2i}}{8\Delta K_2}(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)+\frac{\lambda_{2i}}{16\Delta K_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)-$$

$$-\frac{\lambda_{1i}}{20\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)-\frac{\lambda_{1i}}{40\Delta K_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)$$

$$A_{1i}=\frac{\lambda_{1i}}{6\Delta K_2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)$$

$$A_{2i}=\frac{\lambda_{i1}}{2\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)$$

$$A_{3i}=\frac{\lambda_{1i}}{4\Delta K_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)$$

$$A_{4i}=\frac{\lambda_{1i}}{12\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)-\frac{\lambda_{1i}}{24\Delta K_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)-\frac{\lambda_{1i}}{3\Delta K_2^2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)-$$

$$-\frac{4\lambda_{2i}}{15\Delta K_2}(\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1)-\frac{7\lambda_{2i}}{16\Delta K_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)+\frac{\lambda_{2i}}{8\Delta K_2}(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)- \tag{7.12}$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{3\Delta K_2}(\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4)-\frac{2\lambda_{2i}}{3\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5)-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6)$$

$$A_{5i}=\frac{\lambda_{2i}}{4\Delta}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta}(\lambda_{12}A_3-\lambda B_3)+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6)$$

$$A_{6i}=\frac{\lambda_{2i}}{3\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5)+\frac{\lambda_{2i}}{6\Delta K_2^2}(\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4)+\frac{\lambda_{1i}}{6\Delta K_2^2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)-$$

$$-\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta K_2^2}(B_5\lambda_{21}-\lambda_{22}A_5)-\frac{\lambda_{1i}}{16\Delta K_2^2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)-\frac{7\lambda_{1i}}{15\Delta K_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)-$$

$$-\frac{\lambda_{1i}}{15\Delta K_2}(\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2)-\frac{\lambda_{1i}}{6\Delta K_2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)$$

$$A_{7i}=\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)+\frac{\lambda_{1i}}{4\Delta K_2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)$$

$$A_{9i}=\frac{\lambda_{2i}}{15\Delta K_2}(\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1)$$

Тук величините A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 се вземат от (7.10). И така вече намерихме $Q_i(\tau)$ единия от двата непознати члена от равенството (6.12) което определя $\xi_{i,1}(\tau)$.

Сега ще търсим другия непознат член $\bar{\xi}_{i,1}(\tau)$ от равенството (6.12) за намиране на $\xi_{i,1}(\tau)$. Ако заместим $\psi_0(\tau)$ от (2.6) във формулите (6.15), получаваме след съответни сметки

$$\bar{\xi}_{i,1}(\tau)=B_{1i}\,\tau\cos k k_2\tau+B_{2i}\sin k k_2\tau+B_{3i}\,\tau\cos k_2\tau-B_{4i}\sin k_2\tau \tag{7.13}$$

където са въведени означенията:

$$\begin{aligned}
B_{1i}&=\frac{\lambda_{1i}\,a_1}{\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(c_{21}r_1+c_{22}r_2)-\lambda_{22}(c_{11}r_1+c_{12}r_2)\right]\cdot\\
B_{2i}&=\frac{2\lambda_{1i}\,a_1}{\Delta k k_2^2(k^2-1)}\left[\lambda_{21}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)-\lambda_{22}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)\right]+\\
&\quad+\frac{2\lambda_{2i}\,a_1}{\Delta k_2^2(k^2-1)}\left[\lambda_{12}(c_{11}r_1+c_{12}r_2)-\lambda_{11}(c_{21}r_1+c_{22}r_2)\right]-\\
&\quad-\frac{\lambda_{1i}\,a_1}{\Delta k^2 k_2^2}\left[\lambda_{21}(c_{21}r_1+c_{22}r_2)-\lambda_{22}(c_{11}r_1+c_{12}r_2)\right]\\
B_{3i}&=\frac{\lambda_{2i}\,a_1}{\Delta k_2}\left[\lambda_{12}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)-\lambda_{11}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)\right]\\
B_{4i}&=\frac{2\lambda_{1i}\,a_1}{\Delta k_2^2(k^2-1)}\left[\lambda_{21}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)-\lambda_{22}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)\right]+\\
&\quad+\frac{2k\lambda_{2i}\,a_1}{\Delta k_2^2(k^2-1)}\left[\lambda_{12}(c_{11}r_1+c_{12}r_2)-\lambda_{11}(c_{21}r_1+c_{22}r_2)\right]\\
&\quad+\frac{\lambda_{2i}\,a_1}{\Delta k_2^2}\left[\lambda_{12}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)-\lambda_{11}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)\right]
\end{aligned} \tag{7.14}$$

За случая II, с помощта на равенствата (2.7), формулите (7.13) приемат следния вид:

$$\bar{\xi}_{i,1}(\tau) = \kappa N \lambda_{1i} a_1 \left[\tau \cos \kappa \kappa_2 \tau - \frac{1}{\kappa \kappa_2} \sin \kappa \kappa_2 \tau\right] + \lambda_{2i} a_1 \left(\tau \cos \kappa_2 \tau - \frac{1}{\kappa_2} \cdot \sin \kappa_2 \tau\right). \tag{7.15}$$

Аналогично на формулите (7.15), за случая IV получаваме от равенствата (2.7) и (7.13) следните равенства:

$$\bar{\xi}_{i,1}(\tau) = \frac{1}{\kappa} N \lambda_{1i} a_1 \left(\tau \cos \kappa \kappa_2 \tau - \frac{1}{\kappa \kappa_2} \cdot \sin \kappa \kappa_2 \tau\right) + \lambda_{2i} a_1 \left(\tau \cos \kappa_2 \tau - \frac{1}{\kappa_2} \cdot \sin \kappa_2 \tau\right). \tag{7.16}$$

Ако заместим формулите (7.11) и (7.13) в (6.12), получаваме $\xi_{i,1}(\tau)$, който е един от непознатите членове в (6.18) за намиране на $\psi_{i,1}(\tau)$. Намираме

$$\begin{aligned} \xi_{i,1}(\tau) = {} & A_{1i} \cdot \sin 2\kappa_2 \tau \cos 2\kappa_2 \tau + A_{2i} \sin 2\kappa_2 \tau \cos \kappa_2 \tau + \\ & + A_{3i} \sin \kappa_2 \tau \cos 2\kappa_2 \tau + A_{4i} \sin \kappa_2 \tau + A_{5i} \tau \cos \kappa_2 \tau + \\ & + A_{6i} \sin 2\kappa_2 \tau + A_{7i} \tau \cos 2\kappa_2 \tau + A_{8i} \sin 3\kappa_2 \tau + \\ & + A_{9i} \sin 4\kappa_2 \tau + B_{1i} \tau \cos 2\kappa_2 \tau + B_{2i} \sin 2\kappa_2 \tau + \\ & + B_{3i} \tau \cos \kappa_2 \tau - B_{4i} \sin \kappa_2 \tau. \end{aligned} \tag{7.17}$$

където A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, A_{4i} .... A_{9i} се дават от формулите (7.12) и B_{1i}, B_{2i}, B_{3i}, B_{4i} от (7.14). В равенствата (7.17) резонансната характеристика κ е равна на две.

Когато цялото число k е по-голямо от две, $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ се получава от равенствата (7.8) и (7.13) в следната форма:

$$
\begin{aligned}
\xi_{j_{i,1}}(\tau) = {} & A'_{1i}\sin kk_2\tau + A'_{2i}\,\tau\cos kk_2\tau + A'_{3i}\sin k_2\tau + \\
& + A'_{4i}\,\tau\cos k_2\tau + A'_{5i}\sin 2k_2\tau + A'_{6i}\sin kk_2\tau\cos kk_2\tau + \\
& + A'_{7i}\sin kk_2\tau\cos k_2\tau + A'_{8i}\sin k_2\tau\cos kk_2\tau + \\
& + B_{1i}\,\tau\cos kk_2\tau + B_{2i}\sin kk_2\tau + B_{3i}\,\tau\cos k_2\tau - \\
& - B_{4i}\sin k_2\tau .
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Тук A'_{1i}, A'_{2i}, A'_{3i}, A'_{4i}, A'_{5i}, A'_{6i}, A'_{7i}, A'_{8i} и B_{1i}, B_{2i}, B_{3i}, B_{4i} се дават от равенствата (7.10), (7.9) и (7.14). Освен това D_{21} се взема от равенствата (6.19).

Сега във формулите (6.18) за определяне на $\psi_{i,1}(\tau)$ вече познаваме $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ от (7.17), (7.18) и D_{21}, а единственият непознат член е само D_{11}, който ще определим заедно с коефициента a_2 от периода (6.1). За целта ние ползуваме равенствата (6.37) в които е необходимо да пресметнем $R_i(\frac{\pi}{k_2})$ и $\mu_i^{(2)}(\frac{\pi}{k_2})$

Първо ще пресметнем $R_i(\frac{\pi}{k_2})$. Ако заместим $P_i(t)$ от (2.11) съответно за случая II, в равенството (2.14) получаваме:

$$\bar{g}_{11}(u) = A_1 \sin kk_2 u \cos kk_2 u + A_2 \sin kk_2 u \cos k_2 u +$$

(7.19) $$+ A_3 \cos kk_2 u \sin k_2 u + A_4 \sin kk_2 u$$

и

$$\bar{g}_{21}(u) = B_1 \sin kk_2 u \cos kk_2 u + B_2 \sin kk_2 u \cos k_2 u +$$

(7.20) $$+ B_3 \cos kk_2 u \sin k_2 u + B_4 \sin kk_2 u,$$

където

$$A_1 = k\left\{\lambda_{11}\left[2a_{13}r_1 + (a_{14} + a_{23})r_2\right] + \lambda_{12}\left[(a_{23} + a_{14})r_1 + 2a_{24}r_2\right]\right\}$$

$$A_2 = \lambda_{11}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2) + \lambda_{12}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2)$$

$$A_3 = \lambda_{11}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2) + (a_{14}s_1 + a_{24}s_2)\lambda_{12}$$

$$A_4 = \frac{1}{k_2}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})$$

$$B_1 = k\left\{\lambda_{11}\left[2b_{13}r_1 + (b_{14} + b_{23})r_2\right] + \lambda_{12}\left[(b_{23} + b_{14})r_1 + 2b_{24}r_2\right]\right\}$$

$$B_2 = \lambda_{11}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2) + \lambda_{12}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2)$$

$$B_3 = \lambda_{11}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2) + \lambda_{12}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2)$$

$$B_4 = \frac{1}{k_2}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}),$$

Сега с помощта на (7.19), (7.20) и (2.15) получаваме:

$$
\begin{aligned}
R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{\varepsilon\pi\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2^3}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\right]- \\
& -\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(a_{13}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}+(a_{13}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{22})\lambda_{12}^2\right]+ \\
& +\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(b_{13}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{22})\lambda_{11}^2+(b_{13}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}\right]
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

В равенствата (7.21), цялото число k е по-голямо от две. Когато резонансната характеристика k е равна на две имаме:

$$
\begin{aligned}
R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{\varepsilon\pi\lambda_{1i}}{4\Delta k_2^3}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\right] \\
& -\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(a_{13}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}+(a_{13}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{22})\lambda_{12}^2\right] \\
& +\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(b_{13}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{22})\lambda_{11}^2+(b_{13}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}\right] \\
& +\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(a_{13}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}+(a_{14}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{22})\lambda_{12}^2\right] \\
& -\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^3}\left[(b_{13}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{22})\lambda_{11}^2+(b_{14}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{22})\lambda_{11}\lambda_{12}\right]
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

За случая IV аналогичните резултати се получават, когато цялото число k е по-голямо от две. Тогава $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ имат вида на равенствата (7.21).

Когато k е равно на две $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ се вземат от формулите (7.22).

Сега ще пресметнем втория непознат член $\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ от (6.37) за определяне на коефициентът a_2 и D_{11}. Функцията $\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ се взема от формулите (6.33), в които е необходимо да намерим

$\Phi_{i,2}(\tau)$. Ако заместим (2,2) , (2,3) , (6.19) , (6,22) , (7,17) или (7,18) съответно със K и производните на (3,3) и (7,18) в (6,24), получаваме $\Phi_{i,2}(\tau)$. Когато смятаме $\varphi_{i,2}(\tau)$ който е един от членовете на $\Phi_{i,2}(\tau)$, ползуваме формулите (6,8) , (3,3) и тяхните производни. Ако използуваме получените $\Phi_{i,2}(\tau)$ в (6,33), получаваме:

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{K_2}\right) = {} & \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\cdot 2a_1(C_{21}\lambda_{21} - C_{11}\lambda_{22})\cdot(A'_{11} + B_{21})\frac{\pi}{2K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\cdot 2a_1(C_{22}\lambda_{21} - C_{12}\lambda_{22})\cdot(A'_{12} + B_{22})\frac{\pi}{2K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}(\lambda_{21}b_1 - \lambda_{22}a_1)(A'_{11} + B_{21})\frac{\pi}{2K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}(\lambda_{21}b_2 - \lambda_{22}a_2)(A'_{12} + B_{22})\frac{\pi}{2K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{14}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{14}r_2)\right]A'_{61}\frac{\pi}{8K_2} + \\
(7.23) \qquad & + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{23}r_1 + b_{24}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{24}r_2)\right]A'_{62}\frac{\pi}{8K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2)\right]A'_{71}\frac{\pi}{4K_2} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K}\left[\lambda_{21}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2)\right]A'_{72}\frac{\pi}{4K_2} - \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{23}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{23}r_2)\right]A'_{61}\frac{\pi}{4} - \\
& - \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{14}r_1 + b_{24}r_2) - \lambda_{22}(a_{14}r_1 + a_{24}r_2)\right]A'_{62}\frac{\pi}{4K_2} - \\
& - \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2)\right](A'_{71} + A'_{81}K)\frac{\pi}{4} - \\
& - \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\lambda_{21}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{14}s_1 + a_{24}s_2)\right](A'_{72} + KA'_{82})\frac{\pi}{4} + \\
& + \frac{\Sigma\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}(\lambda_{21}N_5 - \lambda_{22}M_5)\frac{\pi}{2K_2}
\end{aligned}
$$

$$- \lambda_{2i} \; a_1^2 \frac{\pi}{K_2} - \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12} M_6 - \lambda_{11} N_6)\frac{\pi}{2K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2} a_1 (C_{11}\lambda_{12} - C_{21}\lambda_{11})(A'_{31} - B_{41})\frac{\pi}{K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2} a_1 (C_{12}\lambda_{12} - C_{22}\lambda_{11})(A'_{32} - B_{42})\frac{\pi}{K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2^2} a_1 \left[\lambda_{12}\lambda_{21} a_1 - \lambda_{11}\lambda_{21} b_1 + \lambda_{12}\lambda_{22} a_2 - \lambda_{11}\lambda_{22} b_2\right]\frac{\pi}{2K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12} a_1 - \lambda_{11} b_1)(A'_{31} - B_{41})\frac{\pi}{2K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12} a_2 - \lambda_{11} b_2)(A'_{32} - B_{42})\frac{\pi}{2K_2} -$$

$$(7.23) \quad - \frac{\kappa\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13} r_1 + a_{14} r_2) - \lambda_{11}(b_{13} r_1 + b_{14} r_2)\right] A'_{81}\frac{\pi}{4K_2} -$$

$$- \frac{\kappa\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{23} r_1 + a_{24} r_2) - \lambda_{11}(b_{23} r_1 + b_{24} r_2)\right] A'_{82}\frac{\pi}{4K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13} s_1 + a_{14} s_2) - \lambda_{11}(b_{13} s_1 + b_{14} s_2)\right] A'_{51}\frac{\pi}{4K_2} -$$

$$- \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{23} s_1 + a_{24} s_2) - \lambda_{11}(b_{23} s_1 + b_{24} s_2)\right] A'_{52}\frac{\pi}{4K_2} +$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13} r_1 + a_{23} r_2) - \lambda_{11}(b_{13} r_1 + b_{23} r_2)\right](A'_{71} + \kappa A'_{81})\frac{\pi}{4K_2} +$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{14} r_1 + a_{24} r_2) - \lambda_{11}(b_{14} r_1 + b_{24} r_2)\right](A'_{72} + \kappa A'_{82})\frac{\pi}{4K_2} +$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13} s_1 + a_{23} s_2) - \lambda_{11}(b_{13} s_1 + b_{23} s_2)\right] A'_{51}\frac{\pi}{2K_2} +$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{14} s_1 + a_{24} s_2) - \lambda_{11}(b_{14} s_1 + b_{24} s_2)\right] A'_{52}\frac{\pi}{2K_2} ;$$

Горното равенство (7.23) отговаря на случая когато k е по-голямо от две.

За случая когато k е равно на две $\mu_i^{2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ има вида :

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{\lambda_{1i}}{\Delta k_2} a_1 (c_{21}\lambda_{21} - c_{11}\lambda_{22})(A_{61}+B_{21})\frac{\pi}{2k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{\Delta k_2} a_1 (c_{22}\lambda_{21} - c_{12}\lambda_{22})(A_{62}+B_{22})\frac{\pi}{2k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2} a_1 \left[\lambda_{21}^2 (b_{13}s_1 + b_{14}s_2) - \lambda_{22}\lambda_{21}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2)\right]\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2} a_1 \left[\lambda_{21}\lambda_{22}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}^2(a_{23}s_1 + a_{24}s_2)\right]\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2}(\lambda_{21}b_1 - \lambda_{22}a_1)(A_{61}+B_{21})\frac{\pi}{2k_2} + \\
(7.24) \qquad & + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2}(\lambda_{21}b_2 - \lambda_{22}a_2)(A_{62}+B_{22})\frac{\pi}{2k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{14}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{14}r_2)\right]\left[A_{11} + 2A_{91}\right]\frac{\pi}{8k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{23}r_1 + b_{24}r_2) - \lambda_{22}(a_{23}r_1 + a_{24}r_2)\right]\left[A_{12} + 2A_{92}\right]\frac{\pi}{8k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2)\right]\left[A_{21} + A_{41} + A_{81} + B_{41}\right]\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta}\left[\lambda_{21}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2)\right](A_{22} + A_{42} + A_{82} - B_{42})\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2} a_1 \left[\lambda_{21}^2 (b_{13}s_1 + b_{23}s_2) - \lambda_{22}\lambda_{21}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2)\right]\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2} a_1 \left[\lambda_{21}\lambda_{22}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}^2(a_{14}s_1 + a_{24}s_2)\right]\frac{\pi}{4k_2} + \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2)\right](A_{41} - A_{21} - 2A_{31} - 3A_{81} - B_{41})\frac{\pi}{4} \\
& + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{14}s_1 + a_{24}s_2)\right]\left[A_{42} - A_{22} - 2A_{32} - 3A_{82} - B_{42}\right)\frac{\pi}{4} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\lambda_{1i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{21}N_4-\lambda_{22}M_4)\frac{\pi}{4K_2}+\frac{\lambda_{1i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{21}N_5-\lambda_{22}M_5)\frac{\pi}{2K_2}-$$

$$-\lambda_{2i}a_1^2\frac{\pi}{K_2}-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta}(\lambda_{12}M_2-\lambda_{11}N_2)\frac{\pi}{4K_2}-$$

$$-\frac{2\lambda_{2i}}{\Delta K_2}a_1(c_{11}\lambda_{12}-c_{21}\lambda_{11})\left[(A_{21}-A_{31})\frac{\pi}{4K_2}+(A_{41}-B_{41})\frac{\pi}{2K_2}\right]-$$

$$-\frac{2\lambda_{2i}}{\Delta K_2}a_1(c_{12}\lambda_{12}-c_{22}\lambda_{11})\left[(A_{22}-A_{32})\frac{\pi}{4K_2}+(A_{42}-B_{42})\frac{\pi}{2K_2}\right]+$$

$$+\frac{2\lambda_{2i}}{\Delta K_2}a_1\left[\lambda_{12}\lambda_{21}(a_{13}r_1+a_{14}r_2)-\lambda_{11}\lambda_{21}(b_{13}r_1+b_{14}r_2)+\lambda_{12}\lambda_{22}(a_{23}r_1+a_{24}r_2)-\lambda_{11}\lambda_{22}(b_{23}r_1+b_{24}r_2)\right]\frac{\pi}{4K_2}$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2^2}a_1\left[\lambda_{12}\lambda_{21}a_1-\lambda_{11}\lambda_{21}b_1+\lambda_{12}\lambda_{22}a_2-\lambda_{11}\lambda_{22}b_2\right]\frac{\pi}{2K_2}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}a_1-\lambda_{11}b_1)\left[(A_{21}-A_{31})\frac{\pi}{4K_2}+(A_{41}-B_{41})\frac{\pi}{2K_2}\right]-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}a_2-\lambda_{11}b_2)\left[(A_{22}-A_{32})\frac{\pi}{4K_2}+(A_{42}-B_{42})\frac{\pi}{2K_2}\right]-$$

$$-\frac{2\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13}r_1+a_{14}r_2)-\lambda_{11}(b_{13}r_1+b_{14}r_2)\right](A_{31}-A_{41}+A_{81}+B_{41})\frac{\pi}{4K_2}-$$

(7.24) $$-\frac{2\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{23}r_1+a_{24}r_2)-\lambda_{11}(b_{23}r_1+b_{24}r_2)\right](A_{32}-A_{42}+A_{82}+B_{42})\frac{\pi}{2K_2}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{13}s_1+a_{14}s_2)-\lambda_{11}(b_{13}s_1+b_{14}s_2)\right](A_{61}+B_{21})\frac{\pi}{4K_2}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta}\left[\lambda_{12}(a_{23}s_1+a_{24}s_2)-\lambda_{11}(b_{23}s_1+b_{24}s_2)\right](A_{62}+B_{22})\frac{\pi}{4K_2}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}a_1\left[\lambda_{12}\lambda_{21}(a_{13}r_1+a_{23}r_2)-\lambda_{11}\lambda_{21}(b_{13}r_1+b_{23}r_2)+\lambda_{12}\lambda_{22}(a_{14}r_1+a_{24}r_2)-\lambda_{11}\lambda_{22}(b_{14}r_1+b_{24}r_2)\right]\frac{\pi}{4K_2}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}r_1+a_{23}r_2)-\lambda_{11}(b_{13}r_1+b_{23}r_2)\right](A_{41}-A_{21}-2A_{31}-3A_{81}-B_{41})\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{14}r_1+a_{24}r_2)-\lambda_{11}(b_{14}r_1+b_{24}r_2)\right](A_{42}-A_{22}-2A_{32}-3A_{82}-B_{42})\frac{\pi}{4}+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}s_1+a_{23}s_2)-\lambda_{11}(b_{13}s_1+b_{23}s_2)\right](A_{61}+B_{21})\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{14}s_1+a_{24}s_2)-\lambda_{11}(b_{14}s_1+b_{24}s_2)\right](A_{62}+B_{22})\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta}(\lambda_{12}M_3-\lambda_{11}N_3)\frac{\pi}{2K_2}-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}(\lambda_{12}M_6-\lambda_{11}N_6)\frac{\pi}{2K_2}$$

където a_1 се дава от (7.1) или (7.3) и A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, A_{4i}, A_{5i}, ... A_{9i}, от (7.12), а B_{1i}, B_{2i}, B_{3i}, B_{4i} от (7.14). В равенствата (7.23) и (7.24), M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 и N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, се дават от следните формули:

$$M_1 = a_1 (a_{13} r_1^2 + a_{14} r_1 r_2 + a_{23} r_1 r_2 + a_{24} r_2^2) + (m_{13} r_1^2 + m_{23} r_1 r_2 + m_{24} r_2^2)$$

$$M_2 = a_1 (a_{13} r_1 s_1 + a_{14} r_1 s_2 + a_{23} r_2 s_1 + a_{24} r_2 s_2) + (m_{13} r_1 s_1 + m_{14} r_1 s_2 + m_{23} r_2 s_1 + m_{24} r_2 s_2)$$

$$M_3 = a_1 (a_{13} r_1 s_1 + a_{14} r_2 s_1 + a_{23} r_2 s_1 + a_{24} r_2 s_2) + (m_{13} r_1 s_1 + m_{14} r_2 s_1 + m_{23} r_1 s_2 + m_{24} r_2 s_2)$$

$$M_4 = a_1 (a_{13} s_1^2 + a_{14} s_1 s_2 + a_{23} s_1 s_2 + a_{24} s_2^2) + (m_{13} s_1^2 + m_{14} s_1 s_2 + m_{23} s_1 s_2 + m_{24} s_2^2)$$

$$\text{(7.25)} \quad \begin{aligned} M_5 &= a_1^2 (c_{11} r_1 + c_{12} r_2) + 2a_1 (a_1 r_1 + a_2 r_2) + (m_1 r_1 + m_2 r_2) \\ M_6 &= a_1^2 (c_{11} s_1 + c_{12} s_2) + 2a_1 (a_1 s_1 + a_2 s_2) + (m_1 s_1 + m_2 s_2) \end{aligned}$$

$$N_1 = a_1 (b_{13} r_1^2 + b_{14} r_1 r_2 + b_{23} r_1 r_2 + b_{24} r_2^2) + (n_{13} r_1^2 + n_{14} r_1 r_2 + n_{23} r_1 r_2 + n_{24} r_2^2)$$

$$N_2 = a_1 (b_{13} r_1 s_1 + b_{14} r_1 s_2 + b_{23} r_2 s_1 + b_{24} r_2 s_2) + (n_{13} r_1 s_1 + n_{14} r_1 s_2 + n_{23} r_2 s_1 + n_{24} r_2 s_2)$$

$$N_3 = a_1 (b_{13} r_1 s_1 + b_{14} r_2 s_1 + b_{23} r_1 s_2 + b_{24} r_2 s_2) + (n_{13} r_1 s_1 + n_{14} r_2 s_1 + n_{23} r_1 s_2 + n_{24} r_2 s_2)$$

$$N_4 = a_1 (b_{13} s_1^2 + b_{14} s_1 s_2 + b_{23} s_1 s_2 + b_{24} s_2^2) + (n_{13} s_1^2 + n_{14} s_1 s_2 + n_{23} s_1 s_2 + n_{24} s_2^2)$$

$$N_5 = a_1^2 (c_{21} r_1 + c_{22} r_2) + 2a_1 (b_1 r_1 + b_2 r_2) + (n_1 r_1 + n_2 r_2)$$

$$N_6 = a_1^2 (c_{21} s_1 + c_{22} s_2) + 2a_1 (b_1 s_1 + b_2 s_2) + (n_1 s_1 + n_2 s_2)$$

И така вече пресметнахме всички необходими членове за определяне на коефициента a_2 от периода на (6.1) и D_{11} от (6.18). От равенствата (6.37) следва:

$$a_2 = \frac{\left[\varepsilon k\pi\lambda_{11} a_1 + \rho R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]\mu_2^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - \left[\varepsilon k\pi\lambda_{12} a_1 + \rho R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]\mu_1^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\left[\varepsilon k\pi\lambda_{12} a_1 + \rho R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] - \pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\left[\varepsilon k\pi\lambda_{11} a_1 + \rho R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]}$$

$$(7.26)$$

$$D_{11} = \frac{\pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\mu_2^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - \pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\mu_1^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\left[\varepsilon k\pi\lambda_{11} a_1 + \rho R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] - \pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\left[\varepsilon k\pi\lambda_{12} a_1 + \rho R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]}$$

където съответните $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ и $\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ се дават от формулите (7.21) или (7.22) и (7.23) или (7.24).

След като намерихме D_{11}, вече сме в състояние да определим $\psi_{i,1}(\tau)$ от (6.18). По-точно $\psi_{i,1}(\tau)$ се определя от от равенствата (6.18), в които членовете D_{11} и $\xi_{i,1}(\tau)$ се намират в съответните формули (7.26) и (7.17) или (7.18).

Най-сетне построихме коефициентите a_1, a_2 от периода $\frac{2}{k_2}\left[\pi + \delta(\lambda^2)\right]$ от (6.1) и приближенията $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau)$ от (6.5). По аналогичен начин, съгласно §6, могат да бъдат построени и останалите коефициенти a_3, a_4, ..., a_m, .. от периода и функциите $\psi_{i,2}(\tau)$, $\psi_{i,3}(\tau)$, ... $\psi_{i,m-1}(\tau)$, ...

И така завършваме построяването на периодичните решения и техните периоди на системата (1.1) принадлежаща на множеството $G_2^{(2)}(k)$.

§.8. АНУЛИРАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ ПРЕД ВЕКОВИТЕ ЧЛЕНОВЕ.

В настоящия параграф ще докажем, че коефициентите пред вековите членове в формулите (7.17) и (7.18) са равни на нула. Анулирането на тези коефициенти е необходимо за да бъде доказано, че тяхното присъствие не се отразява върху периодичноста на намерените от нас решения. В този параграф ще бъдат третирани случаите II и IV при условие, че числото k е по-голямо или равно на две.

Първо ще разгледаме равенствата (7.17), за случая II когато резонансната характеристика k е равна на две. За този случай коефициентът пред вековия член $\tau \cos 2k_2 \tau$ в (7.14) с помощта на равенствата (7.3), (7.10), (7.11), (7.12), (7.13), (7.14) $(2.7)II$ приема, след подробни разглеждания и изчисленията, вида :

$$
\begin{aligned}
A_{7i} + B_{7i} = {} & \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta k_2^3(\lambda_{2i} - 2N\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}\big(b_{13}\lambda_{21}^2 + b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{22}^2\big) - \lambda_{22}\big(a_{13}\lambda_{21}^2 + a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{22}^2\big)\Big] \\
& + \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - 2N\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}\big(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}\big) - \lambda_{22}\big(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12}\big)\Big]\cdot\frac{N}{4} \\
& - \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - 2N\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}\big(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}\big) - \lambda_{11}\big(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22}\big)\Big] N. \\
& - \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - 2N\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}\big(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\big) - \lambda_{11}\big(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\big)\Big]\frac{N^2}{2} \\
& + \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - 2N\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}\big(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\big) - \lambda_{11}\big(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\big)\Big] N^2
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Обаче, като се вземат предвид получените по-рано от нас съотношения (3.10) и (3.11), не е трудно да се заключи, че дясната страна на (8.1) е точно равна на нула.

Сега ще разгледаме равенствата (7.18) за случая II когато K е по-голямо от две. Както в горния случай, коефициентът пред вековия член се получава, след съответните сметки с помощта на равенствата (7.8), (7.9), (7.10), (7.13), (7.14) във вида:

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta K K_2}\left[\lambda_{21}(b_1 r_1 + b_2 r_2) - \lambda_{22}(a_1 r_1 + a_2 r_2)\right] + \frac{\lambda_{1i}\, a_1}{\Delta K K_2}\left[\lambda_{21}(c_{21} r_1 + c_{22} r_2) - \lambda_{22}(c_{11} r_1 + c_{12} r_2)\right]$$

Като се използува (7.1) и (2.7)II, от горното равенство получаваме:

$$\begin{aligned} A'_{2i} + B_{1i} = {} & \frac{\lambda_{1i} N}{2\Delta K K_2^2}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right] \\ & + \frac{\varepsilon K \lambda_{1i}^2 N^2}{2\Delta K K_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon K N \lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right] \\ & - \frac{K \lambda_{1i}\lambda_{2i} N}{2\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon K N \lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] \end{aligned}$$

След групиране на членовете полученият израз приема вида:

$$\begin{aligned} A'_{2i} + B_{1i} = {} & \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon K N \lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\cdot\frac{N}{K} \\ & - \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon K N \lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] K N \end{aligned} \qquad (8.2)$$

Сега вече не е трудно да се заключи, като се използува (4.2), че стойността на коефициента от (8.2) е равна на нула.

Да разгледаме втория вековни член в равенствата (7.17) за II случай, когато резонансната характеристика k е равна на две. Сега с помощта на равенствата (7.12), (7.14), (7.17), се представя коефициентът пред вековия член $\tau\cos k_2\tau$, чрез формулата:

$$A_{5i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{2i}}{4\Delta}\left(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2\right)-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta}\left(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3\right)+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}\left(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}a_1\left[\lambda_{12}\left(c_{11}s_1+c_{12}s_2\right)-\lambda_{11}\left(c_{21}s_1+c_{22}s_2\right)\right]$$

След като заместим (7.3), (7.10), (2.2), (2.7)II в горното равенство и групираме по подходящ начин членовете, получаваме резултата:

$$A_{5i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i}-2N\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2\right)\right]\frac{1}{8k_2}$$

$$-\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N^2}{2\Delta k_2^2(\lambda_{2i}-2N\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

(8.3)

$$+\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N^2}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i}-2N\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

$$-\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N}{\Delta k_2^2(\lambda_{2i}-2N\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22}\right)\right]$$

$$+\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N}{4\Delta k_2^2(\lambda_{2i}-2N\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12}\right)-\lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12}\right)\right]$$

Сега използуваме релациите (3.10) и (3.11), и доказваме окончателно, че коефициентът от (8.3) е равен на нула.

Отново се спираме на втория вековни член в равенствата (7.18) за случая II, когато k е по-голямо от две. Както в предния случай, коефициентът пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$ може да се получи с помощта на равенствата (7.9), (7.10), (7.18) и (7.14)

$$A'_{4i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2} a_1 \left[\lambda_{12}(c_{11}s_1 + c_{12}s_2) - \lambda_{11}(c_{21}s_1 + c_{22}s_2)\right]$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}(\lambda_{12}A_6 - \lambda_{11}B_6)$$

Ако използуваме (7.1) и (2.7)II в дясната страна на горното равенство получаваме

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k_2^2}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon\lambda_{1i}\lambda_{2i}N}{2\Delta k k_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon kN\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]$$

$$- \frac{\lambda_{2i}^2}{2\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon kN\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]$$

което става, след групиране на членовете,

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\varepsilon\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon kN\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{k}$$

$$- \frac{\varepsilon\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2(\lambda_{2i} - \varepsilon kN\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]kN \qquad (8.4)$$

Намереното по-рано условие (4.20) ни показва, че стойността на (8.4) е равна на нула.

Отново се връщаме в първия вековн член в равенствата (7.17), но сега вече за случая IV и когато резонансната характеристика K е равна на две. За този случай, коефициентът пред вековия член $\tau \cos 2K_2\tau$ в (7.17), с помоща на равенствата (7.12), (7.14), (7.17) приема вида:

$$A_{7i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left(\lambda_{21} B_4 - \lambda_{22} A_4\right) + \frac{\lambda_{1i}}{4\Delta K_2}\left(\lambda_{21} B_5 - \lambda_{22} A_5\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_{1i}\, a_1}{\Delta k K_2}\left[\lambda_{21}\left(c_{21} r_1 + c_{22} r_2\right) - \lambda_{22}\left(c_{11} r_1 + c_{12} r_2\right)\right]$$

От (7.10), (7.3), (7.5), (2.4)IV, (2.2), (2.3) и горното равенство следва равенството

$$A_{7i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta K_2^3(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^2 + b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{22}^2\right) - \lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^2 + a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{22}^2\right)\right]$$

$$+ \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N^2}{16\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N^2}{32\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

(8.5)

$$+ \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N}{16\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}\right) - \lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12}\right)\right]$$

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}N}{4\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}\right) - \lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22}\right)\right]$$

По силата на равенствата (3.10) и (3.12) дясната страна на (8.5) е равна на нула.

За равенствата (7.18) при случая IV, когато k е по-голямо от две, коефициентът пред вековия член $\tau \cos k k_2 \tau$ се получава, след съответните пресмятания, с помоща на равенствата (7.9), (7.14), (7.18),

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i} a_1}{\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(c_{21} r_1 + c_{22} r_2) - \lambda_{22}(c_{11} r_1 + c_{12} r_2)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2}\left(\lambda_{21} B_{5-} - \lambda_{22} A_{5-}\right)$$

Ако приложим (7.10), (2.2), (2.3) и (2.7)IV в горното равенство получаваме:

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i} N}{2\Delta k^3 k_2^2}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon \lambda_{1i}^2 N^2}{2\Delta k^4 k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]$$

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i} N}{2\Delta k k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]$$

След подходящо групиране на членовете намираме:

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k^2 k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{k}$$

$$(8.6) \qquad - \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k^2 k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] k N$$

Отново се използуват равенствата (4.2) и се вижда, че стойността на (8.6) е нула.

Сега ще вземем равенствата (7.17) за случая IV, когато резонансната характеристика k е равна на две. Тогава коефициентът пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$ в (7.17), с помоща на равенствата (7.10), (7.12), (7.14), (7.17), (2.2), (2.3) и $(2.7)IV$ приема вида:

$$
\begin{aligned}
A_{5i} + B_{3i} = {} & \frac{\lambda_{2i} N}{4\Delta K^2 K_2^2}\Big[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big] \\
& - \frac{\lambda_{2i} N}{2\Delta K^2 K_2^2}\Big[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big] \\
& + \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}\Big[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\Big] + \lambda_{2i}\, a
\end{aligned}
$$

Ако ползуваме (7.3) и (7.5) в горното равенство получаваме:

$$
\begin{aligned}
A_{5i} + B_{3i} = {} & \frac{N^2 \lambda_{1i}\lambda_{2i}}{16\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big] \\
& - \frac{N^2 \lambda_{1i}\lambda_{2i}}{32\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big] \\
& - \frac{N \lambda_{1i}\lambda_{2i}}{4\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\Big] \\
& + \frac{N \lambda_{1i}\lambda_{2i}}{16\Delta K_2^2(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\Big] \\
& + \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta K_2^3(\lambda_{2i} - \frac{N}{2}\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2 + b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{22}^2) - \lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2 + a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{22}^2)\Big]
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

По силата на равенствата (3.10), (3.12) стойността на (8.7) е равна на нула.

Последно ще разгледаме вековия член в равенството (7.18) за случая IV, когато k е по-голямо от две. Както в горния случай, коефициентът пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$ се получава, след съответните изчисления, с помощта на равенствата (7.9), (7.14), (7.18), във вида

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\lambda_{2i} a_1}{\Delta k_2}\left[\lambda_{12}(c_{11} s_1 + c_{12} s_2) - \lambda_{11}(c_{21} s_1 + c_{22} s_2)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}\left(\lambda_{12} A_6 - \lambda_{11} B_6\right)$$

От (7.10), (2.7)IV и горното равенство следва

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] + \lambda_{2i}\, a_1$$

Сега ако ползуваме стойността на a_1 от (7.1), коефициентът пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$ за IV случай има следната форма:

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\varepsilon \lambda_{1i} \lambda_{2i}}{2\Delta k^2 k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{k}$$

(8.8)

$$- \frac{\varepsilon \lambda_{1i} \lambda_{2i}}{2\Delta k^2 k_2^2\left(\lambda_{2i} - \frac{\varepsilon N}{k}\lambda_{1i}\right)}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] k N$$

От равенствата (4.2) отново следва, че стойността на (8.8) е равна на нула.

До тук бяха разгледани следните варианти за анулиране на коефициентите пред вековите членове:

$\tau \cos k k_2 \tau$ и $\tau \cos k_2 \tau$ от случаите II и IV

II $\tau \cos 2k_2\tau$ $k=2.$

II $\tau \cos k k_2 \tau$ $k>2.$

II $\tau \cos k_2 \tau$ $k=2.$

II $\tau \cos k_2 \tau$ $k>2.$

IV $\tau \cos 2k_2 \tau$ $k=2.$

IV $\tau \cos k k_2 \tau$ $k>2.$

IV $\tau \cos k_2 \tau$ $k=2.$

IV $\tau \cos k_2 \tau$ $k>2.$

Във всичките посочени по-горе случаи бе доказано, че съответните коефициенти са нули. Следователно построяването <u>именно на периодични</u> решения и на тяхните периоди от системата (1.1) принадлежаща на $G_2^{(2)}(K)$ е напълно обосновано.

§.9. ПРИСПОСОБЯВАНЕ НА МЕТОДА ОТ § 6 КЪМ СЛУЧАИТЕ I И III ПРИ ОБЩО ТРЕТИРАНЕ НА ЗАДАЧАТА .

В настоящия параграф,при общо третиране на задачата,ще потърсим каефициента a_2 от периода на (6.1) и непознатия член D_{21} от (6.18) за определяне на $\psi_{i,1}(\tau)$ в случаите I и III.С това ще бъде направено едно допълнително изследване към работа [12] .

По аналогичен на начина от работа [12] при формиране на системата (6.2) получаваме диференциално уравнение:

$$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_2(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20}) - 2a_1 k_2^2 \lambda_{2i} \sin k_2\tau . D_{21} +$$

$$(9.1)\qquad + \overset{*}{\rho} \cdot D_{21}\Big[\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_1} . P_1(\tau) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \psi_2} . P_2(\tau) +$$

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\dot{\psi}_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_1} . \dot{P}_1(\tau) + \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10},\psi_{20},\psi_{10},\dot{\psi}_{20})}{\partial \dot{\psi}_2} . \dot{P}_2(\tau)\Big] + \overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau)$$

където $\overset{*}{\rho} = \frac{k_1}{k}$ или $\overset{*}{\rho} = k\,k_2$ съответно за случаите I и III; $P_i(\tau)$ се дават от формулите((2.11), I , III) ,а функциите $\overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau)$ имат при изследвания тук случай вида:

$$\overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau) = 2\,a_1\left[c_{i1}\,\xi_{11}(\tau) + c_{i2}\,\xi_{21}(\tau)\right] - 2\,a_1^2\,k k_2 \lambda_{1i}\sin k k_2 \tau +$$

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20})}{\partial \psi_1}\left[\frac{\lambda_{11}}{k k_2} a_1 \sin k k_2 \tau + \xi_{11}(\tau)\right] +$$

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20})}{\partial \psi_2}\left[\frac{\lambda_{12}}{k k_2} a_1 \sin k k_2 \tau + \xi_{21}(\tau)\right] +$$

(9.2)

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20})}{\partial \dot\psi_1}\left[a_1 \lambda_{11} \cos k k_2 \tau + \dot\xi_{11}(\tau)\right] +$$

$$+ \frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}, \psi_{20}, \dot\psi_{10}, \dot\psi_{20})}{\partial \dot\psi_2}\left[a_1 \lambda_{12} \cos k k_2 \tau + \dot\xi_{21}(\tau)\right] + \varphi_{i,2}(\tau)$$

От равенствата (9.2) се вижда, че функциите $\overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau)$ не съдържат неизвестните a_2 и D_{21}, а само определения вече коефициент a_1. Тези функции от друга страна удовлетворяват релациите

$$\overset{*}{\phi}_{i,2}\left(\frac{2\pi}{k_2} - \tau\right) = -\overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau) \tag{9.3}$$

Това твърдение се доказва, като се вземат предвид свойствата и формулите (9.4), (9.5), (9.6), (9.7) и (9.8) в

$$\varphi_{i,2}\left(\frac{2\pi}{k_2} - \tau\right) = -\varphi_{i,2}(\tau) \tag{9.4}$$

(9.5)

$$\frac{\partial g_{i1}\left[\psi_{10}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right), \psi_{20}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right), \dot\psi_{10}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right), \dot\psi_{20}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)\right]}{\partial \dot\psi_i} =$$

$$= -\frac{\partial g_{i1}\left[\psi_{10}(\tau), \psi_{20}(\tau), \dot\psi_{10}(\tau), \dot\psi_{20}(\tau)\right]}{\partial \dot\psi_i}, \quad (i = 1, 2).$$

$$(9.6)\quad \frac{\partial g_{i1}\left[\psi_{10}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right),\psi_{20}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right),\dot{\psi}_{10}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right),\dot{\psi}_{20}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)\right]}{\partial\psi_i} = \frac{\partial g_{i1}\left[\psi_{10}(\tau),\psi_{20}(\tau),\dot{\psi}_{10}(\tau),\dot{\psi}_{20}(\tau)\right]}{\partial\psi_i}$$

които следват от (6.8) и (1.3).

$$(9.7)\quad \sin k_2\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)=-\sin k_2\tau;\ \cos k_2\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)=\cos k_2\tau$$

$$(9.8)\quad \xi_{i,1}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)=-\xi_{i,1}(\tau)$$

Знаем,че $\xi_{i,1}(\tau)$ е решение на системата (6.9) при начални условия $\xi_{i,1}(0)=\dot{\xi}_{i,1}(0)=0$.Понеже (6.9) притежава свойството на теоремата $T_1^{(1)}$ при $q=\frac{\pi}{k_2}$,то $(-1)\,\xi_{i,1}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)$ е също решение на (6.9) .Обаче $\xi_{i,1}\left(\frac{2\pi}{k_2}-\tau\right)$ има същите начални условия както $\xi_{i,1}(\tau)$.От казаното следва (9.8).

Общото решение на системата (9.1) е

$$(9.9)\quad \psi_i(\tau)=\lambda_{1i}\left(\overset{*}{C}_1\cos k k_2\tau+\overset{*}{D}_1\sin k k_2\tau\right)+\lambda_{2i}\left(\overset{*}{C}_2\cos k_2\tau+\overset{*}{D}_2\sin k_2\tau\right)+\overset{*}{\xi}_{i,2}(\tau)$$

където $\overset{*}{\xi}_{i,2}(\tau)$ е частно решение на (9.1) .Изискваме

$$\overset{*}{\xi}_{i,2}(0)=\dot{\overset{*}{\xi}}_{i,2}(0)=0$$

От вида на линейната нехомогенна система (9.1) се вижда,че можем да напишем:

$$(9.10)\quad \overset{*}{\xi}_{i,2}(\tau)=\bar{\xi}_{i,2}(\tau)+\overset{*}{\eta}_i(\tau)+\overset{*}{\zeta}_i(\tau)+\overset{*}{\mu}{}^{(2)}_i(\tau)$$

Тук $\bar{\xi}_{i,2}(\tau)$ е решение, за което $\bar{\xi}_{i,2}(0) = \dot{\bar{\xi}}_{i,2}(0) = 0$, на системата

(9.11) $$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + 2a_2(c_{i1}\psi_{10} + c_{i2}\psi_{20})$$

Следователно получаваме:

(9.12) $$\bar{\xi}_{i,2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \pi(\varepsilon k r_i - s_i)a_2$$

$\overset{*}{\eta}_i(\tau)$ е решение при начални условия $\overset{*}{\eta}_i(0) = \dot{\overset{*}{\eta}}_i(0) = 0$ на системата

(9.13) $$\ddot{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 - 2a_1 k_2^2 \lambda_{2i} \sin k_2\tau \cdot D_{21}$$

Следователно,

(9.14) $$\overset{*}{\eta}_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \varepsilon\pi\lambda_{2i}\, a_1 D_{21}$$

С $\overset{*}{\zeta}_i(\tau)$ означаваме частното решение, при начални условия $\overset{*}{\zeta}_i(0) = \dot{\overset{*}{\zeta}}_i(0) = 0$ на системата

(9.15) $$\ddot{R}_i = c_{i1}R_1 + c_{i2}R_2 + \overset{*}{\rho}\cdot D_{21}\cdot \bar{g}_{i1}(\tau)$$

От (9.15) следва

(9.16) $$\overset{*}{\zeta}_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \overset{*}{\rho}\, D_{21}\, R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$$

Най-сетне в (9.10) с $\overset{*}{\mu}{}^{(2)}_i(\tau)$ е означено онова частно решение на системата:

(9.17) $$\overset{..}{\psi}_i = c_{i1}\psi_1 + c_{i2}\psi_2 + \overset{*}{\phi}_{i,2}(\tau)$$

което се получава при начални условия $\overset{*(2)}{\mu}_i(0) = \overset{*(2)}{\dot{\mu}}_i(0) = 0$

Следователно

$$\overset{*(2)}{\mu}_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \frac{\varepsilon\lambda_{1i}}{\Delta k k_2}\int_0^{\pi/k_2}\left[\lambda_{21}\overset{*}{\phi}_{22}(u) - \lambda_{22}\overset{*}{\phi}_{12}(u)\right]\sin k k_2 u\,du -$$

(9.18) $$-\frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}\int_0^{\pi/k_2}\left[\lambda_{12}\overset{*}{\phi}_{12}(u) - \lambda_{11}\overset{*}{\phi}_{22}(u)\right]\sin k_2 u\,du$$

Като използуваме началните условия (6.21) получаваме от (9.3)

(9.19) $$\psi_{i,2}(\tau) = \lambda_{1i}\overset{*}{D}_{12}\sin k k_2\tau + \lambda_{2i}\overset{*}{D}_{22}\sin k_2\tau + \overset{*}{\xi}_{i,2}(\tau)$$

където

(9.20) $$\overset{*}{D}_{12} = \frac{a_2}{k_2}$$

а константата $\overset{*}{D}_{22}$ подлежи на определяне заедно с a_3 .

Ако частното решение $\overset{*}{\xi}_{i,2}(\tau)$ е периодично с период $\frac{2\pi}{k_2}$ то същото свойство ще имат функциите $\psi_{i,2}(\tau)$, съгласно (9.19). Като приложим теоремата $T_1^{(1)}$ при $q = \frac{\pi}{k_2}$ получаваме условието:

(9.21) $$\overset{*}{\xi}_{i,2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = 0$$

Прилагането на теорема $T_1^{(1)}$ можем да извършим, защото $\overset{*}{\xi}_{i,2}(0) = 0$ и освен това системата (9.1) има свойството от §1 при $q = \frac{\pi}{k_2}$.

Последното твърдение следва от вида на (9.1) и от равенствата (9.3), (9.5), (9.6) и (2.11).

От (9.20), (9.10), (6.28), (9.13) и (9.15) получаваме:

$$\text{(9.22)} \qquad \pi(\varepsilon k r_{i} - s_{i})a_2 + \left[\varepsilon\pi\lambda_{2i}a_1 + \rho^{*} R_{i}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] D_{21} = -\mu_{i}^{*(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$$

От системата (9.22) определяме коефициента a_2 от (6.1) и D_{21}. Това може да стане еднозначно съгласно теорема $T_1^{(2)}$.

По аналогия на метода от § 6, можем да намерим останалите коефициенти $a_3, a_4, a_5 \ldots\ldots a_m \ldots\ldots$ на периода $\frac{2}{k_2}[\pi + \delta(\lambda^2)]$ от развитието (6.1) и последователните приближения $\psi_{i,2}(\tau), \psi_{i,3}(\tau), \ldots\ldots \psi_{i,m-1}(\tau) \ldots$ от развитието (6.5).

§10. ПОСТРОЯВАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ И ТЯХНИТЕ ПЕРИОДИ ЗА ПОЛИНОМНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН ЗА СЛУЧАИТЕ I И III./ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ И АНУЛИРАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ ПРЕД ВЕКОВИТЕ ЧЛЕНОВЕ./

Изследванията, които ще направим в настоящия параграф са подобни на тези, които направихме в § 7. Разликата е само в това, че сега ще разглеждаме случаите I и III вместо II и IV. Затова пътя от изследванията е аналогичен и забележките които направихме в увода на § 6 са абсолютно валидни и тук.

От всичко казано по-горе е ясно, че сега ще потърсим коефициентите $a_1, a_2, \ldots\ldots$ от равенството (6.1) на развитието на, $\frac{2}{K_2}\left[\pi + \delta(\pi^2)\right]$ както и последователните приближения $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau), \ldots\ldots$,от (6.5). Началните условия сега се определят от случаите I и III.

Най-напред да потърсим коефициента a_1 от развитието на периода (6.1). Като заместим (4.1) и (2.7) в (6.17), получаваме за първи случай.

$$(10.1) \qquad a_1 = \frac{AN+B}{CN+D}$$

където N се дава от (4.2) и коефициентите A, B, C и D се определят от равенствата:

$$A = -k^3 \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right]$$

(10.2)

$$B = \varepsilon \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right]$$

$$C = 2 \Delta k^3 k_2^2 \lambda_{2i}$$

$$D = -2 \Delta k^2 k_2^2 \varepsilon \lambda_{1i}.$$

Равенството (10.1) е валидно за случая, когато резонансната характеристика k е по-голяма от две. Аналогичен резултат се получава и за случая III, където условието (10.1) се запазва, но A, B, C и D имат следните стойности:

$$A = -k \lambda_{2i} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right]$$

(10.3)

$$B = \varepsilon \lambda_{1i} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right]$$

$$C = 2 \Delta k k_2^2 \lambda_{2i}.$$

$$D = 2 \Delta k^2 k_2^2 \varepsilon \lambda_{1i}.$$

Използувайки (2.7), (3.4) и (6.17) получаваме коефициентът a_1 за случая I, когато цялото число k е равно на две,

(10.4)
$$a_1 = \frac{AN^2 + BN + C}{DN + E}$$

Тук N се дава от формулите (3.5) и (3.6). Освен това

$$A=4\lambda_{1i}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^{2}+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^{2}\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^{2}+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^{2}\right)\right]$$

$$B=-2\kappa_{2}\lambda_{2i}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]$$

$$+4\kappa_{2}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]\lambda_{2i}$$

$$-8\kappa_{2}\lambda_{2i}\left[\lambda_{12}\left(a_{1}\lambda_{21}+a_{2}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{1}\lambda_{21}+b_{2}\lambda_{22}\right)\right]$$

(10.5)

$$C=\kappa_{2}\lambda_{1i}\left[\lambda_{21}\left(b_{1}\lambda_{11}+b_{2}\lambda_{12}\right)-\lambda_{22}\left(a_{1}\lambda_{11}+a_{2}\lambda_{12}\right)\right]$$

$$D=16\Delta\kappa_{2}^{3}\lambda_{2i}$$

$$E=-8\Delta\kappa_{2}^{3}\lambda_{1i}$$

Аналогичен резултат се получава и за случая III, когато резонансната характеристика κ е равна на две. Тогава условието (10.4) се запазва, но коефициентите A, B, C, D и E имат други стойности. Тези стойности са:

$$A=\lambda_{1i}\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^{2}+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^{2})$$

$$-\lambda_{1i}\lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^{2}+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^{2})$$

$$B=-2K_{2}\lambda_{2i}\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})+$$

$$+2K_{2}\lambda_{2i}\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})+$$

$$+4K_{2}\lambda_{2i}\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})+ \tag{10.6}$$

$$-4K_{2}\lambda_{2i}\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-$$

$$-8K_{2}\lambda_{2i}\left[\lambda_{12}(a_{1}\lambda_{21}+a_{2}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{1}\lambda_{21}+b_{2}\lambda_{22})\right].$$

$$C=4K_{2}\lambda_{1i}\left[\lambda_{21}(b_{1}\lambda_{11}+b_{2}\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_{1}\lambda_{11}+a_{2}\lambda_{12})\right]$$

$$D=16\Delta K_{2}^{3}\lambda_{2i}.$$

$$E=-32\Delta K_{2}^{3}\lambda_{1i}.$$

Функциите $\psi_{i,0}(\tau)$ от (6.5) се получават, за случаите I и III, от (6.8), чрез съответно заместване на r_i и s_i от (2.7).

За случая I имаме

$$\psi_{i,0}(\tau) = \frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}\sin kk_2\tau + \frac{kN}{k_2}\lambda_{2i}\sin k_2\tau \tag{10.7}$$

а за случая III

$$\psi_{i,0}(\tau) = \frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}\sin kk_2\tau + \frac{N}{kk_2}\lambda_{2i}\sin k_2\tau \tag{10.8}$$

В равенствата (10.7) и (10.8) параметърът N се дава от условието (4.2). Тук цялото число k е по-голямо от две.

Когато пък резонансната характеристика k е равна на две, функциите $\psi_{i,0}(\tau)$ се получават чрез заместване на $k=2$ във формулите (10.7) и (10.8). Обаче тук параметърът N се взема от равенството (3.5) със (3.6) или (3.9) съответно на случаите I и III.

Сега ще намерим функциите $\psi_{i,1}(\tau)$. Това става от равенствата (6.18), в които непознатите членове са $\xi_{i,1}(\tau)$ и D_{21}. $\xi_{i,1}(\tau)$ се вземат от равенството (6.12), където е необходимо да пресметнем $Q_i(\tau)$ и $\bar{\xi}_{i,1}(\tau)$.

$Q_i(\tau)$ се получава от равенствата (7.8), които отговарят за случая, когато цялото число k е по-голямо от две.

Когато резонансната характеристика k е равна на две, $Q_i(\tau)$ се вземат от формулите (7.11) в които са използвани равенствата (7.12) и (7.10).

След като намерихме $Q_i(\tau)$ от съответните равенства (7.8) или (7.11), търсим втория непознат член $\bar{\xi}_{i,1}(\tau)$ от (6.12) в релациите (7.13).

Във I случай, с помощта на равенствата (2.7), формулите (7.13) приемат следния вид:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i,1}(\tau) &= a_1 \lambda_{1i} \left(\tau \cos kk_2\tau - \frac{1}{kk_2} \sin kk_2\tau\right) + \\ &+ a_1 k \lambda_{2i} N \left(\tau \cos k_2\tau - \frac{1}{k_2} \sin k_2\tau\right) \end{aligned} \tag{10.9}$$

Аналогично на формулите (10.9), за случая III получаваме от (2.7) и (7.13) следните равенства:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i,1}(\tau) &= a_1 \lambda_{1i} \left(\tau \cos kk_2\tau - \frac{1}{kk_2} \sin kk_2\tau\right) + \\ &+ a_1 \frac{1}{k} \lambda_{2i} N \left(\tau \cos k_2\tau - \frac{1}{k_2} \sin k_2\tau\right) \end{aligned} \tag{10.10}$$

След като намерихме $Q_i(\tau)$ и $\bar{\xi}_{i,1}(\tau)$, $\xi_{i,1}(\tau)$ се дава от формулите (7.18), които отговарят за случая, когато цялото число k е по-голямо от две.

За случая когато k е равно на две, $\xi_{i,1}(\tau)$ имат форма на релациите (7.17).

Сега във формулите (6.18) за определяне на $\psi_{i,1}(\tau)$, вече познаваме $\xi_{i,1}(\tau)$ от (7.17) или (7.18) и D_{11} от (6.19), а единствения непознат член е D_{21}. Него ще определим заедно с коефициента a_2 от периода $\frac{2}{k_2}[\pi + \delta(\lambda^2)]$ от (6.1). За тази цел ще ползуваме равенствата (6.37), в които е необходимо да пресметнем $\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ и $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$.

Да пресметнем най-напред $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$. Заместим ли $R_i(\tau)$ от (2.11), съответно за случая I, в равенството (2.14) получаваме

$$\bar{g}_{11}(u) = A_1 k^2 \sin k_2 u \cos k k_2 u + A_2 \sin k_2 u \cos k_2 u \cdot k +$$
$$+ A_3 k \cos k_2 u \sin k k_2 u + A_4 \cos k_2 u \sin k_2 u \quad k + \tag{10.11}$$
$$+ A_5 \sin k_2 u \frac{k}{k_2}$$

$$\bar{g}_{21}(u) = B_1 k^2 \sin k_2 u \cos k k_2 u +$$
$$+ B_2 \sin k_2 u \cos k_2 u \; k +$$
$$+ B_3 k \cos k_2 u \sin k k_2 u + \tag{10.12}$$
$$+ B_4 \cos k_2 u \sin k_2 u \cdot k +$$
$$+ B_5 \sin k_2 u \frac{k}{k_2},$$

където

$$A_1 = \left[\lambda_{21}(a_{13}r_1 + a_{14}r_2) + \lambda_{22}(a_{23}r_1 + a_{24}r_2)\right]$$

$$A_2 = \left[\lambda_{21}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2) + \lambda_{22}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2\right]$$

$$A_3 = \left[\lambda_{21}(a_{13}r_1 + a_{23}r_2) + \lambda_{22}(a_{14}r_1 + a_{24}r_2\right]$$

$$A_4 = \left[\lambda_{21}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2) + \lambda_{22}(a_{14}s_1 + a_{24}s_2\right]$$

$$A_5 = \left[a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}\right]$$

(10.13)

$$B_1 = \left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{14}r_2) + \lambda_{22}(b_{23}r_1 + b_{24}r_2)\right]$$

$$B_2 = \left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2) + \lambda_{22}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2)\right]$$

$$B_3 = \left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{23}r_2) + \lambda_{22}(b_{14}r_1 + b_{24}r_2)\right]$$

$$B_4 = \left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2) + \lambda_{22}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2)\right]$$

$$B_5 = \left[b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22}\right]$$

При помощта на (10.11), (10.12) и (2.15) се получава:

$$(10.14) \quad R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = (b_1\lambda_{11}\lambda_{21} + b_2\lambda_{11}\lambda_{22} - a_1\lambda_{12}\lambda_{21} - a_2\lambda_{12}\lambda_{22})\frac{k\pi}{2\Delta k_2^3}\lambda_{2c}$$

Във формулите (10.14) цялото число k е по-голямо от две.

Ако резонансната характеристика k е равна на две, намираме по аналогия

$$
\begin{aligned}
R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \left[2b_{13}\lambda_{21}^2 + (b_{14}+b_{23}-2a_{23})\lambda_{21}\lambda_{22} - (a_{14}+a_{23})\lambda_{22}^2\right]\frac{\pi\lambda_{1i}\lambda_{21}N}{2\Delta k_2^3} + \\
& + \left[(b_{14}+b_{23})\lambda_{21}^2 + (2b_{24}-a_{14}-a_{23})\lambda_{21}\lambda_{22} - 2a_{24}\lambda_{22}^2\right]\frac{\pi\lambda_{1i}N\lambda_{22}}{2\Delta k_2^3} + \\
& + \left[a_{13}\lambda_{12}\lambda_{21} - (a_{14}-2a_{23})\lambda_{12}\lambda_{22} - b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} - (2b_{23}-b_{14})\lambda_{11}\lambda_{22}\right]\frac{\pi\lambda_{2i}\lambda_{11}}{4\Delta k_2^3} - \\
& - \left[(a_{23}-2a_{14})\lambda_{12}\lambda_{21} - a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22} + (2b_{14}-b_{23})\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{11}\lambda_{22}\right]\frac{\pi\lambda_{2i}\lambda_{12}}{4\Delta k_2^3} - \\
& - \left[a_1\lambda_{12}\lambda_{21} + a_2\lambda_{12}\lambda_{22} - b_1\lambda_{11}\lambda_{21} - b_2\lambda_{11}\lambda_{22}\right]\frac{\pi\lambda_{2i}}{\Delta k_2^3}
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

За III случай се получават аналогични резултати .

Тук намираме $\bar{g}_{11}(u)$ и $\bar{g}_{21}(u)$ в във формите:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{11}(u) = {} & A_1 \sin k_2 u \cos k k_2 u + A_2 \frac{1}{k}\sin k_2 u \cos k_2 u + \\
& + A_3 \frac{1}{k}\cos k_2 u \sin k k_2 u + A_4 \frac{1}{k}\cos k_2 u \sin k_2 u + \\
& + A_5 \frac{1}{k k_2}\sin k_2 u .
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{21}(u) = {} & B_1 \sin k_2 u \cos k k_2 u + B_2 \frac{1}{k}\sin k_2 u \cos k_2 u + \\
& + B_3 \frac{1}{k}\cos k_2 u \sin k k_2 u + B_4 \frac{1}{k}\cos k_2 u \sin k_2 u + \\
& + B_5 \frac{1}{k k_2}\sin k_2 u .
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

В горните равенства (10.16) и (10.17) коефициентите A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 се вземат от релациите (10.13).
Следователно

$$R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \left(b_1\lambda_{11}\lambda_{21} + b_2\lambda_{11}\lambda_{22} - a_1\lambda_{12}\lambda_{21} - a_2\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta k k_2^3} \tag{10.18}$$

което отговаря на случая когато k е по-голямо от две. Когато резонансната характеристика k е равна на две, след необходими преработки, можем да намерим релацията:

$$\begin{aligned} R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{N\lambda_{21}\lambda_{1i}\pi}{32\Delta k_2^3}\left[2b_{13}\lambda_{21}^2 + (b_{23}+b_{14})\lambda_{21}\lambda_{22} - 2a_{13}\lambda_{21}\lambda_{22} - (a_{23}+a_{14})\lambda_{22}^2\right] \\ & + \frac{N\lambda_{22}\lambda_{1i}\pi}{32\Delta k_2^3}\left[(b_{14}+b_{23})\lambda_{21}^2 + (2b_{24}-a_{14}-a_{23})\lambda_{21}\lambda_{22} - 2a_{24}\lambda_{22}^2\right] \\ & - \frac{\lambda_{11}\lambda_{2i}\pi}{16\Delta k_2^3}\left[(a_{14}-2a_{23})\lambda_{12}\lambda_{22} - a_{13}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + (2b_{23}-b_{14})\lambda_{11}\lambda_{22}\right] \\ & - \frac{\lambda_{12}\lambda_{2i}\pi}{16\Delta k_2^3}\left[(a_{23}-2a_{14})\lambda_{12}\lambda_{21} - a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22} + (2b_{14}-b_{23})\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{11}\lambda_{22}\right] \\ & - \frac{\lambda_{2i}\pi}{4\Delta k_2^3}\left[(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})\lambda_{12} - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\right] \end{aligned} \tag{10.19}$$

Другия непознат член $\mu_i^{(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ от (6.37) се взема от равенството (10.20), което отговаря за случая, когато цялото число k е по-голямо от две.

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{*(2)}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = {} & \frac{1}{k_2}\,\pi\varepsilon\lambda_{1i}\, a_1^2 + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{\Delta k k_2^2}\cdot a_1 (c_{21}\lambda_{21} - c_{11}\lambda_{22})\cdot(A'_{11} + B_{21}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{\Delta k k_2^2}\cdot a_1 (c_{22}\lambda_{21} - c_{12}\lambda_{22})\cdot(A'_{12} + B_{22}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{2\Delta k^2 k_2^3}\cdot a_1 (b_1\lambda_{11}\lambda_{21} - a_1\lambda_{11}\lambda_{22} + b_2\lambda_{21}\lambda_{12} - a_2\lambda_{22}\lambda_{12}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2^2} (b_1\lambda_{21} - a_1\lambda_{22})\cdot(A'_{11} + B_{21}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2^2}\cdot (b_2\lambda_{21} - a_2\lambda_{22})\cdot(A'_{12} + B_{22}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{8\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{14}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{14}r_2)\right] A'_{61} + \qquad (10.20) \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{8\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{23}r_1 + b_{24}r_2) - \lambda_{22}(a_{23}r_1 + a_{24}r_2)\right]\cdot A'_{62} + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2)\right]\cdot A'_{71} + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2)\right] A'_{72} + \\
& - \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}r_1 + b_{23}r_2) - \lambda_{22}(a_{13}r_1 + a_{23}r_2)\right] A'_{61} - \\
& - \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(b_{14}r_1 + b_{24}r_2) - \lambda_{22}(a_{14}r_1 + a_{24}r_2)\right] A'_{62} - \\
& - \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2) - \lambda_{22}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2)\right](A'_{71} + k A'_{81}) - \\
& - \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{4\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2) - \lambda_{22}(a_{14}s_1 + a_{24}s_2)\right](A'_{72} + k A'_{82}) + \\
& + \frac{\pi\varepsilon\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2^2} (\lambda_{21} N_5 - \lambda_{22} M_5) -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{\Delta K_2^2}\, a_1 (c_{11}\lambda_{12} - c_{21}\lambda_{11})\cdot(A'_{31} - B_{41}) -$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{\Delta K_2^2}\cdot a_1 (c_{12}\lambda_{12} - c_{22}\lambda_{11})\cdot(A'_{32} - B_{42}) -$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(a_1\lambda_{12} - b_1\lambda_{11})\cdot(A'_{31} - B_{41}) -$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(a_2\lambda_{12} - b_2\lambda_{11})\cdot(A'_{32} - B_{42}) -$$

$$-\frac{\kappa\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}r_1 + a_{14}r_2) - \lambda_{11}(b_{13}r_1 + b_{14}r_2)\right]\cdot A'_{81} -$$

$$-\frac{\kappa\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{23}r_1 + a_{24}r_2) - \lambda_{11}(b_{23}r_1 + b_{24}r_2)\right]\cdot A'_{82} - \tag{10.20}$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}s_1 + a_{14}s_2) - \lambda_{11}(b_{13}s_1 + b_{14}s_2)\right]\cdot A'_{51} -$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{23}s_1 + a_{24}s_2) - \lambda_{11}(b_{23}s_1 + b_{24}s_2)\right] A'_{52} +$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}r_1 + a_{23}r_2) - \lambda_{11}(b_{13}r_1 + b_{23}r_2)\right](A'_{71} + \kappa A'_{81}) +$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{14}r_1 + a_{24}r_2) - \lambda_{11}(b_{14}r_1 + b_{24}r_2)\right](A'_{72} + \kappa A'_{82}) +$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}s_1 + a_{23}s_2) - \lambda_{11}(b_{13}s_1 + b_{23}s_2)\right] A'_{51} +$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{14}s_1 + a_{24}s_2) - \lambda_{11}(b_{14}s_1 + b_{24}s_2)\right]\cdot A'_{52} -$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(\lambda_{12}M_6 - \lambda_{11}N_6)$$

Когато κ е равно на две, получаваме:

$$\overset{*(2)}{\mu}_i\left(\frac{\pi}{K_2}\right) = \frac{1}{K_2}\cdot \pi\lambda_{1i}\cdot a_1^2 +$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{2\Delta K_2^2}\cdot a_1\left(c_{21}\lambda_{21}-c_{11}\lambda_{22}\right)\cdot\left(A_{61}+B_{21}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{2\Delta K_2^2}\cdot a_1\left(c_{22}\lambda_{21}-c_{12}\lambda_{22}\right)\left(A_{62}+B_{22}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2^3}\cdot a_1\left(b_1\lambda_{11}\lambda_{21}-a_1\lambda_{11}\lambda_{22}+b_2\lambda_{12}\lambda_{21}-a_2\lambda_{12}\lambda_{22}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{4\Delta K_2^2}\left(b_1\lambda_{21}-a_1\lambda_{22}\right)\cdot\left(A_{61}+B_{21}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{4\Delta K_2^2}\left(b_2\lambda_{21}-a_2\lambda_{22}\right)\cdot\left(A_{62}+B_{22}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}r_1+b_{14}r_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}r_1+a_{14}r_2\right)\right]\left(A_{11}+2A_{91}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{23}r_1+b_{24}r_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{23}r_1+a_{24}r_2\right)\right]\left(A_{12}+2A_{92}\right)+ \tag{10.21}$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}s_1+b_{14}s_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}s_1+a_{14}s_2\right)\right]\left(A_{21}+A_{41}+A_{81}-B_{41}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{23}s_1+b_{24}s_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{23}s_1+a_{24}s_2\right)\right]\left(A_{22}+A_{42}+A_{82}-B_{42}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}s_1+b_{23}s_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}s_1+a_{23}s_2\right)\right]\left(A_{41}-A_{21}-2A_{31}-3A_{81}-B_{41}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left[\lambda_{21}\left(b_{14}s_1+b_{24}s_2\right)-\lambda_{22}\left(a_{14}s_1+a_{24}s_2\right)\right]\left(A_{42}-A_{22}-2A_{32}-3A_{82}-B_{42}\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left(\lambda_{21}N_4-\lambda_{22}M_4\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{1i}}{4\Delta K_2^2}\left(\lambda_{21}N_5-\lambda_{22}M_5\right)-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}\cdot a_1\cdot(c_{11}\lambda_{12}-c_{21}\lambda_{11})\left[A_{21}-A_{31}+2(A_{41}-B_{41})\right]-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}\cdot a_1\cdot(c_{12}\lambda_{12}-c_{22}\lambda_{11})\left[A_{22}-A_{32}+2(A_{42}-B_{42})\right]-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{8\Delta K_2^2}\, a_1\left[(a_{13}s_1+a_{14}s_2)\lambda_{11}\lambda_{12}-(b_{13}s_1+b_{14}s_2)\lambda_{11}^2+(a_{23}s_1+a_{24}s_2)\lambda_{12}^2-(b_{23}s_1+b_{24}s_2)\lambda_{11}\lambda_{12}\right]-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2^2}\,(a_1\lambda_{12}-b_1\lambda_{11})\left[A_{21}-A_{31}+2(A_{41}-B_{41})\right]-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2^2}\,(a_2\lambda_{12}-b_2\lambda_{11})\left[A_{22}-A_{32}+2(A_{42}-B_{42})\right]-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[(a_{13}r_1+a_{14}r_2)\lambda_{12}-(b_{13}r_1+b_{14}r_2)\lambda_{11}\right](A_{31}-A_{41}+A_{81}+B_{41})-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[(a_{23}r_1+a_{24}r_2)\lambda_{12}-(b_{23}r_1+b_{24}r_2)\lambda_{11}\right](A_{32}-A_{42}+A_{82}+B_{42})-$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(a_{13}s_1+a_{14}s_2)-(b_{13}s_1+b_{14}s_2)\lambda_{11}\right](A_{61}+B_{21})- \tag{10.21}$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[(a_{23}s_1+a_{24}s_2)\lambda_{12}-(b_{23}s_1+b_{24}s_2)\lambda_{11}\right](A_{62}+B_{22})+$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2^2}\cdot a_1\left[(a_{13}s_1+a_{23}s_2)\lambda_{11}\lambda_{12}-(b_{13}s_1+b_{23}s_2)\lambda_{11}^2+(a_{14}s_1+a_{24}s_2)\lambda_{12}^2-(b_{14}s_1+b_{24}s_2)\lambda_{11}\lambda_{12}\right]$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[(a_{13}r_1+a_{23}r_2)\lambda_{12}-(b_{13}r_1+b_{23}r_2)\lambda_{11}\right](A_{41}-B_{41}-3A_{81}-A_{21}-2A_{31})$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}\left[(a_{14}r_1+a_{24}r_2)\lambda_{12}-(b_{14}r_1+b_{24}r_2)\lambda_{11}\right](A_{42}-A_{22}-2A_{32}-3A_{82}-B_{42})$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[(a_{13}s_1+a_{23}s_2)\lambda_{12}-(b_{13}s_1+b_{23}s_2)\lambda_{11}\right](A_{61}+B_{21})$$

$$+\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left[(a_{14}s_1+a_{24}s_2)\lambda_{12}-(b_{14}s_1+b_{24}s_2)\lambda_{11}\right](A_{62}+B_{22})$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4\Delta K_2}(\lambda_{12}M_2-\lambda_{11}N_2)+\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}M_3-\lambda_{11}N_3)$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2}(\lambda_{12}M_6-\lambda_{11}N_6).$$

Вече са пресметнати всички необходими членове за определяне на коефициента a_2 от периода на (6.1) и D_{21} от (6.18). От равенствата (9.22) следва:

$$a_2 = \frac{\left[\varepsilon\pi\lambda_{21}a_1 + \rho^* R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]\overset{*(2)}{\mu_2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - \left[\varepsilon\pi\lambda_{22}a_1 + \rho^* R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]\overset{*(2)}{\mu_1}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\left[\varepsilon\pi\lambda_{22}a_1 + \rho^* R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] - \pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\left[\varepsilon\pi\lambda_{21}a_1 + \rho^* R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]}$$

(10.22)

$$D_{21} = \frac{\pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\overset{*(2)}{\mu_1}\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - \pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\overset{*(2)}{\mu_2}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)}{\pi(\varepsilon k r_1 - s_1)\left[\varepsilon\pi\lambda_{22}a_1 + \rho^* R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right] - \pi(\varepsilon k r_2 - s_2)\left[\varepsilon\pi\lambda_{21}a_1 + \rho^* R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\right]}$$

Тук съответните $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ и $\overset{*(2)}{\mu_i}\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ се дават от формулите (10.13), (10.14), (10.15) или (10.18), (10.19) и (10.20) или (10.21) съответно на случаите I или III при $k>2$ или $k=2$.

След като намерихме D_{21}, вече можем да определим $\psi_{i,1}(\tau)$ от (6.18). По-точно $\psi_{i,1}(\tau)$ се определя от равенствата (6.18) в които членовете D_{21} и $\xi_{i,1}(\tau)$ се намират в съответните формули (10.22) и (10.20) или (10.21).

И така най-сетне построихме коефициентите a_1, a_2 от периода $\frac{2}{k_2}\left[\pi + \delta(\lambda^2)\right]$ от (6.1) и приближенията $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau)$ от (6.5). По аналогичен начин, съгласно § 6, могат да бъдат построени и останалите коефициенти a_3, a_4, a_5, ... a_m .....от периода (6.1) и функциите $\psi_{i,2}(\tau)$, $\psi_{i,3}(\tau)$, ...

След като завършихме построяването на периодичните решения и техните периоди на системата (1.1) принадлежаща на множеството $\overset{(2)}{G_2}(k)$, ще анулираме коефициентите пред вековите членове, които присъствуват в равенствата (7.17) и (7.18) съответно на случаите когато k е равно на две или е по-голямо от две, при случаите I и III.

Най-напред да вземем равенствата (7.17) за I случай, когато резонансната характеристика κ е равна на две. В този случай, коефициентът пред вековия член $\tau \cos 2k_2\tau$, с помоща на равенствата (7.12), (7.14) и (7.17), е

$$A_{7i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{8\Delta k_2}(\lambda_{21}B_4 - \lambda_{22}A_4) + \frac{\lambda_{1i}}{4\Delta k_2}(\lambda_{21}B_5 - \lambda_{22}A_5) +$$

$$+ \frac{\lambda_{1i}\, a_1}{2\Delta k_2}\left[\lambda_{21}(c_{21}r_1 + c_{22}r_2) - \lambda_{22}(c_{11}r_1 + c_{12}r_2)\right]$$

От горното равенство и (7.10), (2.7)I , (10.4), следва

$$A_{7i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2 + b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{22}^2) - \lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2 + a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{22}^2)\right]\frac{N^3}{k_2}$$

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]\frac{N}{4}$$

$$(10.23) + \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21} + b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21} + b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22} + b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\right]\frac{N}{2}$$

$$+ \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\cdot\frac{N}{4}$$

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i} - \lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]N$$

Обаче стойността на дясната страна на (10.23) е равна на нула по силата на доказаните по-рано от нас равенства (3.5) и (3.6).

Сега пък да разгледаме равенствата (7.18) за I случай при който резонансната характеристика κ е по-голяма от две.

Както и в горния случай коефициентът пред вековия член $\tau\cos kk_2\tau$ се получава, след съответно смятане с помощта на равенствата (7.8), (7.9), (7.14), (7.18), във вида,

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}\, a_1}{\Delta k k_2}\left[\lambda_{21}(c_{21}r_1 + c_{22}r_2) - \lambda_{22}(c_{11}r_1 + c_{12}r_2)\right] + \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k k_2}\left(\lambda_{21}B_5 - \lambda_{22}A_5\right).$$

Обаче ако приложим (7.10), (2.7)I, (2.2), (2.3) получаваме:

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k^2 k_2^2}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right] + \lambda_{1i}\, a_1$$

Като се използува a_1 от (10.1) в горното равенство и се групира подходящо, намираме коефициентът пред вековия член $\tau\cos kk_2\tau$ във вида

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2(kN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{k}$$

(10.24)

$$- \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2(kN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]kN$$

От равенствата (4.1) се вижда, че стойноста на (10.24) е равна на нула.

При равенствата (7.17) за I случай, когато резонансната характеристика k е равна на две, коефициентът пред вековия член $\tau\cos k_2\tau$ в (7.17), с помощта на формулите (7.12), и (7.14) приема вида:

$$A_{5i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{2i}}{4\Delta}\left(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2\right)-\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta}\left(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3\right)+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}\left(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6\right)+$$

$$+\frac{\lambda_{2i}\,a_1}{\Delta k_2}\left[\lambda_{12}\left(c_{11}s_1+c_{12}s_2\right)-\lambda_{11}\left(c_{21}s_1+c_{22}s_2\right)\right]$$

От $(2.7)I$, (2.2), (2.3), (7.10) и (10.4) намираме, след необходими преработки и подходящо групиране,

$$A_{5i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i}-\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2\right)\right]\frac{N^3}{k_2}$$

$$-\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i}-\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]\frac{N}{4}$$

$$+\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i}-\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]\frac{N}{2}$$

$$+\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i}-\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12}\right)-\lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12}\right)\right]\frac{N}{4} \tag{10.25}$$

$$-\frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{\Delta k_2^2(2N\lambda_{2i}-\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22}\right)\right]N$$

Обаче последният израз е равен на нула поради равенствата (3.5) и (3.6).

При равенствата (7.18) за I случай когато k е по-голямо от две, коефициентът пред вековия член $\tau\cos k_2\tau$ се получава, след съответните изчисления с помощта на равенствата $(7, 9)$ и (7.14), във вида:

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(c_{11}s_1 + c_{12}s_2) - \lambda_{11}(c_{21}s_1 + c_{22}s_2)\right]$$

$$+ \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}\left(\lambda_{12}A_6 - \lambda_{11}B_6\right).$$

Сега използуваме (7.10), (2.7)I, (2.2) и (2.3).

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{k\lambda_{2i}N}{2\Delta K_2^2}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right] +$$

$$+ k\lambda_{2i}N a_1.$$

Ако заменим a_1 от (10.1) в горното равенство и групираме по-подходящ начин намираме:

$$A'_{4i} + B_{3i} = \frac{\varepsilon\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2(k\lambda_{2i}N - \varepsilon\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{k}$$

$$- \frac{\varepsilon\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2(k\lambda_{2i}N - \varepsilon\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]kN \qquad (10.26)$$

Стойноста на (10.26) е равна на нула по силата на намереното от нас условие (4.1).

Вече разгледахме анулирането на коефициентите пред вековите членове за I случай във всичките му варианти, а сега да разгледаме всички варианти в равенствата (7.17) и (7.18) за случая III.

И така за равенствата (7.17), за случая III, в който резонансната характеристика k е равна на две, коефициетът пред вековия член $\tau\cos 2k_2\tau$, с помоща на равенствата (7,12) и (7,14), приема вида.

$$A_{7i}+B_{1i}=\frac{\lambda_{1i}}{8\Delta K_2}\left(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4\right)+\frac{\lambda_{1i}}{4\Delta K_2}\left(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5\right)$$
$$+\frac{\lambda_{1i}a_1}{\Delta k K_2}\left[\lambda_{21}\left(c_{21}r_1+c_{22}r_2\right)-\lambda_{22}\left(c_{11}r_1+c_{12}r_2\right)\right]$$

С помощта на равенствата (7.10), (2.7)III, (2.2), (2.3) и (10.4) с (10.6), намираме след подходящи преработки

$$\begin{aligned}A_{7i}+B_{1i}=&\frac{N^3\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{32\Delta K_2^3(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2\right)-\lambda_{22}\left(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2\right)\right]\\&-\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta K_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]\\&+\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{4\Delta K_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22}\right)\right]\\&+\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta K_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}\left(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12}\right)-\lambda_{22}\left(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12}\right)\right]\\&-\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}\left(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22}\right)-\lambda_{11}\left(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22}\right)\right]\end{aligned}\tag{10.27}$$

Обаче дясната страна на (10.27) е равна на нула, по силата на равенствата (3.5) и (3.9).

Тук ще разгледаме равенствата (7.18) за III случай, при който резонансната характеристика k е по-голяма от две. В този случай, коефициентът пред вековия член $\tau\cos kK_2\tau$ се получава, след изчисленията с помощта на равенствата (7.9), (7.14) и (7.18), във вида:

$$A'_{2i}+B_{1i}=\frac{\lambda_{1i}a_1}{\Delta k K_2}\left[\lambda_{21}\left(c_{21}r_1+c_{22}r_2\right)-\lambda_{22}\left(c_{11}r_1+c_{12}r_2\right)\right]+$$
$$+\frac{\lambda_{1i}}{2\Delta k K_2}\left(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5\right)$$

От равенствата (7.10), (2.7)III, (2.2) и (2.3) следва:

$$A'_{2i} + B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{2\Delta K^2 K_2^2}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right] + \lambda_{1i}\, a_1$$

Като заместим a_1 от (10.1) в горното равенство намираме:

$$\text{(10.28)}\quad \begin{aligned} A'_{2i} + B_{1i} = {} & \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K K_2^2(\lambda_{2i}N - \varepsilon K\lambda_{1i})}\left[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11} + b_2\lambda_{12}) - \lambda_{22}(a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{12})\right]\frac{N}{K} - \\ & - \frac{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta K K_2^2(\lambda_{2i}N - \varepsilon K\lambda_{1i})}\left[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21} + a_2\lambda_{22}) - \lambda_{11}(b_1\lambda_{21} + b_2\lambda_{22})\right]KN \end{aligned}$$

От равенството (4.1), се вижда, че стойността на (10.28) е равна на нула.

При равенствата (7.17), за случая III, където резонансната характеристика K е равна на две, кофициентът пред вековия член $\tau \cos K_2 \tau$ с помощта на равенствата (7.12), (7, 14) приема вида:

$$\begin{aligned} A_{5i} + B_{3i} = {} & \frac{\lambda_{2i}}{4\Delta}(\lambda_{12}A_2 - \lambda_{11}B_2) - \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta}(\lambda_{12}A_3 - \lambda_{11}B_3) + \frac{\lambda_{2i}}{2\Delta K_2}(\lambda_{12}A_6 - \lambda_{11}B_6) \\ & + \frac{\lambda_{2i}\, a_1}{\Delta K_2}\left[\lambda_{12}(c_{11}s_1 + c_{12}s_2) - \lambda_{11}(c_{21}s_1 + c_{22}s_2)\right] \end{aligned}$$

От (7.10), (2.7)III, (2.2), (2.3), (10.4) и горното равенство, намираме след съответни преработки:

$$A_{5i}+B_{3i}=\frac{N^3\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{32\Delta k_2^3(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}(b_{13}\lambda_{21}^2+b_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{22}^2)-\lambda_{22}(a_{13}\lambda_{21}^2+a_{14}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{21}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{22}^2)\Big]$$

$$-\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta k_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{23}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big]$$

$$+\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{4\Delta k_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}(a_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+a_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+a_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+a_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_{13}\lambda_{11}\lambda_{21}+b_{14}\lambda_{12}\lambda_{21}+b_{23}\lambda_{11}\lambda_{22}+b_{24}\lambda_{12}\lambda_{22})\Big]$$

$$(10.29)\qquad +\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{8\Delta k_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{21}(b_1\lambda_{11}+b_2\lambda_{12})-\lambda_{22}(a_1\lambda_{11}+a_2\lambda_{12})\Big]$$

$$-\frac{N\lambda_{1i}\lambda_{2i}}{2\Delta k_2^2(\lambda_{2i}N-2\lambda_{1i})}\Big[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\Big]$$

Горният израз е равен на нула по силата на равенствата (3.5) и (3.9).

Най-накрая ще разгледаме равенствата (7.18) за случая III, който отговаря на случая когато k е по-голямо от две. Както във всички останали случаи коефициентът пред вековия член $\tau\cos k_2\tau$ се получава, след редица сметки с помощта на равенствата (7.9), (7.14) и (7.18),

$$A'_{4i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{2i}a_1}{\Delta k_2}\Big[\lambda_{12}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)-\lambda_{11}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)\Big]+$$
$$+\frac{\lambda_{2i}}{2\Delta k_2}\Big[\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6\Big]$$

Сега използуваме (7.10), (2.7)III, (2.2) и (2.3). Следователно:

$$A'_{4i}+B_{3i}=\frac{\lambda_{2i}N}{2\Delta k k_2^2}\Big[\lambda_{12}(a_1\lambda_{21}+a_2\lambda_{22})-\lambda_{11}(b_1\lambda_{21}+b_2\lambda_{22})\Big]+\frac{N\lambda_{2i}}{k}a_1$$

Ако вземем предвид стойността на a_1 от (10.7), намираме след необходими преработки

$$
\begin{aligned}
A'_{4i} + B_{3i} &= \frac{\varepsilon \lambda_{1i} \lambda_{2i}}{2\Delta k k_2^2 (\lambda_{2i} N - \varepsilon k \lambda_{1i})} \left[\lambda_{21} (b_1 \lambda_{11} + b_2 \lambda_{12}) - \lambda_{22} (a_1 \lambda_{11} + a_2 \lambda_{12}) \right] \cdot \frac{N}{k} \\
&- \frac{\varepsilon \lambda_{1i} \lambda_{2i}}{2\Delta k k_3^2 (\lambda_{2i} N - \varepsilon k \lambda_{1i})} \left[\lambda_{12} (a_1 \lambda_{21} + a_2 \lambda_{22}) - \lambda_{11} (b_1 \lambda_{21} + b_2 \lambda_{22}) \right] k N
\end{aligned}
\tag{10.30}
$$

От равенствата (4.1) се вижда, че (10.30) е равно на нула.

В настоящия параграф, намерихме кофициентите a_1, a_2 ,....., които определят периода $\frac{2}{k_2}[\pi + \delta(\lambda^2)]$ от (6.1), и последователните приближения $\psi_{i,0}(\tau)$, $\psi_{i,1}(\tau)$,..... . Освен това доказахме, че кофициентите пред вековите членове $\tau \cos k k_2 \tau$ и $\tau \cos k_2 \tau$ във следните варианти се анулират.

I	$\tau \cos 2 k_2 \tau$	$k = 2.$
I	$\tau \cos k k_2 \tau$	$k > 2.$
I	$\tau \cos k_2 \tau$	$k = 2.$
I	$\tau \cos k_2 \tau$	$k > 2.$
III	$\tau \cos 2 k_2 \tau$	$k = 2.$
III	$\tau \cos k k_2 \tau$	$k > 2.$
III	$\tau \cos k_2 \tau$	$k = 2.$
III	$\tau \cos k_2 \tau$	$k > 2.$

Затова конструирането на периодичните решения и тяхните периоди за полиноми от втора степен за случаите I и III е напълно обосновано.

§.11. АНУЛИРАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ ПРЕД ВЕКОВИТЕ ЧЛЕНОВЕ ПРИ ПОЛИНОМИ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН И НАМИРАНЕ НА НЯКОИ ЕЛЕМЕНТИ ОТ КОНСТРУКЦИЯТА НА ПЕРИОДИЧНИТЕ РЕШЕНИЯ ЗА ТОЗИ СЛУЧАЙ / СХЕМА НА РЕШЕНИЕТО ЗА НАМИРАНЕ НА a_1 ПРИ СЛУЧАИТЕ I, II, III, IV/

В настоящия параграф ще докажем, че коефициентите пред $\tau \cos k k_2 \tau$ и $\tau \cos k_1 \tau$, които участвуват в израза за $\xi_{i,1}(\tau)$ изчезват. По такъв начин валидноста на метода за построяване на периодични решения и тяхните периоди ще бъде потвърдена. Както беше споменато по-горе, тук ще третираме полиноми от трета степен.

По аналогия на формулите (5.6), като се приложи $g_{11}(u)$ и $g_{21}(u)$ от (5.2), (5.3), (5.4), и (5.5) в (2.10), получаваме:

$$
\begin{aligned}
Q_i(\tau) = {} & \cos KK_2\tau \big[A_{1i}\tau + A_{2i}\sin K_2\tau + A_{3i}\sin 2K_2\tau + A_{4i}\sin KK_2\tau + \\
& + A_{5i}\sin 2KK_2\tau + A_{6i}\sin 3KK_2\tau + A_{7i}\sin 4KK_2\tau + A_{8i}\sin(K-1)K_2\tau + \\
& + A_{9i}\sin(K+1)K_2\tau + A_{10i}\sin 2(K-1)K_2\tau + A_{11i}\sin 2(K+1)K_2\tau + A_{12i}\sin(K-2)K_2\tau + \\
& + A_{13i}\sin(K+2)K_2\tau + A_{14i}\sin(K-3)K_2\tau + A_{15i}\sin(K+3)K_2\tau + A_{16i}\sin(2K-1)K_2\tau + \\
& + A_{17i}\sin(2K+1)K_2\tau + A_{18i}\sin(3K-1)K_2\tau + A_{19i}\sin(3K+1)K_2\tau\big] - \\
& - \sin KK_2\tau\big[A_{20i} + A_{21i}\cos K_2\tau + A_{22i}\cos 2K\tau + A_{23i}\cos KK_2\tau + A_{24i}\cos 2KK_2\tau + \\
& + A_{25i}\cos 3KK_2\tau + A_{26i}\cos 4KK_2\tau + A_{27i}\cos(K-1)K_2\tau + A_{28i}\cos(K+1)K_2\tau + \\
& + A_{29i}\cos 2(K-1)K_2\tau + A_{30i}\cos 2(K+1)K_2\tau + A_{31i}\cos(K-2)K_2\tau + A_{32i}\cos(K+2)K_2\tau + \\
& + A_{33i}\cos(K-3)K_2\tau + A_{34i}\cos(K+3)K_2\tau + A_{35i}\cos(2K-1)K_2\tau + A_{36i}\cos(2K+1)K_2\tau + \\
& + A_{37i}\cos(3K-1)K_2\tau + A_{38i}\cos(3K+1)K_2\tau\big] \\
& + \cos K_2\tau\big[A_{39i}\tau + A_{40i}\sin K_2\tau + A_{41i}\sin 2K_2\tau + A_{42i}\sin KK_2\tau + A_{43i}\sin 2KK_2\tau + \\
& + A_{44i}\sin 3K_2\tau + A_{45i}\sin 4K_2\tau + A_{46i}\sin(K-1)K_2\tau + A_{47i}\sin(K+1)K_2\tau + \\
& + A_{48i}\sin 2(K-1)K_2\tau + A_{49i}\sin 2(K+1)K_2\tau + A_{50i}\sin(K-2)K_2\tau + A_{51i}\sin(K+2)K_2\tau + \\
& + A_{52i}\sin(K-3)K_2\tau + A_{53i}\sin(K+3)K_2\tau + A_{54i}\sin(2K-1)K_2\tau + A_{55i}\sin(2K+1)K_2\tau + \\
& + A_{56i}\sin(3K-1)K_2\tau + A_{57i}\sin(3K+1)K_2\tau\big] - \\
& - \sin K_2\tau\big[A_{58i} + A_{59i}\cos K_2\tau + A_{60i}\cos 2K_2\tau + A_{61i}\cos KK_2\tau + A_{62i}\cos 2KK_2\tau + \\
& + A_{63i}\cos 3K_2\tau + A_{64i}\cos 4K_2\tau + A_{65i}\cos(K-1)K_2\tau + A_{66i}\cos(K+1)K_2\tau + \\
& + A_{67i}\cos 2(K-1)K_2\tau + A_{68i}\cos 2(K+1)K_2\tau + A_{69i}\cos(K-2)K_2\tau + A_{70i}\cos(K+2)K_2\tau + \\
& + A_{71i}\cos(K-3)K_2\tau + A_{72i}\cos(K+3)K_2\tau + A_{73i}\cos(2K-1)K_2\tau + A_{74i}\cos(2K+1)K_2\tau + \\
& + A_{75i}\cos(3K-1)K_2\tau + A_{76i}\cos(3K+1)K_2\tau\big]
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

където

$$A_{1i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[\frac{1}{2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)+\frac{1}{8}(\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7)+\frac{1}{4}(\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9)+$$
$$+\frac{1}{4}(\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14})+\frac{3}{8}(\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15})\Big]$$

$$A_{2i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[\frac{1}{2K_2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)\Big];$$

$$A_{3i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[\frac{1}{8K_2}(\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9)-\frac{1}{8K_2}(\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14})\Big]$$

$$A_{4i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta 4KK_2^2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)$$

$$A_{5i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1}{4KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{8KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{8KK_2}-\frac{1}{4KK_2}(\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15})\Big]$$

(11.2)

$$A_{6i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{1}{2KK_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)\Big]$$

$$A_{7i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7}{32KK_2}+\frac{\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15}}{32KK_2}\Big]$$

$$A_{8i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[\frac{\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2}{2(K-1)K_1}+\frac{\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K-1)K_2}+$$
$$+\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(K-1)K_2}+\frac{3(\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13})}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16}}{8(K-1)K_2}\Big]$$

$$A_{9i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2}{2(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K+1)K_2}+$$
$$+\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(K+1)K_2}-\frac{3(\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13})}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16}}{8(K+1)K_2}\Big]$$

$$A_{10i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12}}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{16(K-1)K_2}\Big]$$

$$A_{11i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{16(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12}}{16(K+1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{16(K+1)K_2}\Big]$$

$$A_{12i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta KK_2}\Big[\frac{1}{4(K-2)K_2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)\Big]$$

$$A_{13i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{1}{4(K+2)K_2}(\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6)\right]$$

$$A_{14i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{1}{8(K-3)K_2}(\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10})-\frac{1}{8(K-3)K_2}(\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16})\right]$$

$$A_{15i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{1}{8(K+3)K_2}(\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10})+\frac{1}{8(K+3)K_2}(\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16})\right]$$

$$A_{16i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{1}{4(2K-1)K_2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)-\frac{1}{4(2K-1)K_2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)\right]$$

$$A_{17i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{1}{4(2K+1)K_2}(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)-\frac{1}{4(2K+1)}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)\right]$$

$$A_{18i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{1}{8(3K-1)K_2}(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)-\frac{1}{8(3K-1)K_2}(\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11})-\right.$$

(11.2)

$$\left.-\frac{1}{8(3K-1)K_2}(\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13})\right]$$

$$A_{19i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{8(3K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(3K+1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13}}{8(3K+1)K_2}\right]$$

$$A_{20i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1}{4KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2}{(K^2-1)K_2}+\frac{1}{3KK_2}(\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2K_2}-\frac{1}{2(4K^2-1)K_2}\right)(\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4)+\frac{K}{(4K^2-1)K_2}(\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5)-$$

$$-\frac{\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6}{(K^2-4)K_2}+\frac{5(\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7)}{32KK_2}+\frac{6K^2(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{(9K^2-1)(K^2-1)K_2}+$$

$$+\frac{(2K^2-1)(\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9)}{8(K^2-1)KK_2}-\frac{(K^2-3)(\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10})}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}+\frac{K(3K^2-1)(\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11})}{(K^2-1)(9K^2-1)K_2}+$$

$$+\frac{(K^2-2)(\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12})}{(K^2-1)8K_2}-\frac{2K^2(\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13})}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}-\frac{(\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14})}{8(K^2-1)KK_2}+$$

$$\left.+\frac{3(\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15})}{32KK_2}-\frac{6(\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16})}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}\right]$$

$$A_{21i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4}{2K_2}\right]$$

$$A_{22i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12}}{8K_2}\right]$$

$$A_{23i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3}{4KK_2}\right]$$

$$A_{24i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1}{4KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7}{8KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{8KK_2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{8KK_2}-\frac{\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15}}{8KK_2}\right]$$

$$A_{25i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_3-\lambda_{22}A_3}{12KK_2}\right]$$

$$A_{26i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7}{32KK_2}+\frac{\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15}}{32KK_2}\right]$$

$$A_{27i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2}{2(K-1)K_2}+\frac{3(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K-1)K_2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13}}{8(K-1)K_2}+\frac{3(\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16})}{8(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{28i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_2-\lambda_{22}A_2}{2(K+1)K_2}-\frac{3(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K+1)K_2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13}}{8(K+1)K_2}-\frac{3(\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16})}{8(K+1)K_2}\right] \tag{11.2}$$

$$A_{29i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12}}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{16(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{30i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9}{16(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{12}-\lambda_{22}A_{12}}{16(K+1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14}}{16(K+1)K_2}\right]$$

$$A_{31i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6}{4(K-2)K_2}\right]$$

$$A_{32i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_6-\lambda_{22}A_6}{4(K+2)K_2}\right]$$

$$A_{33i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K-3)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16}}{8(K-3)K_2}\right]$$

$$A_{34i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_{10}-\lambda_{22}A_{10}}{8(K+3)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{16}-\lambda_{22}A_{16}}{8(K+3)K_2}\right]$$

$$A_{35i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4}{4(2K-1)}-\frac{\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5}{4(2K-1)K_2}\right]$$

$$A_{36i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{\lambda_{21}B_4-\lambda_{22}A_4}{4(2K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_5-\lambda_{22}A_5}{4(2K+1)K_2}\right]$$

$$A_{37i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[\frac{3(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{8(3K-1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(3K-1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13}}{1}\right]$$

$$A_{38i}=\frac{\lambda_{1i}}{\Delta K K_2}\left[-\frac{3(\lambda_{21}B_8-\lambda_{22}A_8)}{8(3K+1)K_2}-\frac{\lambda_{21}B_{11}-\lambda_{22}A_{11}}{8(K+1)K_2}+\frac{\lambda_{21}B_{13}-\lambda_{22}A_{13}}{8(K+1)K_2}\right]$$

$$A_{39i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{1}{2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)+\frac{1}{4}(\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8)+\frac{1}{8}(\lambda_{12}A_{10}-\lambda_{11}B_{10})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13})+\frac{3}{8}(\lambda_{12}A_{16}-\lambda_{11}B_{16})\right]$$

$$A_{40i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{1}{4K_2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6)\right]$$

$$A_{41i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{4K_2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)-\frac{1}{8K_2}(\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8)-\frac{1}{8K_2}(\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4K_2}(\lambda_{12}A_{16}-\lambda_{11}B_{16})\right]$$

(11.2)

$$A_{42i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{1}{2KK_2}(\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4)\right]$$

$$A_{43i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{1}{8KK_2}(\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8)-\frac{1}{8KK_2}(\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13})\right]$$

$$A_{44i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{12K_2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6)\right]$$

$$A_{45i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{32K_2}(\lambda_{12}A_{10}-\lambda_{11}B_{10})+\frac{1}{32K_2}(\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6)\right]$$

$$A_{46i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1}{2(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_7-\lambda_{11}B_7}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_9-\lambda_{11}B_9}{8(K-1)K_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_{12}A_{12}-\lambda_{11}B_{12}}{8(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{14}-\lambda_{11}B_{14}}{8(K-1)K_2}+\frac{3(\lambda_{12}A_{15}-\lambda_{11}B_{15})}{8(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{47i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1}{2(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_7-\lambda_{11}B_7}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_9-\lambda_{11}B_9}{8(K+1)K_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_{12}A_{12}-\lambda_{11}B_{12}}{8(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{14}-\lambda_{11}B_{14}}{8(K+1)K_2}-\frac{3(\lambda_{12}A_{15}-\lambda_{11}B_{15})}{8(K+1)K_2}\right.$$

$$A_{48i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{11}-\lambda_{11}B_{11}}{16(K-1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13}}{16(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{49i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8}{16(K+1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{11}-\lambda_{11}B_{11}}{16(K+1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13}}{16(K+1)K_2}\right]$$

$$A_{50i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4}{4(K-2)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_5-A_{11}B_5}{4(K-2)K_2}\right]$$

$$A_{51i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4}{4(K+2)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5}{4(K+2)K_2}\right]$$

$$A_{52i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{\lambda_{12}A_9-\lambda_{11}B_9}{8(K-3)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{12}-\lambda_{11}B_{12}}{8(K-3)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{14}-\lambda_{11}B_{14}}{8(K-3)K_2}\right]$$

$$A_{53i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_9-\lambda_{11}B_9}{8(K+3)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{12}-\lambda_{11}B_{12}}{8(K+3)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{14}-\lambda_{11}B_{14}}{8(K+3)K_2}\right]$$

$$A_{54i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3}{4(2K-1)K_2}\right]$$

$$A_{55i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3}{4(2K+1)K_2}\right]$$

$$A_{56i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{\lambda_{12}A_7-\lambda_{11}B_7}{8(3K-1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{15}-\lambda_{11}B_{15}}{8(3K-1)K_2}\right] \tag{11.2}$$

$$A_{57i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_7-A_{11}B_7}{8(3K+1)K_2}+\frac{\lambda_{12}A_{15}-\lambda_{11}B_{15}}{8(3K+1)K_2}\right]$$

$$\begin{aligned}A_{58i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\Bigg[&\frac{K(\lambda_{12}A_1-\lambda_{11}B_1)}{(K^2-1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2}{4K_2}+\frac{K(\lambda_{12}A_3-\lambda_{11}B_3)}{(4K^2-1)K_2}-\frac{\lambda_{12}A_4-\lambda_{11}B_4}{(K^2-1)K_2}+\\&+\frac{2(K^2-2)(\lambda_{12}A_5-\lambda_{11}B_5)}{(K^2-4)KK_2}+\frac{\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6}{3K_2}+\frac{K(3K^2-1)(\lambda_{12}A_7-\lambda_{11}B_7)}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}+\\&+\frac{(K^2-2)(\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8)}{8(K^2-1)K_2}+\frac{K(K^2-7)(\lambda_{12}A_9-\lambda_{11}B_9)}{K_2(K^2-1)(K^2-9)}+\frac{5(\lambda_{12}A_{10}-\lambda_{11}B_{10})}{32K_2}+\\&+\frac{(2K^2-1)(\lambda_{12}A_{11}-\lambda_{11}B_{11})}{8(K^2-1)KK_2}-\frac{(K^2-3)(\lambda_{12}A_{12}-\lambda_{11}B_{12})}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}+\frac{K^2(\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13})}{8(K^2-1)K_2}-\\&-\frac{2K(\lambda_{12}A_{14}-\lambda_{11}B_{14})}{(K^2-1)(K^2-9)K_2}+\frac{K(3K^2-1)(\lambda_{12}A_{15}-\lambda_{11}B_{15})}{2K_2(K^2-1)(9K^2-1)}+\frac{\lambda_{12}A_{16}-\lambda_{11}B_{16}}{32K_2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$A_{59i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_6-\lambda_{11}B_6}{4K_2}\right]$$

$$\begin{aligned}A_{60i}=\frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\Bigg[&-\frac{\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2}{4K_2}-\frac{\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8}{8K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{10}-\lambda_{11}B_{10}}{8K_2}-\frac{\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13}}{8K_2}-\\&-\frac{\lambda_{12}A_{16}-\lambda_{11}B_{16}}{16K_2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$A_{61i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{2KK_2}\left(\lambda_{12}A_5 - \lambda_{11}B_5\right)\right]$$

$$A_{62i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_{11} - \lambda_{11}B_{11}}{8KK_2}\right]$$

$$A_{63i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_6 - \lambda_{11}B_6}{12K_2}\right]$$

$$A_{64i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_{10} - \lambda_{11}B_{10}}{32K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{16} - \lambda_{11}B_{16}}{32K_2}\right]$$

$$A_{65i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_1 - \lambda_{11}B_1}{2(K-1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_7 - \lambda_{11}B_7}{8(K-1)K_2} - \frac{3(\lambda_{12}A_9 - \lambda_{11}B_9)}{8(K-1)K_2} - \frac{3(\lambda_{12}A_{15} - \lambda_{11}B_{15})}{8(K-1)K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{12} - \lambda_{11}B_{12}}{8(K-1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_{14} - \lambda_{11}B_{14}}{8(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{66i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_1 - \lambda_{11}B_1}{2(K+1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_7 - \lambda_{11}B_7}{8(K+1)K_2} - \frac{3(\lambda_{12}A_9 - \lambda_{11}B_9)}{8(K+1)K_2} + \frac{(\lambda_{12}A_{12} - \lambda_{11}B_{12})}{8(K-1)K_2} - \frac{(\lambda_{12}A_{14} - \lambda_{11}B_{14})}{8(K-1)K_2} - \frac{3(\lambda_{12}A_{15} - \lambda_{11}B_{15})}{8(K-1)K_2}\right] \tag{11.2}$$

$$A_{67i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{\lambda_{12}A_8 - \lambda_{11}B_8}{16(K-1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_{11} - \lambda_{11}B_{11}}{16(K-1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_{13} - \lambda_{11}B_{13}}{16(K-1)K_2}\right]$$

$$A_{68i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_8 - \lambda_{11}B_8}{16(K+1)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_{11} - \lambda_{11}B_{11}}{16(K+1)K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{13} - \lambda_{11}B_{13}}{16(K+1)K_2}\right]$$

$$A_{69i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[\frac{1}{4(K-2)K_2}\left(\lambda_{12}A_4 - \lambda_{11}B_4\right) - \frac{1}{4(K-2)K_2}\left(\lambda_{12}A_5 - \lambda_{11}B_5\right)\right]$$

$$A_{70i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{4(K+2)K_2}\left(\lambda_{12}A_4 - \lambda_{11}B_4\right) - \frac{1}{4(K+2)K_2}\left(\lambda_{12}A_5 - \lambda_{11}B_5\right)\right]$$

$$A_{71i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_9 - \lambda_{11}B_9}{8(K-3)K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{12} - \lambda_{11}B_{12}}{8(K-3)K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{14} - \lambda_{11}B_{14}}{8(K-3)K_2}\right]$$

$$A_{72i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_9 - \lambda_{11}B_9}{8(K+3)K_2} - \frac{\lambda_{12}A_{12} - \lambda_{11}B_{12}}{8(K+3)K_2} + \frac{\lambda_{12}A_{14} - \lambda_{11}B_{14}}{8(K+3)K_2}\right]$$

$$A_{73i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_3 - \lambda_{11}B_3}{4(2K-1)K_2}\right] \qquad A_{74i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{\lambda_{12}A_3 - \lambda_{11}B_3}{4(2K+1)K_2}\right]$$

$$A_{75i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{8(3K-1)K_2}\left(\lambda_{12}A_7 - \lambda_{11}B_7\right) + \frac{1}{8(3K-1)K_2}\left(\lambda_{12}A_{15} - \lambda_{11}B_{15}\right)\right]$$

$$A_{76i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta K_2}\left[-\frac{1}{8(3K+1)K_2}\left(\lambda_{12}A_7 - \lambda_{11}B_7\right) + \frac{1}{8(3K+1)K_2}\left(\lambda_{12}A_{15} - \lambda_{11}B_{15}\right)\right]$$

В горните равенства (11.2), A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, и, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16}, се дават от (5.3) и (5.5). В горното уравнение (11.1) за $Q_i(\tau)$ съответните коефициенти пред вековите членове $\tau \cos kk_2\tau$ и $\tau \cos k_2\tau$ са

$$A_{1i} = \frac{\lambda_{1i}}{\Delta kk_2}\Big[\frac{1}{2}(\lambda_{21}B_1-\lambda_{22}A_1)+\frac{1}{8}(\lambda_{21}B_7-\lambda_{22}A_7)+\frac{1}{4}(\lambda_{21}B_9-\lambda_{22}A_9)+$$

(11.3)

$$+\frac{1}{4}(\lambda_{21}B_{14}-\lambda_{22}A_{14})+\frac{3}{8}(\lambda_{21}B_{15}-\lambda_{22}A_{15})\Big]$$

$$A_{39i} = \frac{\lambda_{2i}}{\Delta k_2}\Big[\frac{1}{2}(\lambda_{12}A_2-\lambda_{11}B_2)+\frac{1}{4}(\lambda_{12}A_8-\lambda_{11}B_8)+\frac{1}{8}(\lambda_{12}A_{10}-\lambda_{11}B_{10})+$$

(11.4)

$$+\frac{1}{4}(\lambda_{12}A_{13}-\lambda_{11}B_{13})+\frac{3}{8}(\lambda_{12}A_{16}-\lambda_{11}B_{16})\Big]$$

където A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16} и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16} се дават от (5.3) и (5.5).

Другите коефициенти пред вековите членове $\tau \cos kk_2\tau$ и $\tau \cos k_2\tau$ от $\bar{\xi}_{j_{i,1}}(\tau)$ дадени в (7.13) са

(11.5) $$B_{1i} = \frac{\lambda_{1i}a_1}{\Delta kk_2}\Big[\lambda_{21}(c_{21}r_1+c_{22}r_2)-\lambda_{22}(c_{11}r_1+c_{12}r_2)\Big]$$

(11.6) $$B_{3i} = \frac{\lambda_{2i}a_1}{\Delta k_2}\Big[\lambda_{12}(c_{11}s_1+c_{12}s_2)-\lambda_{11}(c_{21}s_1+c_{22}s_2)\Big]$$

От сега нататък ще третираме всеки един от четирите случая I, II, III, IV, по отделно.

Преди да докажеме анулирането на коефициентите пред вековите членове $\tau \cos kK_2\tau$ и $\tau \cos K_2\tau$,които участвуват в релациите (11.1) и (7.13) е необходимо да пресметнем коефициентът a_1 от (6.1) и $Q_i\left(\frac{\pi}{K_2}\right)$.

За сегашния ни случай в който полиномите са от трета степен и резонансната характеристика k е по-голяма от три $Q_i\left(\frac{\pi}{K_2}\right)$ има следния вид:

$$(11.7)\qquad Q_i\left(\frac{\pi}{K_2}\right) = \Sigma A_{1i}\frac{\pi}{K_2} - A_{39i}\frac{\pi}{K_2} .$$

това следва от (11.1) .Тук A_{1i} и A_{39i} се дават от формулите (11.2) , (5.3) , (5.5) .

От релациите (11.1) , (7.13) и (6.12) следва

$$(11.8)\qquad \begin{aligned} \xi_{i,1}(\tau) = {} & \cos kK_2\tau\,\big[A_{1i}\tau + A_{2i}\sin K_2\tau + A_{3i}\sin 2K_2\tau + A_{4i}\sin kK_2\tau + \\ & + A_{5i}\sin 2kK_2\tau + A_{6i}\sin 3kK_2\tau + A_{7i}\sin 4kK_2\tau + A_{8i}\sin(k-1)K_2\tau + \\ & + A_{9i}\sin(k+1)K_2\tau + A_{10i}\sin 2(k-1)K_2\tau + A_{11i}\sin 2(k+1)K_2\tau + \\ & + A_{12i}\sin(k-2)K_2\tau + A_{13i}\sin(k+2)K_2\tau + A_{14i}\sin(k-3)K_2\tau + A_{15i}\sin(k+3)K_2\tau \\ & + A_{16i}\sin(2k-1)K_2\tau + A_{17i}\sin(2k+1)K_2\tau + A_{18i}\sin(3k-1)K_2\tau + A_{19i}\sin(3k+1)K_2\tau\big] - \\ & - \sin kK_2\tau\,\big[A_{20i} + A_{21i}\cos K_2\tau + A_{22i}\cos 2K_2\tau + A_{23i}\cos kK_2\tau + A_{24i}\cos 2kK_2\tau + \\ & + A_{25i}\cos 3kK_2\tau + A_{26i}\cos 4kK_2\tau + A_{27i}\cos(k-1)K_2\tau + A_{28i}\cos(k+1)K_2\tau + \\ & + A_{29i}\cos 2(k-1)K_2\tau + A_{30i}\cos 2(k+1)K_2\tau + A_{31i}\cos(k-2)K_2\tau + \\ & + A_{32i}\cos(k+2)K_2\tau + A_{33i}\cos(k-3)K_2\tau + A_{34i}\cos(k+3)K_2\tau + \\ & + A_{35i}\cos(2k-1)K_2\tau + A_{36i}\cos(2k+1)K_2\tau + A_{37i}\cos(3k-1)K_2\tau + \end{aligned}$$

$$+A_{38i}\cos(3K+1)K_2\tau\Big]$$

$$+\cos K_2\tau\Big[A_{39i}\tau+A_{40i}\sin K_2\tau+A_{41i}\sin 2K_2\tau+A_{42i}\sin KK_2\tau+A_{43i}\sin 2KK_2\tau+$$

$$+A_{44i}\sin 3K_2\tau+A_{45i}\sin 4K_2\tau+A_{47i}\sin(K+1)K_2\tau+A_{48i}\sin 2(K-1)K_2\tau+$$

$$+A_{49i}\sin 2(K+1)K_2\tau+A_{50i}\sin(K-2)K_2\tau+\cancel{A_{50i}\sin(K+2)K_2\tau+}$$

$$+A_{51i}\sin(K+2)K_2\tau+A_{52i}\sin(K-3)K_2\tau+A_{53i}\sin(K+3)K_2\tau+A_{46i}\sin(K-1)K_2\tau$$

$$+A_{54i}\sin(2K-1)K_2\tau+A_{55i}\sin(2K+1)K_2\tau+A_{56i}\sin(3K-1)K_2\tau+$$

$$+A_{57i}\sin(3K+1)K_2\tau\Big]- \tag{11.8}$$

$$-\sin K_2\tau\Big[A_{58i}+A_{59i}\cos K_2\tau+A_{60i}\cos 2K_2\tau+A_{61i}\cos KK_2\tau+$$

$$+A_{62i}\cos 2KK_2\tau+A_{63i}\cos 3K_2\tau+A_{64i}\cos 4K_2\tau+$$

$$+A_{65i}\cos(K-1)K_2\tau+A_{66i}\cos(K+1)K_2\tau+A_{67i}\cos 2(K-1)K_2\tau+$$

$$+A_{68i}\cos 2(K+1)K_2\tau+A_{69i}\cos(K-2)K_2\tau+A_{70i}\cos(2K+1)K_2\tau+$$

$$+A_{71i}\cos(K-3)+A_{72i}\cos(K+3)K_2\tau+A_{73i}\cos(2K-1)K_2\tau+$$

$$+A_{74i}\cos(2K+1)K_2\tau+A_{75i}\cos(3K-1)K_2\tau+A_{76i}\cos(3K+1)K_2\tau\Big]+$$

$$+B_{1i}\tau\cos KK_2\tau+B_{2i}\sin KK_2\tau+B_{3i}\tau\cos K_2\tau+B_{4i}\sin K_2\tau$$

По принцип пресмятането на a_1 става от формулите (11.1) и (6.17).

Ако заместим $(2.7)I$ и (11.1) в релациите (6.17), получаваме за случая I

$$(11.9) \qquad a_1 = \frac{1}{kN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i}}\left(\varepsilon A_{1i} - A_{3qi}\right)$$

За случая II a_1 се получава от равенствата (6.17), (11.1) и $(2.7)II$ в следната форма:

$$(11.10) \qquad a_1 = \frac{1}{\lambda_{2i} - \varepsilon kN\lambda_{1i}}\left(\varepsilon A_{1i} - A_{3qi}\right)$$

Когато приложим $(2.7)III$ и (11.1) в (6.17) получаваме за случая III

$$(11.11) \qquad a_1 = \frac{k}{N\lambda_{2i} - \varepsilon k\lambda_{1i}}\left(\varepsilon A_{1i} - A_{3qi}\right)$$

За последния случай - IV, вземаме $(2.7)IV$ заедно с (11.1) и (6.17) и получаваме

$$(11.12) \qquad a_1 = \frac{k}{k\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i}N}\left(\varepsilon A_{1i} - A_{3qi}\right)$$

В релациите (11.9), (11.10), (11.11), (11.12), коефициентите A_{1i}, A_{3qi} се вземат от равенствата (11.2), (5.3) и (5.5).

Анулирането на коефициента пред вековия член $\tau\cos k_2\tau$ за случая I става чрез равенствата (11.4), (11.6), $(2.7)I$, (2.2) и (2.3). По-точно коефициентът пред $\tau\cos k_2\tau$ се получава в следния вид:

(11.13) $$A_{3qi} + B_{3i} = A_{3qi} + NK\lambda_{2i}\, a_1$$

Ако приложим a_1 от (11.9) в (11.13) получаваме

(11.14) $$A_{3qi} + B_{3i} = A_{3qi} + NK\lambda_{2i}\frac{\varepsilon A_{1i} - A_{3qi}}{KN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i}} = \frac{\varepsilon}{KN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i}}\left(A_{1i}KN\lambda_{2i} - A_{3qi}\lambda_{1i}\right)$$

Обаче, условието за периодичност, което се получава от равен - ствата (2.9) и (11.7), е

(11.15) $$A_{1i}\, KN\lambda_{2i} - A_{3qi}\,\lambda_{1i} = 0$$

По силата на релациите (11.15), стойността на (11.14) става нула.

За случая II коефициентът пред вековия член $\tau\cos K_2\tau$ се получава чрез равенствата (2.7)II, (11.4), (11.6), (2.2), (2.3),

(11.16) $$A_{3qi} + B_{3i} = A_{3qi} + \lambda_{2i}\, a_1$$

Ако ползуваме a_1 от (11.10), от горното равенство следва:

(11.17) $$A_{3qi} + B_{3i} = \frac{\varepsilon}{\lambda_{2i} - \varepsilon KN\lambda_{1i}}\left(A_{1i}\lambda_{2i} - A_{3qi}KN\lambda_{1i}\right)$$

Чрез (2.9), (11.7) и (2.7)II ,условието за периодичност за случая II е:

$$(11.18) \qquad A_{1i}\lambda_{2i} - \lambda_{1i} A_{3qi}\, kN = 0$$

От (11.18) е ясно, че стойността на коефициентът пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$ дадена в (11.17) е равна на нула.

Коефициентът пред $\tau \cos k_2 \tau$ за III случай се получава с помощта на равенствата (2.7)III, (2.2) , (2.3) , (11.4), (11.6) ,в следния вид:

$$(11.19) \qquad A_{3qi} + B_{3i} = A_{3qi} + \frac{\lambda_{2i}}{k} a_1$$

Тук a_1 се взема от (11.11) и получаваме

$$(11.20) \qquad \begin{aligned} A_{3qi} + B_{3i} &= A_{3qi} + \frac{N\lambda_{2i}}{k} \cdot \frac{k(\varepsilon A_{1i} - A_{3qi})}{N\lambda_{2i} - \varepsilon k \lambda_{1i}} \\ &= \frac{\varepsilon}{N\lambda_{2i} - \varepsilon k \lambda_{1i}} (A_{1i}\lambda_{2i} N - A_{3qi}\, k\lambda_{1i}) \end{aligned}$$

Сега условието за периодичност, което се получава чрез равенствата (2.9) , (2.7)III и (11.7) е

$$(11.21) \qquad A_{1i}\lambda_{2i} N - A_{3qi}\, k\lambda_{1i} = 0$$

Ако заместим (11.21) в (11.20) получаваме стойноста на коефициента пред вековия член за III случай равна на нула.

Най-накрая ще вземем случая IV, в който получаването на стойността на коефициента пред вековия член $\tau \cos k_2 \tau$

се извършва по следния начин. От (11.4), (11.6), (2.2) и (2.3), (2.7)IV имаме:

(11.22) $$A_{3qi} + B_{3i} = A_{3qi} + \lambda_{2i}\, a_1$$

Горната релация прилича на (11.16) по вид, но тук a_1 се взема от релацията (11.12). След като заместим a_1 в горното уравнение получаваме:

(11.23) $$A_{3qi} + B_{3i} = \frac{\varepsilon}{K\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i} N}\left(A_{1i} K\lambda_{2i} - A_{3qi} N\lambda_{1i}\right)$$

Обаче чрез използуване на (11.7), (2.9), (2.7)IV условията за периодичност за този случай са

(11.24) $$A_{1i} K\lambda_{2i} - A_{3qi}\lambda_{1i} N = 0$$

По силата на (11.24) дясната страна на (11.23) изчезва.

За случая I, коефициентите пред вековия член $\tau \cos K\frac{K}{2}\tau$ се получават от (11.3) и (11.5)

(11.25) $$A_{1i} + B_{1i} = A_{1i} + \lambda_{1i}\, a_1$$

Като се замести a_1 от (11.9) получаваме:

(11.26) $$A_{1i} + B_{1i} = \frac{1}{KN\lambda_{2i} - \varepsilon\lambda_{1i}}\left(A_{1i} K\lambda_{2i} N - A_{3qi}\lambda_{1i}\right)$$

От равенствата (11.15) и (11.26) следва, че коефициентът $(A_{1i} + B_{1i})$ пред вековия член $\tau \cos k k_2 \tau$ от $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ изчезва за случая I

За случая II коефициентите пред вековия член $\tau \cos k k_2 \tau$ се получават от (11.3), (11.5), (2.2), (2.3), (2.7) II

$$A_{1i} + B_{1i} = A_{1i} + N k \lambda_{1i} \, a_1 \tag{11.27}$$

Като се замести a_1 от (11.10) получаваме:

$$A_{1i} + B_{1i} = \frac{1}{\lambda_{2i} - \varepsilon k N \lambda_{1i}} \left(A_{1i} \lambda_{2i} - A_{39i} N k \lambda_{1i} \right) \tag{11.28}$$

От равенствата (11.18) и (11.28) следва, че коефициентът $(A_{1i} + B_{1i})$ пред вековия член $\tau \cos k k_2 \tau$ от $\xi_{j_{i,1}}(\tau)$ изчезва за случая II.

За случая III коефициентите пред вековия член $\tau \cos k k_2 \tau$ се получават от (11.3), (11.5), (2.2), (2.3), (2.7) III

$$A_{1i} + B_{1i} = A_{1i} + \lambda_{1i} \, a_1 \tag{11.29}$$

Като се замести a_1 от (11.11) получаваме:

$$A_{1i} + B_{1i} = \frac{1}{\lambda_{2i} N - \varepsilon k \lambda_{1i}} \left(A_{1i} \lambda_{2i} N - A_{34i} k \lambda_{1i} \right) \tag{11.30}$$

От равенствата (11.21) и (11.30) следва, че коефициентът $(A_{1i} + B_{1i})$ пред вековия член $\tau \cos k \frac{k}{2} \tau$ от $\xi_{i,1}(\tau)$ изчезва за случая III.

Най-накрая за случая IV коефициентите пред вековия член се получават от (11.3), (11.5), (2.2), (2.3), (2.7) IV

$$A_{1i} + B_{1i} = A_{1i} + \frac{1}{k} N \lambda_{1i} a_1 \tag{11.31}$$

Като заместим a_1 от (11.12) получаваме:

$$A_{1i} + B_{1i} = \frac{1}{k \lambda_{2i} - \varepsilon \lambda_{1i} N} \left(A_{1i} k \lambda_{2i} - A_{3i} \lambda_{1i} N \right) \tag{11.32}$$

От (11.24) и (11.33) следва, че коефициентът пред вековия член $(A_{1i} + B_{1i})$ от $\xi_{i,1}(\tau)$ изчезва за случая IV.

Вече завършихме анулирането на коефициентите пред вековите членове $\tau \cos k k_2 \tau$ и $\tau \cos k_2 \tau$ от $\xi_{j,1}(\tau)$ при полиномни нелинейности от трета степен, когато резонансната характеристика k е по-голяма от три. Ние изчерпихме в този параграф следните възможни случаи:

1. Коефициент	пред	$\tau \cos k_2 \tau$	за случая	I
2.	"	" $\tau \cos k_2 \tau$		II
3.	"	" $\tau \cos k_2 \tau$		III
4.	"	" $\tau \cos k_2 \tau$		IV
5.	"	" $\tau \cos k k_2 \tau$		I
6.	"	" $\tau \cos k k_2 \tau$		II
7.	"	" $\tau \cos k k_2 \tau$		III
8.	"	" $\tau \cos k k_2 \tau$		IV

Така доказахме, че конструирането на периодичните решения и периодите им е напълно валидно. Тяхното приложение, по-специално за полиномите от трета степен, към числени примери може да се види в §13 и § 14.

§.12. ЕДИН МЕХАНИЧЕН МОДЕЛ ПРИ ПОЛИНОМНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН, КОГАТО РЕЗОНАНСНАТА ХАРАКТЕРИСТИКА κ Е ПО-ГОЛЯМА ОТ ТРИ.

В настоящата глава ще направим едно приложение на резултатите от § 5 и § 11 върху една механична система. При това, ще бъдат разглеждани случаите, когато резонансната характеристика κ е по-голяма от три. Подробното описание на механичната система може да се види в работите [12] и [14] .

В случая системата от диференциални уравнения на движението има вида

$$\ddot{\psi}_1 = \left(\omega^2 - \frac{9g}{7a}\right)\psi_1 + \frac{9g}{14a}\psi_2 + g_{11}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)\cdot\lambda^2 + g_{12}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)\cdot\lambda^4 + \dots$$

(12.1)

$$\ddot{\psi}_2 = \frac{27g}{14a}\psi_1 + \left(\omega^2 - \frac{12g}{7a}\right)\psi_2 + g_{21}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)\cdot\lambda^2 + g_{22}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)\cdot\lambda^4 + \dots$$

Тук функцията $g_{11}(u)$ се дава с формулата:

$$g_{11}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = \left(\frac{183g}{98a} - \frac{41}{21}\omega^2\right)\psi_1^3 + \left(\frac{6}{7}\omega^2 - \frac{123g}{98a}\right)\psi_2^3 + \left(\frac{9}{7}\omega^2 - \frac{873g}{196a}\right)\psi_1^2\psi_2 + \left(\frac{387g}{98a} - \frac{6}{7}\omega^2\right)\psi_1\psi_2^2 +$$

(12.2)

$$+ \frac{9}{7}\dot{\psi}_1^2\psi_2 + \frac{6}{7}\dot{\psi}_2^2\psi_2 - \frac{9}{7}\dot{\psi}_1^2\psi_1 - \frac{6}{7}\dot{\psi}_2^2\psi_1$$

Да отбележим,че ω^2 е един параметър за ротация който се определя със формулата

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a}\left[1 - \frac{2(K^2+1)}{\sqrt{7}(K^2-1)}\right] \tag{12.3}$$

като се върнем към означенията от § 5 и като вземем предвид (12.2) заключваме,че в случая са валидни формулите

$$
\begin{aligned}
a^{(0,0)}_{(3,0)} &= \left[\frac{41(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} - \frac{52}{49}\right]\frac{g}{a};\\
a^{(0,0)}_{(0,3)} &= \left[\frac{3}{98} - \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a};\\
a^{(0,0)}_{(2,1)} &= -\left[\frac{495}{196} + \frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a};\\
a^{(0,0)}_{(1,2)} &= \left[\frac{261}{98} + \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a};\\
a^{(2,0)}_{(1,0)} &= -\frac{9}{7};\\
a^{(2,0)}_{(0,1)} &= \frac{9}{7};\\
a^{(0,0)}_{(0,1)} &= 0;\\
a^{(1,0)}_{(0,1)} &= 0;\\
a^{(0,0)}_{(1,0)} &= 0;\\
a^{(1,0)}_{(1,0)} &= 0;\\
a^{(0,2)}_{(1,0)} &= -\frac{6}{7};\\
a^{(0,2)}_{(0,1)} &= \frac{6}{7};\\
a^{(0,1)}_{(0,1)} &= 0;\\
a^{(1,1)}_{(0,1)} &= 0;\\
a^{(0,1)}_{(1,0)} &= 0;\\
a^{(1,1)}_{(1,0)} &= 0;
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Функцията $g_{21}(u)$ има вида

$$g_{21}(\psi_1,\psi_2,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2)=\left[\frac{24}{7}\omega^2-\frac{369g}{98a}\right]\psi_1^3+\left[\frac{122g}{49a}-\frac{41}{21}\omega^2\right]\psi_2^3+$$

$$+\left[\frac{891g}{98a}-\frac{24}{7}\omega^2\right]\psi_1^2\psi_2+\left[\frac{9}{7}\omega^2-\frac{1539g}{196a}\right]\psi_1\psi_2^2+ \qquad (12.5)$$

$$+\frac{24}{7}\psi_1\dot{\psi}_1^2+\frac{9}{7}\psi_1\dot{\psi}_2^2-\frac{24}{7}\dot{\psi}_1^2\psi_2-\frac{9}{7}\psi_2\dot{\psi}_2^2$$

Следователно, като използуваме отново означенията от § 5, мо - жем да напишем

$$b^{(0,0)}_{(3,0)}=\left[\frac{135}{98}-\frac{72(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a};$$

$$b^{(0,0)}_{(0,3)}=\left[\frac{41(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}-\frac{43}{98}\right]\frac{g}{a};$$

$$b^{(0,0)}_{(2,1)}=\left[\frac{387}{98}+\frac{72(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a};$$

$$b^{(0,0)}_{(1,2)}=-\left[\frac{1161}{196}+\frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)}\right]\frac{g}{a}$$

$$(12.6)\qquad b^{(2,0)}_{(1,0)}=\frac{24}{7}, \qquad b^{(0,2)}_{(1,0)}=\frac{9}{7},$$

$$b^{(2,0)}_{(0,1)}=-\frac{24}{7}, \qquad b^{(0,2)}_{(0,1)}=-\frac{9}{7},$$

$$b^{(0,0)}_{(0,1)}=0, \qquad b^{(0,1)}_{(0,1)}=0,$$

$$b^{(1,0)}_{(0,1)}=0, \qquad b^{(1,1)}_{(0,1)}=0,$$

$$b^{(0,0)}_{(1,0)}=0, \qquad b^{(0,1)}_{(1,0)}=0,$$

$$b^{(1,0)}_{(1,0)}=0, \qquad b^{(1,1)}_{(1,0)}=0;$$

Като заместим ψ_0 и $\dot{\psi}_0$ от (2.6) във (12.2) и (12.5)

получаваме

(12.7)
$$g_{11}(u) = A_1 \sin KK_2u + A_2 \sin K_2u + A_3 \sin KK_2u \cos KK_2u + A_4 \sin K_2u \cos KK_2u + A_5 \sin KK_2u \cos K_2u + A_6 \sin K_2u \cos K_2u + A_7 \sin KK_2u \cos^2 KK_2u + A_8 \sin K_2u \cos^2 KK_2u + A_9 \sin KK_2u \cos^2 K_2u + A_{10} \sin K_2u \cos^2 K_2u + A_{11} \sin KK_2u \cos KK_2u \cos K_2u + A_{12} \sin K_2u \cos K_2u \cos KK_2u + A_{13} \sin K_2u \sin^2 KK_2u + A_{14} \sin KK_2u \sin^2 K_2u + A_{15} \sin^3 KK_2u + A_{16} \sin^3 K_2u .$$

При разглеждания механичен модел коефициентите от горното равенство имат вида:

$$A_1 = 0 \; ; \; A_2 = 0 \; ; \; A_3 = 0 \; ; \; A_4 = 0 \; ; \; A_5 = 0 \; ; \; A_6 = 0 ;$$

(12.8)
$$A_7 = K^2K_2^2 \left(\frac{6}{7} r_2^3 + \frac{9}{7} r_1^2 r_2 - \frac{6}{7} r_1 r_2^2 - \frac{9}{7} r_1^3 \right),$$

$$A_8 = K^2K_2^2 \left(\frac{6}{7} r_2^2 s_2 + \frac{9}{7} r_1^2 s_2 - \frac{6}{7} r_2^2 s_1 - \frac{9}{7} r_1^2 s_1 \right)$$

$$A_9 = K_2^2 \left(\frac{6}{7} r_2 s_2^2 + \frac{9}{7} r_2 s_1^2 - \frac{6}{7} r_1 s_2^2 - \frac{9}{7} r_1 s_1^2 \right),$$

$$A_{10} = K_2^2 \left(\frac{6}{7} s_2^3 + \frac{9}{7} s_1^2 s_2 - \frac{6}{7} s_1 s_2^2 - \frac{9}{7} s_1^3 \right)$$

$$A_{11} = KK_2^2 \left[\frac{12}{7} r_2^2 s_2 + \frac{18}{7} r_1 r_2 s_1 - \frac{12}{7} r_1 r_2 s_2 - \frac{18}{7} r_1^2 s_1 \right]$$

$$A_{12} = KK_2^2 \left[\frac{12}{7} r_2 s_2^2 + \frac{18}{7} r_1 s_1 s_2 - \frac{12}{7} r_2 s_1 s_2 - \frac{18}{7} r_1 s_1^2 \right]$$

$$A_{13} = \left[\left\{ \frac{9}{98} - \frac{54(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_2^2 s_2 - \left\{ \frac{495}{98} + \frac{54(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_1 r_2 s_1 + \left\{ \frac{123(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} - \frac{156}{49} \right\} r_1^2 s_1 + \left\{ \frac{261}{98} + \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_2^2 s_1 + \left\{ \frac{261}{49} + \frac{36(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_1 r_2 s_2 - \left\{ \frac{495}{196} + \frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_1^2 s_2 \right] \frac{g}{a}$$

$$A_{14} = \left[\left(\frac{9}{98} - \frac{54(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right) r_2 s_2^2 + \left(\frac{261}{98} + \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right) r_1 s_2^2 + \left(\frac{261}{49} + \frac{36(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right) r_2 s_1 s_2 - \left(\frac{495}{196} + \frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right) r_2 s_1^2 - \left(\frac{495}{98} + \frac{54(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right) r_1 s_2 s_1 + \left(\frac{123(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} - \frac{156}{49} \right) r_1 s_1^2 \right] \frac{g}{a}$$

$$A_{15} = \left[\left\{ \frac{3}{98} - \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_2^3 + \left\{ \frac{261}{98} + \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_1 r_2^2 - \left\{ \frac{495}{196} + \frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} r_1^2 r_2 + \left\{ \frac{41(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} - \frac{52}{49} \right\} r_1^3 \right] \frac{g}{a}$$

$$A_{16} = \left[\left\{ \frac{3}{98} - \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} s_2^3 + \left\{ \frac{261}{98} + \frac{18(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} s_1 s_2^2 - \left\{ \frac{495}{196} + \frac{27(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} \right\} s_1^2 s_2 + \left\{ \frac{41(K^2+1)}{7\sqrt{7}(K^2-1)} - \frac{52}{49} \right\} s_1^3 \right] \frac{g}{a},$$

циклических групп, $i=1,2,\dots,s$. Тогда из работы [13] Ирвина и Ричмена вытекает, что группа Q является прямым произведением счетных групп, следовательно, по теореме Колеттиса [14] , группа Q определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами, описание которых дано в формулировке теоремы.

Следующая теорема заканчивает описание группы $S(LG)$ в счетном случае.

Т е о р е м а 4. Пусть L — произвольное счетное поле ненулевой характеристики p и K — его максимальное совершенное подполе, а G — конечная или счетная абелева p-группа, P — ее максимальная полная подгруппа и фактор-группа $A=G/P$ единичная или имеет ульмовский тип τ . Тогда $S(KP)$ — максимальная полная подгруппа группы $S(LG)$ и если $P\neq 1$, то она разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа p^∞ .

Пусть Q — редуцированная подгруппа группы $S(LG)$. Если G — полная абелева p-группа, то $Q\cong C_{\chi_0}$ при $L\neq K$ и $Q=1$ при $L=K$.

Пусть Q не является полной абелевой p-группой. Группа Q имеет тип τ и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами, которые, за исключением последнего, при положении, что тот существует, являются изоморфными группе $C^1_{\chi_0}$. Пусть τ не является предельным порядковым числом. Для последнего ульмовского фактора

$\bar{Q}_{\tau-1}\cong S(KG^{(\tau-1)})/S(KP)$ $(\bar{Q}_0\cong S(LG)/S(KP)$, если $\tau=1)$ при $P\neq 1$ в силе следущие утверждения: а) если группа $A^{(\tau-1)}$ имеет конечный показатель p^α и при $\tau=1$ поле L совпадает с K , то $\bar{Q}_{\tau-1}\cong C^{1,\alpha}_{\chi_0}$; б) если же или порядки элементов группы $A^{(\tau-1)}$ неограничены в совокупности, или при $\tau=1$ поле L не совпадает с K, то $\bar{Q}_{\tau-1} \cong C^1_{\chi_0}$. При $P=1$ ульмовский фактор $\bar{Q}_{\tau-1}$ является прямым произведением циклических групп (его точное описание дано в теореме 2^*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема непосредственно вытекает из леммы 6, теорем А, Б, В, Г и из теоремы Ульма.

У с л о в и я и з о м о р ф и з м а. Пусть абелева p-группа G и коммутативное кольцо L с единицей характеристики p, а также абелева p-группа G_1 и коммутативное кольцо L_1 с единицей характеристики p такие, что они удовлетворяют условиям некоторых формулированных теорем. В таком случае можно указать на необходимые и достаточные условия изоморфизма групп $S(LG)$ и $S(L_1G_1)$. Мы не будем останавливаться на этом вопросе из-за большого числа возможных случаев, и, главным образом, из-за того, что руководствуясь формулировками уже доказанных теорем, указание на изоморфизм происходит без затруднений (это указание состоит из обычного комбинирования случаев разложения группы $S(LG)$ с случаями разложения группы $S(L_1G_1)$ и описания непротиворечивых комбинированных случаев на основании вышедоказанных теорем).

§ 2. Некоторые свойства групп нормированных единиц групповых колец абелевых p-групп над кольцами характеристики p

Будем употреблять те же самые обозначения, как и в первом параграфе. Сначала рассмотрим некоторые вопросы теории групп, связанные с изотипностью и сервантностью (см. [38]), применительно к группам $S(LG)$, вопросы, связаные с конечностью ульмовских инвариантов группы $S(LG)$, с свойством сократимости ([20]), с понятием ID -группой ([33]), с выделением прямых множителей и с прямыми произведениями счетных групп.

Определение 3. Пусть β — произвольное порядковое число. Подгруппа H абелевой p-группы G называется изотипной (слабо p^{β}-сервантной) в G , если $H \cap G^{p^{\alpha}} = H^{p^{\alpha}}$ для всех порядковых чисел α (для всех $\alpha \leqq \beta$) (см. [38]).

Определение 4. Пусть β — произвольное порядковое число и K подкольцо коммутативного кольца L с единицей характеристики p . Подкольцо K называем слабо p^{β}-сервантным (сервантным) в L , если $K \cap L^{p^{\alpha}} = K^{p^{\alpha}}$ для всех $\alpha \leq \beta$ (соответственно для всех $\alpha < \omega$, где ω — первое бесконечное порядковое число).

В этом отношении заметим следующее. Пусть β — произвольное порядковое число. Любое совершенное поле характеристики p (см. [8]) является слабо p^{β}-сервантным в любом поле характеристики p , которое содержит его. Если L — произвольное поле характеристики p , Π — его простое подполе и K — подполе поля L , являющееся алгебраическим расширением поля Π , то K и Π совершенны, следовательно они слабо p^{β}-сервантны в поле L .

Пусть G — редуцированная абелева p-группа. Минимальное порядковое число, такое, что $G^{p^{\lambda}} = 1$, называется длиной группы G (см. [15] , стр. 26).

Теорема 5. Пусть L — коммутативное кольцо с единицей 1 простой характеристики p и K — его подкольцо.

Пусть G — редуцированная абелева p-группа и H — ее подгруппа с длиной λ. Подгруппа $S(KH)$ изотипна (слабо p^{β}-сервантна, где β — порядковое число, меньше λ) в группе $S(LG)$ тогда и только тогда, когда подгруппа H изотипна (соответственно слабо p^{β}-сервантна) в группе G и для произвольного $\alpha<\lambda$ подкольцо K является слабо p^{α}-сервантным (соответственно слабо p^{β}-сервантным) в кольце L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — произвольное порядковое число, $\alpha<\lambda$ (соответственно $\alpha\leq\beta$). Применяя предложение 4 и формулу (I), получим

(24) $$S(KH)\cap S^{p^{\alpha}}(LG)=S[(K\cap L^{p^{\alpha}})(H\cap G^{p^{\alpha}})]$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Так как подгруппа $S(KH)$ изотипна в группе $S(LG)$, то применяя предложение 4, получим

(25) $$S(KH)\cap S^{p^{\alpha}}(LG)=S(K^{p^{\alpha}}H^{p^{\alpha}}).$$

$H^{p^{\alpha}}\neq 1$, ибо $\alpha<\lambda$, следовательно $H\cap G^{p^{\alpha}}\neq 1$ и из равенства правых частей формул (24) и (25) получим

(26) $$K\cap L^{p^{\alpha}}=K^{p^{\alpha}},\quad H\cap G^{p^{\alpha}}=H^{p^{\alpha}},\quad \alpha<\lambda,$$

т.е. подкольцо K слабо p^{α}-сервантно (соответственно слабо p^{β}-сервантно) в кольце L и подгруппа H изотипна (соответственно слабо p^{β}-сервантна) в группе G.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для произвольного порядкового числа $\alpha < \lambda$ (соответственно $\alpha \leqq \beta$) имеют место формулы (26). Тогда из формулы (24), применяя последовательно (26) и предложение 4 , получим

$$S(KH) \cap S^{p^\alpha}(LG) = S[(K \cap L^{p^\alpha})(H \cap G^{p^\alpha})] = S(K^{p^\alpha} H^{p^\alpha}) = S^{p^\alpha}(KH),$$

т.е. подгруппа $S(KH)$ изотипна (слабо p^β-сервантна) в группе $S(LG)$.

С л е д с т в и е 1. Пусть K — подкольцо коммутативного кольца L с единицей характеристики p и H — подгруппа абелевой p-группы G . Тогда

(i) подгруппа $S(LH)$ изотипна в группе $S(LG)$ тогда и только тогда, когда H изотипна в G ;

(ii) подгруппа $S(KH)$ сервантна в группе $S(LG)$ тогда и только тогда, когда подгруппа H сервантна в группе G и подкольцо K сервантно или слабо p^{m-1}-сервантно в кольце L в зависимости от того, являются ли порядки элементов подгруппы H неограниченными или ограниченными в совокупности с показателем p^m .

С л е д с т в и е 2. Пусть подгруппа H абелевой p-группы G имеет показатель p^m и K — слабо p^{m-1}-сервантное подкольцо кольца L , содержащее единицу кольца L . Следующие утверждения эквивалентны:

(i) H служит прямым множителем для G ;

(ii) H служит прямым множителем для $S(LG)$;

(iii) $S(KH)$ служит прямым множителем для $S(LG)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (i) следует (ii).

Действительно, подгруппа H сервантна в G. Отсюда вытекает, что H сервантна в $S(LG)$ и, так как H имеет показатель p^m, то по [23], стр 151, H является прямым множителем группы $S(LG)$.

Из (ii) следует (iii). Действительно, в этом случае H сервантна в $S(LG)$, следовательно и в G. По следствию 1 $S(KH)$ сервантна в $S(LG)$ и так как $S(KH)$ имеет показатель p^m, то по [23] $S(KH)$ служит прямым множителем для $S(LG)$.

Аналогично из (iii) следует (i), так как по следствию 1 подгруппа H сервантна в G.

Т е о р е м а 5А. Подгруппа H абелевой p-группы G изотипна (слабо p^β-сервантна) в группе $S(LG)$ тогда и только тогда, когда H изотипна (соответственно слабо p^β-сервантна) в группе G.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для произвольного порядкового числа α (соответственно $\alpha \leqq \beta$) покажем, что

$$H \cap S^{p^\alpha}(LG) = H^{p^\alpha}.$$

Пусть $\alpha = \gamma + k$, где k — неотрицательное целое число, а γ — предельное порядковое число или равно нулю. Тогда $S^{p^\alpha}(LG) = S[(L^{p^\gamma})^{p^k}(G^{p^\gamma})^{p^k}]$. Пусть $x \in H \cap S^{p^\alpha}(LG)$, т.е. $x = h = \sum_i \alpha_i^{p^k} g_i^{p^k}$, $\alpha_i \in L^{p^\gamma}, g_i \in G^{p^\gamma}$. Тогда $h = g_i^{p^k}$ для некоторого i, следовательно $h = h_i^{p^k}$, $h_i \in H^{p^\gamma}$, т.е. $h \in H^{p^\alpha}$. Мы получили $H^{p^\alpha} \supseteq H \cap S^{p^\alpha}(LG)$. Обратное включение очевидно.

Н е о б х о д и м о с т ь. Так как H изотипна в $S(LG)$

(слабо p^{β} -сервантна в $S(LG)$), то из формулы (II) следует, что $H \cap S(L^{p^{\alpha}} G^{p^{\alpha}}) = H^{p^{\alpha}}$, откуда $H \cap G^{p^{\alpha}} = H^{p^{\alpha}}$.

Пусть G — редуцированная абелева p-группа и λ — ее длина. Для каждого $\sigma \leq \lambda$, ранг

$$r\left[\mathcal{N}(G^{p^{\sigma}}) / \mathcal{N}(G^{p^{\sigma+1}})\right]$$

(см. [35], стр. 31) называется σ-м ульмовским инвариантом (σ-м инвариантом Ульма - Капланского) группы G (см. [35], стр. 118 или [36] стр. 182) и обозначается через $f_G(\sigma)$.

Говорят, что абелева группа G обладает свойством сократимости (см. [20]), если для любых двух абелевых групп H и K, из изоморфизма

$$G \times H \cong G \times K \quad \text{следует} \quad H \cong K .$$

Абелева p-группа G называется ID-группой, если она изоморфна своему прямому множителю (см. [33]).

Джонсон и Тарски [11] доказывают, что всякая конечная абелева группа обладает свойством сократимости. Кроули [20] показывает, что периодическая редуцированная абелева группа счетной мощности обладает этим свойством тогда и только тогда, когда ульмовские инварианты ее примарной компоненты являются конечными.

Мы докажем, что ульмовские инварианты группы $S(LG)$

(G — абелева p-группа) конечны тогда и только тогда, когда поле L и группа G конечны и как следствие установим, что не существует бесконечной группы нормированных единиц $S(LG)$, обладающей свойством сократимости и, что любая бесконечная группа $S(LG)$ является ID -группой.

В теории абелевых групп хорошо известна следующая лемма.

Л е м м а 10. Если G — бесконечная редуцированная абелева p-группа, то фактор-группа G/G^p является бесконечной.

Л е м м а 11. Если по крайней мере одно из кардинальных чисел $|L|$ и $|G|$ бесконечно, то $|\mathcal{N}[S(LG)]| = max(|L|,|G|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mathcal{N}[S(LG)] = \mathcal{N}^*$ и $\mathcal{N}(G) = \mathcal{N}$. Так как $\mathcal{N}^* \supseteq S(L\mathcal{N})$, то $|\mathcal{N}^*| \geq max(|L|,|\mathcal{N}|)$. Допустим, что $|G/\mathcal{N}| \geq \aleph_0$. Пусть $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является системой представителей смежных классов группы G по подгруппе $\mathcal{N}$, в которой не участвует только представитель единичного класса $\mathcal{N}$. Выбираем $g^* \in \mathcal{N}$, $g^* \neq 1$ (это возможно, так как $\mathcal{N} \neq 1$). Тогда $g_\alpha' = g_\alpha g^* \in g_\alpha \mathcal{N}$ и $g_\alpha'^{\,p} = g_\alpha^p$ для любого $\alpha \in I$. Из этого равенства следует, что элемент

$$A(\alpha) = 1 + g_\alpha - g_\alpha' \in \mathcal{N}[S(LG)].$$

Пусть $\beta \neq \alpha$, и $A(\beta) \in \mathcal{N}[S(LG)]$. Из равенства $A(\alpha) = A(\beta)$ получается противоречие, так как в его левой части классу $g_\alpha \mathcal{N}$ принадлежат элементы g_α и g_α', а в его правой части не встречается никакой элемент этого класса. Следовательно $|\mathcal{N}^*| \geq G/\mathcal{N}$, откуда получим $|\mathcal{N}^*| \geq max(|L|,|G|)$. Однако $\mathcal{N}^* \subseteq S(LG)$ и $|S(LG)| = max(|L|,|G|)$, откуда следует лемма.

Т е о р е м а 6. Пусть G — редуцированная абелева p-группа и L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p. Ульмовские инварианты группы $S(LG)$ нормированных единиц группового кольца LG конечны тогда и только тогда, когда G и L являются конечными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна.

Н е о б х о д и м о с т ь. Так как по предложению 4 имеем $S^p(LG) = S(L^pG^p)$, то первый ульмовский инвариант группы $S(LG)$ равняется $r(N^*)$, где $N^* = N[S(LG)]/N[S(L^pG^p)]$, следовательно N^* — конечная группа. Рассмотрим следующие случаи.

1. $G^p = 1$. Тогда $N^* \cong N[S(LG)]$. Если допустим, что по крайней мере одно из кардинальных чисел $|L|$ и $|G|$ бесконечно, то по лемме 2 имеем $|N^*| = max(|L|, |G|)$, т.е. N^* — бесконечная группа, что есть противоречие.

2. $G^p \neq 1$. Обозначим $N(G^p) = N$ и допустим, что

2.1. L — бесконечное кольцо. Пусть $g^* \in N$ и $g^* \neq 1$. Имеет место $G \neq G^p$, так как в противном случае G будет полной группой. Пусть g — такой элемент группы G, что $g \notin G^p$. Тогда элемент $g' = gg^* \in gN$ и $g'^p = g^p$. Рассмотрим элементы

$$A(\alpha) = (1 + \alpha g - \alpha g')\, N[S(L^pG^p)], \quad \alpha \in L.$$

Очевидно $A(\alpha) \in N^*$. Если $\beta \in L$, $\beta \neq \alpha$, то $A(\alpha) \neq A(\beta)$. В противном случае получим

$$1 + \alpha g - \alpha g' = (1 + \beta g - \beta g') \sum_{i=1}^{t} \gamma_i^p g_i^p, \quad \gamma_i \in L.$$

Классу G^p в левой части этого равенства принадлежит только элемент 1, а в его правой части — различные элементы g_i^p. Следовательно, $\sum_{i=1}^{t} \gamma_i^p g_i^p = 1$, и получаем $\alpha = \beta$, что является противоречием. Таким образом $A(\alpha) \neq A(\beta)$ при $\alpha \neq \beta$, откуда следует $|N^*| \geq L$, что противоречит конечности группы N^*.

2.2. Пусть G — бесконечная группа. Тогда по лемме 10 фактор-группа G/G^p бесконечна. Пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ — система представителей смежных классов группы G по подгруппе G^p, в которую не входит только представитель единичного класса G^p. Выбираем элемент $g^* \in N$, и $g^* \neq 1$. Тогда $\bar{g}_i = g_i g^* \in g_i G^p$ $(i \in I)$ и кроме того $\bar{g}_i^p = g_i^p$. Рассмотрим элементы

$$A(i) = (1 + g_i - \bar{g}_i)\, N[S(L^p G^p)], \quad i \in I.$$

Очевидно $A(i) \in N^*$. Если $A(j) \in N^*$, $j \neq i$ $(j \in I)$ и допустим, что $A(i) = A(j)$, то получим

$$1 + g_i - \bar{g}_i = (1 + g_j - \bar{g}_j) \sum_{k=1}^{t} \gamma_k^p g_k^p, \quad \gamma_k \in L.$$

Классу $g_i G$ в левой части этого равенства принадлежат элементы g_i и $\bar{g}_i$, а в его правой части не принадлежит никакой элемент, что является противоречием. Следовательно $A(i) \neq A(j)$ при $i \neq j$ и $|N^*| \geq |G/G^p|$, что противоречит конечности группы N^*. Доказательство закончено.

О п р е д е л е н и е 5. Подкольцо A коммутативного кольца L с единицей характеристики p называется совершенным (полным), если для каждого элемента $x \in A$ найдется такая последовательность элементов $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots (x_n \in A)$, что $x_{i+1}^p = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ (см. [4]).

Легко видеть, что множество K всех элементов $x \in L$, для которых можно построить такую последовательность, образует подкольцо кольца L, содержащее каждое полное подкольцо кольца L. Следовательно K — максимальное совершенное подкольцо кольца L, причем $K \neq 0$, так как $1 \in K$.

Аналогично лемме 6 и теореме Б доказывается следующее утверждение.

Л е м м а 12. Если P — максимальная полная подгруппа абелевой p-группы G и K — максимальное совершенное подкольцо кольца L характеристики p, то $S(KP)$ — максимальная полная подгруппа группы $S(LG)$ и при $P \neq 1$ $S(KP)$ разлагается в прямое произведение $\omega = \max(|K|, |P|)$ групп типа p^∞.

Ковач [17] показывает, что подгруппа C абелевой p-группы G содержится в базисной подгруппе B группы G тогда и только тогда, когда C является объединением возрастающей последовательности

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots$$

таких подгрупп, что высоты элементов каждой группы C_n в группе G конечны и ограничены в совокупности.

Кроули [20] отмечает, что если абелева p-группа G обладает свойством сократимости, то ульмовские инварианты ее базисной подгруппы B должны быть конечными.

Эти утверждения используем при доказательстве следующего.

Т е о р е м а 7. Пусть G — редуцированная абелева

p-группа и L — коммутавное кольцо с едницей характеристики p. Группа $S(LG)$ обладает свойством сократимости тогда и только тогда, когда L и G конечны.

Доказательство. Пусть группа $S(LG)$ обладает свойством сократимости. Так как G — редуцированная абелева p-группа, то ее максимальная полная подгруппа P является единичной и следовательно $S(LG)$ — редуцированная группа, так как по лемме 6 максимальная полная подгруппа группы $S(LG)$ единичная.

Пусть B — базисная подгруппа группы G. Покажем, что $S(LB)$ содержится в некоторой базисной подгруппе $\tilde{B}$ группы $S(LG)$. Действительно, B содержится в базисной подгруппе группы G, следовательно, по теореме Ковача, B — объединение возрастающей последовательности

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$$

таких подгрупп, что высоты элементов группы B_n в G конечны и ограничены в совокупности. Тогда $S(LB)$ — объединение возрастающей последовательности

$$S(LB_1) \subseteq S(LB_2) \subseteq \ldots \subseteq S(LB_n) \subseteq \ldots$$

подгрупп, удовлетворяющих условия теоремы Ковача, следовательно $S(LB) \subseteq \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — базисная подгруппа группы $S(LG)$.

Покажем, что $f_{\tilde{B}}(\alpha) \geq f_{S(LB)}(\alpha)$. Действительно, по следствию 1 теоремы 5 группа $S(LB)$ сервантна в группе $S(LG)$, так как B сервантна в G. Следовательно, $S(LB)$ сервантна в $\tilde{B}$, откуда вытекает, что любой p^n-ограниченный максимальный прямой множитель группы $S(LB)$ является и прямым множителем группы $\tilde{B}$, т.е. $f_{\tilde{B}}(\alpha) \geqq f_{S(LB)}(\alpha)$. По теореме Кроули ульмовские инварианты $f_{\tilde{B}}(\alpha)$ конечны, откуда следует, что ульмовские инварианты группы $S(LB)$ конечны. Тогда вследствие теоремы 6, L — конечное кольцо и B — конечная группа, т. е. G является конечной группой, чем теорема доказана.

Очевидно, абелева p-группа G является ID-группой тогда и только тогда, когда ID-группа является ее максимальной полной или ее редуцированной подгруппой. Пирс [33] устанавливает, что редуцированная абелева p-группа есть ID-группа тогда и только тогда, когда по крайней мере для одного натурального n ее ульмовский инвариант $f_G(n)$ является бесконечным. Используя это, покажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. Группа $S(LG)$ является ID-группой тогда и только тогда, когда или L или G бесконечны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — редуцированная абелева p-группа. Вследствие теоремы 6 по крайней мере один из ульмовских инвариантов группы $S(LG)$ бесконечен тогда и только тогда, когда L или G бесконечны, откуда по Пирсу вытекает утверждение.

Допустим, что $G = P \times R$, где $P \neq 1$ — максимальная полная подгруппа группы G, а R — ее редуцированная подгруппа. Если K — максимальное совершенное подкольцо кольца L, то по лемме 12 группа $S(KP)$ разлагается в $\max(|K|, |P|) \geqq \aleph_0$ групп типа p^{∞}, следовательно максимальная полная подгруппа $S(KP)$ группы $S(LG)$ изоморфна своему прямому множителю, т.е. $S(LG)$ является ID-группой.

Т е о р е м а 9. Пусть H — подгруппа абелевой

p-группы G и L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p. Подгруппа $S(LH)$ служит прямым множителем для группы $S(LG)$ тогда и только тогда, когда подгруппа H служит прямым множителем для группы G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$S(LG)=S(LH)\times Q \tag{27}$$

и $G\cap Q=B$. Тогда $H\cap B=1$. Если $g\in G$, то ввиду (27), имеем $g=\left(\sum_i \alpha_i h_i\right)\sum_j \beta_j b_j$, $h_i\in H$, следовательно $g=\alpha hb=1hb$, где $h\in H$ и $b\in G$. Так как $g\in S(LG)$, $h\in S(LH)$, следует, что $b\in Q$, откуда $b\in B$. Следовательно $G=\langle H,B\rangle$ и $G=H\times B$.

Пусть, обратно, подгруппа H служит прямым множителем для группы G. Тогда существует проекция, т.е. идемпотентный эндоморфизм η группы G на H (см. [35] стр. 71). Легко видеть, что изображение η^*, определенное равенством $\left(\sum \alpha_i g_i\right)\eta^*=\sum \alpha_i g_i\eta$, является проекцией группы $S(LG)$ на группу $S(LH)$, следовательно $S(LH)$ служит прямым множителем для группы $S(LG)$ (см. [35] стр. 72).

Прямое произведение счетных групп будем обозначать через *ппсг*.

Л е м м а 13. Если абелева p-группа G имеет конечный ульмовский тип, или $|G^{(s)}|=\aleph_0$ для некоторого натурального s, то G — *ппсг* тогда и только тогда, когда ульмовские факторы группы G — прямые произведения циклических групп, (см. [13] и [32]).

Т е о р е м а 10. Если L — совершенное кольцо характеристики p и G — редуцированная абелева p-группа, так что выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

(i) группа G имеет конечный ульмовский тип n ;

(ii) для некоторого натурального s имеет место $|G^{(s)}| = \aleph_0$, $|L| \leq \aleph_0$;

то группа $S(LG)$ — $nncг$ тогда и только тогда, когда группа G — $nncг$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как кольцо L совершенно, то $L^{(i)} = L$ и из формулы (II) при $\alpha = \omega i$ получим, что $S^{(i)}(LG) = S(LG^{(i)})$, следовательно, ульмовские факторы группы $S(LG)$ являются $S(LG^{(i)})/S(LG^{(i+1)})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Так как ульмовские факторы $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ группы G — прямые произведения циклических групп, то по предложению 5 следует, что ульмовские факторы группы $S(LG)$ — прямые произведения циклических групп, т.е. по лемме 13 группа $S(LG)$ — $nncг$.

Доказательство в случае (ii) аналогично первому. Заметим только, что $(S(LG))^{(s)}$ счетная группа.

Пусть, обратно, группа $S(LG)$ — $nncг$. В случае (i) группа $S(LG)$ имеет ульмовский тип n, а в случае (ii) получим $|S(LG^{(s)})| \leq \aleph_0$. По лемме 13 ульмовские факторы $S(LG^{(i)})/S(LG^{(i+1)})$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ группы $S(LG)$ являются прямыми произведениями циклических групп, следовательно, по предложению 5, ульмовские факторы $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ группы G — прямые произведения циклических групп, откуда также из леммы 13 вытекает, что G является $nncг$.

П р е д л о ж е н и е 6. Пусть A — такая подгруппа абелевой p-группы G, что фактор-группа G/A — $nncг$ и для произвольного натурального n выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

(i) $G^{(n-1)} \supset A \supset G^{(n)}$

(ii) $G^{(n-1)} \supset A$ и фактор-группа $G^{(n-1)}/A$ счетная.

Если H -- такая подгруппа группы G, что $H^{p^\alpha} = H \cap G^{p^\alpha}$ для каждого $\alpha < \omega(n-1)$, то фактор-группа $H/H\cap A$ -- пмсг, т.е. любая подгруппа фактор-группы G/A, которую можно представить в виде $\langle H, A\rangle/A$, является пмсг.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеют место предположения случая (i).

$$H^{p^{\omega(n-1)}} = \bigcap_{\alpha<\omega(n-1)} H^{p^\alpha} = \bigcap_{\alpha<\omega(n-1)} (H \cap G^{p^\alpha}) = H \cap \Big[\bigcap_{\alpha<\omega(n-1)} G^{p^\alpha}\Big] = H \cap G^{p^{\omega(n-1)}}.$$

Фактор-группа G/A имеет ульмовский тип n, ее ульмовские факторы — прямые произведения циклических групп и изоморфны группам $G^{(i)}/G^{(i+1)}$, $i = 0,1,2,\dots, n-2$ и $G^{(n-1)}/A$. Обозначим $B = H\cap A$. Очевидно $H^{(n-1)} \supset B \supset H^{(n)}$. Следовательно H/B имеет ульмовский тип n, и ее ульмовские факторы изоморфны группам $H^{(i)}/H^{(i+1)}$, $i = 0,1,\dots, n-2$ и $H^{(n-1)}/B$. Легко видеть, что $H^{(i+1)} = H^{(i)} \cap G^{(i+1)}$, $i = 0,1,2,\dots, n-2$, а также и $B = H^{(n-1)} \cap A$.

Тогда

$$H^{(i)}/H^{(i+1)} = H^{(i)}/H^{(i)} \cap G^{(i+1)} \cong \langle H^{(i)}, G^{(i+1)}\rangle / G^{(i+1)} \subseteq G^{(i)}/G^{(i+1)},$$

$(i = 0,1,2,\dots, n-2)$

$$H^{(n-1)}/B = H^{(n-1)}/H^{(n-1)} \cap A \cong \langle H^{(n-1)}, A\rangle/A \subseteq G^{(n-1)}/A,$$

т.е. ульмовские факторы группы H/B — прямые произведения циклических групп, так как ульмовские факторы группы G/A — прямые произведение циклических групп. Следовательно группа H/B — пнсг.

Доказательство в случае (ii) аналогично первому. Первые $n-1$ ульмовские факторы фактор-группы $H/H\cap A$ — прямые произведения циклических групп и $(H/H\cap A)^{(n-1)}$ — конечная или счетная группа, так как

$$(H/H\cap A)^{(n-1)} \cong (\langle H,A\rangle/A)^{(n-1)} \subseteq (G/A)^{(n-1)}.$$

Теорема 11. Пусть L — совершенное кольцо характеристики p и для произвольного натурального n выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий (A — подгруппа G):

(i) $G^{(n-1)} \supset A \supset G^{(n)}$;

(ii) $G^{(n-1)} \supset A$, $|G^{(n-1)}/A| \leqq \aleph_0$ и $|L| \leqq \aleph_0$.

В таком случае фактор-группа $S(LG)/S(LA)$ — пнсг тогда и только тогда, когда фактор-группа G/A — пнсг.

Если H — слабо $p^{\omega(n-1)}$-сервантная подгруппа в G то фактор-группа $S(LH)/S[L(A\cap H)]$ также является пнсг.

Доказательство. Установим сначала первую часть теоремы. В случае (i) фактор-группа G/A имеет ульмовский тип n и ее первые $n-1$ ульмовские факторы изоморфны группам $G^{(i)}/G^{(i+1)}$, $i=0,1,2,\ldots,n-2$, а ее последний ульмовский фактор является $G^{(n-1)}/A$. Группа $S(LG)/S(LA)$ имеет также ульмовский тип n, и ее первые $n-1$ ульмовские факторы изоморфны группам $S(LG^{(i)})/S(LG^{(i+1)})$, $i=0,1,2,\ldots,n-2$, а ее последний ульмовский фактор — $S(LG^{(n-1)})/S(LA)$. Теперь эта часть теоремы вытекает из леммы 13 и из факта, что ульмовские факторы групп G/A и $S(LG)/S(LA)$ одновременно являются прямыми произведениями циклических групп (см. предложение 5).

В случае (ii) доказательство аналогично первому.

Пусть теперь H — слабо $p^{\omega(n-1)}$-сервантная подгруппа в G . По первой части теоремы группа $S(LG)/S(LA)$ — ппсг , а по теореме 5 $S(LH)$ — слабо $p^{\omega(n-1)}$ -сервантная подгруппа в группе $S(LG)$. Из предложения 6 следует, что $S(LH)/S(LH)\cap S(LA)$ — ппсг . Однако по формуле (I) $S(LH)/S(LH)\cap S(LA) = S(LH)/S[L(H\cap A)]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Берман, О некоторых свойствах целочисленных групповых колец, Докл. АН СССР, 91 (1953), 7-9.

[2] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p-групп, Publ. Math. (Debrecen), 14 (1967), 365-405.

[3] С. Д. Берман, Об изоморфизме групповых алгебр счетных абелевых групп, Докл. и сообщ. УжГУ, физ. мат. сер. 3 (1960) 56-57.

[4] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов, О групповых кольцах абелевых p-групп любой мощности, Мат. заметки, 6, № 4 (1969), 381-392.

[5] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов, О групповых кольцах смешанных абелевых групп, Доклады БАН, (под печат).

[6] С. Д. Берман, А. Р. Росса, Силовская p-подгруппа групповой алгебры счетной абелевой p-группы, Доклады АН УССР, 10, (1968) 870-872.

[7] С. Д. Берман, А. Р. Росса, О групповых алгебрах счетных периодических абелевых групп, Доклады АН УССР, № 5, серия А (1971) 387-390.

[8] Н. Бурбаки, Алгебра, многочлены и поля, упорядоченные группы, Москва, 1965.

[9] Н. Бурбаки, Теория множеств, "Мир",1965.

[10] K.W. Gruenberg, Cohomological Topics in Group Theory, Lecture Notes in Mathematics, 143. Springer - Verlag. Berlin. Heidelberg. New-Jork, 1970.

[11] B. Jonsson, A. Tarski, "Direct Decompositions of Finite Algebraic Systems". Notre Dame Mathematical Lectures, no. 5, 1947.

[12] J. M. Irwin, K. Benabdallah, On N-high subgroups of abelian groups, Bul. Soc. Math. France 96, № 4,(1968), 337 - 346.

[13] J. M. Irwin, F. Richman, Direct sums of countable groups and related concepts, J. Algebra, 2 (1965), 443 - 450.

[14] J. M. Irwin, E. A. Walker, On isotype subgroups of abelian groups, Bull. Soc. Math. France, 89, (1961), 451 - 460.

[15] I. Kaplanski, Infinite Abelian Groups. An Arbor, 1954.

[16] Ч. Кэртес, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, Наука, 1969.

[17] L. Kovásc, On subgroups of the basic subgroups, Publ. Math. (Debrecen), 5 (1958) 261 - 264.

[18] D. B. Coleman, Idempotents in group ring, Proc. Am. Math. Soc. 17, № 4 (1966), 962.

[19] G. Kolettis, Direct sums of countable groups, Duke Math. J. 27 (1960), 111 - 125.

[20] P. Crawley, The Cancellation of torsion groups in direct sums, J. Algebra, 2, № 4 (1965), 432 - 442.

[21] P. Crawley, Abelian p-groups determined by theier Ulm sequens, Pac. J. Math,, 22, (1967), 235 - 239.

[22] E. Kunz, Gruppenringe und Differentiale, Math. Ann. 163, Heft 4 (1966), 346 - 350.

[23] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.

[24] W. May, Kommutative group algebras, Tr. Am. Math. Soc., 136, februar, № 2 (1969) 139 - 150.

[25] W. May. Invariants for kommutative group algebras, Ill. J. Math., 15, № 3, september (1971), 525 - 531.

[26] Т. Ж. Моллов, О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности I. Publ. Math. (Debrecen) 18 (1971), 9 - 21.

[27] Т. Ж. Моллов, Сервантные подгруппы и выделение прямых множителей в группах единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп, Научни трудове на Пл. Университет "П. Хилендарски" 11, кн. 1(1973), 9 - 15.

[28] Т. Ж. Моллов, Силовские p-подгруппы групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп, Сердика, (под печат).

[29] Т. Ж. Моллов, О силовских p-подгруппах групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп, Доклады БАН, 25, № 11 (1972) 1463-1466.

[30] Т. Ж. Моллов, Върху улмовските инварианти на групата от нормираните единици на модулярните групови пръстени на примарните абелеви групи, Известия на Математическия институт на БАН, 15 (1974), 343 - 348.

[31] Т. Ж. Моллов, Изотипни подгрупи и директни произведения на изброими групи в групите на единиците на модулярните групови алгебри на примарните абелева групи, Научни трудове на Пл Университет "П. Хилендарски", 12, кн. 1 (1974), 91 - 98.

[32] R. J. Nunke, Homology and direct sums of countable abelian groups, Math. Z. 101 (1967) 182-212.

[33] R. S. Pierce, Isomorphic direct summands of abelian groups, Math. Ann. 153 № 1 (1964), 21 - 37.

[34] А. И. Саксонов, О групповых кольцах конечных групп I, Publ. Math. (Debrecen), 18 (1971), 187 - 209.

[35] L. Fuchs, Abelian groups, Budapest, 1958.

[36] Л. Фукс, Бесконечные абелевые группы, Москва, 1974.

[37] G. Higman, The units of groups rings,Proc. Lond. Math. Soc. (2) 46 , (1940), 231-248.

[38] P. Hill, Isotype subgroups of direct sums of countable groups, Illinois J. Math. 13, № 2 (1969) 281 - 290.

[39] B. Charles, Note sur la structure des groupes abeliens primares. C. R. Paris, 252, (1961), 1547 - 1548 [62:6, 155] .