Б Ъ Л Г А Р С К А   А К А Д Е М И Я   Н А   Н А У К И Т Е

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Станчо Г. Димиев

ИЗПЪКНАЛО-ПРЕДНАРЕДЕНИ ПРОСТРАНСТВА И ОПЪВАЩИ СЪОТВЕТСТВИЯ

Дисертация

представена за получаване на научната степен
Кандидат на математическите науки

София, 1974 г.

Глава I

ИЗПЪКНАЛИ ПРЕДНАРЕДБИ

1.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

1.2. РЕШЕТКА НА ПРЕДНАРЕДБИТЕ

1.3. ПРИМЕРИ

1.4. ДРУГА ГЛЕДНА ТОЧКА

Глава II

ОПЪВАЩИ СЪОТВЕТСТВИЯ

2.1. МОНОТОННИ СЪОТВЕТСТВИЯ

2.2. ОПЪВАЩИ СЪОТВЕТСТВИЯ

2.3. ОПЪВАЩИ СЪОТВЕТСТВИЯ ЗА МЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

Глава III

НЯКОИ ОСНОВНИ ЗАДАЧИ В ИЗПЪКНАЛО-ПРЕДНАРЕДЕНИ ПРОСТРАНСТВА

3.1. СРАВНЯВАНЕ НА ПРЕДНАРЕДБИ

3.2. МИНИМИЗИРАНЕ И МАКСИМИЗИРАНЕ

Глава IV

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. НЕЛИНЕЙНИ ХОМЕОМОРФИЗМИ И ГЕОДЕЗИЧНИ СЪОТВЕТСТВИЯ

4.2. ЗАБЕЛЕЖКИ ЗА НЯКОИ ПРОСТРАНСТВА ОТ НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРИ.

4.3. ОПЕРАТОРИ НА ДЕНИ

4.4. ВЪПРОСИ СВЪРЗАНИ С МИНИМИЗИРАНЕ И МАКСИМИЗИРАНЕ

У В О Д

Теорията на наредените векторни пространства /използват се още термините: полунаредени векторни пространства, частично наредени векторни пространства/ е резултат на систематичното изучаване на структурата на наредба, или по-общо структурата на преднаредба, в рамките на теорията на векторните пространства. Известните монографии на Г. Биркхоф [1] и Л. Канторович, Б. Вулих, Л. Пинскер [2] съдържат по-важните резултати в това направление, получени в периода примерно от началото на тридесетте години, когато теорията на наредените векторни пространства е била създадена, до 1950 год. Съществените резултати от развитието на теорията на наредените векторни пространства в рамките на банаховите пространства за периода от 1950 г. до 1960 г. се съдържат в книгата на М. Дей [3] . В съответствие със съвременната теория на векторните топологични пространства теорията на наредените векторни пространства е развита в книгата на Х. Шефер [4] , която има като предшественици работите на Гордон [5] и Намиока [6] , също книгата на Пересини [7] .

Съвместимостта на структурата на наредба със хомогенната и адитивната структури на векторното пространство, върху което тя е дефинирана /това векторно пространство ще наричаме, както обикновено, носител на структурата на наредба/, е съществено обстоятелство, благодарение на което задаването на наредба се свежда до задаването на един конус във векторното пространство носител

В тази дисертация се въвежда и изучава понятието изпъкнало-преднаредено векторно топологично пространство, което, формално казано, е обобщение на класическото понятие наредено векторно топологично пространство. По-точно, касае се за такава структура на преднаредба $\prec$, съвместимостта на която с хомогенната структура на векторното пространство E се запазва, обаче съвместимостта й с адитивната структура и топологията на E се заменя с едно по-слабо условие, съгласно което множеството на всички предходници x , $x \prec a$, на фиксиран елемент a в E , т.е. множеството $\{x \mid x \prec a, x \in E\}$ е изпъкнало затворено подмножество на носителя E , а множеството на всички наследници на a , т.е. множеството $\{x \mid a \prec x, x \in E\}$ е затворено подмножество на E . Дуалното условие е следното: множеството на всички наследници - изпъкнало и затворено, а множеството на всички предходници - затворено.

Фактически разликата между изпъкнало-преднаредените векторни топологични пространства и класическите наредени векторни топологични пространства е съществена. Всъщност понятието изпъкнало-преднаредено пространство е предназначено да служи за сравняването на някои нелинейни съотношения /например нелинейни неравенства/ между функции и функционали, чиито "повърхнини" на ниво са изпъкнали в смисъл, че "заграждат" изпъкнало множество. Друг аспект е свързан например с въпроса за минимизирането на изпъкнали функционали.

Дисертацията съдържа четири глави. В първата глава се излагат дефинициите на основните понятия и някои непосредствени следствия от тях. В духа на съвременните тенденции основните понятия се формират за векторни топологични пространства, макар, че в тази дисертация още не се занимаваме с въпроса за дуалните свойства на изпъкнало-преднаредените пространства. Нека напомним тук, че независимо от факта, че дуалната теория на векторните топологични пространства се счита за завършена в общи линии, съответната теория на наредените векторни топологични пространства не притежава завършен вид /вж. например [4] /.

Нека E означава реално векторно топологично пространство и $\prec$ е полузатворена преднаредба върху E . Следните аксиоми играят роля нататък

/POA1/ Ако $x \prec y$, $x, y \in E$, то за всяко $\lambda > 0$ имаме $\lambda x \prec \lambda y$; ако $0 < \lambda < \mu$, $\lambda x \prec \mu x$ за всяко $x \in E$.

/POA2/ За всяко $a \in E$ множеството $E(a) = E(a, \prec) := \{x \in E \mid x \prec a\}$ е изпъкнало подмножество на E .

/POA2'/ За всяко $a \in E$ множеството $E_*(a) = E_*(a, \prec) := \{x \in E \mid a \prec x\}$ е изпъкнало подмножество на E .

Всяка полузатворена преднаредба $\prec$ върху E , която удовлетворява /POA1/ и /POA2/, ще наричаме <u>изпъкнала на ляво преднередба върху E</u> . Дуалното понятие - изпъкнала на дясно преднаредба върху E - се въвежда с помощта на аксиомите /POA1/ и /POA2'/.

Централната аксиома в теорията, която излагаме нататък, е следната:

/POA3/ За всяко $a \in E$, такова че $\mathring{E}(a, \prec) \neq \phi$ и $\mathring{E}_*(a, \prec) \neq \phi$ е в сила $\mathring{E}(a, \prec) \cap \mathring{E}_*(a, \prec) = \phi$
Освен това, ако $x \in \mathring{E}(a, \prec)$ /респ. $y \in \mathring{E}_*(a, \prec)$ /, то $E(x, \prec) \subset \mathring{E}(a, \prec)$ /респ. $E_*(y, \prec) \subset \mathring{E}_*(a, \prec)$ /.

От /POA3/ се извлича, че за всяко $x \in E$ имаме $x \in fr\, E(x, \prec)$ /$x \in fr\, E_*(x, \prec)$/ стига $E(x, \prec)$ /$E_*(x, \prec)$ / да е различно от E .

Една полузатворена на ляво /на дясно/ преднаредба върху се нарича допустима ако удовлетворява /POA3/. Всяко векторно топологично пространство, снабдено с допустима преднаредба, ще наричаме изпъкнало преднаредено векторно топологично пространство.

В първата глава са посочени основните примери, които играят роля в цялото изложение нататък. В параграф 1.3. е посочено как едно векторно пространство, снабдено със система от допустими, симетрични и изпъкнали преднаредби, може да бъде превърнато в изпъкнало-преднаредено векторно топологично пространство с локално-изпъкнала топология. Теоремата, приведена в този параграф, обаче има само метедологична стойност. В параграф 1.4. е посочена друга гледна точка за изпъкнало-преднаредените пространства, където те се третират като разслоение с база класическо преднаредено векторно пространство.

Втората глава на дисертацията е посветена на един специален тип монотонни съответствия между две изпъкнало-преднаредени пространства - така наречените опъващи съответствия. Подробно е изложен случаят когато опъващите съответствия са между две локално изпъкнали векторни топологични пространства . Линейните съответствия между такива пространства се характеризират чрез действието им върху изпъкналите околности на началото /2.2.4./ В параграф 2.3. е изложен един нелинеен аспект на опъващите съответствия от /2.2.4./ за някои метрични пространства. В основата на проведеното изучаване лежи понятието за геодезична изпъкналост в метрични пространства, въведено от Менгер. Имайки пред вид обстоятелството, че геодезичната структура на най-общите метрични пространства е необозрима, в /2.4.2./ и/2.4.3./ се въвеждат ред естествени допълнителни условия. Тези условия засягат както метричните особености /силни метрични особености в смисъл на Менгер и въведените от автора слаби метрични особености/, така и локалните и глобални свойства на геодезичната структура /локална М-изпъкналост, регулярна сегментност, аксиомата за М-изпъкналата обвивка и др./. Прочее. в /2.4.4./ е получена теорема за опъващите съответствия за един точно определен клас от метрични пространства.

Нека отбележим, че изучаването на геодезичната структура на едно метрично пространство заедно с нейните метрични особености представлява самостоятелен интерес и е оправадано от различни гледища. В геометрията на Буземан се изучават метричните пространства без особености, но, както отбелязва самият Буземан /виж /4.1.3./, има интересни геометрични пространства, които не са пространства на Буземан. Примерът, посочен в /4.1.3/, естествено се схаваща като пространство с метрични особености. Всъщност параграф 2.3. е едно отклонение от темата на изпъкнало-преднаредените векторни пространства. Съгласно първоначалния замисъл на автора, трябваше да се развие теорията на изпъкнало-преднаредените /изобщо невекторни/ пространства - което е възможно - но до сега авторът не притежава сериозни приложения на една такава теория. Поради тези причини включването на параграф 2.3. е оправдано само като основа за обобщение на опъващите съответствия.

Третата глава е посветена на две основни задачи за изпъкнало-преднаредените пространства: сравняване на преднаредби и минимизиране /максимизиране/. Теоремата в /3.1.2./, отнасяща се до сравняването на системи от преднаредби, има само методологична стойност. Основната цел в параграф 3.1. е получаването на абстрактната теорема за сравняване на преднаредби /виж /3.1.8.// някои конкретни приложения на която даваме в следващата глава. Понеже в приложенията имаме пред вид и такива изпъкнали преднаредби $\prec$, за които множествата $E(x,\prec)$ не са компактни, предварително в /3.1.3./ - /3.1.6./ въвеждаме понятието изпъкнало множество с добре разположени екстремни точки. Там се развиват някои аналози от некомпактен тип на теоремата на Крейн и Милман /3.1.4./ и принципа за максимума на Бауер /3.1.6./. В /3.1.7./ е отделен най-простият клас от изпъкнали преднаредби - наречени регулярни - за които именно се формулира абстрактната теорема за сравняване на изпъкнали преднаредби с добре разположени екстремни точки:

Ако $\prec'$ е регулярна на ляво преднаредба с добре разположени екстремни точки /т.е. за всяко $x \in E$ множеството $E(x,\prec')$ има добре разположени екстремни точки/ и $\prec$ е изпъкнала на ляво допустима преднаредба, то $\prec'$ се мажорира от $\prec$ тогава и само тогава когато за всяко $x \in E$ е в сила $\mathcal{E}E(x,\prec') \subset fr\,E(x,\prec)$ / По-горе $\mathcal{E}E(x,\prec')$ означава множеството на екстремните точки на $E(x,\prec')$, а $fr\,E(x,\prec)$ - контура на $E(x,\prec)$/.

В параграф 3.2. излагаме някои съображения от общ характер, свързани с минимизирането и максимизирането. В /3.2.1./ въвеждаме понятието начален /краен/ елемент и начално /крайно/ множество относно дадена преднаредба и, базирайки се на аксиомата /POA/, извличаме някои непосредствени следствия. Обект на внимание са, разбира се, изпъкналите функционали f , определящи изпъкнали преднаредби $\prec_f$. Тези преднаредби не са напълно тънки тогава и само тогава когато f е непрекъснат функционал - виж /3.2.2./. В /3.2.3./ въвеждаме главното понятие - минимална /максимална/ точка и помощните понятия $\prec$ -сектор, шапка; в /3.2.4./ въвеждаме и понятието $\prec$ -пълнота, което фактически е някакво далечно обобщение на канторовите системи от вложени интервали. Посочените в /3.2.3./ достатъчни условия за $\prec$ -пълнота нямат претенции за оригиналност.

Въпросът за минимизиране в едно изпъкнало-преднаредено пространство се редактира като въпрос за съществуване на минимална точка. Тази гледна точка се подкрепя от теоремата за съществуване и единственост в /3.2.4/, която има относителна стойност, понеже се базира на понятието $\prec$ -пълнота, чието ефективно действие авторът посочва само в известни до сега частни случаи.Същата теорема, като теорема за единственост, свързва въпроса за единственост на минималната точка с условието за максималност на дадената преднаредба. Доказано е, че само при условието за максималност на дадената преднаредба можем да получим единственост на минималната точка.

В четвъратата глава излагаме приложения. По-точно в тази глава са дадени няколко теореми, във формулировката на които не участвуват понятия от теорията на изпъкнало-преднаредените пространства /или други понятия, въведени в първите три глави/, но доказателствата им се извършват с помощта на тази теория. Целта на автора е да посочи някои приложения /за съжаление техният обем не е пропорционален на развитата в първите три глави теория/ и донякъде да опише възможностите за други приложения.

Измежду посочените приложения някои имат завършен вид - /4.1.1./, /4.1.2./, /4.2.2./ - , донякъде /4.2.3./. Напротив, параграфите 4.4., 4.5. както и /4.2.2./, /4.2.3./ имат по скоро илюстративен характер и авторът не прави капитал от тях. В параграф 4.1. са дадени приложения на теорията на опъващите съответствия от глава II. Всъщност в /4.1.1./ се преповтаря основният резултат от параграф 2.2., от който се извлича следната характеристика на нелинейните хомеоморфизми φ на едно локално изпъкнало пространства: хомеоморфизмът $\varphi : E \to E$ е нелинеен тогава и само тогава когато за всяка точка $a \in E$ съществува отворена околност U на a, чийто образ $\varphi(U)$ не е изпъкнало подмножество на $\varphi(E)$. В /4.1.2./ се разглеждат геодезични съответствия на пространства на Буземан. Като приложение на метричната теорема за опъващите съответствия //2.4.3.// е дадена следната теорема: ако R е сегментно пространство на Буземан и $p \in R$, то всяко (p,p)-опъващо съответствие е (p,p)-геодезично. Ясно е, че това приложение не елиминира езика на опъващите съответствия, но то представлява самостоятелен интерес.

В /4.1.3./ разглеждаме един частен случай на пространство с метрични особености - изпъкнало затворено подмножество на R^n. За него специално се формулира теоремата за опъващите съответствия, като тук получаваме допълнителното обстоятелство, че всяка метрична особеност се трансформира в метрична особеност. Освен това в този пункт се обсъжда въпроса за геодезично-групово хомогенни метрични пространства R, в които по условие локалните геодезични групи $G_R^t(p,p)$, $G_R^g(p,p)$, $p\in R$, са изоморфни помежду си за всяко p. Тези метрични пространства са едно възможно естествено обобщение на обичайните векторни пространства от гледище на геодезичната структура.

В параграф 4.2 излагаме приложения на изпъкналите множества с добре разположени екстремни точки като самостоятелно направление, независимо от изпъкнало-преднаредените пространства. Всъщност касае се за едно единствено завършено приложение - едно ново доказателство на известната теорема на Бейд /4.2.1/, но освен него в /4.2.2/ и /4.2.3/ са изложени възможностите за някои други аспекти на тази теорема /векторен, некомутативен/. Заслужава да се отбележи, че проверката за добро разположение на екстремните точки е пряко свързана с познаването на спрегнатото пространство и, благодарение на теорамата на Ф.Рис за представяне на непрекъснатите линейни форми върху пространството $\mathcal{C}(X)$, е ефективно възможна. Аналогично обстоятелство се появява по късно в /4.3.2/, където проверката, за добро разположение на екстремните точки се базира на познаването на спрегнатото пространство на $L^p(X,\mu)$ /аналогичната теорема на Ф.Рис/

Параграф 4.3 е посветен на операторите на Дени. Нека $(E,\prec)$ е изпъкнало-преднаредено на ляво векторно топологично пространство, снабдено с неотрицателна непрекъсната симетрична билинейна форма $\varkappa$. Ако $A: E \longrightarrow E$ е непрекъсната оператор полагаме $(Ax|x) := \varkappa(Ax,x)$ и функционалът $x \longmapsto (Ax|x)$ наричаме квадратичен функционал на A. За оператора A казваме, че е позитивен, ако квадратичния му функцинал е неотрицателен. За хомогенния и позитивен оператор A, чиито квадратичен функционал е изпъкнал и хомогенен, казваме, че е оператор на Дени относно ако за всяка двойка $x, y \in E$ от $x \prec y$ следва $(Ax|x) \leq (Ay|y)$ Понеже A е непрекъснат, позитивен и хомогенен, очевидно, преднаредбата $\prec_A$

$$x \prec_A y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (Ax|x) \leq (Ay|y)$$

е допустима изпъкнала на ляво преднаредба върху E . Като вземем пред вид тази забележка, дефиницията на оператор на Дени се префразира така: A е оператор на Дени върху E относно $\prec$ тогава и само тогава когато преднаредбата $\prec_A$ мажорира преднаредбата $\prec$

С $\prec_\square$ означаваме "паралелепипедната преднаредба" върху $L^p(X,\mu)$ където X е локално компактно топологично пространство, а μ е позитивна мярка на Радон върху X . Методът на добре разположените точки се прилага в /4.3.2./ за доказателството на следната теорема:

Ако K е линеен интегрален оператор на Дени върху $L^p(X,\mu)$ относно $\prec_\square$, $1 \leq p < \infty$, то

$$supp(K \cdot (\mu \otimes \mu)) \subset \Delta$$

където Δ е диагоналът на $X \times X$, а $K \cdot (\mu \otimes \mu)$ означава произведението на мярката $\mu \otimes \mu$ с ядрото на оператора K .

Горната теорема се базира на това, че изпъкналото множество $L^p(\varphi, \prec_\square) = \{f \in L^p(X,\mu) \mid f \prec_\square \varphi\}$, $1 \leq p < \infty$, има добре разположени екстремни точки и, следователно, според /3.1.4./ удовлетворява свойството на Крейн и Милман - факт, който не винаги може да се извлече от теоремата на Крейн и Милман поради некомпактността на множествата $L^p(\varphi, \prec_\square)$ в общия случай.

В /4.3.3./ изучаваме операторите на Дени относно "диференчната преднаредба" $\overset{\circ}{\prec}_-$

$$f \overset{\circ}{\prec}_- g \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| & x, y \in X \\ \left|\int_X f(x)\, d\mu(x)\right| \leq \left|\int_X g(x)\, d\mu(x)\right| \end{cases}$$

Нека отбележим тук, че диференчната преднаредба

$$f \prec_{-} g \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |f(x)-f(y)| \leq |g(x)-g(y)|$$

е обобщение на понятието контракция, въведено от Дени и Бьорлинг [8]. Ако положим $(\mathscr{C}(\mathbb{C}), \prec_{-}) = E$, т.е. разгледаме векторното пространство $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ на непрекъснатите функции върху $\mathbb{C}$ снабдено с диференчната преднаредба $\prec_{-}$, съгласно възприетата тук терминология и използуваните тук означения, множеството на контрациите на Дени и Бьорлинг съвпада с $E(\mathbb{1}_{\mathbb{C}}, \prec_{-})$ / $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$ означава тъждественото съответствие на $\mathbb{C}$, т.е. $f \in E(\mathbb{1}_{\mathbb{C}}, \prec_{-})$ тогава и само тогава, когато $|f(z)-f(w)| \leq |z-w|$ за всяко $z, w \in \mathbb{C}$ /.

В /4.3.4/ бегло засягаме някои въпроси за оператори на Дени, определени от нелинейни интегрални оператори.

Накрая в /4.3.5/ е отбелязано, че операторите на Дени $K_s \cdot \mu$ се интерпретират с помощта на понятиета на абстрактната теория на потенциала. По точно, операторите на Дени са такива оператори $K_s \cdot \mu$ за които на по-силен източник f /в смисъл на преднаредбата $\prec$ / върху X отговаря по-голяма взаимна енергия на μ и $K_s \cdot \mu$. Фактически, в /4.3.3/ е посочена формула за енергията на потенциала

$$U_f^{\mu}(s) = \int_X K(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$$

при условие, че $K_s \cdot \mu$ е оператор на Дени относно $\prec_{-}^{\circ}$. Доказаната в /4.3.2/ теорема за операторите на Дени относно $\prec_{\sigma}$ е задоволителна от гледище на особеностите на потенциалите.

В параграф 4.4 са изложени няколко елементарни забележки които имат за цел да покажат, че с помощта на понятието "добре разположени екстремни точки" могат да се получат твърдения от некомпактен тип, аналогични на някои известни теореми. Например, такава е забелжката за спектъра на някои линейни оператори в нерефлексивно пространство /4.4.3/, обобщаваща един прост факт за хилбертови пространства. Бележките направени в /4.4.4/ и /4.4.5/

са далече от завършен вид и нямат никакви претенции.

В последния параграф 4.5 е изложен един елементарен аспект на понятието "добре разположени екстремни точки", който е независим от изпъкнало-преднаредените пространства. Теоремата за сравнимост на изпъкнала хомогенна функция с линейна функция /4.5.2/ може да се използува за доказателство на някои изпъкнали неравенства.

Изложените до тук резултати в главни линии са получени през 1968 и 1969 години. За пръв път те са докладвани на IV Конгрес на математиците от страните говорещи латински езици, състоял се в Букурещ и Брашов през септември 1969 година. /Вж. резюмето на съобщението на автора в сборника от резюметата на Конгреса/.

С изключение на §2.3 и §4.2, изложения до тук материал съставя съдържанието на един проект за дисертация оформен от автора в края на 1970 година. Всъщност в настоящето изложение липсва параграф 3.3., в който понатието "добре разположени екстремни точки" се свързва с въпроси от тип "неподвижна точка".

Фактите от параграф 2.3. бяха получени през 1971 год. и са докладвани в съобщението на автора на III Конгрес на математиците от балканските страни в Истанбул през септември на 1971 год. Съдържанието на параграф 4.2. беше получено в края на 1972 год.

Освен параграф 2.3. и параграф 4.2. в настоящето изложение е включено и едно допълнение, което отразява известно развитие на понятието "добре разположени екстремни точки". Главното тук е, че множеството от екстремните точки се разглежда като минимален елемент в съвкупността на всевъзможните множества, удовлетворяващи условието за"добро разположение" без екстремност /ДРОТ/. В случая на компактно изпъкнало множество, благодарение на разширената дефиниция за"добро разположение" от Д.1., това схващане дава направо теоремата на Крейн и Милман. На края са отбелязани някои нерешени въпроси.

В заключение авторът счита за приятен дълг да изрази тук благодарността си на всички, които са го подпомогнали при работата му над дисертацията.

Преди всичко авторът е благодарен на професор Гюстав Шоке от Парижкия униреситет, без чието окуражение тази дисертация вероятно нямаше да бъде представена. На професор Арно Данжоа, член на Парижката академия на науките, авторът е благодарен за представянето на две негови бележки в Докладите на Парижката Академия на Науките. На академик Орлич от Полската Академия на Науките авторът е благодарен за предоставената възможност за доклад в семинара на академик Орлич в Познанския университет през месец декември 1970 година, където беше изложена част от съдържанието на глави III и IV. На професор Бесага и професор Пелчински от Варшавския университет авторът е благадарен за някои полезни беседи във връзка със съдържанието на глава II. На д-р Г. Букур от Математическия инстетут на Академията на Науките на СРРР, където част от настоящата дисертация беше докладвана през декември 1970 година и януари 1973 година, авторът е благодарен за проявения интерес и някои полезни забележки.

На Българската Академия на Науките, Института по Математика и Механика към нея и на ръководителя на сектора по комплексен анализ академик Любомир Илиев авторът е благодарен за постоянно оказваната подкрепа. Известно влияние върху формирането на научните интереси на автора през неговите студентски години имаха академик Боян Петканчин и член кореспондент Ярослав Тагамлицки. Предвид на обстоятелството, че това влияние има отношение към темата на настоящата дисертация, авторът държи, макар и твърде късно, да им изкаже тук своята благодарност. На Петър Кендеров от Института по Математика и Механика авторът е блогодарен за готовността да прочете един пробен вариант на глава I, в резултат на което бяха отстранени някои грешки и беше подобрена редекцията на някои небрежно формулирани дефиниции и твърдения.

Техническото оформяне на ръкописа авторът дължи изцяло на Дечко Митов и Румян Лазов от Института по Математика и Механика. Освен много подобрения на текста, те направиха редица полезни забележки и допълнения. За всичко това авторът им е извънредно благодарен. Без тяхното съдействие представянето на дисертацията щеше да бъде забавено още.

София, януари 1974 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, Москва, 1952

2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГИТТЛ, Москва, 1950

3. Дей М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, Москва, 1961

4. Шефер Х., Топологические векторные пространства, Мир, Москва, 1971

5. Gordon H., Tpologies and projections on Riesz spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 94 (1960), 529 - 551

6. Namioka I., Partially ordered linear topological spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 24 (1957)

7. Peressini A. L., Ordered topological vector spaces, New York, 1967

8. Beurling A., Deny J., Espaces de Dirichlet, I: Le cas élémentaire., Acta Math., 99 (1958), 203 - 224

Глава I

ИЗПЪКНАЛИ ПРЕДНАРЕДБИ

1.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Тук ще дадем няколко основни дефиниции и ще посочим няколко непосредствени следствия от тях.

/1.1.1/ ПОЛУЗАТВОРЕНИ ПРЕДНАРЕДБИ В ТОПОЛОГИЧНИ ПРОСТРАНСТВА.

Нека X означава топологично пространство, снабдено по условие с преднаредба $\prec$. С други думи, върху X е дефинирана бинарна релация $x \prec y$, $x, y \in X$, която е рефлексивна / $x \prec x$ / и транзитивна / $x \prec y$ и $y \prec z$ имплицират $x \prec z$ за всяка тройка $x, y, z \in X$ /. Нататък, вместо X понякога ще пишем $(X, \prec)$.

Следвайки Нахбин [22] ще казваме, че преднаредбата $\prec$ е полузатворена, ако за всяка точка a от X множествата $X(a) = X(a, \prec) = \{x \mid x \prec a, x \in X\}$ и $X_*(a) = X_*(a, \prec) = \{x \mid a \prec x, x \in X\}$ са затворени подмножества на X .

Тривиален пример на полузатворена преднаредба върху X получаваме, ако за всяко a , $a \in X$, положим $X(a) = X_*(a) = X$. Нататък тази преднаредба ще бъде наричана хаотична преднаредба върху X. Напротив, ако за всяко a, $a \in X$, положим $X(a) = X_*(a) = \{a\}$, получаваме друга полузатворена преднаредба върху X , стига едноелементните подмножества на X да са затворени. Тази преднаредба ще бъде наричана дискретна преднаредба върху X . Обичайното равенство $x = y$, $x, y \in X$, определя дискретна преднаредба върху X .

Очевидно, за всяка преднаредба $\prec$ върху X имаме $a \in X(a, \prec)$, каквато и да е точката a от X. Също така, ако $a \prec b$, $a,b \in X$, то $X(a,\prec) \subset X(b,\prec)$ и $X_*(a,\prec) \supset X_*(b,\prec)$. Обратно, всяко от последните две включвания влече $a \prec b$.

ДЕФИНИЦИЯ. Ще казваме, че полузатворената преднаредба $\prec$ върху X е тънка наляво от точката a, $a \in X$, ако затвореното множество $X(a)$ не притежава вътрешни точки, т.е. $\mathring{X}(a) = \emptyset$. Аналогично, ще казваме, че $\prec$ е тънка надясно от точката a, $a \in X$, ако $\mathring{X}_*(a) = \emptyset$. Ако $\prec$ е едновременно тънка наляво и надясно от a, ще казваме, че $\prec$ е тънка в точката a.

Очевидно, дискретната преднаредба $\prec_{дискр}$ върху X е тънка във всяка неизолирана точка на X / $\mathring{X}(a,\prec_{дискр}) = \mathring{X}_*(a,\prec_{дискр}) = \widehat{\{a\}}$ /. Напротив, хаотичната преднаредба върху X не е тънка нито наляво нито надясно от никоя точка на X.

Ясно е, че за всяка полузатворена преднаредба $\prec$ върху X е в сила следното: ако $\prec$ е тънка наляво от точката a, $a \in X$, то $\prec$ е тънка наляво и от всяка точка x, $x \in X$, такава, че $x \prec a$; аналогично, ако $\prec$ е тънка надясно от a, то $\prec$ е тънка надясно от всяка точка y, $y \in X$, такава, че $a \prec y$.

Множеството на всички точки от X, в които преднаредбата $\prec$ е тънка, ще бъде наричано нататък <u>тънко подмножество на X относно полузатворената преднаредба $\prec$</u> или още <u>множество на тънкост за $(X,\prec)$</u> и ще бъде означавано с $K_{(X,\prec)}$, т.е.

$$K_{(X,\prec)} = \{x \mid \mathring{X}(x,\prec) = \mathring{X}_*(x,\prec) = \emptyset\}$$

Отбелязахме вече, че $K_{(X,\prec_{дискр})} = X$, ако X няма изолирани точки.

Аналогично, имаме $K_{(X, \prec_{xaot})} = \phi$.

/1.1.2/ ИЗПЪКНАЛИ НАЛЯВО ПОЛУЗАТВОРЕНИ ПРЕДНАРЕДБИ ВЪРХУ ВЕКТОРНИ ТОПОЛОГИЧНИ ПРОСТРАНСТВА. Сега нека E означава реално Хаусдорфово векторно топологично пространство, снабдено с полузатворена преднаредба $\prec$. Това означава, че топологията на E е съвместима с векторната структура на E /вж. например Бурбаки [2] / и, че преднаредбата $\prec$ е полузатворена относно топологията на E.

За преднаредбата $\prec$ ще предполагаме, че е свързана с хомогенната структура на E както обикновено, обаче обичайната връзка с адитивната структура на E ще бъде заменена с едно по-слабо условие. По точно имаме предвид следните аксиоми:

/POA 1/ Ако $x \prec y$, $x, y \in E$,
имаме $\lambda x \prec \lambda y$ за $\lambda > 0$.
Ако $0 < \lambda < \mu$, то $\lambda x \prec \mu x$ за $x \in E$.

/POA 2/ За всяко a , $a \in E$, множеството $E(a, \prec)$ е изпъкнало подмножество на E .

Дуална аксиома на /POA 2/ е следната

/POA 2'/ За всяко a , $a \in E$, множеството $E_*(a, \prec)$ е изпъкнало подмножество на E .

ДЕФИНИЦИЯ. Всяка полузатворена преднаредба върху E , която удовлетворява аксиомите /POA 1/ и /POA 2/, ще бъде наричана изпъкнала на ляво. Аналогично, всяка полузатворена преднаредба, която удовлетворява аксиомите /POA 1/ и /POA 2'/, ще бъде наричана изпъкнала на дясно.

ТВЪРДЕНИЕ. За всяка преднаредба $\prec$, удовлетворяваща аксиомата /РОА 1/, и за всяко положително число λ имаме

$$\lambda E(a,\prec) = E(\lambda a,\prec) \quad \text{и} \quad \lambda E_*(a,\prec) = E_*(\lambda a,\prec).$$

Доказателството е очевидно. ∎

<u>ЗАБЕЛЕЖКА 1.</u> Посочените в горното твърдение равенства не са в сила за $\lambda = 0$, както се вижда например в случая на хаотичната преднаредба върху едно нетривиално векторно пространство /$E \neq \{\sigma\}$ /.

<u>ЗАБЕЛЕЖКА 2.</u> Всяко класически преднаредено векторно топологично пространство /вж. например Бурбаки [2] /, т.е. всяко векторно топологично пространство с адитивна и хомогенна преднаредба, удовлетворява, освен /РОА 1/, едновременно /РОА 2/ и /РОА 2'/.

<u>/1.1.3/ КОНУС НА ТЪНКОСТ.</u> За преднаредбите, от вида посочени в предния пункт, множеството на тънкост $K_{(E,\prec)}$ има прост вид. По-точно в сила е следното

<u>ТВЪРДЕНИЕ.</u> За всяка преднаредба $\prec$ върху E, съвместима с хомогенната структура на E, множеството на тънкост $K_{(E,\prec)}$ е конус с връх началото σ на E. При това не винаги началото σ принадлежи на $K_{(E,\prec)}$.

Доказателство. Достатачно е да вземем предвид равенствата $\lambda \mathring{E}(x,\prec) = \mathring{E}(\lambda x,\prec)$ и $\lambda \mathring{E}_*(x,\prec) = \mathring{E}_*(\lambda x,\prec)$ за $\lambda > 0$, които следват от твърдението в /1.1.2/, и още от факта, че ако U е околност на y; $y \in E$, то λU е околност на λy. ∎

Нататък, множеството $K_{(E,\prec)}$ ще бъде наричано конус на тънкост за преднаредбата $\prec$ върху E.

<u>ЗАБЕЛЕЖКА 1.</u> Конусът на тънкост $K_{(E,\prec)}$ за една изпъкнала на

ляво /на дясно/ преднаредба $\prec$ върху E би могъл да бъде празен, както се вижда от примера на хаотичната преднаредба върху E .

ЗАБЕЛЕЖКА 2. В общия случай конусът на тънкост $K_{(E,\prec)}$ не е изпъкнало подмножество на E .

ДЕФИНИЦИЯ. В случая когато $K_{(E,\prec)}$ е празен или съдържа най-много една точка от E, ще казваме, че преднаредбата $\prec$ е нетънка. Ако $K_{(E,\prec)} \neq \emptyset$ и при това $K_{(E,\prec)}$ съдържа безбройно много точки от E, ще казваме, че преднаредбата е частично тънка. Ако $K_{(E,\prec)} = E$, ще казваме, че преднаредбата $\prec$ е напълно тънка.

Пример на напълно тънка изпъкнала на ляво преднаредба получаваме, ако за всяко a , $a \in E$, положим

$$E(a,\prec) = \{x \mid x = \lambda a, |\lambda| \leq 1\} \quad \text{и} \quad E_*(a,\prec) = \{x \mid x = \lambda a, \lambda \geq 1\} .$$

11.1.4/ СИМЕТРИЧНИ ПРЕДНАРЕДБИ. За една преднаредба $\prec$ върху векторното пространство E ще казваме, че е симетрична, ако за всяко a , $a \in E$, множеството $E(a,\prec)$ е симетрично относно началото на E . Ясно е, че за симетрична преднаредба $\prec$, за всяко a , $a \in E$, ще имаме $\sigma \in E(a,\prec)$.

ТВЪРДЕНИЕ. За всяка съвместима с хомогенната структура на E , полузатворена и симетрична, отлична от хаотичната преднаредба върху E , преднаредба $\prec$, конусът на тънкост $K_{(E,\prec)}$ съдържа началото на E .

Доказателство. Да допустнем противното: $\mathring{E}(\sigma,\prec) \neq \emptyset$. Тогава $\mathring{E}(\sigma,\prec)$ ще бъде околност на началото σ , която ще поглъща всеки елемент на пространството E , т.е. ако $x \in E$, то ще има $\lambda > 0$, такова, че $\lambda x \in \overset{\circ}{E}(\sigma,\prec)$, което означава, че $\lambda x \in U \subset E(\sigma,\prec)$, където U е отворено подмножество на E . Но в такъв случай $x \in \frac{1}{\lambda} U \subset E(\sigma,\prec)$ и понеже $\frac{1}{\lambda} U$ е отворено, то $x \in \overset{\circ}{E}(\sigma,\prec)$. Следователно $E = \overset{\circ}{E}(\sigma,\prec)$. Тъй като за всяко a , $a \in E$, имаме $\sigma \prec a$, получаваме, че $E(a,\prec) = E$ за всяко a от E , което противоречи на условието. ▮

Съгласно дефиницията от /1.1.3/ за една изпъкнала наляво симетрична преднаредба върху E ще казваме, че е нетънка, ако нейният конус на тънкост съдържа само началото на E .

/1.1.5/ ИЗПЪКНАЛО-ПРЕДНАРЕДЕНИ ВЕКТОРНИ ТОПОЛОГИЧНИ ПРОСТРАНСТВА. Нека $(E,\prec)$ означава векторно топологично пространство, снабдено с полузатворена преднаредба $\prec$, която не е напълно тънка и е отлична от хаотичната. Нататък ще разглеждаме такива преднаредби, които освен аксиомите /РОА 1/ и /РОА 2/ удовлетворяват още и следната аксиома

/РОА 3/ За всяко x , $x \in E$, чийто $\overset{\circ}{E}(x,\prec)$ и $\overset{\circ}{E}_*(x,\prec)$ не са празни, имаме $\overset{\circ}{E}(x,\prec) \cap \overset{\circ}{E}_*(x,\prec) = \phi$. Освен това, за всяко y , $y \in \overset{\circ}{E}(x,\prec)$, респективно за всяко $z \in \overset{\circ}{E}_*(x,\prec)$, имаме $E(y,\prec) \subset \overset{\circ}{E}(x,\prec)$, респективно $E_*(z,\prec) \subset \overset{\circ}{E}_*(x,\prec)$.

ТВЪРДЕНИЕ 1. Ако $\prec$ е полузатворена, не напълно тънка, удовлетворяваща /РОА 3/, преднаредба върху реалното векторно топологично пространство E , то за всяко $x \in E$ имаме или $x \in fr\,E(x,\prec)$, или $E(x,\prec) = E$; аналогично: или $x \in fr\,E_*(x,\prec)$ или $E_*(x,\prec) = E$.

Доказателство. Винаги имаме $x \in E(x,\prec)$. Ако $\overset{\circ}{E}(x,\prec) = \phi$, то $E(x,\prec) = fr\,E(x,\prec)$ и твърдението става очевидно. Ако $\overset{\circ}{E}(x,\prec) \neq \phi$, и допустнем, че $x \in \mathring{E}(x,\prec)$, съгласно /РОА 3/ получаваме $E(x,\prec) \subset \mathring{E}(x,\prec)$, т.е. $E(x,\prec) = \mathring{E}(x,\prec)$, от което, поради свързаността на E, следва $E(x,\prec) = E$. ∎

От тук нататък за разглежданите преднаредби ще предполагаме винаги, че $E(x,\prec) \neq E$, $E_*(x,\prec) \neq E$, каквото и да е x, $x \in E$.

<u>ТВЪРДЕНИЕ 2.</u> При условията на твърдение 1 по-горе, за всяка съвместима с хомогенната структура на E преднаредба, можем да твърдим, че за всяко a, $a \in E$, и всяко b, $b \notin K_{(E,\prec)}$, такова, че $o \in \mathring{E}(b,\prec)$, съществува $\lambda > 0$, че да имаме $a \in E(\lambda b,\prec)$ и $a \notin E_*(\lambda b,\prec)$.

Доказателство. Щом $b \notin K_{(E,\prec)}$, то $\mathring{E}(b,\prec) \neq \phi$ и $\mathring{E}(b,\prec)$ ще поглъща всеки елемент на E. Тогава ще има положително число λ, такова, че $a \in \lambda \mathring{E}(b,\prec)$ и, следователно, съгласно /РОА 3/, ще имаме още $a \notin \lambda E_*(b,\prec)$. За да завършим доказателството достатачно е да вземем предвид твърдението от /1.1.2/. ∎

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Ако $\prec$ е съвместима с хомогенната структура на E и удовлетворява условията на твърдение 1 по-горе, то за всяко $x \notin K_{(E,\prec)}$, такова, че $o \in \mathring{E}(x,\prec)$, имаме

$$E = \bigcup_{\lambda>0} E(\lambda x,\prec) \quad \text{и} \quad \bigcap_{\lambda>0} E_*(\lambda x,\prec) = \phi .$$

<u>ЗАБЕЛЕЖКА 1.</u> Всяка симетрична не напълно тънка преднаредба $\prec$ върху E удовлетворява условието: $o \in \mathring{E}(b,\prec)$ за $b \notin K_{(E,\prec)}$, фигуриращо в условията на твърдение 2 по-горе.

<u>ДЕФИНИЦИЯ.</u> За една полузатворена преднаредба $\prec$ върху векторното топологично пространство E ще казваме, че е <u>допустима</u>,

ако удовлетворява аксиомите /POA 1/, /POA 2/ и /POA 3/ или /POA 1/, /POA 2'/ и /POA 3/.

Нататък всяко векторно топологично пространство, снабдено с допустима изпъкнала на ляво /на дясно/ преднаредба, ще бъде наричано <u>изпъкнало-преднаредено на ляво /на дясно/ векторно топологично пространство</u> или накратко <u>изпъкнало-преднаредено на ляво /на дясно/ пространство.</u>

<u>ЗАБЕЛЕЖКА 2.</u> Всяко класически преднаредено векторно топологично пространство е едновременно изпъкнало-преднаредено на ляво и изпъкнало-преднаредено на дясно.

1.2. РЕШЕТКА НА ПРЕДНАРЕДБИТЕ

В този параграф ще изложим някои общи теоритико-решетъчни свойства на преднаредбите и по-специално на допустимите преднаредби.

<u>/1.2.1/ СРАВНЯВАНЕ НА ПРЕДНАРЕДБИ.</u> Нека $\prec$ и $\prec'$ са две полузатворени преднаредби върху топологичното пространство X.

Ще казваме, че преднаредбата $\prec'$ мажорира стриктно преднаредбата $\prec$, ако за всяко x, $x \in X$, имаме $X(x,\prec) \subset X(x,\prec')$. В такъв случай получаваме, че ще бъде изпълнено още и включването $X_*(x,\prec) \subset X_*(x,\prec')$.

Ако преднаредбата $\prec'$ мажорира стриктно преднаредбата $\prec$ и, от своя страна, преднаредбата $\prec$ мажорира стриктно преднаредбата $\prec'$, ще казваме, че преднаредбите $\prec$ и $\prec'$ са стриктно еквивалентни. Очевидно, за да бъдат $\prec$ и $\prec'$ стриктно еквивалентни е необходимо и достатачно за всяко x, $x \in X$ да имаме следното равенство $X(x,\prec) = X(x,\prec')$.

ТВЪРДЕНИЕ 1. Всяка полузатворена преднаредба $\prec$ върху X се определя еднозначно, с точност до стриктна еквивалентност, от някаква система $\{X(x) \mid x \in X\}$ от подмножества $X(x)$ на пространството X , удовлетворяваща следните условия:

0./ На всяко x, $x \in X$ е съпоставено точно едно $X(x)$,

1./ Ако $y \in X(x)$, то $X(y) \subset X(x)$,

2./ За всяко $x \in X$ множеството $X(x)$ е затворено,

3./ Ако за всяка околност U на a , $a \in X$, има елемент b, $b \in U$, такъв, че $X(x) \subset X(b)$, то непременно $X(x) \subset X(a)$.

Доказателство. Нека $\prec$ е полузатворена преднаредба върху X . Полагаме $X(x) = X(x,\prec)$. Очевидно, 2./ е изпълнено. Същото се отнася и за 3./, понеже и $X_*(x,\prec)$ по условие е затворено. Условието 1./ следва от транзитивността на $\prec$.

Обратно, нека е зададена една система $\{X(x) \mid x \in X\}$ от подмножества $X(x)$ на X , удовлетворяваща условията 0./ - 3./. Определяме $\prec$ по следния начин: $x \prec y$ тогава и само тогава когато $X(x) \subset X(y)$.

Очевидно, $x \prec x$ за всяко x , $x \in X$, защото $X(x) = X(x)$. Ако $x \prec y$ и $y \prec z$, то $X(x) \subset X(y)$ и $X(y) \subset X(z)$, следователно $X(x) \subset X(z)$, т.е. $x \prec z$. И така, дефинираната релация е преднаредба.

За дефинираната преднаредба $\prec$ имаме $X(x,\prec) = \bigcup_{y \prec x} X(y) = X(x)$.

Наистина, очевидно е, че $\bigcup_{y \prec x} X(y) \subset X(x)$. От друга страна, ако $z \in X(x)$ то съгласно 1./ имаме $X(z) \subset X(x)$ и значи $z \prec x$. И така $X(x) \subset X(x, \subset)$. Остава да вземем предвид, че $X(x, \prec) \subset \bigcup_{y \prec x} X(y)$, което също е очевидно.

Накрая ще проверим, че дефинираната преднаредба е полузатворена. Очевидно, $X(x, \prec)$ е затворено понеже съвпада с $X(x)$. За $X_*(x, \prec)$ имаме по дефиниция $X_*(x, \prec) = \{y \mid X(x) \subset X(y)\}$, от което, като вземем предвид 3./, следва, че $X_*(x, \prec)$ е също затворено.

ПРИМЕР. Върху реалната права $\mathbb{R}$ всяка симетрична полузатворена преднаредба е еквивалентна на преднаредбата по големина на абсолютната стойност: $x \prec_{||} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |x| \leq |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Наистина, достатачно е да вземем предвид, че за всяка симетрична полузатворена преднаредба $\prec$ върху $\mathbb{R}$ имаме

$$\mathbb{R}(x, \prec) = [-x, x], \quad x \in \mathbb{R} \quad .$$

ТВЪРДЕНИЕ 2. Всяка изпъкнала на ляво /на дясно/ допустима преднаредба $\prec$ върху векторното топологично пространство E се определя еднозначно, с точност до стриктна еквивалентност, от някаква система от подмножества $E(x)$ на пространството E, удовлетворяваща следните условия:

0./ На всяко $x \in E$ е съпоставено точно едно $E(x)$.

1./ Ако $y \in E(x)$, то $E(y) \subset E(x)$. /Ако $z \in E_*(x)$, то $E_*(z) \subset E_*(x)$/.

2./ За всяко $x \in E$ множеството $E(x)$ / $E_*(x)$ / е изпъкнало и затворено.

3./ Ако за всяка околност U на a, $a \in E$, има елемент

b , $b \in U$, такъв, че $E(x) \subset E(b)$ / $E_*(x) \subset E_*(b)$ /, то непременно $E(x) \subset E(a)$ / $E_*(x) \subset E_*(a)$ /.

4./ За всяко $\lambda > 0$ и всяко x , $x \in E$, е в сила равенството $\lambda E(x) = E(\lambda x)$.

5./ Ако $y \in \mathring{E}(x)$, респективно $z \in \mathring{E}_*(x)$, то имаме $E(y) \subset \mathring{E}(x)$, респективно $E_*(z) \subset \mathring{E}_*(x)$.

Доказателството на горното твърдение се извършва лесно. Първите четири свойства са фактически повторение на ТВЪРДЕНИЕ 1 с допълнителното условие за изпъкналост на $E(x)$ / $E_*(x)$/. Свойствата 4./ и 5./ са еквивалентни съответно на /РОА 1/ и /РОА 3/. ∎

/1.2.2/ РЕШЕТЪЧНО-АЛГЕБРИЧНИ СВОЙСТВА НА ПРЕДНАРЕДБИТЕ.

Нека $\{ \prec_\iota \mid \iota \in I \}$ е едно множество от преднаредби върху топологичното пространство X , индексирано с помоща на индексното множество I .

Да разгледаме следната система от подмножества $X(x)$ на X

$$\{ X(x) = \bigcap_{\iota \in I} X(x, \prec_\iota) \mid x \in X \} \quad .$$

Тази система определя една бинарна релация $\prec$ върху X , а именно:

$$x \prec y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} X(x) \subset X(y) \quad .$$

С други думи, $x \prec y$ тогава и само тогава, когато за всяко $\iota \in I$ имаме $x \prec_\iota y$. Очевидно, въпросната бинарна релация е една преднаредба върху X , която ще означаваме с $\bigwedge_{\iota \in I} \prec_\iota$ и ще наричаме <u>сечение</u> или <u>конюнкция</u> на системата $\{ \prec_\iota \mid \iota \in I \}$.

<u>ТВЪРДЕНИЕ 1</u>. Ако $\prec$ е сечение на системата от преднаредби $\{ \prec_\iota \mid \iota \in I \}$, то $X_*(x, \prec) = \bigcap_{\iota \in I} X_*(x, \prec_\iota)$.

Доказателство. Наистина, ако $y \in X_*(x, \prec)$, то ще имаме

$x \in X(y, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$, понеже по дефиниция $X_*(x, \prec) = \{y \mid x \in X(y, \prec)\}$. Но в такъв случай $y \in X_*(x, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$ и значи $y \in \bigcap_{\iota \in I} X_*(x, \prec_\iota)$, т.е. $X_*(x, \prec) \subset \bigcap_{\iota \in I} X_*(x, \prec_\iota)$.

Обратно, ако $y \in \bigcap_{\iota \in I} X_*(x, \prec_\iota)$, то $y \in X_*(x, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$ и, следователно, $x \in X(y, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$, т.е. $x \in \bigcap_{\iota \in I} X(y, \prec_\iota) = X(y, \prec)$. ∎

СЛЕДСТВИЕ. Ако преднаредбата $\prec$ е сечение на една система от полузатворени преднаредби, то непременно $\prec$ е полузатворена преднаредба.

Нека сега $\{\prec_\iota \mid \iota \in I\}$ означава една система от изпъкнали на ляво /на дясно/ допустими преднаредби върху векторното тополо-гично пространство E. Сечението на системата $\{\prec_\iota \mid \iota \in I\}$ ще бъде полузатворена преднаредба върху E /съгласно ТВЪРДЕНИЕ 1 по-горе/, която се определя с помоща на следната система от подмножества на E:

$$E(x) = E(x, \prec) = \bigcap_{\iota \in I} E(x, \prec_\iota) \quad \left(E_*(x) = E_*(x, \prec) = \bigcap_{\iota \in I} E_*(x, \prec_\iota)\right).$$

ТВЪРДЕНИЕ 2. Сечението на крайна система $\{\prec_\iota \mid \iota \in I\}$ /I крайно/ от изпъкнали на ляво /на дясно/ допустими преднаредби върху E е изпъкнала на ляво /на дясно/ допустима преднаредба върху E.

Доказателството на горното твърдение се състои в проверката на условията формулирани в ТВЪРДЕНИЕ 2 от /1.2.1/. Подробно ще разгледаме само случая на изпъкнали на ляво преднаредби.

Ако $y \in \bigcap_{\iota \in I} E(x, \prec_\iota)$, то $y \in E(x, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$, и, следователно, $E(y, \prec_\iota) \subset E(x, \prec_\iota)$ за всяко $\iota \in I$. Тогава ще имаме: $\bigcap_{\iota \in I} E(y, \prec_\iota) \subset \bigcap_{\iota \in I} E(x, \prec_\iota)$. С това проверихме, че 1./ е изпълнено.

Условието 2./ следва от факта, че всяко сечение на затворени и изпъкнали подмножества на E е също затворено и изпъкнало подмножество на E .

Ако за всяка околност U на a, $a\in E$, има елемент b, $b\in U$, такъв, че $E(x,\prec)\subset E(b,\prec)$, то ще имаме $b\in E_*(x,\prec)$. Съгласно следствието от твърдение 1 на този пункт, ще получим $a\in E_*(x,\prec)$, т.е. $x\in E(a,\prec)$ или $E(x,\prec)\subset E(a,\prec)$, което трябваше да докажем.

Условието 4./ следва от теоритико-множественото тъждество

$$\lambda \bigcap_{\iota\in I} X_\iota = \bigcap_{\iota\in I} \lambda X_\iota ,$$

приложено за системата $\{X(x,\prec_\iota)\mid \iota\in I\}$, и твърдението от /1.1.2/.

За да проверим, че условието 5./ е изпълнено, достатъчно е да вземем предвид, следното равенство:

$$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{\iota\in I} E(x,\prec_\iota)}} = \bigcap_{\iota\in I} \overset{\circ}{E}(x,\prec_\iota) ,$$

което е в сила, когато индексното множество I е крайно. ∎

<u>ЗАБЕЛЕЖКА.</u> При поверката на валидността на условията 0./ - 5./ в доказателството на твърдението по-горе, фактически условието за крайност на индексното множество I беше използвано само при проверката на 5./. Тогава, условията 0./ - 4./ остават в сила за произволно индексно множество I .

/<u>1.2.3/ МАКСИМАЛНИ И НЕРАЗЛОЖИМИ ПРЕДНАРЕДБИ.</u> Нека $(X,\prec)$ означава топологично пространство, снабдено с полузатворена преднаредба $\prec$.

За преднаредбата $\prec$ ще казваме, че е максимална, ако тя не се мажорира стриктно от никоя друга нееквивалентна с нея преднаредба.

Ще казваме, че преднаредбата $\prec$ е разложима, ако тя може да се представи като сечение $\prec_1 \wedge \prec_2$ на две други полузатворени, нееквивалентни с нея, преднаредби $\prec_i$, $i=1,2$, върху X .

В противен случай, преднаредбата $\prec$ ще бъде наричана неразложима.

Ясно е, че ако за всяко x, $x \in X$, имаме

$X_*(x,\prec) \cup X(x,\prec) = X$ и $X_*(x,\prec) \cap X(x,\prec) = fr\, X(x,\prec) = fr\, X_*(x,\prec)$,

то $\prec$ е неразложима.

В класа на изпъкналите на ляво /на дясно/ допустими преднаредби, понятията неразложимост и максималност придобиват смисъл, който лесно се формулира явно. Една изпъкнала на ляво /на дясно/ допустима преднаредба върху някакво изпъкнало-преднаредено на ляво /на дясно/ векторно топологично пространство се нарича максимална, ако тя не се мажорира стриктно от друга нееквивалентна с нея изпъкнала на ляво /на дясно/ допустима преднаредба. Аналогично, една такава преднаредба $\prec$ се нарича неразложима, ако тя не може да се представи като сечение $\prec_1 \wedge \prec_2$ на две други, нееквивалентни с нея, допустими, изпъкнали на ляво /на дясно/ преднаредби $\prec_1$ и $\prec_2$. Напротив, ако такива преднаредби $\prec_1$ и $\prec_2$ има, $\prec$ се нарича разложима.

<u>ТВЪРДЕНИЕ</u>. Всяка максимална полузатворена преднаредба $\prec$ върху топологичното пространство X е неразложима. Всяка максимална допустима, изпъкнала на ляво /на дясно/ преднаредба върху изпъкнало-

преднареденото векторно топологично пространство E е неразложима.

Доказателство. Ако $\prec = \prec_1 \wedge \prec_2$, то за всяко $x \in X$ имаме $X(x,\prec) = X(x,\prec_1) \cap X(x,\prec_2)$, следователно $X(x,\prec) \subset X(x,\prec_i)$, $i=1,2$. Но по условие преднаредбата $\prec$ е максимална, значи $X(x,\prec) = X(x,\prec_i)$, $i=1,2$, т.е. $\prec$ е стриктно еквивалентна на $\prec_i$, $i=1,2$. ▮

<u>/1.2.4/ РАЗДЕЛЯНЕ НА ПРЕДНАРЕДБИ</u>. Нека върху векторното топологично пространство E са дадени две изпъкнали преднаредби $\prec_1$ и $\prec_2$, където $\prec_1$ е изпълнала на ляво, а $\prec_2$ е изпъкнала на дясно. Ще казваме, че двойката $(\prec_1,\prec_2)$ е <u>нормална</u>, ако за всяко x, $x \in E$, е изпълнено следното условие:

$$E(x,\prec_1) \cap E_*(x,\prec_2) \subset fr\, E(x,\prec_1) \cap fr\, E_*(x,\prec_2).$$

Със $\prec^*$ ще означаваме дуалната преднаредба на преднаредбата $\prec$ върху E. Очевидно, за всяко x, $x \in E$, са в сила следните равенства: $E(x,\prec^*) = E_*(x,\prec)$ и $E_*(x,\prec^*) = E(x,\prec)$. Тогава, ясно е, че: 1./ ако $\prec$ е полузатворена, то $\prec^*$ е също полузатворена; 2./ ако $\prec$ е допустима, то $\prec^*$ е също допустима; 3./ ако $\prec$ е изпъкнала на ляво /на дясно/, то $\prec^*$ е изпъкнала на дясно /на ляво/.

От аксиомата /РОА 3/ и ТВЪРДЕНИЕ 1 от /1.1.5/ следва, че ако $\prec$ е допустима, изпъкнала на ляво преднаредба върху E, то двойката $(\prec,\prec^*)$ е нормална.

<u>ДЕФИНИЦИЯ</u>. Ще казваме, че преднаредбата $\prec$ разделя нормалната двойка $(\prec_1,\prec_2)$ от изпъкнали преднаредби / $\prec_1$ на ляво, $\prec_2$ на дясно/, ако $\prec$ мажорира стриктно $\prec_1$, а $\prec^*$ мажорира стриктно $\prec_2$.

Ако една нормална двойка $(\prec_1,\prec_2)$ от максимални изпъкнали преднаредби се разделя от $\prec$, то $\prec_1$ е стриктно еквив. на $\prec$;
$\prec_2$ " " " " $\prec^*$.

1.3. ПРИМЕРИ

/1.3.1/ ДОПУСТИМИ ПРЕДНАРЕДБИ ВЪРХУ ВЕКТОРНИ ПРОСТРАНСТВА БЕЗ ТОПОЛОГИЯ. Нека сега E означава векторно пространство над $\mathbb{R}$ без топология и $\prec$ е преднаредба, дефинирана върху него.

ДЕФИНИЦИЯ. Ще казваме, че $\prec$ е една изпъкнала на ляво /на дясно/ допустима преднаредба върху E, ако:

1./ за всяко x, $x \in E$, множеството

$$E(x,\prec) = \{y \mid y \prec x,\ y \in E\} \quad / E_*(x,\prec) = \{y \mid x \prec y,\ y \in E\} \quad /$$

е изпъкнало подмножество на E.

2./ $E(\lambda x,\prec) = \lambda E(x,\prec)$ $\quad / E_*(\lambda x,\prec) = \lambda E_*(x,\prec)$ / за всяко $x \in E$ и за всяко $\lambda > 0$; освен това, за всяко x, $x \in E$, и за всяка двойка λ, μ, $\lambda > 0$, $\mu > 0$,

$$E(\lambda x,\prec) \subset E(\mu x,\prec) \quad / E_*(\lambda x,\prec) \supset E_*(\mu x,\prec)/,$$

тогава и само тогава, когато $\lambda \leqq \mu$.

3./ ако $y \notin E(x,\prec)$ / $y \notin E_*(x,\prec)$ /, то има $\varepsilon > 0$, такова, че $y \notin E(\lambda x,\prec)$ / $y \notin E_*(\lambda x,\prec)$ / за всяко λ удовлетворяващо неравенствата $1 \leqq \lambda < 1+\varepsilon$ / $1-\varepsilon < \lambda \leqq 1$ /.

ЗАБЕЛЕЖКА. Очевидно, от 2./ следва, че ако $\prec$ е изпъкнала на ляво, то за всяко x, $x \in E$, имаме: $E(x,\prec) \subset E(\lambda x,\prec)$ за всяко $\lambda \geqq 1$. Фактът, че горното включване наистина се реализира за всяко $\lambda \geqq 1$ съществено зависи от условието за изпъкналост на $E(x,\prec)$ /точка 1./ от дефиницията/. Аналогично обстоятелство имаме и за всяка изпъкнала на дясно преднаредба $\prec$: $E_*(x,\prec) \supset E_*(\lambda x,\prec)$ за всяко $\lambda \geqq 1$.

За една изпъкнала на ляво допустима преднаредба върху E ще казваме, че е симетрична, ако нейните $E(x,\prec)$ са симетрични подмножества на E .

<u>ТВЪРДЕНИЕ.</u> Всяко крайно сечение на изпъкнали на ляво допустими симетрични преднаредби върху E е също изпъкнала на ляво допустима симетрична преднаредба върху E .

Доказателството се състои в проверката на 1./, 2./ и 3./ от дефиницията на допустима преднаредба по-горе. Твърдението за симетричност е очевидно. Ако $\prec = \prec_1 \wedge \prec_2 \wedge \ldots \wedge \prec_n$, където $\prec_i$, $i=1,2,\ldots,n$, са допустими, то очевидно 1./ е изпълнено за $\prec$. Понеже $E(x,\prec) = \bigcap_{i=1}^{n} E(x,\prec_i)$ /вж. дефиницията на сечение, стр. /, то ще имаме $E(\lambda x,\prec) = \bigcap_{i=1}^{n} E(\lambda x,\prec_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \lambda E(x,\prec_i)$, и, като вземем предвид тъждеството $\lambda \bigcap X_i = \bigcap \lambda X_i$, получаваме $E(\lambda x,\prec) = \lambda \bigcap_{i=1}^{n} E(x,\prec_i) = \lambda E(x,\prec)$, с което и 2./ е установено. Накрая за да проверим, че и 3./ е налице, достатачно е да вземем $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, където ε_i е такова, че $y \notin E(\lambda x,\prec_i)$ за $1 \leqq \lambda < 1+\varepsilon_i$, $i=1,2,\ldots,n$, точката y бидейки избрана произволно в E вън от $E(x,\prec)$. ∎

За една преднаредба $\prec$ върху векторното пространство E ще казваме, че е <u>поглъщаща</u>, ако съществува x , $x \in E$, такова, че $E(x,\prec)$ да бъде поглъщащо подмножество на E . Очевидно, ако $\prec$ е поглъщаща преднаредба преднаредба върху E и x е точка от E за която $E(x,\prec)$ е пъглъщащо, то за всяка точка y , $y=\lambda x$, множеството $E(y,\prec)$ също е поглъщащо подмножество на E .

Със $E^{o}(x,\prec)$ ще означаваме съвкупността на всички точки y

от $E(x,\prec)$, за които има $\varepsilon>0$, такова, че $\lambda E(y,\prec)\subset E(x,\prec)$ за всяко λ удовлетворяващо неравенствата $1\leqq\lambda<1+\varepsilon$. Разбира се, ε зависи от избора на y.

Непосредствено от дефиницията на $E^\circ(x,\prec)$ следва, че винаги щом $E(x,\prec)\subset E(y,\prec)$, то $E^\circ(x,\prec)\subset E^\circ(y,\prec)$.

ЛЕМА. Ако $E(x,\prec)$ е изпъкнало, симетрично и поглъщащо подмножество на векторното пространство E, то същото се отнася и за множеството $E^\circ(x,\prec)$.

Доказателство. Най-напред ще проверим, че $E^\circ(a,\prec)$ е изпъкнало. Ако $x\in E^\circ(a,\prec)$, $y\in E^\circ(a,\prec)$, нека $\lambda E(x,\prec)\subset E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\varepsilon_1$ и освен това $\lambda E(y,\prec)\subset E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\varepsilon_2$. Ще докажем, че ако $z=\alpha x+\beta y$, където $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha+\beta=1$, то $\lambda E(z,\prec)\subset E(a,\prec)$ за всяко λ удовлетворяващо неравенствата $1\leqq\lambda<1+\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Наистина, $\lambda z=\alpha(\lambda x)+\beta(\lambda y)$ и, понеже $\lambda x\in E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\varepsilon_1$, $\lambda y\in E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\varepsilon_2$, то като вземе предвид, че $E(a,\prec)$ е изпъкнало, получаваме, че $\lambda z\in E(a,\prec)$. Но в такъв случай $E(\lambda z,\prec)\subset E(a,\prec)$ или което е същото $\lambda E(z,\prec)\subset E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Сега ще проверим, че $E^\circ(a,\prec)$ е симетрично. Нека $x\in E^\circ(a,\prec)$, тогава $\lambda E(x,\prec)\subset E(a,\prec)$ за всяко $1\leqq\lambda<1+\varepsilon$. Понеже $E(x,\prec)$ е симетрично, то $-x\in E(x,\prec)$, т.е. $-x\prec x$ и значи $E(-x,\prec)\subset E(x,\prec)$. Впрочем, $\lambda E(-x,\prec)\subset\lambda E(x,\prec)\subset E(a,\prec)$ за $1\leqq\lambda<1+\varepsilon$.

Накрая ще проверим, че $E^\circ(a,\prec)$ е поглъщащо. За тази цел най-напред ще отбележим, че за всяко θ, $0<\theta<1$, имаме $\theta a\in E^\circ(a,\prec)$. Наистина, ако $1\leqq\lambda\leqq\frac{\theta_1}{\theta}$, където $\theta<\theta_1<1$, то

$\lambda E(\theta a,\prec) \subset E(a,\prec)$. Но щом $\theta a \in E^{\circ}(a,\prec)$, то $a \in E^{\circ}(\frac{a}{\theta},\prec)$ и значи $E(a,\prec) \subset E^{\circ}(\frac{a}{\theta},\prec)$. От последното включване твърдението следва непосредствено. ∎

/<u>1.3.2/ ПРИМЕРИ ОТ ОБЩ ХАРАКТЕР.</u> Нека E означава <u>реално</u> векторно топологично пространство. Всяка непрекъсната полунорма p върху E определя една изпъкнала на ляво допустима преднаредба $\prec^{p}$ върху E, която се определя от следната система от затворени подмножества на E: $\{E(a,\prec^{p}) = \{x \mid p(x) \leqq p(a)\} \mid a \in E\}$. Лесно се проверява, че $\prec^{p}$ наистина е допустима. Преднаредбата $\prec^{p}$ е нетънка, защото от условието за непрекъснатост на p следва, че отвореното множество $\mathring{E}(a,\prec^{p}) = \{x \mid p(x) < p(a)\}$ не е празно.

Като вземем предвид, че всяка локално изпъкнала топология върху реалното векторно пространство топологично пространство E се определя от множеството на всички непрекъснати относно нея полунорми, виждаме, че:

1./ всяка двойка (E,p), където E е локално изпъкнало пространство, а p принадлежи на определящата система от полунорми за топологията на E, дефинира едно изпъкнало преднаредено на ляво векторно топологично пространство $(E,\prec^{p})$, и

2./ в сила е следната

<u>ТЕОРЕМА</u>. Нека върху векторното пространство E е дадена една система от симетрични, поглъщащи, изпъкнали наляво, допустими преднаредби $\prec_{\iota}$, $\iota \in I$. При това ще предполагаме, че има точка x, $x \in E$, такава, че $E(x,\prec_{\iota})$ е поглъщащо за всяко ι, $\iota \in I$.

Тогава върху E съществува минимална топология, съвместима с векторната структура на E, относно която всяка преднаредба $\prec_\iota$, $\iota \in I$, е полузатворена, симетрична допустима преднаредба върху E, която освен това не е напълно тънка.

Доказателство. Да фиксираме една точка $a \in E$, за която $E(a, \prec_\iota)$ е поглъщащо за всяко $\iota \in I$ и да разгледаме системата от подмножества $\{E^\circ(\alpha a, \prec_\iota) \mid \iota \in I, \alpha > 0\}$ на E.

Множествата, участвуващи в разглежданата система, са изпъкнали, симетрични и поглъщащи съгласно лемата от /1.3.1./. Всевъзможните крайни сечения $\prec_{\iota_1} \wedge \prec_{\iota_2} \wedge \ldots \wedge \prec_{\iota_n}$ на преднаредби от системата $\{\prec_\iota \mid \iota \in I\}$ определят база на филтър от изпъкнали, симетрични и поглъщащи подмножества на E. Наистина, достатъчно е да вземем пред вид ТВЪРДЕНИЕ /1.3.1./ и още следната

<u>ЛЕМА</u>. Ако $\prec = \prec_{\iota_1} \wedge \prec_{\iota_2} \wedge \ldots \prec_{\iota_n}$, то $E^\circ(a, \prec) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E^\circ(a, \prec_{\iota_k})$.

Доказателството на лемата се извършва лесно. Като вземем пред вид, че $E(a,\prec) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E(a, \prec_{\iota_k})$, то очевидно: $E(a, \prec) \subset \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} E^\circ(a, \prec_{\iota_k})$.

От друга страна, ако $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} E^\circ(a, \prec_{\iota_k})$, то $\lambda E(x, \prec_{\iota_k}) \subset E(a, \prec_{\iota_k})$, $1 \leqq \lambda < 1 + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогава $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \lambda E(x, \prec_{\iota_k}) \subset \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} E(a, \prec_{\iota_k})$ и следователно $\lambda E(a, \prec) \subset E(a, \prec)$ за $1 \leqq \lambda < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon = \min \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Но щом всевъзможните крайни сечения на елементи от системата $\{\prec_\iota \mid \iota \in I\}$ определят база на филтър от изпъкнали, симетрични и поглъщащи подмножества на E, то съществува)(виж например Бурбаки [2]) единствена локално изпъкнала топология върху E , относно която крайните сечения на множествата, участвуващи в системата $\{E^\circ(\alpha a, \prec_\iota) \mid \alpha > 0, \iota \in I\}$, и само те, са отворени околности на началото.

Относно дефинираната по-горе топология върху E множествата $E(x,\prec)$ са затворени подмножества на E . Наистина, ако $y \notin E(x,\prec)$, то съгласно 3/. от ДЕФИНИЦИЯ /1.3.1/, съществува $\varepsilon > 0$, такова че $y \notin E(\lambda x,\prec)$ за всяко λ , удовлетворяващо неравенствата $1 \leqq \lambda < 1+\varepsilon$. Нека λ_1 и λ_2 са такива, че $1 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < 1+\varepsilon$. Тогава $E^\circ(\lambda_1 x,\prec) \subset E^\circ(\lambda_2 x,\prec)$ и, следователно, $\overline{E^\circ(\lambda_1 x,\prec)} \subset E^\circ(\lambda_2 x,\prec)$. Но в такъв случай допълнението на $\overline{E^\circ(\lambda_1 x,\prec)}$ ще бъде отворено подмножество на E , съдържащо y и не пресичащо $E(x,\prec)$. Значи, допълнението на $E(x,\prec)$ е отворено, т. е. $E(x,\prec)$ е затворено.

Аналогично се проверява, че $E_*(x,\prec)$, , е затворено подмножество на E . С това установихме, че $\prec_\iota$ е полузатворена. Очевидно, $\prec_\iota$ е симетрична.

Ще проверим, че $\prec_\iota$ е допустима. Ако $y \in \mathring{E}(x,\prec_\iota)$, то $y \in E^\circ(x,\prec_\iota)$ и значи $\lambda E(y,\prec_\iota) \subset E(x,\prec_\iota)$ за $1 \leqq \lambda < 1+\varepsilon$. Но в такъв случай $E(y,\prec_\iota) \subset E(\lambda y,\prec_\iota) \subset E(x,\prec_\iota)$. От друга страна, $E(y,\prec_\iota) \subset E^\circ(\lambda y,\prec_\iota) \subset E^\circ(x,\prec_\iota)$, т. е. това, което трябваше да проверим.

Понеже всяко $E(x,\prec_\iota)$ има непразно $E^\circ(x,\prec_\iota)$, предна-редбата $\prec_\iota$ е нетънка. ∎

Доказаната теорема ни дава възможност да конструираме изпъкнало-преднаредени векторни топологични пространства, изхождайки от допустими преднаредби върху векторни пространства без топология. Сега ще посочим други примери, които се получават с помощта на спрегнатото пространство. Те, фактически, са най-важните в изложението нататък.

Нека E означава векторно топологично пространство, чието спрегнато (дуално) E' не е празно. Изрично ще подчертаем, че E' се състои от непрекъснатите линейни функционали върху E . Нека $\mathcal{F}$ е произволна подсъвокупност на E' , $\mathcal{F}\subset E'$. Следната преднаредба върху E е една допустима, изпъкнала едновременно наляво и надясно, преднаредба: ако $x, y\in E$, то :

$$x \prec^{\mathcal{F}} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \forall f\in\mathcal{F} \quad \text{имаме} \quad f(x)\leqq f(y).$$

Тази преднаредба е даже адитивна, тъй като f е линеен функционал.

Лесно се проверява, че също и следната преднаредба:

$$x \prec^{|\mathcal{F}|} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \forall f\in\mathcal{F} \quad \text{имаме} \quad |f(x)|\leqq |f(y)|, \quad x, y\in E$$

е допустима изпъкнала наляво преднаредба върху E . Тази преднаредба е още и симетрична, но за разлика от предната не е адитивна. Освен това, тя е частично тънка. Нейният конус на тънкост съвпада с обединението на всички подпространства на E от вида $\{x \mid f(x)=0\}$, където $f\in\mathcal{F}$.

Аналогичен пример получаваме ако вместо модул вземем някаква неотрицателна, изпъкнала, хомогенна ($p(\lambda x)=\varphi(\lambda)p(x)$) функция от вида $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. По-точно, въпросната преднаредба се определя така:

$$x \prec^{p,\mathcal{F}} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \forall f \in \mathcal{F} \text{ имаме } (p\circ f)(x) \leqq (p\circ f)(y), \quad x,y \in E .$$

От свойствата на изпъкналите функции следва, че множеството $E(a, \prec^{p,\mathcal{F}}) = \{x \mid p(f(x)) \leqq p(f(a))\}$ е изпъкнало.

Бихме могли да разглеждаме и неизпъкнали функции p, за които множествата $E(a, \prec^{p,\mathcal{F}})$ са изпъкнали. Могат да се посочат примери, в които преднаредбите не произхождат от изпъкнала функция p и някакво $\mathcal{F}$.

/1.3.3/ НЯКОЛКО КОНКРЕТНИ ДОПУСТИМИ ИЗПЪКНАЛИ ПРЕДНАРЕДБИ В $\mathbb{R}^n$. Тук ще направим няколко допълнителни бележки за някои от преднаредбите, посочени в предния пункт, имайки пред вид частния случай $E = \mathbb{R}^n$.

Да разгледаме най-напред преднаредбата $\prec^{\square}$, дефинирана с помощта на системата от функционали:

$$\mathcal{F} = \{ f_i(x) = x^i \mid i = 1,2,\dots,n ; \; x \in \mathbb{R}^n \}$$

и обикновения модул (абсолютна стойност). По-точно:

$$x \prec^{\square} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |x^i| \leqq |y^i| , \quad i = 1,2,\dots,n .$$

(Тук, както обикновено, x^i означава i-тата координата на x.)

Тази преднаредба ще бъде наричана нататък паралелепипедна преднаредба върху $\mathbb{R}^n$. Това название е определено от геометрични съображения.

Паралелепипедната преднаредба върху $\mathbb{R}^n$ е допустима, симетрична, изпъкнала наляво преднардба върху $\mathbb{R}^n$. За всяко $a \in \mathbb{R}^n$ множеството $E(a, \prec^{\square})$ е изпъкнало; то е даже симетричен относно началото паралелепипед,; напротив, множеството $E_*(a, \prec^{\square})$ не е даже свързано.

Да фиксираме индекса i измежду естествените числа от 1 до n и да разгледаме преднаредбата $\prec^i$ върху $\mathbb{R}^n$, дефинирана с помощта на единственото неравенство:

$$|x^i| \leqq |y^i| \quad \text{т. е.} \quad x \prec^i y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |x^i| \leqq |y^i| .$$

Всъщност, тази преднаредба произлиза от линейната форма $f(x) = x^i$ и обичайния модул $|\ |$. Тя е симетрична, допустима, изпъкнала наляво преднаредба върху $\mathbb{R}^n$, която е даже максимална.

Паралелепипедната преднаредба върху $\mathbb{R}^n$ е сечение на максималните преднаредби $\prec^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\prec^{\square} = \prec^1 \wedge \prec^2 \wedge \ldots \wedge \prec^n$. От лемата в /1.2.2/ следва, че конусът на тънкост на паралелепипедната преднаредба съвпада с обединението на всички координетни подпространства на $\mathbb{R}^n$.

Друга преднаредба върху $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, която ще бъде наричана нататък <u>диференчна</u> преднаредба, е следната:

$$x \prec^- y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |x^i - x^j| \leqq |y^i - y^j| , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

Лесно се проверява, че диференчната преднаредба върху $\mathbb{R}^n$ е симетрична, допустима, изпъкнала наляво преднаредба върху $\mathbb{R}^n$. В случая $n = 2$ диференчната преднаредба $\prec^-$ е даже максимална и нейният конус на тънкост съвпада с правата $x^1 = x^2$. В случая $n \geqq 3$ диференчната преднаредба съвпада със сечението на максималните преднаредби $\prec^-_{ij}$, дефинирани както следва:

$$x \prec^-_{ij} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |x^i - x^j| \leqq |y^i - y^j| ,$$

където i и j са фиксирани измежду естествените числа от 1 до n.
Преднаредбата $\prec_{ij}^{-}$ се определя от линейната форма $f(x) = x^i - x^j$.
Щом $\prec^{-}$ е сечението на преднаредбите $\prec_{ij}^{-}$, $i,j = 1,2,\dots,n$,
то съгласно споменатата по-горе ЛЕМА /1.2.2/, за конуса на тънкост
на $\prec^{-}$ ще имаме $K_{\prec^{-}} = \bigcup_{i,j=1}^{n} K_{\prec_{ij}^{-}}$

Ще посочим още преднаредбата $\prec^{A}$ върху $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, наричана по-нататък <u>елипсоидна</u> преднаредба, която се определя както следва: нека $A = \|a_{ij}\|$, $i,j = 1,2,\dots,n$, е една симетрична, положително дефинитна матрица, т. е.

$$(Ax,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \geqq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Преднаредбата $\prec^{A}$ се определя с помощта на неравенството:
$(Ax,x) \leqq (Ay,y)$, т. е. $x \prec^{A} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (Ax,x) \leqq (Ay,y)$.
Лесно се проверява, че $\prec^{A}$ е симетрична, допустима, изпъкнала наляво преднаредба върху $\mathbb{R}^n$. Ако квадратичната форма (Ax,x) е неизродена, преднаредбата $\prec^{A}$ ще бъде нетънка. Ако (Ax,x) е изродена, $\prec^{A}$ ще бъде частично тънка. Например, матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

чиято квадратична форма е $(Ax,x) = (x^1 - x^2)^2$, определя преднаредба, която е стриктно еквивалентна на диференчната преднаредба върху $\mathbb{R}^2$.

/1.3.4/ НЯКОЛКО КОНКРЕТНИ ДОПУСТИМИ ИЗПЪКНАЛИ ПРЕДНАРЕДБИ ВЪРХУ НЯКОИ ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТРАНСТВА. Нека $\mathcal{F}=\mathcal{F}(M)$ означава някакво пространство от функции $f: M \to \mathbb{R}$, дефинирани върху множеството M и взимащи стойности в $\mathbb{R}$.

Да фиксираме точката x в M, $x \in M$, и да разгледаме преднаредбата $\prec_x^{\square}$ върху $\mathcal{F}(M)$, дефинирана както следва:

$$f \prec_x^{\square} g \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} |f(x)| \leqq |g(x)| .$$

Така дефинираната преднаредба $\prec_x^{\square}$ удовлетворява аксиомите (POA1) и (POA2). Наистина, ако $f \prec_x^{\square} g$, то очевидно $\lambda f \prec_x^{\square} \lambda g$ за $\lambda > 0$. Освен това за всяко $f \in \mathcal{F}(M)$, множеството $\mathcal{F}(f, \prec_x^{\square})$ е изпъкнало.

Ясно е, че посочената преднаредба $\prec_x^{\square}$ се определя от линейния функционал $l_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{F}$, и обичайния модул $|\;|$. Ако снабдим пространството $\mathcal{F}(M)$ с топологията на точковата сходимост върху M, ще получим векторно топологично пространство, върху което функционалът l_x е непрекъснат. В такъв случай, ако $g \in \mathring{\mathcal{F}}(f, \prec_x^{\square})$, т.е. $|g(x)| < |f(x)|$, то $\mathcal{F}(g, \prec_x^{\square}) \subset \mathring{\mathcal{F}}(f, \prec_x^{\square})$ и, значи, $\prec_x^{\square}$ е допустима.

Сечението $\bigwedge_{x \in M} \prec_x^{\square}$ на всички преднаредби $\prec_x^{\square}$, $x \in M$, ще бъде допустима преднаредба (евентуално частично или даже напълно тънка) върху $\mathcal{F}(M)$, която ще означаваме с $\prec_M^{\square}$. Тази преднаредба ще наричаме <u>паралелепипедна преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$</u>.

Аналогично се определя понятието диференчна преднаредба $\prec_M^{-}$ върху $\mathcal{F}(M)$. За фиксирана двойка точки $x, y \in M$, $x \neq y$, дефинираме преднаредбата $\prec_{xy}^{-}$ върху $\mathcal{F}(M)$ с помощта на неравенството:

$$|f(x)-f(y)| \leq |g(x)-g(y)| .$$

Фактически тази преднаредба се определя от разликата на линейните функционали $l_x(f)$ и $l_y(f)$ и абсолютната стойност. Ако положим $l_{xy}(f) = |l_x(f)-l_y(f)|$, то $\prec_{xy}^{-}$ се определя от $l_{xy}(f)$. Лесно се проверява, че $\prec_{xy}^{-}$ е допустима изпъкнала на ляво преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$.

Сечението $\bigwedge_{x,y\in M} \prec_{xy}^{-}$ на всички $\prec_{xy}^{-}$, $x,y\in M$, ще означаваме с $\prec_M^{-}$ и ще наричаме диференчна преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$. Тя също е допустима и изпъкнала на ляво преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$.

Разбира се, паралелепипедна и диференчна преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$ можем да въведем не само когато $\mathcal{F}(M)$ е снабдено с топологията на точковата сходимост /виж гл. IV/.

Аналог на елипсоидната преднаредба върху $\mathcal{F}(M)$ ще определим в един частен случай на функционалното пространство $\mathcal{F}(M)$. Нека $M = X$, където X е локално компактно пространство и нека μ е позитивна мярка на Радон върху X [3]. Да вземем Лебеговото пространство $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, т.е. полагаме $\mathcal{F}(X) = L^p(X,\mu)$.

Нека $K: L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ е линеен интегрален оператор, определен с помощта на симетрично позитивно ядро $K(s,t)$, $(s,t)\in X\times X$,

$$Kf = \int_X K(s,t)f(t)\,d\mu(t) .$$

Функционалът $l(f) = (Kf|f)$ е непрекъснат върху $L^p(X,\mu)$ и освен това е хомогенен и изпъкнал. Елипсоидна преднаредба $\prec_K$ върху $L^p(X,\mu)$ дефинираме с помощта на неравенството $(Kf|f) \leq (Kg|g)$, т.е.

$$f \prec_K g \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (Kf|f) \leq (Kg|g) .$$

Преднаредбата $\prec_K$ е изпъкнала на ляво допустима преднаредба върху $L^p(X,\mu)$.

1.4. ДРУГА ГЛЕДНА ТОЧКА

Вместо аксиомите /РОА 1/, /РОА 2/, /РОА 3/ можем да използваме понятието разслоено пространство в неговия най-общ смисъл [9].

/1.4.1/ ПРЕДНАРЕДЕНИ РАЗСЛОЕНИЯ. Нека $(E, \prec_E)$ означава някакво класически преднаредено векторно топологично пространство, т.е. преднаредбата $\prec_E$ е съвместима с хомогенната и адитивната структури на E. Освен това, нека X е топологично пространство и $f: X \to E$ е непрекъснато съответствие с цел E. С помощта на f можем да дефинираме следната преднаредба върху X: ако $x, y \in X$, то
$$x \prec_f y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} f(x) \prec_E f(y).$$

Така определената преднаредба $\prec_f$ върху X е полузатворена. Достатъчно е да вземем пред вид, че
$$X(a, \prec_f) = f^{-1}(E(f(a), \prec_E)) \quad \text{и} \quad X_*(a, \prec_f) = f^{-1}(E_*(f(a), \prec_E)).$$

Ако $\{E_\iota, \prec_\iota\}_{\iota \in I}$ е една съвокупност от класически преднаредени векторни топологични пространства и $\mathcal{F}$ е една съвокупност от непрекъснати съответствия $f_\iota: X \to E_\iota$, то $\mathcal{F}$ определя една полузатворена преднаредба $\prec_{\mathcal{F}}$ върху X:
$$x \prec_{\mathcal{F}} y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} f_\iota(x) \prec_\iota f_\iota(y), \quad \iota \in I.$$
Преднаредбата $\prec_{\mathcal{F}}$ съвпада със сечението на преднаредбите, определени от отделните двойки $(f_\iota, (E_\iota, \prec_\iota))$. Очевидно:
$$X(a, \prec_{\mathcal{F}}) = \bigcap_{\iota \in I} f_\iota^{-1}(E_\iota(f_\iota(a), \prec_\iota)) \quad \text{и} \quad X_*(a, \prec_{\mathcal{F}}) = \bigcap_{\iota \in I} f_\iota^{-1}(E_{\iota *}(f_\iota(a), \prec_\iota)).$$

За всяко непрекъснато съответствие $f_\iota: X \to E_\iota$ ще казваме, че определя едно <u>преднаредено разслоение върху X</u>.

Очевидно, ако $f(x) = f(y)$, ще имаме едновременно $x \prec y$ и $y \prec x$. Това означава, че във всеки слой $f^{-1}(f(x)) \subset X$ преднаредбата на разслоението съвпада с хаотичната преднаредба.

Впрочем, преднаредено разслоение е някаква тройка $(X, f, (E, \prec))$,

27. Mann,H.B.: On the number of information symbols in Bose-Chaudhuri codes. Inf. and Control.1962,No5, 153-162.
28. Hocquenghem,A.: Codes correcteurs d'erreurs. Chiffres, 2 (1959), 147-156.
29. Tavares,S.E., Allard,P.E., Shiva,S.G.S.: On the decomposition of cyclic codes into cyclic classes. Inf. and Control. 18(1971), No4, 342-354.
30. Tavares,S.E., Allard,P.E., Shiva,S.G.S.: A note on the decomposition of cyclic codes into cyclic classes. Inf. and Control.22(1973),No1,100-106.
31. Оганесян,С.Ш., Ягджян,В.Г.: Нахождение циклических представителей в бинарных циклических алфавитах. Труды ВЦ АН Арм.ССР и Ер.ГУ,1970,№6,35-38.
32. Оганесян,С.Ш., Ягджян,В.Г.: Объединение циклических представителей по одинаковым весам. Труды ВЦ АН Арм. ССР и Ер.ГУ, 1970,№6,39-48.
33. Оганесян,С.Ш., Ягджян,В.Г.: Весовой спектр для некоторых классов корректирующих циклических кодов. Проблемы передачи информации. 1970, вып.3, 31-37.
34. Оганесян,С.Ш., Ягджян,В.Г.: Класс оптимальных циклических кодов с основанием p . Проблемы передачи информации. 1972,вып.2, 109-110.
35. Додунеков,С.М.: Вычетные коды. Сердика (под печат).