СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

Факултет по математика и механика

ЕЛЕМЕНТИ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЛОГИКА В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В ИРАКСКОТО УЧИЛИЩЕ

Кандидатска дисертация

Научен ръководител
Проф. Алипи Матеев

Дисертант
Асаад Кадер Алджанаби

София, 1975 г.

У В О Д

През последните няколко десетилетия математическата наука отбелязва изключителен прогрес. Оказва се че е налице един забележителен факт - за този близо 60-годишен период математиката е постигнала повече, отколкото в цялата си предишна история. Появиха се и се развиват много нови математически дисциплини, като например Теория на линейното програмиране, Теория на игрите, Модерна алгебра, Теория на групите, Топология, Функционален анализ и т.н. Динамиката на развитие на математиката увлече и така наречените класически дисциплини. Някои от тях претърпяха дълбоки качествени промени. Такива се наблюдават в Математическия анализ, Теория на диференциалните уравнения, Теория на вероятностите, Статистиката. В горепосочените математически дисциплини процесите на "обобщаване" достигнаха непознато досега равнище. Сложната символика в тях и решаването на извънредно трудни проблеми в техните области днес е обичайно явление.

Пряко следствие от постоянния процес на обобщение в математиката е възникването на математическите структури. Те представляват постройки на понятия и съждения с извънредно висока степен на абстракция. Именно математическите структури позволяват да се стигне до действителната същина на математическите закони. Сега в математиката непрекъснато се прецизират нейните основни понятия, а с това и цялото математическо мислене, което е в неразривна връзка с математическата логика. Тук трябва да се изтъкне, че училищната математика изоставаше от бързото развитие на математическата наука и запазваше не само традиционните методи на обучение, но и старото си съдържание. Н.Г. Стайнер пише: "Традиционното обучение по математика отразява традиционното разбиране на ролята на математиката в обществото... Дефинициите и аксиомите на геометрията бяха взети като неизменни. Типичната директива, която се дава на учениците бе: "Докажете следното...". Ученикът, както може да се предположи, е научил определени неща и той следва да ги приложи в определен ред в упражненията.

Характерът на обучението беше в повечето случаи догматичен: учителят чете лекции, а учениците учат и повтарят. В резултат на критичен преглед на учебниците по математика през последните десет години бяха открити голям брой безполезни дефиниции, очевидни грешки, безсмислени усложнения на прости понятия, подчертаване на тривиални страни на теми и т.н.

Освен геометрията и други математически дисциплини в повечето случаи бяха изучавани чрез записване на колекции от правила, основания и рецепти за изчисляване. Такова бе положението специално в аритметиката, алгебрата и тригонометрията. На учениците се даваха голям брой формули от тригонометрията и стереометрията. Те се учеха да изчисляват лицето и обема на дадено тяло, но никога не са били подготвяни да разбират значението на тези понятия и защо определени формули бяха прилагани" [82]

Ето защо съществува голяма разлика между математиката, която се преподава в средното училище и математиката като наука. Именно тази разлика целят да премахнат така наречените модернизации на учебниците и методите на обучение.

Всъщност и по-рано се е говорило за реформи в математическото образование в средното училище. Така през последните десетилетия на XIX век и първото десетилетие на XX век Ф.Клайн оглавява движение за реформа, която цели да бъдат въведени някои от новите достижения на математиката от XVIII-XIX век, на първо място разделът, свързан с понятието функция.

През последните 15 - 20 години се забелязва аналогично положение, в резултат на което се разгърна мощно движение за осъвременяване училищния курс по математика в международен мащаб. Често, когато става дума за това движение, накратко се говори за модернизация на обучението по математика. В такъв мащаб се дискутират широко въпросите за модернизация в отделни страни, така и на редица международни срещи и конгреси на математици.

В Препоръка № 43 до Министерствата на просветата относно преподаването на математиката в средното училище, приета на XIX международна конференция по народното образование /Женева, 1956/се казва: "Програмите да се поддържат на високо, като се съобразяват с прогреса на науката и разискваните въпроси. В частност, трябва да се има предвид, че някои страни, с цел да се повиши равнището на програмите са въвели в горните класове аналитична геометрия, диференциално смятане, статистика и теория на вероятностите и придават все по-голямо значение на изучаване на функциите и векторите, както и на приложенията на математиката". /стр. 157/

Разгърната програма за обновяване /осъвременяване/ на обучението по математика в средното училище се излага в заключенията и препоръките на международния симпозиум по въпросите на преподаването на математиката, например в Будапеща - 1962 Там се казва: "Наред с повишаване на изискванията в областта на преподаването на множествата, векторните пространства и свързаните с тях понятия следва да продължават опитите над следните общи теми, представени в светлината на съвременната математика: 1/ Елементи от топология; 2/Елементарна геометрия; 3/Понятия от статистика и вероятности; 4/Диференциално и интегрално смятане; 5/ математическа логика. Всеки от тези дялове трябва да бъде предмет на изследване с различни представителни групи в училища от различен тип, за да се определи кога и какви методи могат да бъдат въведени и използвали.

По темата "Проблемите на съвременната училищна математика" И. Джеймс пише: "Преди да се състави учебна програма по даден училищен предмет и още преди началото на неговото изучаване, учителят оценява значимостта и мястото на предмета. Защо трябва да изучаваме математика? Какъв вид математика трябва да изучаваме? Каква роля може да играе тя в умственото развитие на учениците? Дълбокото и критично изследване на тези въпроси ще има огромно влияние върху нашия подход към съдържанието и метода на изучавания предмет". [64]

Също и А.И. Маркушевич пише следното по отношение на съдържанието на обучението: "Основният проблем, който се поставя над всички останали е проблемът за съдържанието на обучението: каква математика трябва да се засегне в курса по математика в средното училище и какво място трябва да заема в структурата на цялостния курс на обучението, на какво равнище на общност и задълбоченост трябва да се води обучението и накрая в светлината на какви функционални идеи трябва да бъде представена математиката пред учениците - всички тези въпроси нямат еднозначни отговори" [27].

Във връзка с обновяване съдържанието на обучението по математика в международен мащаб се очертават следните направления

1. Теоретико-множествено
2. Логическо
3. Въвеждане на някои понятия от модерната алгебра, особено групи, пръстени, полета и вектори.
4. Въвеждане на някои понятия от теория на вероятностите и математическата статистика.
5. Въвеждане на елементарни понятия от изчислителната математика.

Модернизацията на учебните програми по математика в Ирак започна от 1970 г. "Ирак прави големи крачки в промишлеността и това води неизбежно към въвеждането на модерната техника и впоследствие към използуването на новите теории в индустрията. Като първа крачка ние трябва да развием всички наши учебни програми. Първата стъпка от това развитие трябва да бъде в математиката. Ако искаме да напредваме и достигнем равнището на по-напредналите страни, трябва да въведем съвременната математика" [100] стр. 53.

Положението в Ирак до 1974 г. беше следното: новата програма се прилагаше в деветнадесет гимназии в Багдад. Тя ще влезе в сила за училищата в цял Ирак от 1975 г. Когато говорим за новата програма, в духа на модернизацията, ние имаме предвид трите учебника за X, XI и XII клас, в които тя намери своята първа реализация. Тези три учебника в дисертацията ще наричаме експериментални, а другите задължителни.

Темата на настоящата дисертация е част от проблемите на модернизацията на съдържанието и методите на обучението по математика в Ирак. Разработката на темата беше съпроводена с проучване на някои недостатъци в самото съдържание на обучението. В това отношение ние използувахме разнообразна чуждестранна литература. Прочетената литература и направените лични проучвания ни помогнаха да видим какво е направено досега в някои основни направления от областта на методиката на обучението по математика в Ирак и какво може да се направи, като се въвеждат елементи от математическата логика. Също така ще разгледаме и елементите от математическата логика, които са въведени в експерименталните учебници и критически ще ги преценим.

По-конкретно ще разгледаме логическото направление, което е съставна част на модернизацията. През втората половина на миналия век, във връзка с редица нови открития, възниква необходимостта от задълбочени и строги, научно обосновани доказателства за истинността на основните положения и правилността на умозаключенията в математиката. Налага се създаването и разработването на нова теория, със собствен изчислителен апарат - математическата логика. Това, че в математическата логика обект на изучаване са изказани от човека мисли, умозаключения и системи умозаключения, методи на доказателство, начини за установяване верността или неверността на твърдения, позволява със специфичните й средства да бъдат ясно и икономично изложени някои въпроси от елементарната математика, изучавани в училище, както и от висшата математика. И сега, когато на широк фронт се работи за модернизиране на училищния курс по математика, все по-често се поставя на обсъждане въпросът, какво място трябва да заемат елементите на математическата логика в общообразователното училище.

По този въпрос мненията са различни. Не малко математици смятат, че елементи от логиката не трябва да се въвеждат в училище. Обикновено техните аргументи са следните:

1. Да не се претрупват и без това много наситените учебни планове и програми.

2. Ползата е твърде съмнителна. Много учени - математици, физици, химици и др. превъзходно се справят със своята работа, без да знаят що е конюнкция, дизюнкция, импликация, квантори и др.

3. Вместо да се изучават задължително тези елементи, не е ли по-добре в извънкласна форма да се разгледат някои елементи от логиката.

На пръв поглед първото възражение изглежда логично, но то би било правилно само в случай, че между обема на учебния материал и времето, необходимо за неговото усвояване съществува право пропорционална зависимост. За щастие такава зависимост не съществува.

При изучаване на една наука решаващо значение има овладяването на ръководните идеи в нея, вникването в съществените ѝ черти. Веднъж усвоени, те дават възможност бързо да се ориентираме във всеки отделен случай. По такъв начин времето се изкупва с лихвите.

Към тези ръководни идеи в математиката на първо място трябва да се причисли идеята за дедуктивния метод. Според този метод "Във всяка математическа теория известен брой понятия трябва да бъдат приети за познати, дадени без дефиниция. Известен брой твърдения за понятия от теорията трябва да бъдат приети за истини без доказателство. Това са първичните понятия и аксиомите на теорията...всяко друго понятие от теорията трябва да се въведе с дефиниция, всяко друго твърдение в теорията трябва да бъде доказано". [34]

Не може да се говори за съзнателно навлизане в духа на съвременната математика, ако не се разбира нейната логическа структура, ролята на аксиомите и на доказателствата в нея.

За съжаление мнозинството от учениците в средното училище не разбират тези въпроси, в най-добрия случай само формално ги изучават както отбелязва И.С. Градштейн /"Права и обратна теорема"/. [12]

И досега Нашето средно училище не дава на учениците достатъчно теоретическо развитие в областта на математиката. В много случаи доказателствата на теоремите се заучават наготово от ученика без необходимото разбиране. Твърде неясно е представата на учениците за методите на математическото доказателство, за образуване отрицание на едно сложно съждение, за връзката между различните видове теореми, за смисъла и ролята на такива понятия като "необходимо и достатъчно","всички", "кой да е", "някои","съществува" и пр., които се срещат на всяка крачка в математиката.

Всъщност до голяма степен познаването смисъла на думите "и", "или", "следва","еквивалентност", подпомага учениците в извършването на разсъждения, използувани при различни определения и теореми. Обаче най-лошото в установената досега практика на обучението по математика и в писането на учебниците е, че често не се държи сметка за употребата на тези думи и не са редки случаите например, в които вместо "и", "или", "еквивалентност", се употребяват "т.е.", "оттук" и "запетая".

Понастоящем множеството от учениците в средното училище не разбират точния смисъл на словосъчетанието "Ако...то...", поради което не схващат правилно смисъла на условните твърдения. Съждението "Ако p, то q "обикновено се разбира от тях като "само ако p, то q ". У учениците не е формирано понятието логическа правилност. Те обикновено считат, че едно умозаключение е логически правилно, ако заключението му е вярно, и неправилно, ако заключението му е невярно.

О. Кенет пише: "Преобладаващата част от трудностите, които учениците изпитват по всички предмети, и специално по математика в горния курс са поради неясни или неопределени представи за импликация. За съжаление често учениците имат съвсем определена погрешна представа за нея" [67]

Много странен за учениците изглежда косвеният метод за доказване на теоремите, при които се използуват закони от логиката. В тези закони става дума за отрицание на дадено съждение, с което фактически те целенасочено не са запознати. Наистина в ежедневието понякога се използува установяването на верността на дадено съждение чрез установяването неверността на неговото отрицание, но в такива случаи обикновено се има предвид не самите съждения, а съответните ситуации, които се описват чрез съжденията. Освен това, тези случаи са много редки, а никъде в Иракската методическа литература не е посочено как да се използуват при работа в клас, нито пък в учебниците - задължителни и експериментални е направено нещо, за да се обоснове и изясни същността на косвения метод. Затова учениците обикновено не умеят да си служат с него, както и с други логически понятия. Затова през април 1973 г. подготвихме и изпратихме експериментален текст, който се състоеше от 12 въпроса. На тези въпроси трябваше да отговарят ученици от XII клас в две Багдадски гимназии. В експеримента участвуваха около 100 ученика.

Целта на експеримента бе да се изследва, до каква степен учениците разбират някои логически понятия, които всъщност са необходими за училищния курс по математика. Такива са например понятията: конюнкция, дизюнкция, импликация, съждителна функция, операции със съждителни функции, правила за извод "Модус поненс" и "Модус толенс". Тъй като всички тези понятия се използуват не напълно осъзнато в учебниците и искахме да проверим как именно при това положение те са усвоени.

Резултатите показват, че голяма част от учениците смесват съюзите "и" и "или", не могат да образуват отрицание на едно сложно съждение, не разбират смисъла на логическия съюз "или" - голяма част от тях считат, че съжденията $4 \leq 5$ и $4 \geq 4$ са неверни. Смесват правилото за извод mod. pon. със схемата $\dfrac{p \longrightarrow q,\ q}{p}$, която не е правило за извод. Смесват правилото за извод mod. tol. със схемата $\dfrac{p \longrightarrow q,\ \neg p}{\neg q}$, която не е правило за извод, въпреки че тези логически правила са от голямо значение при математическите доказателства.

Това още веднъж потвърждава правилността на разсъжденията на Алендерфер в [44], а именно:

"Намирам съществени несъгласия между математиците относно важността на изучаване на елементи на логиката в курса по математика. Едно възражение е, че не е нужно да се изучава логика, за да се знае /разбира/ математиката, ... лично аз не съм съгласен с този довод /аргумент/ и съм готов винаги да воювам срещу него. Вярно е, че елементарните разсъждения , нужни за математиката могат да се получат /проведат/ без упражняване в логиката, ако учащият се е достатъчно интелегентен. По-често обаче срещи учащи, които напълно объркват косвеното доказателство, не умеят да образуват отрицанието на дадено съждение, не разбират правилното използуване на контрапримерите. Почти винаги са достатъчни няколко дни обучение по елементарна логика, за да се оправят напълно нещата".

От друга страна във връзка с необходимостта от въвеждане на елементи от логиката в училищния курс се изтъкват следните доводи:

1. Усвояването на елементи от логиката се оказва ефективно средство за развиване на логическото мислене.

2. По този начин ще се осъществи сближаването на училищния курс по математика с науката математика.

3. Все по-широкото използуване апарата на математическата логика в най-различни други науки.

Колкото се отнася до 1. изучаването на математическата логика в средното училище ще даде силен тласък на развитие на логическото мислене на учениците - една винаги желана,но досега недостатъчно постигана цел.

Една от основните цели на обучението по математика е:

"Изграждане и развиване способността на ученика за правилно логическо мислене, а така също създаване на навици за различаване на логическите изводи,които се опират на логически обосновки от онези, които не се нуждаят от обосновки. Тази цел - считам, че е една от основните цели на обучението по математика, защото допринася за изграждането на гражданин, който чувствува отговорността си и е способен да решава проблемите, които налага животът, понеже изтъкването именно на тази цел създава в ученика способност да използува логиката при решаване на проблеми и развива в него способността да изпол:зува сравненията между близките становища и подобни ситуации при нови проблеми". [4] , стр. 17.

Всъщност една от главните цели на усвояването на някои логически понятия е въоръжаването на учениците със средство за самоконтрол на разсъжденията, които провеждат.

Винаги се е смятало, че математиката е "~~училище~~ учение", в което се изучава логиката в цялото й многообразие, но на практика се допускат сериозни слабости.

Най-сериозната слабост е, че досега на учениците не са давани необходимите логически понятия, като се е разчитало, че обучението по математика влияе автоматически върху развитието на логическото мислене. В действителност това влияние е твърде слабо. Нашето изследване показва това.

Друга слабост е липсата на система и последователност в работата по развитие на логическото мислене на учениците. Например ученикът не знае що е modus ponens и modus tolens или не умее да си служи с тези правила даже без да знае наименованията им, а ние искаме да разбира логическата същност на много по-сложни разсъждения, каквито са косвеното доказателство, метода на математическата индукция и др.

Трябва да отчетем като слабост и това, че за развитието на логическото мислене се залага главно и почти само на геометрията. Ван Инджен пише "Доказателството по традиция е пренебрегнато в алгебрата. Няколко доказателства в алгебра-за е желателно, защото разширява ученическата представа за възможността да се разбере факта, че доказателството е толкова важно в изучаването на алгебрата, колкото при изучаването на геометрията". [55]

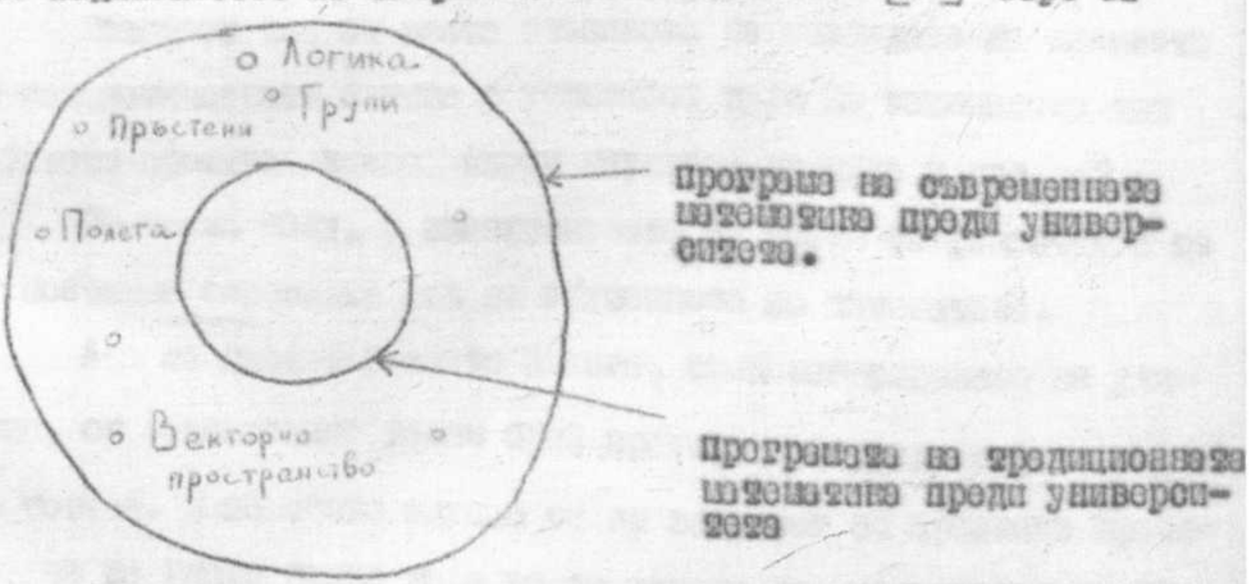
Д. Пойя счита, че ако ученикът не е успял да се запознае с геометричните доказателства, "то той ще пропусне най-добрите и най-прости примери на истинската убедителност, ще пропусне най-добрата възможност за усвояване на идеята за строго разсъждение." [35]

Също в предговора на иракския учебник [95] се счита, че "логическо-дедуктивният метод се вижда ясно в геометрията, повече отколкото в другите клонове на математиката". Но както сочи А.И. Маркушевич, последователният анализ на логическата структура на математиката убеди математиците, че "други математически дисциплини /и сред тях и алгебрата/ могат да служат с по-голям успех, отколкото геометрията, защото тяхната логическа структура е много по-проста и ясна". [28]

Колкото се отнася до втория довод за необходимостта от въвеждане на елементи от логиката Сорал пише: "Изложението на въпросите на съвременната математика се опира главно на правилата на символичната логика. Философът Ръсел показва в своята книга "Основи на математиката", че логиката и математиката са едно и също нещо. Опирането на математиката на логиката ѝ дава яснота на мислите и строгост на изразяването, а също така и кратък метод за изложение на математическите въпроси". [97]

Колкото се отнася до третия довод всъщност даването на знания на учениците от логиката ще облекчи изучаването на много други науки. Днес например символиката и терминологията на математическата логика се използуват във всички курсове по "Електронно сметачни машини и програмиране", в психологическите и педагогическите списания, в съвременната медицинска и биологическа литература и пр. "Учебните програми по математика трябва да отразят голямата революция, свързана с приложението на компютъра в науките, в технологията и в икономиката и т.н. За управлението на компютъра са нужни освен други специалисти и такива, които са усвоили елементи от логиката". [100] стр. 53.

Специалистите в Ирак, които се занимават с модернизация на обучението считат, че е необходимо да се въведат елементи от математическата логика в училищния курс по математика. Затова по време на семинара "Съвременната математика" в Багдад от 14 до 18 февруари 1973 г. д-р Ришон даде следната схема, в която показва, че "традиционната математика е същинско подмножество на съвременната математика" [100] стр. 41



Схемата показва, че логиката се включва в новата програма

Всъщност при разглеждането на решенията на математическите задачи в крайна сметка се опира до логиката. Наистина в решението на всяка задача се използуват различни съждения и операции с тях, а също и различни правила за извод, които са обекти на изучаване в логиката. Освен това описанието на различните дейности също се извършва чрез съждения, т.е. в знакова форма. Изобщо при решаването на математическите задачи ние оперираме със съждения или логически функции. За да можем успешно и с разбиране да правим това, необходимо е да имаме понятия от логиката. Именно затова по време на семинара по "съвременната математика" в Багдад от 14 до 18 февруари 1973 г., Д-р Римон се изказва, че "За да разбере смисъла на уравнението, ученикът трябва да изучи онази част от логиката, в която се разглеждат съжденията, логическите съюзи, кванторите, предикатите. Да се научи, че уравнението в областта на реалните числа не е нищо друго освен предикат в областта на реалните числа, съдържащ равенство". [100] стр. 40.

Всъщност кое от двете становища за въвеждане на елементи от математическата логика в училищния курс по математика или неговото противоположно търпи научната критика и кое не?

Очевидно това, с възприемането на което по-резултатно ще се постигне основната цел на обучението по математика.

Ако се постъпва както досега, след завършването на училище, от запомнените голям брой правила и формули почти нищо не остава. В повечето случаи те се забравят по простата причина, че на много малко хора не се налага да продължават да ги използуват в живота.

Ако се тръгне по вторият път, даже и да се забравят теоремите и формулите, учени в училище, остават математическият подход, опитът за разсъждение и математическия анализ, опитът за обобщение.

Експериментите, които са проведени в редица напреднали страни показват, че е целесъобразно елементи от математическата логика да се въведат в училищния курс по математика. По тук възникват следните въпроси: кои елементи трябва да бъдат въведени къде да бъдат въведени /на кое място/ и как да се разглеждат /от какъв аспект/. А.А. Столяр формулира тези въпроси накратко така: Какво? Къде? Как? [39]

В повечето страни по отношение на логическото направление в модернизацията на училищния курс по математика е направено или се прави нещо, но все още до единно становище по тези въпроси не се е стигнало. Често пъти мненията рязко се различават. Не липсват и опити за уеднаквяването им. По въпроса на кое място да се въведат и използуват елементи от математическата логика /въпросът къде? / най-разпространено е мнението – през целия курс.

На въпросите: "Какво?" и "Как?" в различните страни се отговаря различно, от там и известни различия при излагането на елементите от логиката и по-нататъшното им използуване. Може би най-правилен отговор на тези въпроси ще се даде:

1. Ако се проследи как се постъпва във връзка с обучението по логика на различни места по света.

2. Като се види при изясняването на кои въпроси от училищния курс по математика може да се използуват елементи от логиката, кои от тях се изясняват по-лесно и достъпно със средствата на логиката и по какъв начин.

В СССР повечето математици и педагози защитават становището, елементите от логиката да се въвеждат на различни места и то толкова, колкото да позволяват разглеждането на следващите ги въпроси в друга светлина. Така се поставя и в пробния учебник по алгебра за VIII клас /под редакцията на Маркушевич/. След като се отбелязва, че "съжденията", за които ще става дума, са разглеждани още в IV клас, се прави "въведение в алгебрата на съжденията". Въвеждат се операциите $\wedge, \vee, \neg$. Посочват се всички възможни случаи, при които горните съждения са верни или неверни. По този начин се появява нов елемент- верностни таблици. Прави се извод, че ако n е броят на изходните стълбове в таблицата на верност, то броят на редовете и е 2^n . След това се разглеждат "някои технически начини на моделиране" на логическите операции.

В СССР се обръща внимание и на друга важна страна на модернизацията. По поръчение на МС на СССР от Академията на педагогическите науки е разработена примерна програма, целяща самоподготовката на учителите. В нея са посочени и редица въпроси от математическата логика, с усвояването на които учителите да увеличават познанията си. В предговора се казва, че "учителят е длъжен да владее понятията от логиката в пълния им обем", макар че някои от тях /"конюнкция", "дизюнкция", "отрицание", "кванторите за общност и съществуване"/, се използуват в неявен вид. За учителите в последните класове се изисква по-задълбочена подготовка. В споменатата програма се предвижда от тях да бъдат овладени въпроси като:

1. Съдително смятане

Съждения. Таблично определяне на логическите връзки. Основни закони на логиката. Умозаключения. Правила за извод.

2. Предикатно смятане

Предикатът като логическа функция. Множества на верност. Логически операции над съждителни функции и теоретико-множествата им трактовка. Релациите "следване" и "еквивалентност". Кванторите за общност и за съществуване. Записване на изрази от обикновения език с помощта на съждителни функции. Логически връзки и квантори.

3. Аксиоматичен подход.

Понятия. Аксиоми и теореми. Математически доказателства. Непротиворечивост, независимост и пълнота на система аксиоми.

След като усвоят тези въпроси, учителите ще могат творчески да прилагат програмата по математика. Смята се, че тяхното овладяване "ще играе важна роля при прехода към новите програми и ще съдействува за общия подем на средното ниво на математическото образование".

Елементи от математическата логика се използуват при излагането на въпросите от училищната математика и в други страни.

Според Фехър [59], [58], Брандебург [49], Серве и Варга [75], някои от учебниците по математика в Белгия, Дания, Холандия, САЩ и ГФР също съдържат елементи от математическата логика.

За учениците на 15 години в Белгия и Швейцария /Женева/ нашироко се прилага следната програма: Съждения, съждителни функции, таблици на верност, квантори за общност и за съществуване. Отрицание на изрази, съдържащи квантори.

В Полша програмата за лицеите, както по алгебра, така и по геометрия съдържа много елементи от теорията на множествата и математическата логика. Те се разглеждат още в началото на 1 клас /IX клас/ и по този начин вече има установен определен език, който да се използува по-нататък в уроците по математика. В началото на II клас /X клас/, тези теми се повтарят. В специален раздел, озаглавен "Сведения от математическата логика и теорията на множествата", се разглеждат темите: Верни и неверни съждения, Съждителни форми /функции/ с една и много променливи, Уравненията и неравенствата като съждителни функции. Дизюнкция, конюнкция, отрицание, импликация и еквивалентност на съждителни функции. Основни примери на правила за извод: правило за отделянето, транзитивност на импликацията, контрапозиция, двойно отрицание, закон за противоречието, закон за изключеното трето /tertium non datur/, квантор за общност и квантор за съществуване, отрицание на кванторите. Тук се разглеждат и елементи от теория на множествата и в частност множество от елементи, удовлетворяващи дадена съждителна форма. /Множество на верност/.

Тези понятия от математическата логика свързват целия материал на училищната математика. Една от основните черти на новата програма, с която се изразява синтетичният ѝ характер се състои именно в това - в използуването в уроците по алгебра и геометрия езика на логиката.

В ЧССР са издадени пробни учебници /За преподаватели и ученици/ и сборници от задачи. Основният нов момент в тях се явява въвеждането на елементарни сведения от теорията на множествата и математическата логика и по-нататъшното им използуване.

Опитите, проведени във Франция показват, че е целесъобразно обучението по логика да се започне на около 12-годишно възраст с изучаването на показателни функции на една променлива. По-късно към 15-16 - годишна възраст става връщане към тези проблеми. Изучават се съждения, съдителни форми и операции с тях.

Някои от съвременните френски учебници за горния курс започват с уводна глава, в която се въвежда със средствата на математическата логика и теория на множествата един език, който се използва по-нататък при изясняване на въпросите от математиката. Прави впечатление заглавието на тези учебници - «Mathematiques». В тях въпросите от алгебрата и геометрията се разглеждат общо, на базата на обединяващите идеи от логиката и теорията на множествата. В зависимост от вида си, изучаваният материал е изложен тематично - по раздели.

В различните учебници даването на сведения от логиката се прави по различен начин. Да проследим например, как се постъпва в Mathematiques de 2e от G. Girard и A. Lentin-Paris-1960.

Съобразена с програмата от 1960 година, това е една сравнително стара книга, - от времето, когато тези идеи за пръв път се разглеждат. Тя започва с увод, озаглавен -"Малко от логиката" /Un Peu de Logique/. В него с примери се изяснява импликацията като се смесва с релацията "следва".

"Ако един четириъгълник е правоъгълник, то диагоналите му са равни."

Записваме:

$ABCD$ е правоъгълник $\Longrightarrow AC = BD$

$n \Longrightarrow t$ означава, че когато n е изпълнено /е вярно/ и t е вярно.

В релацията "следване" h се нарича предположение, а t заключение /теза/".

След това се дават примери на "най-прости дедуктивни разсъждения". Разяснява се правилото:

$$\frac{p \Longrightarrow q,\ p}{q}$$

Разгледаните предварително въпроси от теория на множествата дават възможност да се въведат кванторите:

— Квантор за общност «Le Cantificateur Universel»

$x \in A\ \forall x$, x притежава P /свойство/

$\forall$ се чете — "каквото и да бъде", "за всяко"

— Квантор за съществуване «Le Cantificateur Existensiel»

$x \in A\ \exists x$, x притежава P /свойство/

$\exists$ се чете "съществува" /поне един/

При по-нататъшно изложение на всички въпроси, в частност на уравненията и неравенствата се използуват въведените понятия, релациите " $\Longrightarrow$ " и " $\Longleftrightarrow$ " и кванторите за съществуване и за общност.

В по-новите френски учебници са навлезли и други идеи от съвременната математика. Използуват се "изображения", "релации", "групи" и др. Заедно с това при тях елементите от математическата логика продължават да играят голяма роля. Такъв е учебникът "Mathematique" от новата колекция на André Revuz.

Той започва с встъпление - "Въведение в речника на логиката". В началото е написано, че теориите и в частност математическите теории се изграждат с помощта на правила от логиката, като се използува един специален речник. Възниква необходимостта "да се прецизират речника и най-простите и найполезни правила от логиката". Това именно е направено в тази глава.

Разглеждат се:

<u>– съждения</u>

Дават се примери, освен от ежедневието, още и от математиката.

Например

$5 > 2$ – вярно съждение /vraie/

$\frac{3}{2} = 4$ – невярно съждение /fausse/

За по-голяма яснота се дават и контрапримери:

$x + 2 = 4$ не е съждение. Но когато x взема стойност 2, получава се $2 + 2 = 4$, което е вярно съждение, а когато x взема други стойности, получава се невярно съждение. Всичко това се прави още тук, за да се подготвят учениците за възприемането на уравненията като съдителни функции.

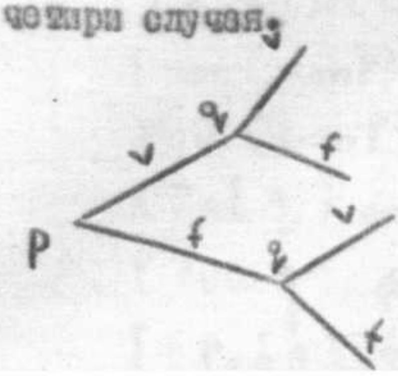
<u>– Верностни таблици</u>

Посочва се, че за всяко съждение има две възможности – да е вярно или не. Това се изразява с таблица.

P
v
f

или с граф

За две съждения p и q графът показва, че са възможни четири случая.



p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

Представянето на различните възможности за верностните стойности на p и q с графи води до естествено и нагледно достигане до формулата $N = 2^n$. /n -броят на съжденията, N - броят на възможните ситуации/.

По този начин се дава един универсален апарат, който по-нататък се използува при установяване на еквивалентности.

- Операции със съждения

1. Отрицание /Negation - non q /

Дават се дефиницията и верностната таблица на отрицанието. След това следват примери. По същия начин се постъпва и при изясняването на понятията:

2. Конюнкция /Conjonction - P et q /
3. Дизюнкция /Disjonction - P ou q /
4. Импликация /Implication - $p \Rightarrow q$ /

/Определя се и обратната импликация /Implication réciproque /

5. Равнозначност /Équivalence logique - $p \Leftrightarrow q$ /

Последната се дифинира като съждение, получено от p и q. $[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)]$

Построява се верностна таблица за равнозначността.

- Закони на логиката

Каквито и да са съжденията p, q, r следните съждения са верни:

. $[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

. $[\text{non}(\text{non} P)] \Leftrightarrow P$

. $P \text{ ou } (\text{non} P)$

. $(P \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$

. $(P \text{ ou } q) \Leftrightarrow (q \text{ ou } p)$

. $[(P \text{ et } q) \text{ et } r] \Leftrightarrow [p \text{ et } (q \text{ et } r)]$

. $[(p \text{ ou } q) \text{ ou } r] \Longleftrightarrow [p \text{ ou } (q \text{ ou } r)]$

. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\text{non} p) \text{ ou } q]$

. $(p \Longleftrightarrow q) \text{ et } (q \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r)$

. $(\text{non} (p \text{ et } q)) \Longleftrightarrow (\text{non} p) \text{ ou } (\text{non} q)$

. $(\text{non} (p \text{ ou } q)) \Longleftrightarrow (\text{non} p) \text{ et } (\text{non} q)$

. $(p \text{ et } (q \text{ ou } r)) \Longleftrightarrow (p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)$

. $(p \text{ ou } (q \text{ et } r) \Longleftrightarrow (p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)$

И така вече е налице един минимум от закони на логиката, които се използуват по-нататък.

След като се разгледат множествата и операциите с тях, се дават интересни примери, в които съждения, изразени с обикновени изречения се формулират математически. Така се показва връзката между $\subset, \complement, \cap, \cup$ и $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, et, ou, non

Следващ обект на разглеждане са кванторите - за общност и за съществуване.

Дават се примерите:

1. $(\forall x \in N)\quad x = x$
2. $(\forall x \in N)\quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
3. $(\forall (\vec{v}, \vec{v'}) \in V^2)\ \vec{v} + \vec{v'} = \vec{v'} + \vec{v}$
4. $(\exists x \in Z)\quad x + 3 = 2$
5. $(\forall M \in d)\quad (MA = MB) \Leftrightarrow (M$ е медиана на AB/

- Съдителни функции и предикати

Авторите дават примера:

«x е на 16 години» - променливата x представлява ученик от даден клас. Като се замества x с конкретен ученик, /със името му/, се получава вярно или невярно съждение. Това е съдителна функция/форма/ .

С въвеждането на съдителните функции /форми/ вече всичко е подготвено за разглеждане на уравненията и неравенствата. В този учебник те се разглеждат именно по този начин – като съждителни функции.

От посочените примери се вижда, че елементи от математичната логика са навлезли в училищния курс по математика и във Франция.

Във връзка с въвеждането на елементи от математическата логика в различните страни Бойер пише: "Характерно за повечето от учебниците написани за училищния курс по математика през последните петнадесет години е:

1. Болшинството от тях съдържат раздели с начални познания по математическа логика.

2. Същността на раздела по логиката е разясняване на дедуктивния метод на разсъждение с помощта на необходимия апарат, а именно: Силогизми, диаграми на Вен, съждение, отрицание, конюнкция, дизюнкция, импликация, еквивалентност, вярност и невярност на съждения, правила за извод и други свързани с тях термини.

3. Верностни таблици се използуват, за да се дефинират или характеризират понятията: отрицание, конюнкция, дизюнкция, импликация, равнозначност, и по-късно за да се установяват верностни стойности на по-сложни съждения.

4. Верностните таблици рядко се използуват, за да се установява валидността на правила за извод" [47]

Различните аспекти на въпроса за въвеждане на елементи от математическата логика в училищния курс по математика са обект на изследване в дисертационни трудове в различни страни. Такива са: Дисертацията на А.А. Столяр, СССР, 1969 г. – "Логически проблеми на преподаването на математиката", на Бранстон, САЩ, 1973 г. - "Ефекта на обучението по символната логика върху развиване на способността за логическо мислене у учениците в средното училище", на Смит, САЩ, 1974 г. - "Използването на символична логика като инструмент в преподаването на геометрията в средното училище".

Досук подчертахме главно необходимостта от запознаване на учениците в средното училище с някои основни понятия и въпроси от математическата логика.

Като имаме предвид казаното, бихме могли да формулираме накратко основната цел на дисертацията по следния начин:

Изследване усъвършенствуването на методите и съдържанието на обучението по математика в Иракското средно училище въз основа на някои понятия от математическата логика.

От този общ проблем в дисертацията е направен опит да се разработят следните въпроси:

1. Изясняване на някои въпроси от училищния курс по математика като се използват елементи от логиката. Уточняване мястото и ролята на някои понятия и символиката на математическата логика, необходими за повишаване ефективността на обучението по математика в средното училище и разработването на някои учебни материали за запознаване на учениците с тези понятия.

2. Критическо преценяване на елементите от логиката, които са въведени в експерименталните учебници с цел да могат да играят по-ефикасна роля в процеса на модернизация на учебните програми по математика в Ирак.

Постигането на поставените цели се основава на проучването на обширна литература по математика, логика, психология и методика, на опита ни в преподаването на математика в средното училище.

В работата си ние използувахме следните методи на изследване :

Теоретично обобщение, наблюдение, експериментална работа, анализ на проведения експеримент и сравняване ефективността на предлагани от нас методи с традиционните методи.

ГЛАВА ПЪРВА

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЗАДЪЛЖИТЕЛНИТЕ УЧЕБНИЦИ ПО МАТЕМАТИКА ОТ VII ДО XII КЛАС НА ИРАКСКИТЕ УЧИЛИЩА ОТНОСНО ПРОБЛЕМА КАК СЕ ОТРАЗЯВА ЛИПСАТА НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЛОГИКА ВЪРХУ КАЧЕСТВАТА НА СЪДЪРЖАНИЕТО ИМ

Учебниците са от голямо значение при осъществяването на една от целите на обучението по математика. Именно учениците да се научат да разсъждават правилно.

Учителите и учениците смятат, че всичко, което е написано в учебниците е вярно. Учителите обикновено повтарят това, което е дадено в учебника. Учениците подготвят уроците си от учебниците.

Именно затова, ако в учебниците има нещо неправилно написано, то учениците ще научат неправилно съответния материал, няма да го разберат и усвоят. Затова всичко в учебниците трябва да бъде прецизно.

В иракските учебници за средните училища, по които се води задължително обучение по математика, не се използуват символи и понятия от математическата логика.

Ние си поставихме за цел да изследваме тези учебници относно техните недостатъци, които биха били лесно преодолими, ако са въведени известни елементи от математическата логика. Ние ще посочим тези недостатъци, ще изложим и наши предложения за преподаване на засегнатия материал, чиито мнения ще подкрепиме и с цитати от изтъкнати деятели по въпросите на образованието по математика в средните училища.

1. У Р А В Н Е Н И Я

Въпросите, свързани с уравненията, са едни от тези, които се изучават задълбочено в средните училища и те заемат основно място в учебните програми по математика. Голяма роля за развиване на логическото мислене на учениците и за свързване на теорията с практиката играят задачите, които се решават с помощта на уравнения. Затова във всеки учебник по алгебра им се дава значително място.

а/Определение на понятието уравнение.

В осма глава на учебника по алгебра за VIII клас на стр. 93 се дава следната дефиниция за уравнение.

"Уравнението е равенство на два алгебрични израза, следователно $3x = 6$, $x^2 + 6 = 5x$, и $x^3 - 19x + 3 = 0$ са уравнения"

След това се пише:

"Всяко уравнение има едно неизвестно. Уравнението $3x = 6$ е вярно, ако $x = 2$ и не е вярно за всяка друга стойност".

Уравнението не може да бъде вярно или невярно, а може да бъде вярно или невярно съждение, което се получава, като заместим неизвестното с конкретно число.

Като се използуват някои понятия от математическата логика, е възможно уравнението да се разглежда в друга светлина - като съдителна форма или /съдителна функция/. Така се разглежда то например в съветския учебник за IV-ти клас. За целта обаче е необходимо:

1. Да се познават понятията: вярно съждение и невярно съждение.

2. Да се познават понятията произволна и съждителна форма /"понякога вярно, понякога невярно"/.

Всички тези понятия трябва да се изясняват на учениците първо с помощта на примери от живота, а след това да се преминава към примери от математиката. При това примерите трябва да се подбрани така, че да улесняват въвеждането на уравнението като съждителна функция /форма/. За да се осъществи това, може да се постъпи така, както е направено в [16]:

„С помощта на разнообразни примери се изяснява, че съждението е мисъл, в която се твърди или отрича нещо. То или е вярно, или е невярно. За да се достигне до това определение, на учениците трябва да се дадат както примери, така и контрапримери за съждения:

2 + 3 = 5	x + 3 = 5
3>5	x>5
3 е четно число	x е четно число.
Нютон е велик математик и физик	Излез от стаята!
Китът е риба	Колко точки определят окръжността?
Три не е по-голямо от пет	Утре ще вали дъжд.

След това трябва да се въведе символично означение на съжденията и на верностните им стойности.

Трябва изрично да се натъкне, че съждителното смятане не се интересува от конкретното съдържание на съжденията, а само от тяхната истинност или неистинност. За всяко съждение е важно да се знае само дали е вярно или не е вярно. Например съжденията "2 + 3 = 5 ", "Китът е бозайник", "Тебеширът е бял", се разглеждат като неразлични. И на трите може да се припише една и съща стойност 1. На учениците трябва да се обясни, че ако не се абстрахират от обстоятелството, че в едно съждение става дума за число, в другото - за животно, в третото - за вещество и пр. съждителното смятане не би могло да изучи своя предмет.

Добре е да се обърне внимание, че случаят е аналогичен на геометрията: Ако геометрията не се абстрахира от това, че динята е сладка, гюллето - тежко, земното кълбо - голямо и пр. тя никога не би могла да изучи формата на тези тела.

Характерен признак на предиката е наличието в него на индивидни променливи. Затова главна задача тук е да се формира правилно понятието променлива, като празно място, на което могат да се поставят имена на конкретни елементи от определено множество. И като се прави това, се получава при някои стойности на променливата верни съждения, а при други - неверни. Учениците следва да разберат, че ролята на Х, на празното квадратче и на многоточието в записванията

$$X + 2 = 3 \quad \square + 2 = 3, \quad \ldots + 2 = 3$$

е една и съща.

По същество учениците познават понятието променлива от алгебрата, макар че не са чували този термин. Така, когато в алгебрата се говори за числото а, име се предвид не някакво определено число, а кое да е число от някакво числово множество, т.е. числова променлива. Тук понятието променлива се разширява. Освен числови променливи се въвеждат индивидни променливи.

Необходимо е специално да се отбележи, че уравненията и неравенствата са съждителни функции, а тъждествата са съждения.

Нужно е да се обърне внимание на учениците, че в предишните можем да заместваме променливите само със съществителни имена от множеството на допустими стойности. В противен случай се получават безсмислици. Учениците лесно виждат безсмислието на изрази от рода на "Петър е четно число", "1о е по-широко от Ефрат", но не могат да видят безсмислието на изрази от рода на "$\frac{4}{0} = 9$", "$\sqrt{-3} = 2$" и пр. Трябва да се убедят, че последните изрази са също така безсмислени, както и първите.

Да се знае що е уравнение е важно. Да се знае какво значи да се реши едно уравнение е по-важно, но най-важно е уравненията да могат да се решават и то без грешки. Оказва се, че в тази насока задълбоченото познаване на релациите следва и еквивалентност /"$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$"/е от съществена полза.

Използуването на знаците "$\Rightarrow$" и "$\Leftrightarrow$" при решаване на уравнения, ще кара учениците да се замислят на всяка стъпка. Новополученото уравнение еквивалентно ли е или следствие на предходното? С цел да се затвърдяват теоремите за равносилност и да се избегне формалното поставяне на "$\Rightarrow$" и "$\Leftrightarrow$", добре би било в началото те да се обосноват.

На същото мнение са и много други автори, например Холман пише:

"Структурата на алгебричните доказателства често може да бъде по очевидна чрез използуването на знаци, за да се изрази еквивалентността на две съждения или факта, че едно съждение импликира друго. Ние ще използуваме знака "$\Rightarrow$" за означаване на "импликира" ..... и "$\Leftrightarrow$". За означаване на "еквивалентно на"." [62]

Ще разгледаме един пример, от който се вижда как при решаване на квадратни уравнения чрез разлагане на множители могат да се използват символите "$\Rightarrow$" и "$\Leftrightarrow$".

1 $x \in R_1 \exists x ? \ /x-5/ \ /x+7/ = 0$

$\Updownarrow$ Тн. 4

2 $x \in R_1, \ \exists x ? \ /x-5=0/ \ \ /x+7=0/$

$\Updownarrow$ Тн.1, Тн.2

3 $x \in R_1, \ \exists x ? \ /x=5/ \vee /x=-7/$

$M_3 = \{5, -7\} \cap R_1 = \{5, -7\}$

$M_1 = M_3 = \{5, -7\}$ От. $M_1 = \{5, -7\}$

Т.е. уравнението 1 се решава като:

1/ от 1 се получава 2 /2 $\Leftrightarrow$ 1 по Тн. 4/

11/ от 2 се получава 3 /3 $\Leftrightarrow$ 2 по Тн. 1 и Тн. 2/

111/ $/3 \Leftrightarrow 2/ \wedge /2 \Leftrightarrow 1/ \Rightarrow /3 \Leftrightarrow 1/$

Множеството на вярност M_3 на 3 ние знаем и понеже 3 и 1 по дефиницията за еквивалентни уравнения $M_1 = M_3$. /С M_1 и M_3 са означени множествата на вярност на съдителните функции 1 и 3, т.е. множеството от корените на уравненията 1 и 3/

С този начин добре се изяснява въпросът за придобитите корени. Ясно е, че "проверка" се прави, ако при решаването на дадено уравнение се достигне до уравнение, което е негово следствие.

б/Теореми за еквивалентност и теореми за следствие при уравненията

Необходимата теория за решаване на уравнения от първа степен в учебника "Математика" за VII клас, се дава в темата: "основни аксиоми". Там пише:

АКСИОМА ПЪРВА: Ако към двете страни в равенството на едно уравнение се прибави едно и също число, получава се уравнение, което е еквивалентно на оригиналното.

АКСИОМА ВТОРА: Ако от двете страни в равенството на едно уравнение се извади едно и също число, получава се уравнение, което е еквивалентно на оригиналното.

АКСИОМА ТРЕТА: Ако двете страни в равенството на едно уравнение умножим с едно и също число /различно от нула/, то се получава уравнение, което е еквивалентно на оригиналното.

АКСИОМА ЧЕТВЪРТА: Ако двете страни в равенството на едно уравнение разделим на едно и също число /различно от нула/, то се получава уравнение, което е еквивалентно на оригиналното.

Даването на втората и четвъртата аксиома е излишно, понеже те се включват съответно в първата и третата аксиома. Би било по-добре, ако например след третата аксиома се подчертае, че третата аксиома важи и ако умножаването с число се замени с деление на число. Наистина при число a различно от нула да се раздели на a е все едно да се умножи с $\frac{1}{a}$.

В учебника "Алгебра за XI клас" се решават уравнения, съдържащи квадратни корени. Там при решаването им трябва да се вдигнат двете страни на уравнението на квадрат. В учебника се подчертава, че след решаването на всяко такова уравнение трябва да се прави проверка, обаче не е казано защо и не е дадена съответната теорема.

Ще изложим нашето мнение как, като се използуват елементи от математическата логика, кратко и просто може да се изложат теоремите, които се използуват в средните училища при решаване на уравнения с 1 неизвестно:

Дефиниция 1:

ДВЕ УРАВНЕНИЯ

$$f_1/x/ = f_2/x/$$

и

$$\varphi_1/x/ = \varphi_2/x/$$

определени в едно и също множество М
се наричат равносилни /еквивалентни/ в М,
ако за всяко $x \in M$ от тях се получават еквивалентни съждения.

В тази дефиниция се включва и случаят, когато уравненията нямат решения в числовото множество M, защото две съждения са еквивалентни тогава и само тогава, когато са едновременно верни или едновременно неверни.

Едно уравнение определено в множество M се нарича еквивалентно на дизюнкция /конюнкция/ от две уравнения определена в същото множество M, ако за всяко $x \in M$ от уравнението и от дизюнкцията /конюнкцията/ се получават еквивалентни съждения.

Дефиниция 2

Уравнението $f_1/x/ = f_2/x/$ се нарича следствие на уравнението: $F_1/x/ = F_2/x/$ в множеството M, ако за всяко $x \in M$ $f_1/x/ = f_2/x/$ и $F_1/x/ = F_2/x/$ се превръщат в съждения, от които първото е следствие от второто.

Използуват се и свойства на числовите равенства, които след въвеждането на елементи от логиката изглеждат така:

1. $/a = b/ \wedge c$ – произволно число $\Leftrightarrow a + c = b + c$
2. $/a = b/ \wedge c \neq 0 \Leftrightarrow ac = bc$
3. $/ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
4. $/a = b \Rightarrow a^2 = b^2$

Можем да докажем следните теореми:

Теорема 1

Ако към двете страни на уравнението:

1. $x \in M, \exists x ? \quad f_1/x/ = f_2/x/$

се прибави една функция $\varphi/x/$, определена в M, се получава уравнението

2. $x \in M \quad \exists x ? \quad f_1/x/ + \varphi/x/ = f_2/x/ + \varphi/x/$,

което е еквивалентно на първото

Доказателство

Според дефиницията за еквивалентност на съдителни функции е достатъчно да покажем, че за произволно $xo \in M$, от 1 и 2 се получават еквивалентни съждения.

И наистина, като заместим x в 1 и 2 с Xo, получаваме:

3 $\quad f_1/Xo/ = f_2/xo/$

4 $\quad f_1/Xo/ + \varphi/Xo/ = f_2/Xo/ + \varphi/Xo/$

3 и 4 са еквивалентни според свойство1на числовите равенства. С това теоремата е доказана.

Теорема 2

Ако двете страни на уравнението

5 $x \in M, \exists x ? \quad f_1/x/ = f_2/x/$

умножим с една и съща функция $\varphi/x/$, която е определена в M и отлична от 0, получава се уравнението.

6 $x \in M, \exists x ? \quad f_1/x/ \ \varphi/x/ = f_2/x/ \ \varphi/x/$, което е равносилно на даденото.

Доказателство

Според дефиницията за еквивалентност на уравнения е достатъчно да покажем, че за произволно число $Xo \in M$, от 5 и 6 се получават еквивалентни съждения.

И наистина, като заместим x в 5 и 6 с Xo получаваме:

7 $f_1/Xo/ = f_2/Xo/$

8 $f_1/Xo/ \; \varphi /Xo/ = f_2/Xo/ \; \varphi/Xo/$

7 и 8 са еквивалентни според 2 свойство на числовите равенства. С това теоремата е доказана.

Теорема 3

Ако повдигнем на квадрат двете страни на дадено уравнение

/9/ $x \in M$, $\exists x$? $f_1/x/ = f_2/x/$

получава се уравнението

/10/ $x \in M$, $\exists x$? $[f_1/x/]^2 = [f_2/x/]^2$

което е следствие на 9

Доказателство

Нека $Xo \in M$. Като заместим в уравненията 9 и 10 x с Xo, получават се съответно съжденията

$f_1/Xo/ = f_2/Xo/$ и $[f_1/Xo/]^2 = [f_2/Xo/]^2$

Според свойство 4 на числовите равенства, в сила е следното

$(f_1/Xo/ = f_2/Xo/) \Rightarrow ([f_1/Xo/]^2 = [f_2/Xo/]^2)$

Следователно за всяко $x \in M$, от $f_1/x/ = f_2/x/$ и $[f_1/x/]^2 = [f_2/x/]^2$ се получават такива съждения, че от първото следва второто. Това според определението за следствие на едно уравнение от друго, означава, че 10 е следствие на 9, или, че от 9 следва 10.

Теорема 4

Уравнението

11. $x \in M$ $\exists x$? $f_1/x/ \cdot f_2/x/ = 0$ и дизюнкцията

12. $x \in M$ $\exists x$? $f_1/x/ = 0 \vee f_2/x/ = 0$

са еквивалентни.

Доказателство

Според дефиницията за еквивалентност на съдителни функции е достатъчно да покажем, че за произволно $X_0 \in M$ се получават еквивалентни съждения.

И наистина, като заместим x в 11 и 12 с Xo получаваме:

13. $f_1/X_0/ \cdot f_2/X_0/ = 0$

14 $(f_1/X_0/ = 0) \vee (f_2/X_0/ = 0/)$

13 и 14 са еквивалентни според свойство 3 на числовите равенства. С това е доказана теоремата.

Всъщност много е важна тази теорема, понеже в сегашните учебници се разглежда специален въпрос - решаване на квадратното уравнение чрез разлагане на множители, който изцяло се основава на нея

$$(a/\ x - x_1/ /x - x_2/ = 0) \wedge /a \neq 0/ \Leftrightarrow (/x - x_1/\ /x-x_2/ = 0) \wedge /a \neq 0/ \overset{\text{тн. 4}}{\Longleftrightarrow} (/x - x_1 = 0/ \vee /x-x_2/ = 0) \wedge /a \neq 0/$$

Изобщо тази теорема се прилага при решаване на уравнения от вида:

$x \in M\ \exists x?\ F_1/x/ \cdot F_2/x/ \cdot \ldots \ldots F_n/x/ = 0$

в/Относно поставянето на задачата за решаване на уравнения.

Типично за сегашните учебници по елементарна алгебра е предписанието

"Да се реши уравнението..."

НАПРИМЕР: Да се реши уравнението $3x + 7 = 10$

Съществуват поне два различни начина за разглеждане на тази задача. Единият от тях интерпретира предписанието "Да се реши уравнението", като преобразуване на даденото уравнение чрез използуване на известните алгебрични правила в уравнение от вида x = a число".

По този начин горната задача е решена, ако с преобразувания е получено уравнението "x = 1".

Друга възможност е да се разгледа задачата така: Да се намерят всички корени на уравнението, което означава: Да се намерят всички стойности на x, които удовлетворяват уравнението. Тогава задачата е решена сполучливо, ако се открие, че 1 е единствената такава стойност.

Ако първата интерпретация се желае, задачата трябва да се каже по съответен начин. Например така:

Да се намери уравнение, еквивалентно на "3x + 7 = 10" от вида "x = a, където a е константа".

Еквивалентността на уравненията, разбира се, трябва да бъде обоснована.

Ако втората интерпретация се желае, задачата може да се формулира така:

"Да се намерят всички решения /или корени/ на 3x + 7 =10" /"Решение" или "корен" трябва да се разбират като стойност на x, която удовлетворява уравнението, т.е. като заместим x с нея, да се получава вярно съждение./

Предписанието: "да се реши система уравнение..." има същата двусмисленост както при едно уравнение с едно неизвестно.

При решаването на уравненията във всичките сегашни учебници, например, алгебра за VIII, IX и XI клас, се срещат логически грешки, например, в учебника Алгебра за VIII клас стр. 99, като се решава уравнението.

$/x-3/ /x-5/ = x^2 + 7$, се пише:

"$x = 1$ е корен на уравнението"

В същия учебник на стр. 120 при решаването на системата уравнения:

$$12x + 5y = 5$$
$$9x + 4y = 2$$

се пише: "Коренът на уравнението е $x = 4$, $y = 2$".

Като се пише например: "Корените на уравнението
$x^2 - 5x + 6 = 0$ са
$x = 3$ и $x = 2$" ..../1/

се правят следните две грешки:

ПЪРВО: Коренът на уравнението е число, а не друго уравнение или съждителна функция. Корените могат да са 3 и 2, но не са $x = 3$ и $x = 2$.

ВТОРО: Твърдението "$x = 3$ и $x = 2$" е невярно, защото за никоя стойност на x не е вярна конюнкцията $x = 3$ и $x = 2$". Разбира се, когато се пише "$x = 3$ и $x = 4$", се има предвид, че 3 и 2 са стойности на x, които удовлетворяват уравнението $x^2 - 5x + 6 = 0$. Щом много лесно може да се носи същата информация чрез вярно твърдение, твърденията като 1 трябва да се избягват.

В учебника по алгебра за IX клас, решаването на квадратните уравнения чрез разлагане на множители, се основава само на следното твърдение, дадено на стр. 60:

"Ако произведението на два /или повече/ множители е равно на нула, то поне един от множителите е 0".

При това положение всяко решение на едно такова уравнение няма да бъде пълно, без да се прави проверка. За да не се прави проверка трябва да се даде и обратното твърдение: "Произведението от няколко множителя е равно на нула, ако поне един от множителите е 0". Обаче в споменатия учебник не се прави такава проверка.

2. Т ъ ж д е с т в о

В учебника "Математика" за VII клас тъждествата се разглеждат като подтема на отдела уравнения. Там се пише: "Ясно е, че $5x = 5x$ е релация, която е вярна за всички стойности на x. Затова няма смисъл да решаваме уравнението $5x = 5x$. Тази релация се нарича тъждество и затова следните релации са тъждества:

$7x - 4x = 2x + x$, $(5 + x)x = 5x + x^2$, $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$"

В същия учебник не се говори нищо за тъждествата, които съдържат повече от една променлива. И не се дават следните важни и необходими тъждества, които опростяват тъждествените преобразувания.

1. Повдигане на сбор и разлика в квадрат:

$(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$

2. Повдигане на сбор и разлика в куб.

$(u \pm v)^3 = u^3 \pm 3u^2v + 3uv^2 \pm v^3$

3. Произведение на сбор и разлика:

$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$

4. $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$

5. $(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$

Даденото обяснение на понятието тъждество има следните недостатъци:

1. Използва се понятието релация, което не е обяснено.

2. Прави се опит да се свърже понятието тъждество с понятието уравнение, което както се вижда не е сполучливо.

Правилно е според нас, ако не се разполага с елементи от математическата логика да се даде следната дефиниция: "Два израза се наричат тъждествено равни, ако за всички едни и същи стойности на променливите, съответните им числени стойности са равни. Когато два тъждествени израза са свързани със знак равно, полученото равенство /запис /се нарича тъждество".

Разглеждането на понятието тъждество по дадения в учебника начин води учениците до една от типичните грешки, която е свързана с това понятие - не разбират разликата между уравнение и тъждество.

По този повод В.Г. Болтянский пише:

"....често учителите питат

$$x + 2 = 2 + x$$

уравнение ли е или не? Мисля, че въпросът е неправилно поставен. Самата дума "уравнение" показва нашето отношение към дадено равенство. Ако искаме да го наречем уравнение, то значи ние се интересуваме кои са неговите корени и тогава отговорът изглежда така: "Всяко число е корен на това уравнение". Ако пък искаме да кажем, че равенството $x + 2 = 2+x$ се явява тъждество, то това също означава нашето отношение към това равенство: ние искаме да подчертаем, че това равенство е вярно за всички число, т.е. за произволно значение на х. И така думите "уравнение" или "тъждество" показват нашето отношение към написаното равенство." [1]

Ю.А. Шихванович пише: "Равенството $x/ = B /x/$, съдързащо /макар и от една страна /x, ние ще го наречем уравнение /относно x или с едно неизвестно/, ако трябва да намерим такива значения на променливото x, които го превръщат във вярно числово равенство. Да разбираме това буквално така, както е написано:

Равенството $U/x/ = B/x/$ се явява или не се явява уравнение в зависимост от това дали се изисква или не се изисква да се намерят горе посочените стойности на променливата x. Ако някой /преподавател, задочник, вие самите читатели /постави задача "Да намерим такива стойности на променливата x, че...", равенството $U/x/ = B/x/$ се явява /докато вие решавате поставената задача/ уравнение. В противен случай не е уравнение. Уравнението представлява, така да се каже "въпросително математическо предложение". " [43]

Разликата между уравнение и тъждество, най-добре се изразява, като се използват знаците "$\forall$ " и "$\exists$ ". Това например е направено в посочения вече учебник на G. Girard и A. Lentin така

$x \in M\ \exists_x ?\ f/x/ = g/x/$ – общ вид на уравнение
$x \in M\ \forall_x\ f/x/ = g/x/$ – общ вид на тъждество

Ето един пример от тази книга:

"Ако a и b са цели /или други числа/, то числата $/a+b/^2$ и $a^2 + 2ab + b^2$ са равни. Това се записва:

$\forall_a \forall_b\ /a+b/^2 = a^2 + 2ab + b^2$ "

Типична слабост, която се допуска при изучаването на тъждествата в средните ираксни училища е, че учениците не умеят да доказват такива. По-точно, извършват доказателството формално, "само в една посока".

Пример: Да се докаже, че за всяко $a \in R$

$a\,/a + 1/\;/a + 2/\;/a + 3/ + 1 = /a^2 + 3a + 1/^2 \qquad q$

Често пъти учениците постъпват така:

От $a/a + 1/\;/a + 2/\;/a + 3/ + 1 = /a^2 + 3a + 1/^2$ последователно получават

$a/a+1/\;/a + 2/\;/a + 3/ = /a^2 + 3a + 1/^2 - 1 \qquad P_3$

$a\,/a + 1/\;/a + 2/\;/a + 3/ = \left(/a^2+3a + 1/ + 1\right)\left(/a^2 + 3a + 1/ - 1\right) \qquad P_2$

$a\,/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a^2+3a + 2/a\;\;/a + 3/ \qquad P_1$

Тъй като $a^2 + 3a + 2 = /a+1/\;/a+2/$, то

$a\,/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a + 1/\;/a+ 2/\;a\,/a + 3/ \qquad P$

И до тук спират. Очевидно такова доказателство не е приемливо, защото при него фактически се използува като правило за извод схемата

$$\frac{q \to P_3,\ P_3 \to P_2,\ P_2 \to P_1,\ P_1 \to P}{P}$$

, която не е правило за извод, а след това и правило за извод

$$\frac{P \to q}{q}\,,\ p$$

Ако тъждествата се разглеждат като съждения, то значи, че за тях са в сила и релациите за съждения. Тогава доказателството на горното тъждество може да се запише така:

Доказателство

1\. $/\forall a \in R\;/ a\,/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ + 1 = /a^2+3a+1/^2$

$\Updownarrow$

2\. $/\forall a \in R\;/a\,/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a^2+3a + 1/^2 - 1$

$\Updownarrow$

3\. $/\forall a \in R\;/a\,/\;/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a^2+3a+1+1/\;/a^2+3a+1-1/$

$\Updownarrow$

4\. $/\forall a \in R\;/a/\;/a + 1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a^2+3a+2/\;a\,/a + 3/$

$\Updownarrow$

5\. $/\forall a \in R/\;a\,/a+1/\;/a+2/\;/a+3/ = /a^2 + 3a + 2/\;a\,/a+3/ \wedge$

$$\wedge /\forall a \in R/\ \underbrace{a^2 + 3a + 2 = /a+1/\ \ /a+2/}_{\text{вярно съждение}}$$

6. $/\forall a \in R/\ a\ /a+1/\ /a+2/\ /a+3/ = a\ /a+1/\ /a+2/\ /a+3/$

тъй като 6 е вярно съждение, то и еквивалентното на него съждение 1 е вярно.

Ако не се разполага с релацията "$\Longleftrightarrow$", то би трябвало разсъжденията да се запишат така:

Ако е вярно 1 вярно е 2 и обратно ако е вярно 2, вярно е 1.
Ако е вярно 2 вярно е 3 и обратно ако е вярно 3, вярно е 2.
Ако е вярно 3 вярно е 4 и обратно ако е вярно 4, вярно е 3.
Ако е вярно 4 вярно е 5 и обратно ако е вярно 5, вярно е 4.
Ако е вярно 5 вярно е 6 и обратно,ако е вярно 6, вярно е 5.

Ясно се вижда, че със символа "$\Longleftrightarrow$" всичко това се записва кратко.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИ ДОКАЗАТЕЛСТВА

а/Относно начина за формулиране на теоремите

Във всичките доказателства на теоремите в Иранските учебници за средните училища се използува формата:

"Дадено е:.....

Да се докаже, ..."

Ние споделяме мнението на А.Смит относно недостатъците на тази форма, използуването на която води до сериозни недоразумения в един важен момент на обучението по математика.

Смит в [8] като анализира тази форма, пише:

"Всъщност използуването на тази форма не само, че не изразява точния смисъл на теоремите, а и логически неиздържано." Това е така, заради следното:

1. Когато доказваме една теорема, ние всъщност само доказваме: $p \to q$, а не доказваме q. Например в теоремата, "Ако в $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, то $\angle A = \angle C$", ние не можем да докажем "$\angle A = \angle C$". Само от постулатите на геометрията. Ние доказваме "Ако $\triangle ABC$ ....,то ....". От алгебрата можем да дадем следния пример: Нека се иска да се докаже следната проста теорема: "Ако $2x + 3 = 11$, то $x = 4$". От формата: "Дадено е, да се докаже" се получава следното:

Дадено е: $2x + 3 = 11$

Да се докаже: $x = 4$

Тук също забелязваме, че не можем да докажем "$x = 4$" само от постулатите на алгебрата. Ние можем само да докажем, "ако $2x + 3 = 11$, то $x = 4$".

Нека наречем тази теорема като $p \to q$.

Когато пише доказателството на теоремата, ученикът започва от съждението p и намира последователност от твърдения, които му дават възможност да получи твърдението q. Като прави това, ученикът заключава, че $p \to q$ е вярно. За случая твърдим: $/2x + 3 = 11/ \to x = 4$

Доказателство: По условие имаме $2x + 3 = 11$. Това предполага $2x = 8$ по теорема 1 за еквивалентност на уравнения. Най-сетне от теорема 2 за умножаване на уравнения се получава $x = 4$. Следователно:

Ако $2x + 3 = 11$, то $x = 4$

Базата за валидност на такава обосновка може да се намери в теоремата на дедукцията, която е доказана, общо, от ALFRED TARSKI, в 1929 г.

За нещастие поради формата "Дадено е, да се докаже", някои ученици мислят, че обосновката, която е спомената горе, им дава възможност да твърдят, че е вярно q. Обаче положението, не е това. Обосновката дава право да се твърди верността на $p \rightarrow q$.

Следователно един очебиен дефект на формата "Дадено е, да се докаже" е, че кара ученикът да мисли, че той е доказал нещо, което не е доказал.

2. Другият дефект е, че истинската същност на изходното съждение на теоремата е скрита. Когато учениците мислят за "Дадено е", ще свикват да мислят за изходните съждения като факти или като верни твърдения. Рядко разбират, че това, което се нарича "Дадено е" и , което е част от теоремата, е предположение. Макар че изходните съждения и аксиомите са предположения, но те са от различен характер. Изходното съждение е употребено в доказателството като нещо, което е временно предполагано само в дадената теорема. Докато аксиомата е нещо което е предполагано постоянно.

Вторият дефект може да води до по-нататъшни трудности при усвояване метода за доказателство с математическа индукция. В такива доказателства се изисква от учениците да покажат, че P_n имплицира P_{n+1} за всяко естествено число n. Обикновено те се покриват, когато могат да докажат, че P_n имплицира P_{n+1} за всяко n, но се оказва, че P_n не е вярно за никое n.

Ясното разбиране на същността на изходното съждение в такива ситуации ще отстрани трудностите.

Накрая А. Смит пише: "Формата" дадено е, да се докаже" вероятно е измислена като педагогическо средство, за да помогне на учениците да организират своето доказателство. Ако такава форма се смята, че е необходима, ние предлагаме следното като по-точно със същата ефективност.

Теорема: $p \to q$

хипотезата: p

Да се получи: q "

Недостатъците на формата "дадено е, да се докаже "ясно се виждат и при доказване на теории чрез косвения метод. При такова доказателство ние използуваме известни еквивалентности, например:

$$p \to q \Longleftrightarrow \neg q \to \neg p$$

Тогава това, което се нарича "дадено" ще бъде $\neg q$,което всъщност не е дадено в теоремата.

Именно затова в учебника [56] се повтаря два пъти "Дадено е......да се докаже....", когато се използува косвения метод при доказване на теоремите. Ето един такъв пример от стр. 270 . " Th · :

"Две невертикални прави имат равни ъглови коефициенти, т.с.т.к. са успоредни".

Част 1

Ако две не-вертикални прави имат равни ъглови коефициенти то те са успоредни.

Дадено е: ъгловия коефициент на l_1 е m и ъгловият коефициент на l_2 е n , l_1 и l_2 не-вертикални.

Да се докаже: $l_1 \parallel l_2$

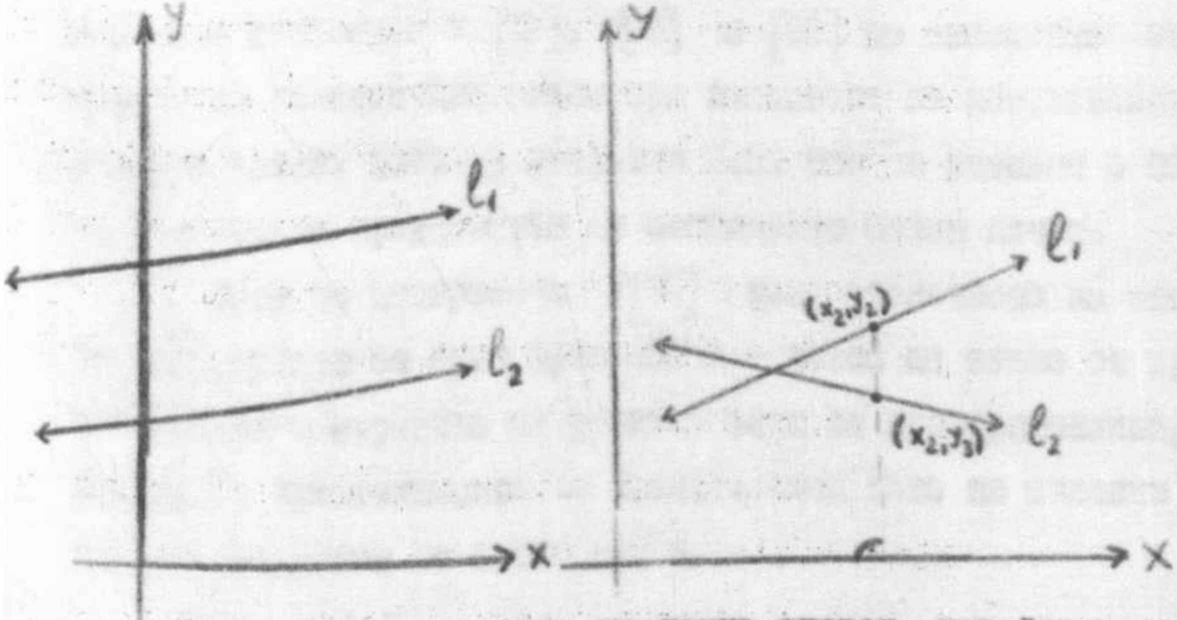
Достатъчно е да се докаже контрапозитивното на теоремата-част 1, именно:

Ако $l_1 \nparallel l_2$,то $m \neq n$

Дадено е: $l_1 \nparallel l_2$

Да се докаже: $m \neq n$

Доказателство на контрапозитивното:



Ние предлагаме друга, по-точна според нас форма от предлаганата форма от Смит. Нашето предложение е за теоремата $A \to B$ да се пише:

Теорема: $A \to B$

Хипотезата: A

Да се докаже, че от хипотезата следва B.

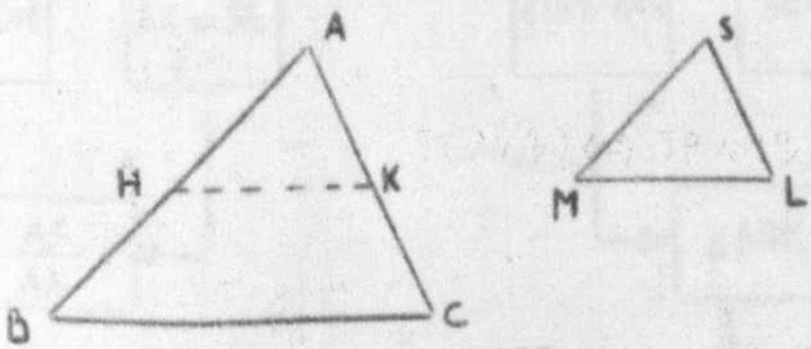
б/Един начин за записване на доказателствата

При всички доказателства на теоремите и примерите в задължителните учебници се използува традиционният метод: две колони, - едната колона съждения - другата основания като форма за доказателство. Също така се пише и при излагането на доказателства пред учениците на дъската. Съществуват обаче няколко възражения на тази форма. За нея Несмит: Тази форма изисква от ученика скучно да излага отново постулати, дефиниции, теореми наизуст. Тя не показва ясно процесите на разсъжденията, включващи се в доказателството на теоремата, т.е. тя не показва по подходящ начин кои твърдения импликира дадено твърдение. Тя често кара X. H.

ученика да забелязва колко стъпки изисква дадено доказателство и да го научи наизуст, без да го разбира"

Ние споделяме мненията на Х.Н. Нес, А.Е. Тени и Торсен, изложени съответно в [72], [83] и [85] по отношение на използуване на един нов начин при записване на доказателство. Експериментът, който е направил Х.Н. Нес с ученици е показал, че "учениците предпочитат да използуват новия начин.

Сега ще цитираме от [95] доказателството на теоремата "Ако ъгълът от един триъгълник е равен на ъгъла от друг триъгълник и страните на равните ъгли са пропорционални, то ъглите на триъгълниците са равни". След това ще изложим същото доказателство по новия начин.



Дадено е: В триъгълниците ABC, SML , $\angle BAC = \angle MSL$

също и $\dfrac{AB}{SM} = \dfrac{AC}{SL}$

Да се докаже: $\angle ABC = \angle SML$ и $\angle ACB = \angle SLM$

Доказателство: Да вземем отсечки от AB и AC, като AH и AK са съответно равни на SM и SL

Съединяваме H и K. В триъгълниците AHK, SML

$AH = SM$ /Според нашето построение/

$AK = SL$ /според нашето построение/

$\angle HAK = \angle MSL$ /дадено/

$\therefore \triangle AHK \cong \triangle SML$ /две странични и сключен между тях ъгъл съответно равни/

$\therefore \sphericalangle AHK = \sphericalangle SML$ също $\sphericalangle AKH = \sphericalangle SLM$

$\dfrac{AB}{SM} = \dfrac{AC}{SL}$ и $SM = AH$; $SL = AK$ /додено/

$\therefore \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AC}{AK}$

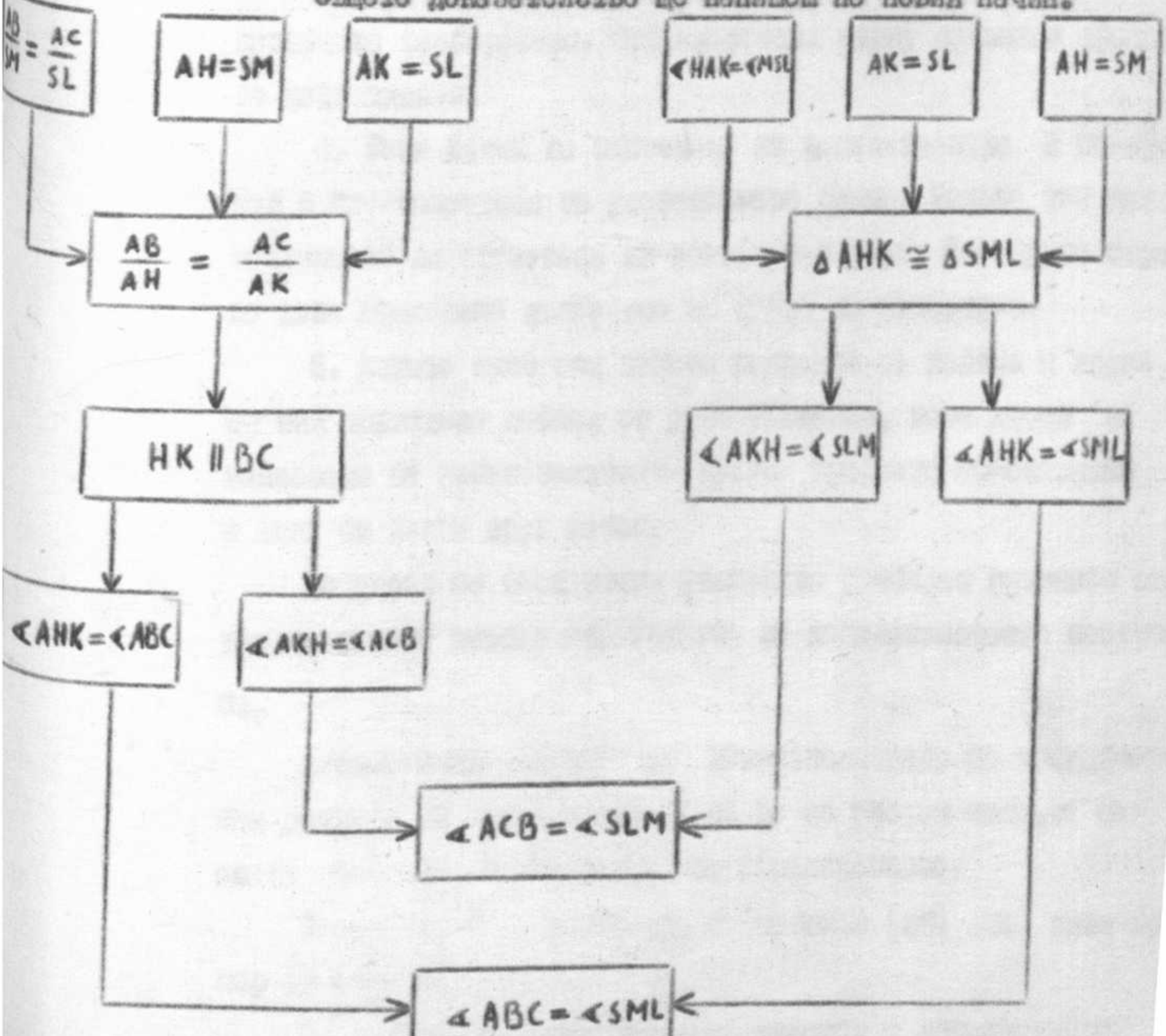
HK успоредна на BC

$\therefore \sphericalangle AHK = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle AKH = \sphericalangle ACB$

но $\sphericalangle AHK = \sphericalangle SML$ и $\sphericalangle AKH = \sphericalangle SLM$ /доказано/

$\therefore \sphericalangle ABC = \sphericalangle SML$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle SLM$

Същото доказателство ще напишем по новия начин:



Новият начин е по-подходящ, отколкото традиционния поради следното:

1. Съществено предимство на новия начин е, че показва по-ясно процесите на разсъждения, включени в доказателството, следователно стимулира класната дискусия върху теореми, излагани от учениците на дъската.

2. По този начин гледащите ученици ще могат лесно да посочат направените грешки. Също по-лесно ще е за учениците, които решават задачата на дъската да обясняват доказателството на гледащите ученици.

3. Този начин не насърчава заучаването на изуст и насърчава разбирането. Съсредоточава върху правилни процеси на разсъждения.

4. Този начин за записване на доказателства е по-кратък и по-икономичен за ученическото време. Затова той дава възможност за изучаване на повече материал. От друга страна дава по-голяма дълбочина на курса по геометрия.

5. Когато едно или повече съждения са дадени и всяко от тях имплицира повече от едно съждение, този начин за записване на доказателствата прави връзките по-очевидни и ясни от всеки друг начин.

Всъщност по този начин учениците разбират връзките най-добре, защото виждат структурата на доказателството построена.

Всъщност записването на доказателствата по традиционния начин в две колони може също да се уточни така, че да отразява логическата структура на доказателство.

Такъв начин се използува в учебника [56]. Ето един пример от стр. 76

" Th. 3.1: Ако два ъгъла са съседни и допълнителни, то техните не - общи страни са перпендикулярни.

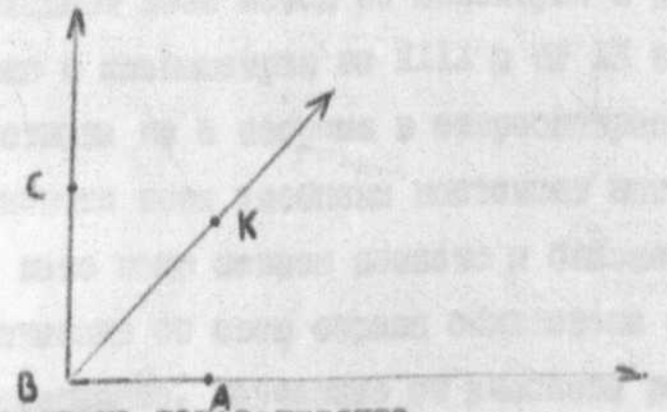
Дадено е: ∢АВК е съседен на ∢КВС

∢АВК е допълнителен на ∢КВС

Да се докаже: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

Доказателство

Съждения	Основания
1. ∢АВК е допълнителен ∢КВС	1. Дадено
2. m∢АВК $+_m$∢КВС $= 90^0$	2. Деф. на допъл. ъгли
3. ∢АВК е съседен на ∢КВС	3. Дадено
4. К е вътрешна на ∢АВС	4. Постулат 2.7
5. m∢АВК $+_m$∢КВС $=_m$∢АВС	5. Постулат 2.6
6. m∢АВС $= 90^0$	6. Приб. и транз. на равенот
7. ∢АВС е прав ъгъл	7. Деф. на прав ъгъл
8. ∴ $\overrightarrow{BA} \perp$ ВС	8. Деф. ⊥ лъчи "



в/ КОСВЕНО ДОКАЗАТЕЛСТВО

Косвеното разсъждение /или косвеното доказателство/ е метод за достигане до търсеното заключение чрез процес на изследване и елиминиране на всички други взаимоизключващи се възможности. Въпреки че Иракската методическа литература го пренебрегва, той е от най-ефикасните методи на математическите доказателства. Един вид/ен логик е пресметнал, че около половината от всички наши заключения, достигнати чрез разсъждение, са получени чрез метода на косвеното разсъждение [65]. На същото мнение е W. W. Maiers в [70]

Друг виден логик твърди, че процесът на reductio ad absurdum е от най-голямо значение, че е най-видният от всички методи чрез които хората достигат онези истини, които влизат в съдържанието на научното познание [71] .

Елементи от логиката позволяват да бъде разгледано от друг аспект косвеното доказателство /"доказателство чрез допускане на противното"/

Този метод в нашите учебници се използува доста рано. В учебника по планиметрия за VIII клас за първи път той се прилага за доказване на теоремата "Ако при пресичането на две прави с трета, кръстните ъгли са равни, то правите са успоредни".

Всъщност този метод се използува в доказателствата на 9 теореми в планиметрия за VIII и за IX клас. Също и в доказателствата на 5 теореми в стереометрията за XII клас. Във всичките тези учебници косвеният метод се използува направо като нещо съвсем познато и близко на учениците.

Учителите от своя страна обикновено само възпроизвеждат за учениците, научените от учебника доказателства, а учениците слушат и почти нищо не разбират от тях. Получава се така, защото им се обяснява верността на непознатите за тях математически факти. чрез използуване на още по-непознатите за тях логически средства.

В основата на косвеното доказателство лежат известни закони и правила от логиката и по-специално

1. $V\ /p \vee \neg p\ / = 1$ - закон на изключеното трето

2. $\dfrac{p \rightarrow q, \neg q}{\neg p}$ - Modus Tolens

Наистина при косвените доказателства вместо да доказваме верността на интересуващото ни твърдение Р, ние доказваме неверността на неговото отрицание, и тъй като знаем, че от две взаимно изключващи се твърдения едното е вярно $V\,/p \vee \neg p/ = 1$, заключаваме, че твърдението р е вярно. За да се докаже, че р не е вярно, се разсъждава по правилото модус толенс. Очевидно, за да разберат косвения метод, учениците трябва предварително да са свикнали с "модус толенс".

Преди да дадем известните еквивалентности, чрез които може да се обоснове този метод, искаме да подчертаем, че ние разбираме под този метод всеки вид доказателство, при което се използува отрицанието на заключението на дадена теорема. За това считаме контрапозитивното правило като косвено доказателство. Но има автори като например Ендкен в [54] който счита, че "доказателство чрез контрапозитивност е по-близко свързано с пряко доказателство, отколкото с косвено доказателство". Той счита така, защото, като доказва една теорема чрез косвения метод, доказва неверността на отрицанието на теоремата, а не като нас, който доказваме неверността на отрицанието на заключението на теоремата.

Еквивалентностите, чрез които може да се обоснове косвения метод са следните:

1. $p \to q \iff \neg q \to \neg p$
2. $p \to q \iff \neg q \wedge p \to \neg p$
3. $p \to q \iff \neg q \wedge p \to q$
4. $p \to q \iff \neg q \wedge p \to \neg T$

където T е доказана теорема или аксиома.

Всички тези еквивалентности, а също така посочените закони и правила се използуват неявно и неосъзнато в иранските учебници. Ето някои примери:

Първата еквивалентност се използува при доказването на теоремите:

1. "Ако при пресичането на две прави с трета, кръстните ъгли са равни, то правите са успоредни". /Планиметрия за VIII клас/

2. "В един триъгълник срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна" /същия учебник/

Втората еквивалентност се използува при доказването на теоремите:

1. "Всеки две пресичащи се прави определят една равнина" /стереометрия за XI клас/

2. "Ако една права е успоредна на дадена равнина, тя е успоредна на пресечницата на тази равнина с всяка равнина, която минава по правата" /същия учебник/

3. "Пресечниците на две успоредни равнини с трета са успоредни по между си" /същия учебник/

Четвъртата еквивалентност се използува при доказването на теоремите:

1. "При пресичането на две успоредни прави с трета се получават равни кръстни ъгли" /"Планиметрия" за VIIIклас/

2. "Ако две прави поотделно са успоредни на трета в пространството, то правите са успоредни помежду си" /"Стереометрия" за XII клас/

3. "Ако две пресекателни прави са успоредни на дадена равнина, то тяхната равнина е успоредна на дадената равнина" /същия учебник/.

Логическите средства, които трябва да се усвоят от учениците, за да разберат и усвоят косвеното доказателство, са следните:

1. Отрицание на едно съждение

2. Законът за изключеното трето

3. Модус толенс

Неовладяването на тези средства е главната причина за трудността, която учениците срещат при разбиране на косвени доказателства.

За да се научат как да образуват отрицание на едно съждение всъщност учениците трябва да минат през два етапа:

а/ Да се научат да образуват отрицание, като пред сказуемото в съответното изречение поставят частицата "не". Например, да се научат, че отрицанието на съждението "Правата а е успоредна на правата b" е "Правата а не е успоредна на правата b".

Учениците трябва да бъдат обучени и в изразяване отрицания на някои съждения чрез дизюнкции на други съждения. За целта е добре да се разгледат съждения от вида:

"Ъгълът ABC е равен на ъгъл $A_1B_1C_1$"

"Ъгълът ABC не е равен на ъгъла $A_1B_1C_1$"

Да се постави въпросът. "Ако ъгълът ABC не е равен на ъгъла $A_1B_1C_1$, то какво отношение може да съществува между тях? След като се отговори, че или $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$ или $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$, трябва да се направи извод, че отрицанието на твърдението $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ може да се изрази и с твърдението: $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$ или $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$ ", т.е. без да се използува частицата "не".

б/По-нататък, за да усвоят закона на изключеното трето, може да бъде проведена беседата:

"Да съпоставим твърдението "Петър работи" с неговото отрицание "Петър не работи". Може ли и двете едновременно да са верни? ОТГОВОР - не, защото ако Петър работи, той не може и да не работи.

А може ли да са неверни едновременно твърденията "правата a е успоредна на правата b" и "правата a не е успоредна на правата b"? Отговорът също е не.

Изобщо какво може да се каже за всяко твърдение и за неговото отрицание? Могат ли да бъдат едновременно неверни?

Отговор - не! Не могат да бъдат едновременно неверни. Тази особеност на две взаимно отричащи се твърдения ни дава възможност да използуваме един нов начин за доказване, че дадено твърдение е вярно, като установим, че неговото отрицание е невярно. Поради това, ако знаем, че отрицанието на твърдението "Петър работи" е невярно, за самото твърдение "Петър работи" може да кажем, че е сигурно вярно.

Тази връзка между верността и неверността на две взаимно отричащи се съждения понякога се използува при доказване на твърдения.

в/ Третото логическо средство, което учениците трябва да усвоят, за да разберат косвените доказателства е модус толенс. Това правило може да им се обясни по лесен начин, като се използват съждения, описващи познати и близки на тях ситуации от ежедневието. Например:

Ако искаме да докажем, че твърдението "Температурата на водата е 100°C" не е вярно, ние може да разсъждаваме така: "Ако водата има 100°C, то тя трябва да ври. Обаче ясно виждаме, че водата не ври. От тук правим извод, че твърдението "Водата има 100°C" също е невярно. Както виждаме, в случай, като искаме да установим, че едно твърдение е невярно, от което следва неверността на интересуващото ни твърдение.

В математиката ние често използуваме този метод на разсъждаване, за да докажем, че дадено твърдение е невярно. По-точно, ако то е вярно, непременно трябва да е вярно и друго твърдение, а за него показваме, че е невярно или предварително знаем, че е невярно.

в/Един начин за записване на косвеното доказателство.

Косвеното доказателство често се оказва трудно поради тежката фразеология, неизбежно свързана със словесното твърдение при отричането на условието. Това използуване на негативни съждения може да доведе до объркване.

В това отношение ние споделяме мнението на Bulter в [50], както относно недостатъците на традиционното излагане на косвените доказателства, тъй и относно начина за записване на тези доказателства, който той предлага. Той предлага отделно и внимателно записване на взаимноотричащите се съждения в първата стъпка на доказателството и след това заместването на всяко от тези съждения с един символ. За такива символи се предпочитат гръцките букви θ и ϕ само затова, че няма да се смесват с обичайните символи, използувани при означаване на точки, прави и др. Избирането именно на тези букви се оказва удачно и поради друга причина, а именно че нововъведението на тези символи буди любопитство и интерес у учениците. В резултат се оказва, че символичното изложение на косвеното доказателство се кристализира в ученическия ум по-бързо и по-определено, отколкото се очаква.

С използуването на тези символи става възможно да се елиминира голям дял от словесната трудност, спомената горе.

да се свърже писменото и словесното изложение и да се увеличи разбирането на същността на косвеното доказателство.

За илюстрация нека да разгледаме теоремата "При пресичането на две успоредни прави с трета, съответните кръстни ъгли са равни". Първо ще изложим доказателството на теоремата както е дадена в иракския учебник [95].

Доказателство

1\. или $\angle AMD$ е равен на $\angle MDE$

или $\angle AMD$ не е равен на $\angle MDE$

2\. Нека $\angle AMD$ не е равен на $\angle MDE$

3\. Ако $\angle AMD$ не е равен на $\angle MDE$, то нека $\angle YMD = \angle MDE$, но тези ъгли са кръстни,

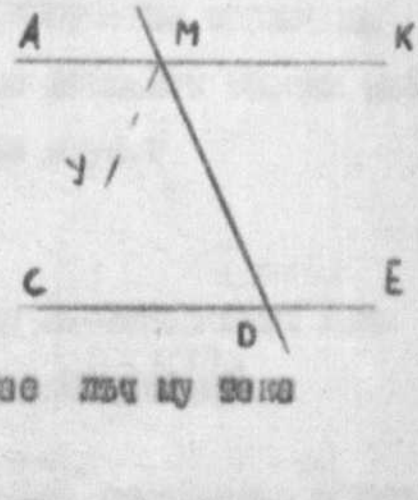
4\. $\therefore$ Всяко от пресичателните прави AM, YM е успоредно на DE. Но това не е възможно

5\. $\therefore$ Не е вярно, че $\angle AMD$ не е равен на $\angle MDE$

6\. $\therefore$ $\angle AMD = \angle MDE$

Доказателството е вярно, пълно, но съждението на стъпка 5 е доста неясно.

Нашето предложение е доказателството да се даде в символична форма по следния начин:



Доказателство

1\. θ .... $\angle AMD = \angle MDE$

ϕ .... $\angle AMD \neq \angle MDE$

2\. Нека ϕ е вярно

3\. Ако $\angle AMD \neq \angle MDE$, то може да се начертае лъч MY така че $\angle YMD = \angle MDE$

4\. В този случай ще получим: $YM \parallel DE$. Така че получихме че има две прави успоредни на трета, минаващи през една и съща точка M. Но това не е възможно.

5. $\therefore \varphi$ не е вярно

6. $\therefore \theta$ е вярно

Забележете, че съждението: "φ е невярно" е много сбито и ясно в сравнение със словесното съждение" Не е вярно, че $\sphericalangle AMD$ е неравен на $\sphericalangle MDE$ ".

Относно двата начина за записване Бултър пише: "Опитът показва без съмнение, че използуването на символичното представяне на две взаимнопротиворечащи си съждения при доказателството на теорема доста увеличава ученическото възприемане на противоречивата същност на две съждения и спомага за изясняване механизма на доказателството."

Съществуват, разбира се, теореми, в които проблемът съдържа повече от две възможности. Пример за символично записване на доказателството в такъв случай ще дадем относно следната теорема, дадена в прагския учебник [95] , "В един триъгълник срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна".

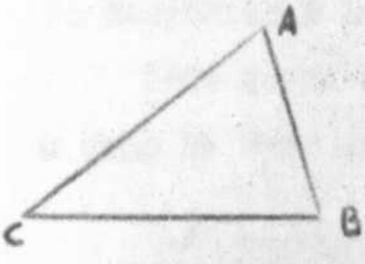
Дадено е: $\sphericalangle B > \sphericalangle C$

Да се докаже: $AC > AB$

Доказателство:

1. θ ...... $AC > AB$ φ ...... $AC \leq AB$ или $\begin{cases} \varphi_1 \text{ ...... } AC < AB \\ \varphi_2 \text{ ...... } AC = AB \end{cases}$	1. Противоречиви съждения, които включват всички възможни случаи
2. Нека φ_1 е вярно, тогава $\sphericalangle B < \sphericalangle C$, но това не е възможно	2. Срещу по-голяма ~~ъгъл~~ страна лежи по-голям ~~страна~~ ъгъл
3. Нека φ_2 е вярно, тогава $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, но и това не е възможно	3. Ако един триъгълник е равнобедрен, то срещу равните страни лежат равни ъгли.

4. $\therefore \theta$ е вярно, и $AC > AB$	4. Всички други възможности между AC, AB водят до противоречия с условието



В алгебрата също е добре да се използува същия начин за записване на косвени доказателства. Ето един пример:

Да се докаже, че ако $x>0$, то $x+\frac{1}{x} \geq 2$

Доказателство

1. θ ...... $x+\frac{1}{x} \geq 2$ ϕ ...... $x+\frac{1}{x} < 2$	1. Противоречиви твърдения, които съдържат всички възможности.
2. Нека ϕ е вярно	2. Предположение
3. Тогава $x+\frac{1}{x} < 2$	3. Дадено е в 2
4. Тогава $x^2+1 < 2x$	4. Получено с умножаване на 3 с $x>0$
5. Тогава $x^2-2x+1<0$	5. Получено с прибавяне на $-2x$ към двете страни на неравенството 4.
6. Тогава $/x-1/^2 < 0$	6. Стъпка 5 написана в друга форма

Но 6 противоречи на факта, че квадрат на реално число не е отрицателно, затова ϕ е невярно.

7. θ е вярно, т.е. $x+\frac{1}{x} \geq 2$	7. Ако едно от две противоречиви твърдения е невярно, другото е вярно.

4. ПО-СПЕЦИАЛНИ ЛОГИЧЕСКИ ГРЕШКИ

В този раздел нашата цел ще бъде да видим какви грешки са допускати в логическо отношение в разглежданите учебници.

Няма обаче да се спираме на всички грешки и неточности, а само на тези за които смятаме, че са най-характерни.

а/Неправилни разсъждения по схемата $\dfrac{p \to q, q}{p}$
която не е правило за извод

Една от най-често срещаните грешки в разсъжденията са свързани с неумението да се прилага правилото за отделяне /modus ponens /.

Ето един пример от учебници, при които вместо да се разсъждава по схемата $\dfrac{p \to q, p}{q}$ /modus ponens /
се разсъждава по схемата $\dfrac{p \to q, q}{p}$, която не е правило за извод.

В учебника "Алгебра за XI клас" - теорията на квадратно уравнение, стр. 132 са дадени задачите:

Задача 4: Да се състави уравнение, което да има корени 3,- 4.

Задача 5: Да се състави уравнение, което има корени 2, - 2 1/2

Задача 6: Да се състави уравнение, което има корени $/2 \sqrt{-3}/$, $/2 - \sqrt{-3}/$

Задача 7: Да се състави уравнение, което има корени $\dfrac{h}{w}$, $-\dfrac{w}{h}$

Тези задачи са решавани в / 93 / на стр. 153, 154, 156. Ще разгледаме решението на задачата 4 в посочената книга.

"Решение

Сумата на корените на уравнението = - коефициент на x

$3-4$ = - коефициент на $x = -1$

Произведението на корените е равно на свободния член.

$3 . /-4/ =$ свободният член

свободният член $= -12$

$x^2 + x - 12 = 0$ е уравнението "

Разсъжденията, които фактически са проведени при решението на тази задача, са следните:

ако $ax^2 + bx + c = 0$ има корени $/3, -4, /$, то $\frac{b}{a} = -1$,

$\frac{c}{a} = -12$

От това че $3-4 = \frac{-b}{a}$ и $3/-4/ = \frac{c}{a}$, обаче не може да се направи извод, че уравнението $ax^2 + bx + c = 0$, т.е $x^2 + x - 12 = 0$ има корени числата 3 и -4. Да твърдим това, означава, че разсъждаваме по схемата

$\frac{p \rightarrow q, q}{p}$, което не е правило за извод.

б/КВАНТОРЪТ ЗА ОБЩНОСТ

Няколко теореми, доказани в учебниците, са от вида

1/ $\forall x;\quad x \in M / P /x/$,

където $P /x/$ е съждителна функция определена в множество M

Често пъти, вместо да се доказва 1/, се доказват теоремите

1.1 $/ \forall x;\quad x \in M_1 /\quad P /x/$;

1.2 $/ \forall x;\quad x \in M_2 /\quad P /x/$;

....

1.n $/ \forall x;\quad x \in M_n /\quad P/x/$

където $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ са подмножества на M, а n е естествено число /цяло, положително и крайно/.

Понеже

<u>$/\forall x;\ x\in M_1/\ P/x/;/\ \forall x;\ x\in M_2/P/x/; \ldots\ldots ;\forall x; x\in M_n/P/x/$</u>

$$/\forall x;\ x\in M_1 \cup M_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup M_n\ /P/x/$$

е правило за извод, то $/\forall x;\ x\in \bigcup_{i=1}^{n} M_i :$ $/P/x/$ е вярно твърдение /защото 1.1, 1.2 ....1.n са верни/.

И тъй като M_1 M_2 ....M_n са подмножества на M, то

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots\ldots \cup M_n \subseteq M.$$

От тук веднага следва:

а/ Ако $M_1 \cup M_2 \cup \ldots\ldots \cup M_n = M$, то твърдението $/\forall x;\ x\in M/\ P/x/$ е вярно

б/Ако $M_1 \cup M_2 \cup \ldots\ldots \cup M \neq M$, то

$M_1 \cup M_2 \cup \ldots\ldots \cup M \subset M$ и следователно има елементи на M за които не може да се твърди, че от P /x/ се получава вярно съждение /или пък невярно/. В този случай приемането че 1 е доказано представлява грешка.

Ето и някои примери:

<u>Пример 1</u>

Доказателството на третия признак за еднаквост на триъгълниците е дадено в учебника - геометрия за VIII клас стр. 32 по следния начин:

"Дадено е: $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$

Да се докаже: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

<u>Доказателство:</u>

Нека да преместим $\triangle ABC$ към $\triangle A'B'C'$ така, че A' да съвпада с A, $A'B'$ с AB.

$A'B' = AB$, то B' съвпада с B. Нека точката C' да отиде в C'' от страната на AB, в която не се намира C.

Съединяваме C и C''.

Сега: $AC'' = A'C'$

Но $A'C' = AC$ по условие

$\therefore AC'' = AC$

Но това са страни в $\Delta ACC''$

$\therefore \sphericalangle ACC'' = \sphericalangle AC''C$

По същия метод може да се докаже, че $\sphericalangle BCC'' = \sphericalangle BC''C$.

Със събиране на тези ъгли във фигура /1/

или със изваждането им във фигура /2/,

се получава, че $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC''B$

Но $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle AC''B$

$\therefore \sphericalangle A'CB = \sphericalangle A'C'B'$

$\therefore$ във $\Delta A'C'B'$, и ΔABC, $A'C' = AC$, по условие

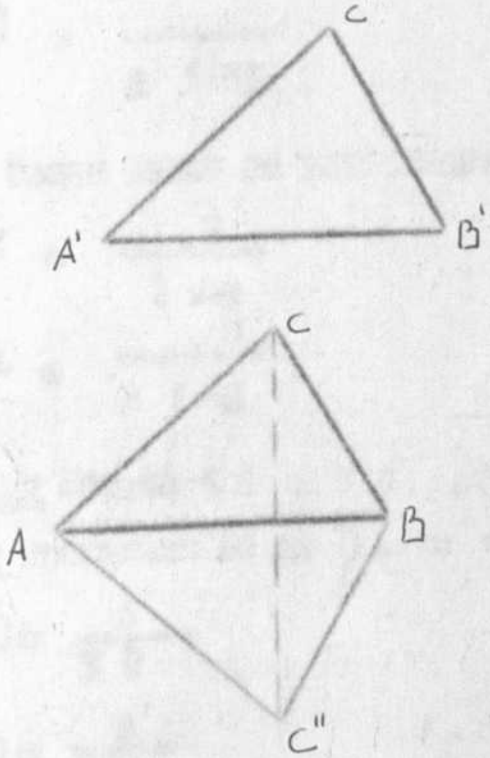
$C'B' = CB$ по условие

и $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle ACB$ доказано

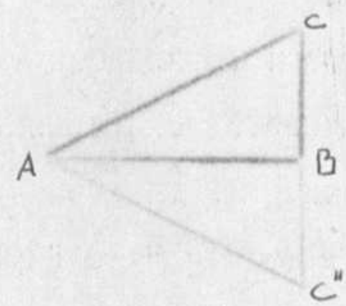
$\therefore \Delta A'C'B' \cong \Delta ACB$ /две страни и ъгъл, сключен помежду им/

На пръв поглед изглежда, че доказателството е достатъчно пълно и са изчерпани всички възможни случаи. Оказва се обаче, че е изпуснат един възможен случай - когато отсечката CC'' минава през края на отсечката AB. На фигура /3/ отсечката CC'' минава през точка B.

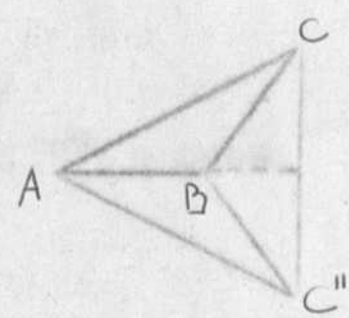
В този пример същността на грешката се състои в това, че не се доказва предложението, което трябва да се докаже, а само някакъв частен случай, свързан с особеностите на фигурата върху която се извършва доказателството, без да се посочи поне, че има и други случаи.



фиг. 1



фиг. 3



фиг. 2

<u>Пример 2:</u> от учебника - тригонометрия за XI клас 1969 г. стр. 187.

"Намиране радиуса на описаната около триъгълника окръжност

Първо: когато $\angle A$ в триъгълника ABC е остър

Ако продължим BO, докато срещне окръжността в Д и съединим Д и С, то $\angle D = \angle A$ "фиг. 69"

и $\sin A = \dfrac{A'}{BD}$

$\therefore \sin A = \dfrac{A'}{2R}$

$\therefore R = \dfrac{A'}{2 \sin A}$

По същия начин се установява, че

$R = \dfrac{B'}{2 \sin B}$,

$R = \dfrac{C'}{2 \sin C}$

Второ Когато $\angle A$ е тъп /фиг. 70/

Ако продължим BO до D, то $\angle BCД = 90^0$ и тогава

$\sin D = \dfrac{A'}{BD}$

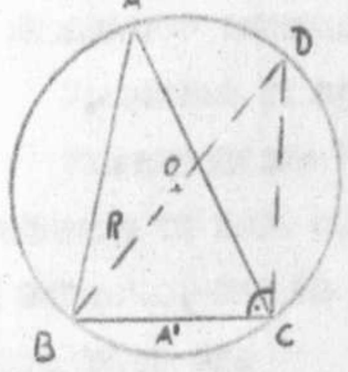
$\sin D = \dfrac{A'}{2R}$

и при $\angle D = 180^0 - \angle A$, понеже четириъгълникът $ABDC$ е вписан в окръжността

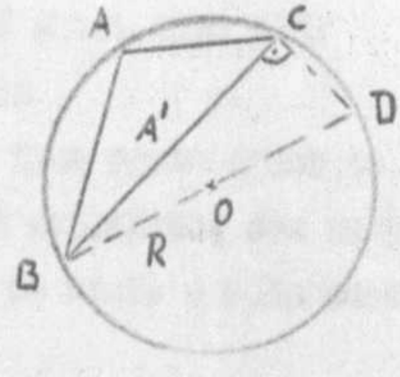
$\therefore \sin/180-A/ = \dfrac{A'}{2R}$

т.е. $\sin A = \dfrac{A'}{2R}$

$\therefore R = \dfrac{A'}{2 \sin A}$."



фиг. (69)



фиг. (70)

2.1

При доказателството е пропуснат случая "когато ъгъл A е прав"

Освен това, когато се разглежда случаят "ъгъл A е остър" /фиг. 69/

фактически е направено доказателство за случая,

/1/ ъгъл A е остър и ъгъл C е остър и ъгъл B е остър" и нищо поне не е споменато за останалите:

/2/ [2') "∢A - остър и ∢B - остър и ∢C - прав"
2") "∢A - остър и ∢B - прав и ∢C - остър".

/3/ [3'/ "∢A - остър и∢B - тъп и∢C - остър"
3"/ "∢A - остър и∢B - остър и∢C - тъп".

Така, че според направената в началото бележка, не може да се твърди, че доказателството важи за всеки триъгълник.

За да се направи това "доказателство", е необходимо да се разгледа и случаят "ъгъл A е прав" /тогава ∢B - остър и ∢C - остър/, както и да се положи нещо и за посочените по-горе случаи 2/ и 3/. Разбира се разглеждането на някои от тях е възможно да се остави за самостоятелна работа.

Пример 3: /от учебника "Аналитична геометрия, диференциално и интегрално смятане" за XII клас, стр. 183/

Уравнение на права линия

Заключението: "..... и така всяка права се представя с уравнение от 1-ва степен", е направено, без да са разгледани случаите, когато правата се слива с абсцисната ос или с ординатната ос.

в/ ДОКАЗАНО Е ЕДНО ТВЪРДЕНИЕ, А СЕ ПРИЕМА, ЧЕ Е ДОКАЗАНО ДРУГО ТВЪРДЕНИЕ

Доказателствата, които се дават в учебниците, следва да бъдат така построени, че учениците да се учат от тях как трябва да се постъпва, когато се доказва дадено твърдение. За всяко едно доказателство от учебник, трябва да е напълно ясно за кое твърдение е установено чрез провеждането му. Има обаче доказателства, дадени в учебници, които за съжаление, не отговарят на това изискване.

Пример: /от учебника "Аналитична геометрия, диференциално и интегрално смятане", стр. 13/

"Правило 1

Ако две прави линии са успоредни, те имат равни ъглови коефициенти". Предполагаме, че успоредните прави са l_1, l_2 с ъгли φ_1, φ_2 и съответни ъглови коефициенти

Щом $l_1 \parallel l_2$

$\therefore \varphi_1 = \varphi_2$

$tg\,\varphi_1 = tg\,\varphi_2$

$\therefore m_1 = m_2$

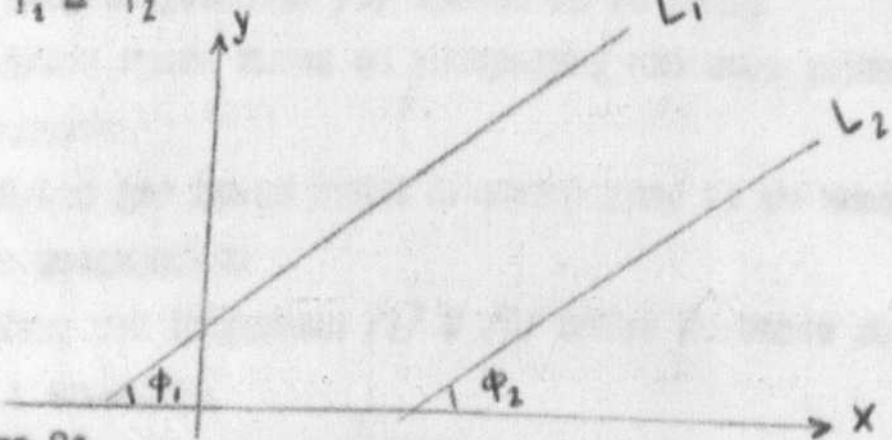
и обратно, ако $m_1 = m_2$, то правите линии имат един и същ ъглов коефициент ,т.е. те са успоредни, понеже:

$$m_1 = tg\,\varphi_1$$
$$m_2 = tg\,\varphi_2$$

$\therefore tg\,\varphi_1 = tg\,\varphi_2$ и като се има предвид $0 \leqq \varphi_1 < 180^0$

също така и $0 \leq \varphi_2 < 180^0$,

то $\varphi_1 = \varphi_2$



Правило 2:

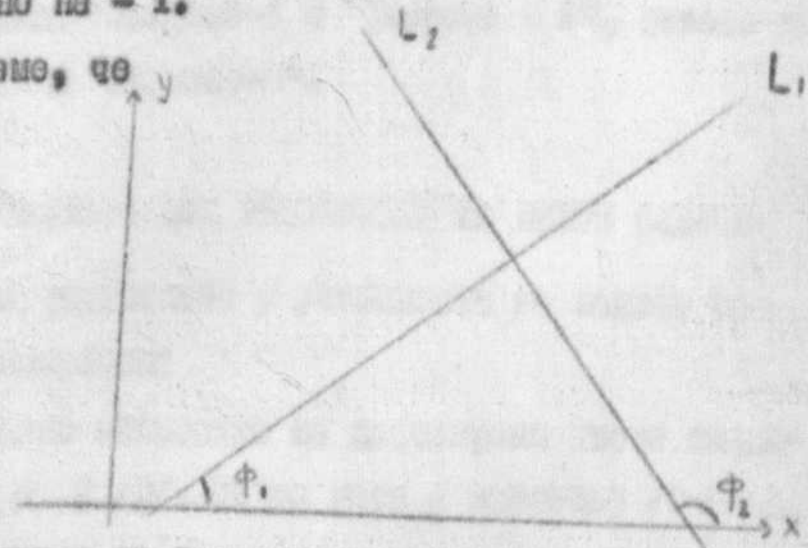
Ако две прави линии са перпендикулярни, то ъгловият коефициент на едната е равен на минус инверс на ъгловия коефициент на другата, т.е. произведението от ъгловите им коефициенти е равно на - 1.

Във фигурата виждаме, че

$$\varphi_2 = 90^0 + \varphi_1$$
$$tg\,\varphi_2 = tg\,/90^0 + \varphi_1/$$
$$= -cotg\,\varphi_1$$
$$= -\frac{1}{tg\,\varphi_1}$$

т.е.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



и обратно, ако ъгловият коефициент на едно от правите е отрицателен инверс на ъгловия коефициент на другата, то правите са перпендикулярни, тъй като

$m_1 = tg\,\varphi_1$, $m_2 = tg\,\varphi_2$

и от $tg\varphi_2 = m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{tg\varphi_1} = -cotg\,\varphi_1 = tg\,/90^0 + \varphi_1/$

и понеже $0 \leq \varphi_1 < 180^0$, $0 \leq \varphi_2 < 180^0$

то $\varphi_2 = 90^0 + \varphi_1$"

В тези правила е доказано $p \leftrightarrow q$, а те се отнасят за $p \rightarrow q$.

Вместо правилото /1/ трябва да се пише:

1/Две прави линии са успоредни, ако имат равни ъглови коефициенти

2/Ако две прави линии са успоредни, то те имат равни ъглови коефициенти

Тези две твърдения /1/ и /2/ могат да бъдат заменени с едно, а именно:

"Две прави линии са успоредни тогава и само тогава, когато имат равни ъглови коефициенти"

Правилото /1/ е дефектно и относно това, че не разглежда тривиалния случай „ L_1 се слива с L_2 ". Освен това поправилно е да се пише "Теорема-1 и "Теорема - 2", вместо да се пише "Правило-1" и "Правило-2".

г/ОТНОСНО ПРОВЕРКАТА ПРИ РЕШАВАНЕТО НА НЯКОИ ЗАДАЧИ

Често пъти при решаването в учебниците на задачи се стига до следната ситуация:

В някакво основно множество са дефинирани двете съдържателни функции P/x/ и Q /x/. Освен това е известно /Според доказана теорема/, че

$$P/x/ \Rightarrow Q\ /x/$$

знае се и множеството на верност V_Q на Q /x/

В задачата се изисква да се определи M_P – множество на вярност на $P/x/$. И тъй като

$$/P/x/ \Rightarrow Q/x// \Longleftrightarrow /M_P \subseteq M_Q/$$

Решаването ѝ се свежда до проверяване кои елементи на M_Q са елементи на M_P и кои не са.

Този тип разсъждения се провеждат винаги, когато се решават уравнения /неравенства/, като се използуват теореми за следване. Затова при такива задачи се прави задължителна проверка.

Очевидно, за да не се направи проверка, трябва да бъде сигурно, че

$$M_P = M_Q$$

но

$$/M_P = M_Q/ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(P/x/ \Longleftrightarrow Q/x/\right)$$

и следователно, ако вече е доказано, че $P/x/ \Longleftrightarrow Q/x/$, проверка не трябва да се прави.

Не е трудно да се види, че винаги, когато се решават уравнения /неравенства/, като се използуват само теореми за еквивалентност, е налице, точно този случай, т.е. $P/x/ \Longleftrightarrow Q/x/$. Затова при такива задачи проверка не трябва да се прави.

Има обаче учебници, в които при решаването на уравнения /неравенство/ винаги се прави проверка. Така се постъпва в [96]

В този учебник, след като се дават необходимите "закономи" за решаване на уравнения, стр. 145 и 146, се дава следният пример

"Пример-2

Да се реши уравнението

8 х + 10 - 20 х = 45 - 10 х - 15

Като се направи приведение, се получава:

10-12 х = 30-10 х

Като се прибави 10 х към двете страни, се получава

10 - 2х = 30 /аксиома - 1/

като се извади 10 от двете страни ,се получава

- 2х = 20 /аксиома 2/

Като се делят двете страни на - 2, се получава

х = - 10 /аксиома - 4/

Проверка: Ако заменим х с /-10/ в уравнението, се получава

8 . - 10 + 10 - 20 . - 10 = 45 - 10.- 10 - 15

- 80 + 10 + 200 = 45 + 100 - 15

130 = 130

Затова решението е вярно и затова числото /-10/ е корен на оригиналното уравнение".

Ясно се вижда в този пример,че проверката е налична.

Има учебници пък, в които при решаването на уравнения не се прави проверка, когато проверката е задължителна. Така се постъпва в / 104 /:

В IV гл. - уравнения с едно неизвестно, стр. 60, се пише: А/ "Ако произведение на две /или повече/ множителя е равно на нула, то поне един от множителите е 0". След това на стр. 64 и 65 при решаването на примерите 6,7,8,9, също и на примелите на други места, не се прави проверка. Всъщност, ако се дава обратното на А/, тогава не трябва да се прави проверка, но ако не се дава, тогава трябва да се прави. По този повод Б.М. Екснър пише "Трудно е в този етап да убедим учениците в логическата необходимост на проверката. Става по-лесно, когато се стигне до повече сложни уравнения, където е възможно да се получи "x = У", но У не е корен на оригиналното уравнение" /25/ . Именно затова трябва да се даде обратното на А /"произведението на няколко множителя е равно на нула, ако поне един от множителите е 0".

В същия учебник на стр. 67 при решаване на дробни уравнения не се прави проверка, която е задължителна "Да се реши уравнението:

$$\frac{5x}{2x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{2x^2+3x-2}$$

Решение

$$\frac{5x}{2x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{2x^2+3x-2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{5x}{2x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{/2x-1/\ /x+2/} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$5x\ /x+2/ - /2x-1/ = 5$

$5x^2 + 10x - 2x + 1 - 5 = 0$

$5x^2 + 8x - 4 = 0$

$/5x + 2/\ /x + 2/ = 0$

$5x - 2 = 0$ или $x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{5}$ $\qquad x = -2$

Умножихме двете страни на уравнението с /2x - 1/ /x + 2/, който е общият знаменател, и по този начин премахнахме дробите в уравнението".

Всъщност всеки ученик, който чете този пример, ще помисли, че числото /-2/ е корен на дробното уравнение, имайки пред вид, че нищо не е казано за получените корени.

Получения корен /-2/ не е допустима стойност за неизвестното в дробното уравнение, тъй като при $x = -2$ уравнението приема вида: $2 - \frac{1}{0} = \frac{5}{0}$

а изразите $\frac{1}{0}$ и $\frac{5}{0}$ не изразяват никое число. Значи числото /-2/ не е корен на даденото уравнение.

Числото /-2/ е корен на цялото уравнение 2, но не е корен на дробното уравнение 1. Следователно уравненията 1 и 2 не са равносилни.

Ще решим подобен и по-кратък пример, при който ще покажем как може да се решат такива уравнения, използувайки символите " $\Rightarrow$ " и " $\Leftrightarrow$ "

Пример: Да се реши уравнението

$$\frac{1}{/2x+1/\,/x+2/} + \frac{1}{/x-1/\,/x+2/} = \frac{1}{/2x+1/\,/x-1/}$$

Решение

$$\frac{1}{/2x+1/\,/x+2/} + \frac{1}{/x-1/\,/x+2/} = \frac{1}{/2x+1/\,/x-1/}$$

$$\Rightarrow /x-1/ + /2x+1/ = x+2$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Първата стъпка при решаването - умножаването на двете страни на уравнението с /x-1/ /2x+1/ /x+1/ не може да бъде обратимо, когато $x_1 = 1$. Ясно се вижда, че числото 1 не е решение на даденото уравнение, понеже, нито едното, нито другата му страна не е дефинирана, когато $X_1 = 1$.

Друг случай, при който трябва да се прави проверка, е когато се повдигат на квадрат двете страни на уравнението. Обаче в [107] на стр. 52, примерно 5 не се прави проверка, когато проверката е задължителна.

Ние ще дадем един подобен пример, при решението на който ще обясним как трябва да се използуват символите " $\Longrightarrow$ " и " $\Longleftrightarrow$ ".

Пример: Да се реши уравнението

$$\sqrt{3x+4} = 2 + \sqrt{x+2}$$

$$\Longrightarrow 3x + 4 = 4 + 4\sqrt{x+2} + x + 2$$

$$\Longleftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{x+2}$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x + 8$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Longleftrightarrow /x - 7/\ /x + 1/ = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = 7 \text{ или } x = -1$$

Тук използувахме символът " $\Longrightarrow$ " вместо " $\Longleftrightarrow$ " два пъти, понеже импликацията $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ не е обратима

Всъщност третата стъпка от решението

$x - 1 = 2\sqrt{x+2}$ $x^2 - 2x + 1 = 4x + 8$

е обратима, ако $x_1 = 7$, но не е обратима ако $x_2 = -1$. Единственото вярно решение е когато $x_1 = 7$

От друга страна, ако оригиналното уравнение беше

$3x + 4 = 2 - \sqrt{x+2}$

Квадратното уравнение $x^2 - 6x - 7 = 0$ пак се получава, но в този случай вярното решение е когато $x_1 = -1$.

Може да се намери друго уравнение, от което ще се получи същото квадратно уравнение. То е уравнението:

$$\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{3x+4}$$

Но то няма корени.

д/ИЗПОЛЗВАНЕ НА ДЕФИНИРУЕМИ ПОНЯТИЯ БЕЗ ДА СА ДЕФИНИРАНИ

В почти всички учебници може да се срещне следния недостатък

1. Използуват се дефинируеми математически понятия без да са дефинирани преди това или за тях да се дадени някакви предварителни обяснения. Такива са например следните понятия от "Планиметрия" за VIII и IX клас.

Кръстни ъгли, вътрешно прилежащи ъгли, еднаквост, окръжност, хорда, дъга и др.

2. Използуват се понятия като: дефиниция, условие и заключение на теорема, доказателство, обратна теорема, следствие, без да ги дефинират или поне да се дадат някакви обяснения за тях.

е/ИЗПОЛЗУВАНЕ НА "ИЛИ" ВМЕСТО "ЕКВИВАЛЕНТНО" И ДРУГИ ПОДОБНИ НЕСЪОБРАЗНОСТИ И ГРЕШКИ

В учебниците се срещат твърдения, при които съюзът "или" е употребен в смисъл на "еквивалентно" и твърдения при които съюзът "или .... или" е употребен в смисъл на знак за дизюнкция /т.е. или/. Има и твърдения при които съюзът "и" е употребен в смисъл на знак за дизюнкция /т.е. или/. Обикновено в тези случаи записаните твърдения се разбират трудно и погрешно или въобще не могат да се разберат, тъй к то тези съюзи се употребяват и в обичайния смисъл - "и" ка конюктивна връзка, а "или" като дизюнкция. Ще посочим ня кои такива примери:

а/Пример 1: От учебника "Математика" за X клас,стр. 7

"Решаване на уравнението: $x^2 + 2x = 15$

Като се прибави 1 към двете страни на уравнението, се получава

$x^2 + 2x + 1 = 16$

$\boxed{\text{или}}$ $/x + 1/^2 = 16$

$, x + 1 = \mp 4$"

1.1. При решаването на задачата съюзът "или" и символът " , " са употребени в смисъл на "еквивалентно".

б/Пример 7, от същия учебник, стр. 27

$, 8y^2 = - 8y$

$, 8y^2 + 8y = 0$

$, y^2 + y = 0$

$, y /y + 8 / = 0$

7.1. При решаването на задачата знака "запетайка" е употребен 4 пъти в смисъл на "еквивалентно".

в/ В / 105 / на стр. 13 е дадено заглавието:

"Теореми за

еднаквост и успоредност"

Тъй като няма теореми, които да са и за еднаквост и за успоредност, съюзът "и" е употребен неудачно.

Например по-правилно ще бъде да се напише:
"Теореми за еднаквост на..... Теореми за успоредност на...."

Пример от учебника "Математика" за X клас стр. 109

A_1: "Синусът на един ъгъл е положителен, ако ъгълът се намира в първия квадрант или във втория квадрант, а отрицателен в квадрантите трети и четвърти.

A_2: "Косинусът" на един ъгъл е положителен в квадрантите първи и четвърти, а отрицателен в квадрантите втори и трети.

A_3: "Тангенсът на ъгъла е положителен в квадрантите първи и трети, а отрицателен в квадрантите втори и четвърти".

В A_1 /A_2/, A_3 /. Съюзът "и" е употребен 5 пъти за изразяване на свойства, аналогични на първото свойство, изказано в A_1, където е използуван съюзът "или".

На стр. 116 от учебника "Тригонометрия" за XI клас пример 6, съюзът "или...или" се използува в смисъл на "или".

Със системната употреба на "следва", "тогава и само тогава, когато", "еквивалентно" и съответните символи от математическата логика " $\Rightarrow$ ", " $\leftarrow$ " и " $\Leftrightarrow$ " подобни неясноси може да се избегнат напълно.

ГЛАВА ВТОРА

ЕЛЕМЕНТИ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЛОГИКА В ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИТЕ УЧЕБНИЦИ

Елементите от математическата логика, които са въведени в учебника "Съвременната математика" за X клас, се намират: В глава IV-та - озаглавена начални познания по математическа логика.

Тази глава започва с обясняване смисъла на понятието съждение. След това се разглеждат понятието просто съждение и на логическите связи: " и" ,"или" и "или ....или". Дават се определения и на понятията: импликация , равнозначност, отрицание на просто съждение. При разглеждането на тези понятия се използуват пояснителни примери и следната вярностна таблица:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

След съответни задачи за упражнения, се разглежда понятието еквивалентността на две съждения. Във връзка с определението за еквивалентност на две съждения, се пише "Ясно се вижда, че всяко съждение е еквивалентно на себе си, също и ако p е еквивалентно на q , то съждението q е еквивалентно на съждението p. Също ако съждението p е еквивалентно на съждението q , което е еквивалентно на съждението r ,то съждението p е еквивалентно на съждението r ".

В първата задача от упражненията към темата "Еквивалентност на две съждения" се подчертава еквивалентността на всяка двойка от следните съждения и се иска да се покаже тази еквивалентност с използуването на верностни таблици:

1. $/p \wedge p/, p$
2. $/p \vee p/, p$
3. $/p \wedge q/, /q \wedge p/$
4. $/p \vee q/, /q \vee p/$
5. $\neg/p \wedge q/, /\neg p \vee \neg q/$
6. $\neg/p \vee q/, /\neg p \wedge \neg q/$
7. $\neg/p \rightarrow q/, /p \wedge \neg q/$
8. $/p \leftrightarrow q/, /p \rightarrow q/ \wedge /q \rightarrow p/$

Известно е, че еквивалентностите на двойките съждения, дадени в 5 и 6 се наричат закони на de Morgan.

Логическите закони $p \Longleftrightarrow \neg/\neg p/$ и $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$ се дават най-напред при разглеждането на еквивалентността на съжденията с пояснителни примери, а след това се доказват с верностни таблици.

Във втората задача от същите упражнения се иска да се насочат еквивалентни съждения на съжденията:

1. $\neg/\neg p \wedge q/$
2. $\neg/\neg p \vee q/$
3. $\neg/p \rightarrow q/$
4. $\neg p \rightarrow q$

Съдържанието на тази глава, разглеждано като нещо самостоятелно, е добре подбрано; що се отнася обаче до мястото й, тя трябва да е първа защото:

а/ В I глава се използуват логически понятия, без да се говори нищо за тях предварително. Тези понятия се разгледени в IV глава. Такива са например: "Съждение","вярно съждение", "невярно съждение", "отрицание". Ето например какво е писано на стр. 12 за свойствата на празното множество:

1. "Празното множество е единствено.

Нека съждението "празното множество е единствено", не е вярно съждение. Това води до съществуването на поне две различни празни множества. Нека тези множества да са A, B и $A \neq B$ ....

2. Празното множество е същинско подмножество на всяко произволно множество.

Д о к а з а т е л с т в о: Нека A е произволно множество и искаме да се докаже, че $\phi \subset A$.

Ако съждението $\phi \subset A$ не е вярно, тогава неговото отрицание е вярно. Така че $\phi \not\subset A$......".

Същия недостатък се среща в упражненията. Така например задача 10 на стр. 15 се постави въпроса "кои съждения от следните са верни и кои не са верни.

б/ В I,II и III глава се използуват логическите связи "и" ,"или", ако ....,то ....", релациите "следване" и "еквивалентност" в различните дефиниции и теореми , особено при аксиоматичното изграждане на геометрията без да се дава предварително някакво обяснение за тях. По повод на това е уместно да отбележим следната мисъл на Бейли "По всяка вероятност не може да има ефективно въведение в аксиоматика, докато учениците получат някакво разбиране за формите на логическите разсъждения" [45] .

Релацията "следване" не се разглежда и в IV глава. По този начин учениците няма да разберат както трябва темите, които са разгледани в тези глави, а формално ще ги изучават.

Тези теми са следните:

_____ В гл. I се разглеждат множество и операции с множества.

_____ В гл. II се показва аксиоматично изграждане на геометрията, като широко се използува понятието сечение на множества, включително при разглеждане на понятието успоредност.

_____ В гл. III се разглеждат понятията релация /като множество на наредени двойки/, функция, изображение, видове изображения, перпендикулярност /като "релация над множество на всички прави в равнината"/

След тема IV се разглеждат следните теми:

_____ Релация на еквивалентност и релация на наредба

_____ Математическа структура

От тези теми, от начина, по който са разгледани в учебника и от методите по които са използувани ясно се вижда, че понятието множество, /дадено в първа глава/ е изходен пункт за целия учебник.

Също ясно се вижда голямото значение на втората и третата глава по отношение на другите теми, изложени в учебника.

Друг недостатък на гл.IV е следният: тя започва направо с разглеждането на понятието съждение - без да е проведена някаква предварителна подготовка на учениците през разглеждането материал и съвсем конкретно на въпроси като следните:

Каква наука е логиката, с какво се занимава и как е възникнала тя.

Ще изложим една наша примерна разработка на тези въпроси в една тема, озаглавена "Целта на логиката и нейното развитие". При разработката използувахме глава XI от чешкия учебник - математика за XII клас изд. 1971 г., стр. 348.

Целта на логиката и нейното развитие

Процесът на опознаването на реалния свят е сложен и можем да различим в него две качествено различни степени. Първата степен е усещането /опознаване чрез сетива/, резултат на което са усещания и възприятия. От възприятията възниква нашият опит, който след това обработваме чрез мисленето. От познания, които се базират върху нашия опит, можем при правилното мислене да изведем нови познания. В такъв случай става дума за разсъждаване, което представлява второто степен на нашето познание.

Нашите познания за реалния свят ние добиваме не само чрез собствения опит и разсъждения, но и чрез информации за опита и резултати на разсъждения на други лица. За това обаче е нужно да разберем най-обикновените способи на изразяването на мислите и сами да сме способни точно да изразяваме нашите мисли. С това всъщност ние вече се допираме до главните задачи на логиката.

Логиката е наука, която се занимава с изучаването на различните форми на мисленето и изразяването, а също така и изучаването на правилата за правилно разсъждение.

Основните елементи на логическите разсъждения срещаме още при някои антични гръцки философи като например Платон /429-348 пр.н.е./ Обаче едва неговият ученик Аристотел /384-322 пр.н.е./ е създал система на основните познания за елементите и формите на логическото мислене и правилното разсъждаване, с което той е осигурил по-нататъшното развиване на логиката като наука. Резултатите от обширната дейност на Аристотел в тази дисциплина са подредили някои философи от първи век пр.н.е. в сборник, който получава название "Organon".

Макар че не искаме да пренебрегваме резултатите, които са постигнали други лица през последните две хилядолетия на развитие на логиката, трябва да признаем, че през това време тя се развива все по този традиционен начин, който всъщност се опира на резултатите от трудовете на Аристотел. Едва през втората половина на XIX век, когато почват някои математици да се занимават по-дълбоко с изучаването на логиката, те въвеждат в нея някои нови методи на работа преди всичко с това, че за означаването на логическите елементи и операции с тях почват да използуват знаци или символи подобни на тези, каквито са се използували много преди това в математиката.

Точното значение на символичните записи и тяхната нагледност помага за бързото развитие на съвременната логика, която, за да се различава от традиционната логика, обикновено се нарича символична логика или математическа логика.

Елементите от математическата логика се разглеждат по следния ред: съждение, прости съждения, логическите съюзи "и", "или", или.... или, импликация, равнозначност, отрицание, еквивалентност.

Всъщност ако се разгледа понятието еквивалентност преди импликация, ще може учениците да се запознаят със следните важни въпроси:

1. Видове теореми

2. Необходимо и достатъчно условие

Освен това, слабост на учебника е че в него не се разглежда двучленната релация "следване", която заедно с горепосочените понятия е от голямо значение в математиката.

Без отстраняването на посочените недостатъци въведените логически понятия не може да се използват за повишаване ефективността на обучението по математика в средното училище.

Сега ще покажем как може да се разработят темите "Видове теореми","Необходимо и достатъчно условие" и релацията "следване", като първо изясни понятието импликация.

Импликация

В математиката често от две съждения А,В се образува ново съждение. "Ако А, то В", което символично се записва така $A \to B$ и се нарича импликация на А и В. В импликацията $A \to B$, А се нарича предходник, а В - наследник. Импликацията съставе за вярна винаги освен в един случай, именно, когато съждението А е вярно, а В не е вярно. Отношението между верността на съжденията А,В и на импликацията $A \to B$ нагледно се изразява в таблица по следния начин:

p	q	p → q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Най-често импликация $A \to B$ се използува за изразяване на факта, че "съждението B следва от съждението A". Но какво означава едно съждение B да следва от друго съждение? Под тези думи обикновено се разбира, че ако е вярно A, то непременно е вярно и B, например

Ако $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, то следва, че $AB = A_1B_1$

В противен случай, то ако A е вярно, а B е невярно, твърдението, че от A "следва" B се счита за невярно.

В математическите разсъждения е много важно познаването на отношенията между различните импликации, които може да се образуват от две съждения A, B или от техните отрицания. Това познаване е много важно, понеже почти всяка теорема може да се изкаже във форма на импликация, като съждението, изразяващо условието на теоремата, се постави за предходник, а съждението, изразяващо заключението И, се поставя за последник, т.е. има формата $A \to B$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$B \to A$	$\neg A \to \neg B$	$\neg B \to \neg A$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

В таблицата са записани възможните верностни стойности на импликациите $A \to B$, $B \to A$, $\neg A \to \neg B$, $\neg B \to \neg A$.

Ако с $A \to B$ сме означили някаква теорема, то се получава следното:

1. Теоремите които образуват двойката $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, а също и двойката $\neg A \rightarrow \neg B$, $\neg B \rightarrow \neg A$ се наричат взаимно обратни. От таблицата се вижда, че две взаимно обратни теореми могат понякога да са едновременно верни, обаче не винаги е така. Възможно е, едната от две взаимнообратни теореми да е вярна, а другата да е невярна.

2. Теоремите, които образуват двойката $A \rightarrow B$, $\neg A \rightarrow \neg B$, а също и двойката $B \rightarrow A$, $\neg B \rightarrow \neg A$ се наричат противоположни една на друга. От таблицата се вижда, че две взаимно противоположни теореми могат понякога да са едновременно верни, обаче не винаги е така. Възможно е, едната от теоремите, които са взаимно противоположни да е вярна, а другата да е невярна.

3. Теоремите, които образуват двойката $A \rightarrow B$, $\neg B \rightarrow \neg A$, или двойката $B \rightarrow A$, $\neg A \rightarrow \neg B$ се наричат обратно-противоположни една на друга. От таблицата се вижда, че всеки две теореми, от които едната е обратнопротивоположна на другата, или двете едновременно са верни или двете едновременно не са верни, което можем да изразим със следните еквивалентности:
а./ $A \rightarrow B / \Longleftrightarrow / \neg B \rightarrow \neg A/$ б. $/B \rightarrow A/ \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow / \neg A \rightarrow \neg B/$.

Поради съществуването на тези две еквивалентности достатъчно е да докажем само правата теорема и обратната теорема. По този начин в учебниците по математика се разглеждат обикновено само правите теореми и обратните теореми.

Много често в математиката, когато е вярна дадена теорема $A \rightarrow B$, се казва:

1. А е достатъчно условие за В /за верността на В/

2. В е необходимо условие за верността на А.

Във връзка със словосъчетанието "необходимо условие" трябва да подчертаем, че то в разговорния език има малко по-различен и недостатъчно определен смисъл, в сравнение със смисъла му в математиката. Когато кажем например "Необходими са ми пари, за да отида на кино", то това което ни е необходимо предхожда явлението, за което то е "необходимо". В математиката, когато кажем, че "В е необходимо условие за А", разбираме, че "ако е вярно А, то е вярно и В", т.е. верността на А "предхожда" верността на В. Импликацията "Ако естественото число n се дели на 9, то сумата от цифрите на числото n се дели на "9" може да се изрази така:

1. Делимостта на естественото число n с 9 е достатъчно условие за делимостта на сумата от цифрите на числото n с 9.

2. Делимостта на сумата от цифрите на числото n е необходимо условие за делимостта на естественото число с 9.

Каквито и да са твжденията А,В, може да изразим тяхната еквивалентност словесно във формата:

А е еквивалентно на В, т.е. ако едното от тях е вярно, непременно ще е вярно и другото. Например:

1. Ако x е естествено число и сумата на цифрите на x е s, тогава $/3/s/ \Longleftrightarrow /3/x/$

2. Нека x е произволно цяло число, тогава е вярна

$$\left[(2/x) \wedge (3/x)\right] \Longleftrightarrow (6/x)$$

Тези еквивалентности може да се изкажат така:

а. А е еквивалентно на В

б. А е вярно т.с.т.к. В е вярно

с. Ако е вярно А, вярно ще бъде и В и ако е невярно А, невярно ще бъде и В.

д. А е необходимо и достатъчно условие за В/ за верността на В/

Като използуваме тези начини за изказване еквивалентността на две съждения, може да дадем различни словесни изрази на 1 и 2. Между тях например са следните:

1. Сумата на цифрите на х се дели с три т.с.т. к. естествено числото х се дели на три.

2. Делимостта на числото х с две и с три е необходимо и достатъчно условие за делимостта на числото х с шест.

x x x

Смятаме, че на този етап на обучението необходимо е на учениците да се дадат елементарни познания от теорията на логическите разсъждения и математическите доказателства, за да знаят логическата структура на някои разсъждения прилагани от тях в математиката и живота. С тези познания може да се попълни материала, въведен в IX глава. То представляват една от основните цели на дадения материал в тази глава.

<u>- Доказателство на математическите теореми-</u>

За аксиоматичното построяване на който да е клон на математиката, трябва да се намери подходяща система от аксиоми. В тази система се използуват няколко основни понятия, които не е възможно /експлицитно/ да се дефинират. Техните свойства обаче са определени от системата на аксиоми и затова понякога се казва, че тези основни понятия са имплицитни дефинирани чрез системата на аксиомите.

Правилно избраната система от основни понятия и аксиоми на един клон на математиката е изходен пункт за разсъждение при неговото по-нататъшно логично изграждане. Като се използуват правилата за извод от аксиомите се получава теоремите. Да се докаже една математическа теорема, означава да се изведе тя от други теореми, верността на които вече е доказана или от аксиоми.

Математическите теореми често се изразяват във формата на импликация $A \rightarrow B$. Да докажем една такава теорема, означава да изведем от предположението A твърдението B. Понякога е невъзможно от съждението A непосредствено да се изведе съждението B. Ако успеем обаче да докажем верността на всичките импликации на системата;

$A \rightarrow A_1$, $A_1 \rightarrow A_2$.........$A_n \rightarrow B$, тогава от това произтича верността на съждението $A \rightarrow B$.

Във всекидневния живот ние обикновено използуваме редица средства, когато искаме да убедим някой друг човек, че нещо е вярно. Някои от най-ефективните средства апелират директно към нашия разум.

Ако можем да покажем нещо на човек, така че да може да го види, навярно ще бъде по-лесно да го убедим, отколкото ,ако не може да го види.

Естествоизпитателят усъвършенствува тази техника в неговия експериментален метод, така че той е подпомаган от редица средства да "вижда" или "чува" неща, които иначе не би могъл да види.

Микроскопът и радиотелескопът са инструменти, които разширяват областта на неговото усещане, когато се опитва да "докаже" определени научни идеи.

Понякога, обаче, в нашето усилие да обедим някого, използуваме разсъждения като следните: "Това е вярно, защото и онова е вярно", например, както знаем, ако един човек е чужденец за страната А, то той няма право на гласуване в нея. От това следва, че ако Ахил е чужденец за страната А, то той няма право на гласуване в нея. Или може да се каже, че ако за някое число x, $x + 2 = 7$, то $x = 5$. Забележете във всички случаи казахме, че ако определено съждение е вярно, то непременно следва, че определено заключение е вярно.

За един математик, доказателство е разсъждение подобно на последното. Той няма да приеме доказателство, базирано само /просто/ на наблюдение.

Математическата логика е заинтересувана от изследването на методите на доказването на съжденията. Някои основни идеи от логика ще ни помогнат при нашето учене на математиката.

В същия учебник в VIII глава "Кванторите и равенството се разглеждат следните теми:

1. Предикат
2. Общо квантифицирани съждения и квантори за общност.
3. Частично квантифицирани съждения. Квантор за съществуване.
4. Отношение между общо квантифицираните съждения и частично квантифицираните съждения.
5. Отношението между квантифицираните съждения и съюзите.
6. Предикати, съдържащи повече от едно неизвестно и техните квантори."

Във втория раздел заслужава специално внимание пример 5 от стр. 126, затова първо ще се спрем на него.

"Знаем, че релацията е множество, в което всеки елемент е наредена двойка и символично може да се запише така:

Ако е вярно съждението:

/$\forall$ x/ ако $x \in R$,то x е наредена двойка/

тогава R е релация.

Сега ще проверим дали празното множество $\emptyset$ е релация или не.

За да стигнем до това, доказваме, че съждението:

/$\forall$ x/ /ако$x \in \emptyset$,то x е наредена двойка/

е вярно.

За да се докаже верността на това съждение трябва да се покаже, че всеки обект удовлетворява предиката:

"Ако $x \in \emptyset$,то x е наредена двойка"

Нека "a" е произволен обект. Като заместим x с a в този предикат ще получим съждението "Ако $a \in \emptyset$,то a е наредена двойка.

Но "$a \in \emptyset$ " е невярно съждение за всяко a, понеже празното множество не съдържа нито един елемент. От тук и от дефиницията за верността на импликацията следва, че съждението "$a \in \emptyset$,то a е наредена двойка" е вярно."

Ясно се вижда, че в доказателството на този пример се използува факта, че "импликацията A $\rightarrow$ B е вярна винаги, когато V /A/ = 0".

Въпрос още на стр. 72 когато се разглежда импликацията, се дава един ясен и интересен пример, който обяснява подробно отношението между различните възможни стойности на A и B в импликацията и верността на цялата импликация. Този пример

Затова фактически
не е математически, в областта на математиката до съответния момент още не са дали необходимите познания за да могат да разберат факта, че едно вярно заключение може да се получи от невярно предположение. За да се отстрани този недостатък от аритметиката може да се даде следния пример: От неверния предходник $A - 1000000 = 1$ в импликацията $A \rightarrow B$ може да се получи верният наследник $B - 0 = 0$.

Такива доказателства може би са трудни за този етап на обучението.

За да дадем представа за това, което се разглежда за "частично квантифицирани съждения" ще цитираме някои задачи от стр. 130.

1. Кои от следните квантифицирани съждения са верни и кои не са:

$/\exists x/$ x е просто число и x е четно число/

$/\forall x/$ ако x е цяло число, то $x < x^2/$

$/\exists x/$ /x цяло число, така че $2 > x > 1/$

2. Преведете на символичен език следните съждения:

Не всички философи са мъдри

Съществува поне едно отрицателно цяло число

Съществува едно множество, съдържащо два елемента.

Правата съдържа две точки

Няколко студенти са умни.

От двете задачи се вижда ясно, че от учениците се иска да свикват да използват дадените преди това логически понятия и символи, а именно кванторите за общност и за съществуване $/\forall, \exists/$, при изразяване на различни математически твърдения. Като имаме предвид, че логическите понятия и символи се използуват често при разглеждането на почти всичките по-нататъшни теми в учебника, можем да заключим, че цитираните задачи а и другите задачи, дадени в същото упражнение, представляват необходима крачка към разбирането на тези теми.

В темата отношение между общо квантифицираните съждения и частично квантифицираните съждения се разглежда отрицанието на кванторите за общност и за съществуване. Дава се следната теорема:

Нека $p\,/x/$ е предикат, тогава

1/ $/\exists x/\ p\,/x/$ е еквивалентно на $\neg[/\forall x/\ \neg p/x/]$

2/ $/\forall x/\ p\,/x/$ е еквивалентно на $\neg[/\exists x/\ \neg p/x/]$

3/ $\neg/\exists x/\ p\,/x/$ е еквивалентно на $/\forall x/\ \neg p/x/$

4/ $\neg/\forall x/\ p/x/$ е еквивалентно на $/\exists x/\ \neg p/x/$

Доказва се случаите 1 и 2, а 3 и 4 се предоставят на учениците.

Към темата са дадени и подходящи задачи за упражнение. Такава е например зад. 3 от стр. 135.

"Нека $p/x/$, $Q/y/$ са предикати

Отречете следните съждения

а. $/\forall x/\ p\,/x/$ или $/\exists y/\ Q\,/y/$

б. $/\exists x/\ P\,/x/$ и $/\forall y/\ Q/y/$

в. $/\exists x/\ P/x/ \rightarrow /\forall y/\ Q\,/y/$

г. $/\forall x/\ P\,/x/ \rightarrow /\exists y/\ Q\,/y/$

За да могат учениците да решат тези задачи трябва да познават еквивалентността на изразите:

$\neg/p \wedge q\,/ .\ \neg p \vee \neg q$

$\neg/p \vee q\,/ .\ \neg p \wedge \neg q$

$\neg/p \rightarrow q\,/ .\ p \wedge \neg q$

Съответните еквивалентности обаче не се разглеждат като задължителни, а са дадени в задача. И ако някой ученик не е решил тази задача, няма да може да реши и цитираната зад. 3 от стр. 185.

Подходяща към темата е и задача 6 от стр. 185

"Ако a е права, отречете следните съждения:

1. Съществува права перпендикулярна на a

2. Всички прави са успоредни на a.

3. Съществуват поне две точки, лежащи на a.

4. Всички прави са взаимно перпендикулярни на a.

За разкриване връзката между квантифицираните съждения и логическите съюзи се дава следната теорема.

"Нека $P/x/$, $q/x/$ са предикати

1. $/\forall x/\ [p/x/$ и $q/x/]$ е еквивалентно на $/\forall x/\ p/x/$ и $/\forall x/\ q/x/$

2. $/\exists x/\ [p/x/$ или $q/x/]$ е еквивалентно на $/\exists x/\ p/x/$ или $/\exists x/\ q/x/$

3. $/\exists x/\ [p/x/$ и $q/x/] \to /\exists x/\ p/x/$ и $/\exists x/\ /q/x/$"

След разглеждането на пояснителен пример се доказват случаите 1 и 3, а доказателството на 2 се предоставя за учениците, понеже то е подобно на доказателството на 1.

В задача 2 от упражненията на стр. 188 с контрапример се доказва, че обратната импликация на 3 не е вярна.

В задача 3 от същото упражнение се иска да се докажат следните импликации:

1. $/\forall x/\ [p/x/$ или $q/x/] \to /\forall x/\ p/x/$ или $/\exists x/\ q/x/$

2. $[/\forall x/\ p/x/]$ и $[/\forall x/\ p/x/] \to /\exists x/\ [p/x/$ и $q/x/]$

Чрез тези импликации всъщност се показват други връзки между кванторите за общност и за съществуване и съюзите.

Един сериозен недостатък в разработката на темата е липсата на примери с математическо съдържание.

Въпросът за предикати, съдържащи повече от една променлива и техните квантори се разглежда по следния начин:

Дават се пояснителни примери, за да се достигне до следната теорема:

Нека $p/x, y/$ е предикат

/1/ $/\forall x/\ /\forall y/\ p/x,y/$ еквивалентно на $/\forall y/\ /\forall x/\ p/x,y/$

/2/ $/\exists x/\ /\exists y/\ p/x,y/$ еквивалентно на $/\exists y/\ /\exists x/\ p/x,y/$

/3/ $/\exists x/\ /\forall y/\ p/x,y/ \rightarrow /\forall y/\ /\exists x/\ p/x,y/$

/4/ $/\exists y/\ /\forall x/\ p/x,y/ \rightarrow /\forall x/\ /\exists y/\ p/x,y/$

Доказват се само случаят 3, а 1 и 2 се оставят на учениците за упражнения, понеже техните доказателства са лесни.

И тук към темата са дадени подходящи задачи за упражнения. Такава е например зад. 4 от стр. 143.

"Нека f е изображение на $A \to B$

Какво значи, че изображението f не е инекция(Injection)

Какво значи, че изображението f не е сурекция(Surjection)

Какво значи, че изображението f не е биекция(Bijection)

Като имаме пред вид и други математически задачи в същото упражнение, можем да заключим, че тази тема е въведена и разработена добре, понеже по този начин се осмисля по-задълбочено и се записва символично важен материал на новата програма, а именно релациите. Тази символика, която се използува често в осма глава "Видове релации", ни дава възможност да изразим ясно и точно математическите разсъждения.

2. Опровергаващ пример

Редица теореми могат да се запишат във вида:

$$/\forall x/\ (p/x/ \rightarrow q/x/)$$

p /x/ и q /x/ са предикати , определени в M

или във вида

$$/\forall x/\ (p\ /x/)$$

Като се използуват еквивалентностите

$$\neg[/\forall x/\ \ p\ /x/] \Leftrightarrow /\exists x/\ \neg p/x/ \ ....(1)$$

$$\neg /\forall x/ (p/x/ \rightarrow q/x/) \Leftrightarrow /\exists x/ (p/x/ \wedge \neg q/x/)$$

Може да се докаже неверността на твърдението $/\forall x/\ p/x/$ респективно на $/\forall x/\ \ (p/x/ \rightarrow q/x/)$

Пример:

Теорема /Вярна/. Ако един четириъгълник е квадрат, то диагоналите му са перпендикулярни.

Обратно твърдение на теоремата. Ако диагоналите на един четириъгълник са перпендикулярни, то той е квадрат.

Нека

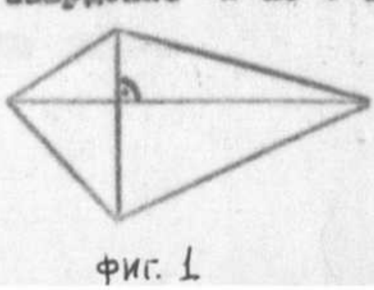
M - множеството на всички четириъгълници X,

p/x/ - / x е квадрат/ - предикат определен в M

Тогава твърдение 2 се записва така

$$/\forall x \in M\ /\ \ p/x/$$

Тъй като $\neg /\forall x \in M\ /\ p\ /x/ \Leftrightarrow\ /\exists x \in M\ /\neg p/x/$, ясно е защо като се посочи пример на четириъгълник с перпендикулярни диагонали, който не е квадрат /фиг.1/ се заключава, че твърдение 2 не е вярно.



фиг. 1

Наистина с примера фактически се доказва верността на твърдението $/\exists x/ \neg p/x/$, а от там и верността на $\neg(/\forall x/ \; p/x/)$. Като се приложи закона за изключеното противоречие $\neg/p \wedge \neg p/ = 0$ може да се направи извод, че твърдението $/\forall x/ \; p/x/$ не е вярно.

По този начин се обосновава защо дадено твърдение може да се "опровергае" с пример. Методът на доказване на теоремите с контрапример всъщност е косвено доказателство. При него се установява, че отрицанието $\neg p$ на едно твърдение p е вярно и от там, че p не е вярно. Голямо е приложението на този метод, при опровергаване на някои твърдения получени чрез непълна индукция.

Така например Ферма е изказал твърдението:
За всяко естествено число n числото $2^{2^n} + 1$ е просто.
Очевидно то може да се запише така:
$/ \forall n \in N / \; / 2^{2^n} + 1$ е просто число/

Ойлер обаче показал, че $2^{2^5} + 1$ не е просто число, и с това, че твърдението на Ферма не е вярно. Той всъщност е доказал, че е вярно твърдението.
$/ \exists n \in N / \; / 2^{2^n} + 1$ не е просто число/

Ако обаче не може да се намери контрапример, съвсем не значи, че твърденията $/\forall x \in M(p/x/$ или $/\forall x \in M(p/x/ \rightarrow q/x/)$ са верни.

За да се докаже това, трябва да се провери, че за всяко x от M тези сждения са верни.

Това обаче е много трудно, ако елементите на M са безбройно много.

В учебника „Съвременна математика" за X клас се използува този метод при доказателство на няколко теореми.

Еквивалентността 1 е дадена в теорема на стр. 132

На стр. 134 като пояснителен пример за 1 се дава следния пример 2

Отрицанието на съждението

/Всички живи същества се нуждаят от кислород/....2

не е, както си представят някои:

/Всички живи същества не се нуждаят от кислород/,

а всъщност е

/Съществуват някои живи същества, които не се нуждаят от кислород/

или с други думи

/Съществува поне едно живо същество, което не се нуждае от кислород/.

За да разберем начина, по който се образуват отрицанията на съждението 2, превеждаме първо това съждение символично и получаваме:

$/\forall x/$ /Ако x е живо същество, то x се нуждае от кислород/.

Отрицанието на това съждение е

$\neg / \forall x/$ /Ако x е живо същество, то x се нуждае от кислород/. Според еквивалентността /1/ последното съждение е еквивалентно на

$/\exists x/$ $\neg$ /Ако x е живо същество, то x се нуждае от кислород/..... /3/

Това съждение е еквивалентно на

$/\exists x/$ /x е живо същество и x не се нуждае от кислород/...../4/

или на

съществуват някои живи същества, които не се нуждаят от кислород".

Можем да смятаме, че споменатият пример е интересен и осигурява една добра подготовка за по-нататъшни математически приложения на логическия закон

$$\neg /\forall x/ \quad p/x/ \iff \exists /x/ \quad \neg p/x/$$

Той обаче има и сериозен недостатък. Този недостатък се състои в това, че като се подчертава еквивалентността на /3/ и /4/ всъщност се използува логическият закон

$$\neg [p/x/ \rightarrow q/x/] \iff [p/x/ \quad \wedge \quad \neg q/x/]$$

което не е дадено преди това. Затова няма да бъде ясна за учениците една важна стъпка от доказателствата, в които се използува този метод. За това считаме че този закон трябва да се даде преди да се използува при доказателства на теореми.

Ще се спрем на два математически примера, в които този метод се използува в учебника.

1. В упражнението на стр. 142 се дава следната задача: "Нека p/x,y/ е предиката

p/x,y/, $x \in B$, $y \in A$, $x^2 = y$,

където $A = 1,4,9,16,25,36,49$

$B = 1,2,3,4,5,6,7$

Докажете че

а. $/\forall y/ \quad /\exists x/ \quad p/x,y/$ е вярно съждение

б. $/\exists x/ \quad /\forall y/ \quad p/x,y/$ е невярно съждение

с. $/\forall y/ \quad /\exists x/ \quad p/x,y/ \rightarrow /\exists x/ \quad /\forall y/ \quad p/x,y/$ е невярно съждение"

Тази задача показа, че съжденията:

$/\forall y/ \quad /\exists x/ \quad p/x,y/$

$/\exists x/ \quad /\forall y/ \quad p/x,y/$

не са еквиволентни".

2. На стр. 160 в темата "Обратимост на релацията, която е функция" четем следното:

"Ние сме учили..... и че релацията представлява функция, ако е вярно следното

Ако $/x,y/\in f$, $/x,y'/\in f$, то $y = y'$

Сега да се спрем на следния въпрос:

Обратната релация на функция, функция ли е?

За да отговорим на този въпрос, да разгледаме следната релация, която е функция.

$f = \{/1,1/, /1,-1/, /4,2/, /-2,4/, /3,9/.\}$

Ще покажем, че нейната обратна релация

$f^{-1} = \{/1,1/, /-1,1/, /2,4/, /4,-2/, /9,3/\}$

не е функция. Наистина

$/4,2/\in f$ $/4,-2/\in f^{-1}$, но $2 \neq -2$

Така доказахме:

Не всяка обратна релация на функция е функция т.е.

$\neg / \forall f$ /Ако f е релация, която е функция, то f^{-1} е функция/

С други думи това твърдение може да се изкаже и така

$/\exists f /$ / f е релация, която е функция и f^{-1} не е функция/.

Това, до което стигнахме, не трябва да ни кара да си мислим, че обратната релация на никоя функция не е функция". След това, за да се опровергае верността на последното твърдение, се дава следният пример:

"Нека f е функцията:

$f = \{/x,y/ \text{ , x е цяло число, y е цяло число, } y = x + 2\}$

Нека $/y, x/, /y, x'/$ са елементи в f^{-1}, т.е.:

$/y, x/ \in f^{-1}, /y, x'/ \in f^{-1}$

Това се свежда до

$/x,y/ \in f, /x', y/ \in f$

което означава, че

$x + 2 = x' + 2$

значи: $x = x'$

Следователно f^{-1} е функция.

Ясно е тогава, че обратните релации на някои функции са функции, а на други - не са функции".

Г Л А В А   Т Р Е Т А

АНАЛИЗ НА ПРОВЕДЕНИЯ ЕКСПЕРИМЕНТ ЗА ПРОВЕРКА И ПОДКРЕПА НА НЯКОИ ОТ РАЗРАБОТЕНИТЕ ИДЕИ

Наред с направения анализ на учебниците и друга литература се проведоха и експериментални изследвания в някои иракски училища.

За да се разбере по-точно до каква степен учениците усвояват теоремите, които се доказват с помощта на косвения метод, беше подготвен и изпратен в Ирак експериментален материал. Разработеният учебен материал се състои от два урока. В първия урок се разкрива същността на косвеният метод, и уточняват понятията и законите, които лежат в основата на този метод.

Примерите, които бяха използувани за разясняване на понятията и законите, са избрани от ежедневието и от училищния курс по математика.

Във втория урок е разработена темата "Срещу по-голям ъгъл в триъгълника лежи по-голяма страна".

Експериментът се проведе през 1978 г. в гр.Багдад, в училище Абу убайда. За провеждане на експеримента се използуваха две паралелки в VIII клас - една експериментална и една контролна.

В експерименталната паралелка темата "Срещу по-голям ъгъл в триъгълника лежи по-голяма страна" се разработва съгласно предложената от нас разработка, а в контролната- традиционно, по учебника.

Какво показаха проведените контролни работи в тези две паралелки?

1. Около 85 % от учениците в експерименталната паралелка осъзнават, че за да се докаже верността на едно твърдение е достатъчно да се докаже неверността на неговото отрицание, докато в контролната паралелка процента на тези учебници е едва 20 %;

2. 75 % от учениците на експерименталната паралелка образуваха правилно отрицанието на съждението – AC > AB, като дизюнкция на две съждения. Но нито един ученик от контролната паралелка не може да образува правилно отрицанието на това съждение.

3. Няма ученици от първата паралелка, които да смесват съдържанието на правата и обратната теореми, но само 31 % от учениците от втората паралелка доказват обратната теорема.

4. 70 % от учениците от експерименталната паралелка доказаха правилно теоремата, но нито един ученик от контролната паралелка, не е доказал абсолютно вярно тези теорема.

Ето един типичен отговор на ученика С.М. от експерименталната паралелка. Ако ∢ ABC > ∢ ACB, да се докаже, че AC > AB.

"За да докажем, че AC > AB, достатъчно е да докажем че неговото отрицание не е вярно.

Отрицанието е AC = AB или AC < AB

Ако допуснем, че AC = AB, това означава, че ∢ ABC = ∢ ACB, което противоречи на ∢ ABC > ∢ ACB

Съждението AC = AB не е вярно.

Ако допуснем че $AC < AB$, това означава, че $\angle ACB > \angle ABC$, което противоречи на $\angle ABC > \angle ACB$
Следователно $AC < AB$ не е вярно.

$\therefore AC > AB$

Резултатите показват, че ако учениците се обучават в усвояване на необходимите логически понятия и правила, лежащи в основата на този метод, може да има добри резултати. В противен случай учениците не са в състояние да разберат същността на този метод и са принудени да наизустяват дефинициите и теоремите, без разбиране.

По принцип след теоремите, доказателствата на които зависят от косвения метод, необходимо е да се дават задачи, решенията на които също зависят от този метод. За да свикват учениците да боравят с него, трябва да затвърдим не само закономерността, но и неговото приложение. Но това не е направено в учебника "Планиметрия за VIII клас". В упражненията, дадени след първите три теореми, които се доказват чрез този метод, няма нито една задача, която се доказва чрез косвения метод. След експерименталната работа бяха изпитани ученици от експерименталната и контролната паралелка върху следните задачи:

1. Докажете, че не е вярно, че

"Ако триъгълникът ABC е тъпоъгълен с тъп ъгъл при върха B и с височина BD, то точката D е вътрешна за отсечката AB."

2. Докажете, че не е вярно, че

"От точка, извън дадена права, може да се спуснат две перпендикуляра към правата".

Резултатите от тази проверка бяха следните:

а/27 % от учениците на експерименталната паралелка решиха правилно първата задача, а само 13 % от учениците на втората паралелка решиха правилно същата задача.

б/20 % от учениците на първата паралелка решиха правилно втората задача, а само 13 % от учениците на втората паралелка решиха правилно същата задача.

По наше мнение резултатите показват следното:

1. От ниските проценти на правилните отговори на учениците от I-ва паралелка може да се заключи, че начинът на разсъждения, с който са запознали в урока преди да се разгледа теоремата. "Срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна", а също и метода, по който се доказва самата теорема, не са оказали голямо влияние за резултатното усвояване на същността на косвените доказателства. Така се получава, понеже преди това те са учили доказателства на теоремите по догматичен начин.

За да може по-ефикасно да се подобри това положение, необходимо е учениците да се обучават на елементи от съдържателната логика още от долните класове, а също така трябва да има система и последователност в работата по развитието на логическото мислене.

2. Получаването на по-добри резултати от учениците в първата паралелка, отколкото от учениците във втората паралелка показва, че ако учениците учат и усвояват необходимите логически понятия и правила, лежащи в основата на косвения метод, ще могат да доказват непознати за тях преди това математически факти, чиито доказателства зависят от този метод, по-добре отколкото учениците, които не са изучавали тези понятия и правила.

Наред с експерименталните изследвания през 1973 г. беше подготвен и изпратен в Ирак експериментален тест. Този тест се състои от 12 въпроса, подготвени за ученици в XII клас. В експеримента участвуваха около 100 ученика.

Целта на експеримента беше да се изследва до каква степен те разбират някои логически понятия, които всъщност са необходими за училищния курс по математика като например: конюнкция, дизюнкция, отрицание на конюнкция и дизюнкция, импликация, съждителни функции, операции със съждителни функции, правила за извод – модус поненс и модус толенс. Разбира се всички тези понятия се използуват непълно явно и осъзнато в учебниците и искахме да проверим как именно при това положение те се усвояват.

Въпросите на теста бяха следните:

1. Срещу всяко от следните твърдения да се отбележи дали е вярно или е невярно:

а/ $4 < 5$ .....

б/ $4 \leq 5$ .....

в/ $4 > 5$ .....

г/ $4 \geq 5$ .....

д/ $4 \geq 4$ .....

2. Прочетете внимателно изречението:

"Не е вярно, че правата q лежи в равнината α, а правата p не лежи в равнината α ".

Преценете с кое от следните изречения е изразена същата мисъл и подчертайте това изречение.

а/Правата q не лежи в равнината α и правата p не лежи в равнината α .

б/Правата q не лежи в равнината α, а правата p лежи в равнината α .

в/Правата q не лежи в равнината α или правата p лежи в равнината α.

г/Правата q лежи в равнината α и правата p лежи в равнината α.

3. Прочетете изречението:

"Не е вярно, че $a \leq 4$"

Преценете с кое от следните изречения е изразена същата мисъл и подчертайте това изречение:

а/ а не е по-малко от 3 или а не е равно на 3;

б/ а не е по-малко от 3 и а не е равно на 3;

в/ а не е по-малко от 3, но а е равно на 3;

г/ а не е по-малко от 3, но а не е равно на 3;

4. Намерете всички стойности на x, за които дробта $\frac{x-5}{x^2+1}$ не е отрицателна.

5. Измежду примерните отговори по-долу изберете и подчертайте отрицанието /противното, противоречащото/ на твърдението

"Ако $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$"

Примерни отговори:

а/ Ако $ab \neq 0$, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$

б/ Ако $ab \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$

в/ $ab \neq 0$, или $a = 0$ или $b = 0$

г/ $ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$

д/ $ab = 0$, но $a \neq 0$ и $b \neq 0$

6. Прочетете изречението

"Не е вярно, че влаковете или автобусите в неделя се движат със закъснение".