xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА КАДРИ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Сектор "ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ"

Д И С Е Р Т А Ц И Я

на тема :

ОПЕРАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА НЯКОИ ОБОБЩЕНИ УРАВНЕНИЯ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

за присъждане на научната степен "КАНДИДАТ НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ"

ДИСЕРТАНТ :

С Т Е Ф А Н Ц О Ч Е В К О П Р И Н С К И

СОФИЯ - 1975 г.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx стр.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е:

стр.

ОПЕРАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА НЯКОИ ОБОБЩЕНИ УРАВНЕНИЯ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

С Т Е Ф А Н Щ О Ч Е В К О П Р И Н С К И

У В О Д

§ 0.1. КРАТКО ОПИСАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Предмет на дисертацията са някои операционни методи за ефективно намиране на решенията на някои обобщени уравнения на топлопроводността. Глава 1 няма самостоятелно значение и е подготвителна за получаване на крайните резултати в глави 2, 3 и 5. В нея извеждаме рекурентни формули за представяне на някои оператори на Микусински като функции. Те са тясно свързани с уравненията на топлопроводността при полиномни и частично полиномни начални и гранични условия, вж. [15-18] .

В глава 2 разглеждаме обобщеното уравнение на топлопроводността $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}-cu+d(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}$ с постоянни коефициенти $a>0$, b , $c\geqq 0$ в областта $\begin{cases}0\leqq x<\infty\\0\leqq t<\infty\end{cases}$, където смутителната функция $d(x,t)$ е произведение от функция на x и функция на t , т.е. $d(x,t)=d_1(x).d_2(t)$. За еднозначно определяне на решението на диференциалното уравнение се налага изискването растежът на $d_1(x)$ да не надминава растежа на експоненциална функция $e^{\lambda_1 x}$, $\lambda_1>0$, при неограниченото растене на x , т.е. изискваме $d_1(x)=O(e^{\lambda_1 x})$ при $x\to\infty$ за някаква константа $\lambda_1>0$. Разглеждаме начално условие $u(x,0)=\varphi(x)$ за всяко $x\geqq 0$, където отново за еднозначно определяне на решението се изисква $\varphi(x)=O(e^{\lambda_2 x})$ при $x\to\infty$ за някаква константа $\lambda_2>0$. Предполагаме в началото на полубезкрайния интервал $0\leqq x<\infty$ гранично условие от I род $u(0,t)=f(t)$ за всяко $t\geqq 0$ с условие за спрегнатост с началното условие $f(0)=\varphi(0)$. При окончателното намиране на решението се ограничаваме до случаите, когато $\varphi(x)$, $f(t)$, $d_1(x)$ и $d_2(t)$ са полиноми или частично полиномни функции. Очевидно, тогава растежът на $\varphi(x)$ и $d_1(x)$ не надминава растежа на експоненциална функция при $x \to \infty$.

В глава 3 разглеждаме същото обобщено уравнение на топлопроводността, но при други гранични условия в началото на полубезкрайния интервал $0 \leq x < \infty$. За да не увеличаваме обема на пресмятанията с повтарящи се по принцип резултати, разглеждаме нулево начално условие и нулева смутителна функция. Последователно намираме решението на диференциалното уравнение при гранично условие от II род $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = f(t)$ за всяко $t \geq 0$ и при гранично условие от III род $A\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + Bu(0,t) = f(t)$ за всяко $t \geq 0$ където $A \neq 0$ и B са константи. При окончателното намиране на решението се ограничаваме до случаите, когато $f(t)$ е полином или частично полиномна функция. В глави 2 и 3 решението на обобщеното уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти търсим чрез прилагане на операционни методи, като използваме директния алгебричен подход на Микусински [1], който е изложен в сбита форма и от Ердей [2] .

Обобщените уравнения на топлопроводността с постоянни коефициенти от този тип играят важна роля в теорията на топло-масообмена, а също в теорията на филтрацията при наклонени терени и другаде. Полубаринова-Кочина [3] разглежда уравнение от посочения тип при $c = 0$,нулева смутителна функция и гранично условие от I род, където $f(t)$ е линейна функция. Чрез прилагане на лапласовата трансформация тя свежда въпроса до намиране оригинала на

$\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^2}$, $k \geq 0$, $\alpha > 0$. Други автори, като Керслоу и Егер [4] и Ликов [5] , разглеждат дори класическото уравнение на топлопроводността $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ при III гранично условие само за случая, когато $f(t)$ е константа.

Друг кръг въпроси са тясно свързани с класическото уравнение на топлопроводността $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ в областта $\begin{cases}0\le x<\infty\\0\le t<\infty\end{cases}$, което е частен случай както от обобщеното уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти, така и от един клас обобщени уравнения на топлопроводността с променливи коефициенти. Разбира се, обобщеното уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти чрез подходяща смяна на променливите, известна в литературата, може да се сведе до класическото уравнение на топлопроводността, но това би довело до усложняване на началните и гранични условия, без да улесни в крайна сметка намирането на решението.

Глава 4 е посветена на оператора от беселов тип $B_K=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{K}{r}\cdot\frac{d}{dr}$, $K\ge 1$,като накрая в § 4.3 чрез известната формула на Дарбу-Вайнщайн $r^{K-1}B_K=B_{2-K}\,r^{K-1}$ се вижда как случаят $K<1$ се свежда до случая $K>1$. Като използуваме метода на Димовски [6] за построяване на операционно смятане за най-общия диференциален оператор от беселов тип $B=t^{\alpha_0}\frac{d}{dt}t^{\alpha_1}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}t^{\alpha_m}$, $Re(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m)<m$, в § 4.1, който е помощен за другите параграфи в глава 4, изграждаме операционно смятане за оператора B_K . Левитан [7] извлича от интегралите на Сонин / Николай Яковлиевич Сонин, 1849-1915 / интегрална трансформация, наречена от него трансформация на Сонин, която използва за разлагане на функция в ред по беселови функции. Като използуваме някои от идеите, изложени в § 4.1, в § 4.2 получаваме в модифициран вид както трансформацията на Сонин φ_K :

$$\varphi_K\,u(r)=\frac{r^K}{\Gamma(\frac{K}{2})}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{K}{2}-1}\,u(r\sqrt{\rho})\,d\rho\qquad,\ K\ge 1\ ,$$

така също и други трансформации, които се оказва, както е показано в § 4.3, че са подобия между оператора B_K и оператора за двукратно диференциране $\frac{d^2}{dr^2}$, т.е. $\varphi_K B_K=\frac{d^2}{dr^2}\varphi_K$.

Резултатите от глава 4 ефективно се прилагат в глава 5, която е посветена на беселовото уравнение на топлопроводността

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$, в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leq t<\infty \end{cases}$,

разглеждано от Хаимо [8-10] и Колтон [11] , за случая $k \geq 1$, с начално условие $u(r,0)=\varphi(r)$ и гранично условие при $r \to +0$ за някои случаи, които имат физически смисъл, а именно:

I гранична задача $\lim_{r\to+0} u(r,t)=f(t)$;

II гранична задача $\lim_{r\to+0} r\frac{\partial u}{\partial r}=f(t)$ само за аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността / $k=1$ /. Такова условие разглежда Ромберг [12] за аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността в областта $\begin{cases} 0<r\leq R \\ 0\leq t<\infty \end{cases}$. Разглеждаме и II гранична задача от типа $\lim_{r\to+0} r^p\frac{\partial u}{\partial r}=f(t)$, $0\leq p<1$, като демонстрираме намирането на решението на диференциалното уравнение при $p=0$ за случая $k=1$.

III гранична задача е безсмислена от физическо гледище, тъй като по оста на ососиметричното тяло не може да има топлообмен с околната среда. Уравнението на централно-симетричната топлопроводност в сферични координати / $k=2$ / няма самостоятелно значение, тъй като чрез умножение на диференциалното уравнение с r и полагане $V(r,t)=ru(r,t)$ то се свежда до класическото уравнение на топлопроводността $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial t}$,което е частен случай на разгледаното в глави 2 и 3 обобщено уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти.

Чрез предварителна транслация, където се налага заради приложимостта върху съответния клас от функции, а където е възможно и чрез директно прилагане на трансформационни оператори от типа φ_k върху беселовото уравнение на топлопроводността $aB_k u=\frac{\partial u}{\partial t}$ и съответните начално и гранично условия, го свеждаме до класическото уравнение на топлопроводността $a\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leqq t<\infty\end{cases}$ с начално и гранично условия от типа на разгледаните в глави 2 и 3. За случаите, когато $\varphi(r)$ и $f(t)$ са полиноми, като се използуват в модифициран вид резултатите от глави 2 и 3, в някои случаи се намира решението в окончателен вид. Такъв начин за намиране решението на беселовото уравнение на топлопроводността, доколкото е известно на автора, не се среща в достъпната литература.

§ 0.2. КРАТКИ СВЕДЕНИЯ ОТ ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

Директният алгебричен подход на Микусински [1], [2] за обосноваване на класическото операционно смятане на Хевисайд се основава на понятието конволюция. Ще означаваме с C класа от непрекъснатите комплексно-значни функции в интервала $0\leqq t<\infty$, а с $\mathcal{K}$ -класа от функции $f(t)$, разглеждани в интервала $0\leqq t<\infty$, с най-много краен брой точки на прекъсване във всеки краен интервал и за които $\int_0^t|f(\tau)|d\tau<\infty$ за всяко $t>0$. Очевидно, $C\subset\mathcal{K}$ и полиномите и частично полиномните функции са от класа $\mathcal{K}$.

Ще означаваме с l оператора за интегриране $lf(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$. Очевидно, ако $f(t)\in\mathcal{K}$, то $lf(t)\in\mathcal{K}$. Конволюция на l за $f(t)$, $g(t)\in\mathcal{K}$ се нарича интегралът

/0.2.1/ $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=t\int_0^1 f(t(1-\tau))g(t\tau)d\tau\in\mathcal{K}$.

Конволюцията на оператора за интегриране l е билинейна, комутативна и асоциативна операция, за която от f, $g\in\mathcal{K}$ следва $f*g\in\mathcal{K}$, с мултипликативното свойство

/0.2.2/ $l(f*g)=(lf)*g$.

За функции от класа $\mathcal{K}$ конволюцията няма делители на нулата, което е непосредствено следствие от известната теорема на Тичмарш, отнасяща се за функции от класа C.

Микусински влага пръстена $\mathcal{K}$ с действията $+$ и $*$ над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа в полето $\mathcal{M}$ от конволюционните частни, което ще наричаме поле на Микусински. Елементите на полето $\mathcal{M}$ ще наричаме оператори на Микусински или просто "оператори", като кавички поставяме, за да различаваме операторите на Микусински от общоприетото понятие за оператор. Умножението в $\mathcal{M}$ ще означаваме без $*$,както се означава умножението на числа. Функциите $f(t)\in\mathcal{K}$, когато ги разглеждаме като "оператори", т.е. като елементи от полето $\mathcal{M}$, ще ги бележим $f=\{f(t)\}$ и означаваме $\{f(t)*g(t)\}=\{f(t)\}\{g(t)\}=fg$. Естествено е да отъждествим $\ell=\{1\}$ поради очевидното равенство $\{1\}\{f(t)\}=\int_0^t f(\tau)d\tau$. Различаваме константите от функциите-константи, като числовият "оператор" $\alpha\in\mathcal{M}$ се представя като конволюционното частно $\alpha=\dfrac{\{\alpha\}}{\{1\}}$. В този смисъл стойността $f(0)$ на функцията $f(t)\in\mathcal{K}$ е числовият "оператор"

/0.2.3/ $$f(0)=\frac{\{f(0)\}}{\{1\}}\in\mathcal{M} .$$

"Операторът" $s\in\mathcal{M}$, обратен на $\ell=\{1\}\in\mathcal{M}$, не е функция от $\mathcal{K}$ и за него е в сила, вж. [1] ,стр. 113, основното равенство на операционното смятане

/0.2.4/ $$s\{f(t)\}=\{f'(t)\}+f(0)$$

за $f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$ -класа от функции, чиито производни са от $\mathcal{K}$, или записано по друг начин

/0.2.5/ $$sf=f'+f(0) ,$$

а също и по-общото равенство

/0.2.6/ $$\{f^{(n)}(t)\}=s^n\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

за $f(t)\in\mathcal{K}^{(n)}$ -класа от функции, за които $f^{(n)}(t)\in\mathcal{K}$.

Доказват се равенствата

$$/0.2.7/ \quad \ell^n = \frac{1}{s^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и се обобщават, вж. [1] ,стр. 111, за всяко реално λ :

$$/0.2.8/ \quad \ell^\lambda = s^{-\lambda} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \in \mathcal{K} \subset \mathcal{M} \qquad \text{за } \lambda > 0 ,$$

откъдето следва формулата за дробно интегриране

$$/0.2.9/ \quad \ell^\lambda \{f(t)\} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \in \mathcal{K} \quad , \lambda > 0 ,$$

като се дефинират и $\ell^0 = s^0 = 1 \in \mathcal{M}$; $\ell^{-\lambda} = \frac{1}{\ell^\lambda} = s^\lambda \in \mathcal{M}$, $\lambda > 0$,

така че $\ell^\lambda \ell^\mu = \ell^{\lambda+\mu}$ за реални λ и μ .

За съгласуване на директния подход на Микусински с подхода, използващ трансформацията на Лаплас, една и съща функция $f \in \mathcal{M}$ ще означаваме както с $\{f(t)\}$, така и с $\bar{f}(s)$. Обръщането на лапласовите трансформанти $\bar{f}(s)$ се замества с "тълкуването" им като функции. Известно е още, вж. [13] и [1] , стр. 457, тълкуването на "операторите"

$$/0.2.10/ \quad \frac{e^{-\kappa\sqrt{s}}}{\sqrt{s}+\beta} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\kappa^2}{4t}} - \beta e^{\kappa\beta+\beta^2 t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t}\right) \right\} \in \mathcal{K} \quad , \kappa \geq 0 ;$$

$$/0.2.11/ \quad e^{-\kappa\sqrt{s}} = \left\{ \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\kappa^2}{4t}} \right\} \in \mathcal{K} \quad , \kappa \geq 0 ;$$

$$/0.2.12/ \quad \frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s} = \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{-\kappa\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) + e^{\kappa\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) \right) \right\} \in \mathcal{K} \quad , \kappa \geq 0 , \alpha \geq 0 .$$

Доказва се и формулата

$$/0.2.13/ \quad \bar{f}(s+\alpha) = T^{-\alpha} \{f(t)\} = \left\{ e^{-\alpha t} f(t) \right\} .$$

Това преобразуване на $f(t)$ е наречено от Микусински [1] , стр.246, операция T^α . В този смисъл, например от /0.2.11/, получаваме

$$e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}} = \left\{ \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\left(\frac{\kappa^2}{4t} + \alpha t\right)} \right\} \quad , \kappa \geq 0 .$$

Вероятностната ...

ция $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$, за която съществуват таблици, ще считаме за известна, като припомним, че $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - erf(x)$,

$erf(-x) = -erf(x)$, $erf(0) = 0$, $erfc(0) = 1$, $erf(\infty) = 1$, $erfc(\infty) = 0$.

Нека

/0.2.14/ $$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t < 0 \\ 1 & \text{за } t \geq 0 \end{cases}$$

е единичната функция на Хевисайд. Очевидно, за всяка функция $f(t) \in \mathcal{K}$ имаме

/0.2.15/ $f(t)\sigma(t) = f(t)$ и

/0.2.16/ $$f_{to}(t) = f(t-to)\sigma(t-to) = \begin{cases} 0 & \text{за } t < to \\ f(t-to) & \text{за } t \geq to \end{cases}.$$

Съществена роля в операционното смятане играе и така нареченият транслационен оператор, вж. [1] ,стр. 116, който се дефинира като конволюционното частно

/0.2.17/ $$e^{-tos} = \frac{\{f_{to}(t)\}}{\{f(t)\}}$$

за всяка функция $f(t) \in \mathcal{K}$ и за който се доказва, че не зависи от избора на f . Оттук, като вземем предвид /0.2.16/, следва

/0.2.18/ $$e^{-tos}\{f(t)\} = \{f(t-to)\sigma(t-to)\}$$.

Нека представим $t^j\sigma(t-to)$, j = 0, 1, 2,... чрез транслационния оператор, което ще използуваме при решаване на уравнението на топлопроводността за частично полиномни условия. Като вземем предвид /0.2.7/, /0.2.15/ и /0.2.18/ можем да напишем

/0.2.19/ $$\{(t-to)^n\sigma(t-to)\} = e^{-tos}\{t^n\} = e^{-tos}\frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогава $t^j\sigma(t-to) = (t-to+to)^j\sigma(t-to) = \sum_{n=0}^{j}\left(\binom{j}{n} to^{j-n}(t-to)^n\sigma(t-to)\right)$, т.е.

/0.2.20/ $$\{t^j\sigma(t-to)\} = \sum_{n=0}^{j}\left(\binom{j}{n} to^{j-n} e^{-tos}\{t^n\}\right) = \sum_{n=0}^{j} V_j^n to^{j-n}\frac{e^{-tos}}{s^{n+1}} =$$

$$= e^{-tos}\sum_{n=0}^{j}\frac{V_j^n to^{j-n}}{s^{n+1}} \ ,$$

където

/0.2.21/ $V_j^n = j(j-1)\dots(j-n+1)$.

Операционният метод на Микусински има това предимство пред подхода с използуване на лапласовата трансформация, че е по-прост за изложение и не се налага ограничение за растежа на функциите / съответно решенията/ при $t \to +\infty$.Затова в тази дисертация отдаваме предпочитание на метода на Микусински пред широко разпространения метод на лапласовата трансформация.

Г Л А В А 1

РЕКУРЕНТНИ ПРЕДСТАВЯНИЯ НА НЯКОИ "ОПЕРАТОРИ" КАТО ФУНКЦИИ

При константни начални и гранични условия за обобщеното уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти

$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}-cu=\frac{\partial u}{\partial t}$ и класическия му вариант

$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ чрез прилагане методите на операционното смятане, за намиране на решението се налага изтълкуването като функции на "оператори" от вида /0.2.10/, /0.2.11/, /0.2.12/. При полиномни или частично полиномни условия за тези уравнения се налага да се изтълкуват "операторите" $\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}}$, $\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}\sqrt{s}}$,

$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}(\sqrt{s}+\beta)}$, $k\geq 0$, j -цяло и неотрицателно, а също и операторите $\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}}$, $\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}$, $\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}(\sqrt{s+\alpha}+\beta)}$, $k\geq 0$,

$\alpha>0$, j -цяло и неотрицателно. Това става непосредствено чрез използване на конволюция от известни функции, но за всеки отделен случай трябва да се пресмятат интеграли, което до известна степен затруднява приложението в инженерната практика. В тази глава по ефективен начин ще изведем рекурентни формули, които ще позволяват без пресмятането на интеграли съвсем леко да се изтълкуват горните "оператори" като функции. Тези резултати са получени от автора [15-18] чрез прилагане на лапласовата трансформация, докато тук се прилага директният алгебричен подход на Микусински. Освен това, тук е подобрена формулировката на теоремите и са дадени нови, значително по-кратки доказателства. При окончателното представяне на тези "оператори" като функции се достига до пресмятане на вероятностната функция, която ще считаме за известна, тъй като за нея съществуват подробни таблици.

§ 1.1. "ОПЕРАТОРИ", СВЪРЗАНИ С КЛАСИЧЕСКОТО И С БЕСЕЛОВОТО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА ПРИ ПОЛИНОМНИ УСЛОВИЯ

Теорема 1 : "Операторът"

/1.1.1/ $\bar{F}_j(s,k)=\dfrac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}} \in \mathcal{M}$, $k \geq 0$; $j = 0, 1, 2, \ldots$

е функцията

/1.1.2/ $F_j(t,k)=\sum\limits_{m=0}^{j}\dfrac{(-1)^m\, t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_m$,

където

/1.1.3/ $E_m=\dfrac{k}{2m-1}\left(t^{m-1}\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{4t}}-\dfrac{k}{2}E_{m-1}\right)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

/1.1.4/ $E_0=\operatorname{erfc}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$.

Доказателство :

$$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}}=e^{-k\sqrt{s}}\frac{1}{s^{j+1}}=\left\{\frac{k}{2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{k^2}{4t}}\right\}\left\{\frac{t^j}{j!}\right\}=\left\{\frac{k}{2\sqrt{\pi}\,j!}\int_0^t\frac{e^{-\frac{k^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}(t-\tau)^j d\tau\right\}$$

и чрез субституцията $z=\dfrac{k}{2\sqrt{\tau}}$ свеждаме до

$$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}}=\left\{\frac{1}{j!}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}\left(t-\frac{k^2}{4z^2}\right)^j dz\right\}=\left\{\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m\, t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_m\right\},$$

където

$$E_m=\left(\frac{k^2}{4}\right)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{z^{2m}}dz \quad , \quad E_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz=\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$$

Чрез интегриране по части получаваме

$$E_m=\frac{k}{2m-1}\left(t^{m-1}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{4t}}-\frac{k}{2}E_{m-1}\right),$$

с което доказателството е приключено.

Теорема 2 : "Операторът"

/1.1.5/ $\bar{\Phi}_j(s,k)=\dfrac{e^{-k\sqrt{s}}}{s^{j+1}\sqrt{s}} \in \mathcal{M}$, $k \geq 0$; $j = 0, 1, 2, \ldots$

е функцията

/1.1.6/ $\Phi_j(t,k)=\sum\limits_{m=0}^{j}\dfrac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_{m+1}$,

където

/1.1.7/ $E_{m+1} = \frac{2}{2m+1}\left(t^m \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{\kappa^2}{4t}} - \frac{\kappa^2}{4} E_m\right)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$

/1.1.8/ $E_0 = \frac{2}{\kappa}\, erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}\right)$.

Доказателство :

$$\frac{e^{-\kappa\sqrt{s}}}{s^{j+1}\sqrt{s}} = \frac{e^{-\kappa\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\;\frac{1}{s^{j+1}} = \left\{\frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}\right\}\left\{\frac{t^j}{j!}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}\, j!}\int_0^t \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}}(t-\tau)^j d\tau\right\}$$

и чрез субституцията $z = \frac{\kappa}{2\sqrt{\tau}}$ свеждаме до

$$\frac{e^{-\kappa\sqrt{s}}}{s^{j+1}\sqrt{s}} = \left\{\frac{1}{j!}\,\frac{\kappa}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{z^2}\left(t-\frac{\kappa^2}{4z^2}\right)^j dz\right\} = \left\{\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m\, t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_{m+1}\right\}$$

където

$$E_{m+1} = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2m+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{z^{2(m+1)}}dz\,,\quad E_0 = \frac{2}{\kappa}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz = \frac{2}{\kappa}\,erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}\right)$$

Чрез интегриране по части следва

$$E_{m+1} = \frac{2}{2m+1}\left(t^m\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{\kappa^2}{4t}} - \frac{\kappa^2}{4}E_m\right),$$

което завършва доказателството.

Теорема 3 : "Операторът"

/1.1.9/ $\bar{\Psi}_\nu(s,\kappa,\beta) = \frac{e^{-\kappa\sqrt{s}}}{s^{\nu+1}(\sqrt{s}+\beta)} \in \mathcal{M}$, $\kappa \geq 0$, $\beta \neq 0$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

е функцията

/1.1.10/ $\Psi_\nu(t,\kappa,\beta) = \sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{\beta^{2(\nu-j+1)}}\left(\beta F_j(t,\kappa) - \Phi_{j-1}(t,\kappa)\right) + \frac{1}{\beta^{2(\nu+1)}}\Psi_{-1}(t,\kappa,\beta).$

където $F_j(t,\kappa)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $\Phi_{j-1}(t,\kappa)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ са функциите /1.1.2/, /1.1.6/ и

/1.1.11/ $\Psi_{-1}(t,\kappa,\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}} - \beta e^{\kappa\beta+\beta^2 t}\, erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t}\right)$, $\Phi_{-1}(t,\kappa) = \Psi_{-1}(t,\kappa,0).$

Доказателство :

$$\theta_n(s) = \frac{1}{(\sqrt{s})^n(\sqrt{s}+\beta)} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\sqrt{s}+\beta-\sqrt{s}}{(\sqrt{s})^n(\sqrt{s}+\beta)} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(\sqrt{s})^n} - \theta_{n-1}(s)\right)$$

$$\theta_{n-1}(s) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(\sqrt{s})^{n-1}} - \theta_{n-2}(s)\right)$$

$$\theta_3(S) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(\sqrt{S})^3} - \theta_2(S)\right)$$

$$\theta_2(S) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(\sqrt{S})^2} - \theta_1(S)\right)$$

$$\theta_1(S) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{S}} - \theta_0(S)\right)$$

$$\theta_0(S) = \frac{1}{\sqrt{S}+\beta}$$

Чрез последователно заместване отдолу нагоре намираме

$$\theta_2(S) = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^2} - \frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{\sqrt{S}} + \frac{1}{\beta^2}\,\theta_0(S)$$

$$\theta_3(S) = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^3} - \frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^2} + \frac{1}{\beta^3}\,\frac{1}{\sqrt{S}} - \frac{1}{\beta^3}\,\theta_0(S)$$

и чрез математична индукция се доказва

$$\theta_n(S) = \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(-\beta)^{n-j}}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^j} + \frac{1}{(-\beta)^n}\,\frac{1}{\sqrt{S}+\beta}$$

Следователно

$$\theta_{2n}(S) = \frac{1}{S^n(\sqrt{S}+\beta)} = \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{(-\beta)^{2n-j}}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^j} + \frac{1}{\beta^{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{S}+\beta} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(-\beta)^{2n-2j}}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^{2j}} + \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(-\beta)^{2n-(2j-1)}}\,\frac{1}{(\sqrt{S})^{2j-1}} + \frac{1}{\beta^{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{S}+\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta^{2(n-j+1)}}\left(\beta\frac{1}{S^j} - \frac{1}{S^{j-1}\sqrt{S}}\right) + \frac{1}{\beta^{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{S}+\beta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\beta^{2(n-j)}}\left(\beta\frac{1}{S^{j+1}} - \frac{1}{S^j\sqrt{S}}\right) + \frac{1}{\beta^{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{S}+\beta}$$

откъдето

$$\bar{\Psi}_\nu(S,K,\beta) = \frac{e^{-K\sqrt{S}}}{S^{\nu+1}(\sqrt{S}+\beta)} = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{\beta^{2(\nu-j+1)}}\left(\beta\,\frac{e^{-K\sqrt{S}}}{S^{j+1}\sqrt{S}} - \frac{e^{-K\sqrt{S}}}{S^j\sqrt{S}}\right) + \frac{1}{\beta^{2(\nu+1)}}\,\frac{e^{-K\sqrt{S}}}{\sqrt{S}+\beta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{\beta^{2(\nu-j+1)}}\left(\beta.\bar{F}_j(S,K) - \bar{\Phi}_{j-1}(S,K)\right) + \frac{1}{\beta^{2(\nu+1)}}\,\bar{\Psi}_{-1}(S,K,\beta)$$

и като вземем предвид Т1, Т2 и че $\bar{\Phi}_{-1}(S,K) = \dfrac{e^{-K\sqrt{S}}}{\sqrt{S}} = \bar{\Psi}_{-1}(S,K,0)$.

и известната формула /0.2.10/, теоремата е доказана.

§ 1.2. "ОПЕРАТОРИ", СВЪРЗАНИ С ОБОБЩЕНОТО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ ПРИ ПОЛИНОМНИ УСЛОВИЯ

Теорема 4 : "Операторът"

$$/1.2.1/ \quad \bar{F}_j(s,\kappa,\alpha) = \frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}} \in \mathcal{M} \qquad , \kappa \geq 0, \ \alpha > 0 ; j = 0,1,2,\ldots$$

е функцията

$$/1.2.2/ \quad F_j(t,\kappa,\alpha) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)!} E_m \quad ,$$

където

$$/1.2.3/ \quad E_m = \frac{2m-3}{2\alpha} E_{m-1} + \frac{\kappa^2}{4\alpha} E_{m-2} - \frac{\kappa}{2\alpha} t^{m-2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(\frac{\kappa^2}{4t}+\alpha t)} , \ m = 2,3,4,\ldots,$$

$$/1.2.4/ \quad E_1 = \frac{\kappa}{4\sqrt{\alpha}} \left(e^{-\kappa\sqrt{\alpha}} erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) - e^{\kappa\sqrt{\alpha}} erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) \right)$$

$$/1.2.5/ \quad E_0 = \frac{1}{2} \left(e^{-\kappa\sqrt{\alpha}} erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) + e^{\kappa\sqrt{\alpha}} erfc\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) \right) \quad .$$

Доказателство :

$$\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}} = e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}} \frac{1}{s^{j+1}} = \left\{ \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-(\frac{\kappa^2}{4t}+\alpha t)} \right\} \left\{ \frac{t^j}{j!} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi} j!} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-(\frac{\kappa^2}{4\tau}+\alpha\tau)} (t-\tau)^j d\tau \right\}$$

и чрез субституцията $v = \frac{\kappa}{2\sqrt{\tau}}$ свеждаме до

$$\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}} = \left\{ \frac{1}{j!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(v^2+\frac{\alpha\kappa^2}{4v^2})} \left(t - \frac{\kappa^2}{4v^2}\right)^j dv \right\} = \left\{ \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)!} E_m \right\} ,$$

където

$$E_m = \left(\frac{\kappa^2}{4}\right)^m \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{e^{-(v^2+\frac{\alpha\kappa^2}{4v^2})}}{v^{2m}} dv \quad .$$

Чрез интегриране по части получаваме

$$E_m = \frac{\kappa t^{m-1}}{2m-1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(\frac{\kappa^2}{4t}+\alpha t)} - \frac{\kappa^2}{2(2m-1)} E_{m-1} + \frac{2\alpha}{2m-1} E_{m+1}$$

и като заменим m с $m-1$ оттук намираме E_m според /1.2.3/.

$$E_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{2v^2})}dv=\frac{1}{2}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v-\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v})^2}(1+\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v^2})dv+e^{k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v+\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v})^2}(1-\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v^2})dv\right)$$

чрез субституции за двата интеграла съответно $v-\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v}=z$ и

$v+\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v}=z$ свеждаме до

$$E_0=\frac{1}{2}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\alpha t}}^{\infty}e^{-z^2}dz+e^{k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right)$$,което е точно /1.2.5/.

$$E_1=\frac{k^2}{4}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{4v^2})}}{v^2}dv=\frac{k}{4\sqrt{\alpha}}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v-\frac{k\sqrt{\alpha}}{v})^2}(1+\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v^2})dv-e^{k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v+\frac{k\sqrt{\alpha}}{v})^2}(1-\frac{k\sqrt{\alpha}}{2v^2})dv\right)$$

и чрез същите субституции както при E_0 получаваме

$$E_1=\frac{k}{4\sqrt{\alpha}}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\alpha t}}^{\infty}e^{-z^2}dz+e^{k\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right)$$,което е /1.2.4/ и

теоремата е доказана.

<u>Теорема 5</u> : "Операторът"

/1.2.6/ $\Phi_j(s,k,\alpha)=\dfrac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}\in\mathcal{M}$, $k\geq 0$, $\alpha>0$; $j=0,1,2,\ldots$

е функцията

/1.2.7/ $\Phi_j(t,k,\alpha)=\sum\limits_{m=0}^{j}\dfrac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)}E_{m+1}$,

където

/1.2.8/ $E_{m+1}=\dfrac{2m-1}{2\alpha}E_m+\dfrac{k^2}{4\alpha}E_{m-1}-\dfrac{1}{\alpha}t^{m-1}\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-(\frac{k^2}{4t}+\alpha t)}$, $m=1,2,3,\ldots$,

/1.2.9/ $E_1=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}erfc(\frac{k}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\alpha t})-e^{k\sqrt{\alpha}}erfc(\frac{k}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t})\right)$,

/1.2.10/ $E_0=\dfrac{1}{k}\left(e^{-k\sqrt{\alpha}}erfc(\frac{k}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\alpha t})+e^{k\sqrt{\alpha}}erfc(\frac{k}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\alpha t})\right)$.

<u>Доказателство</u> :

$$\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}=\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{\sqrt{s+\alpha}}\frac{1}{s^{j+1}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-(\frac{k^2}{4t}+\alpha t)}\right\}\left\{\frac{t^j}{j!}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}j!}\int_0^t\tau^{-\frac{1}{2}}e^{-(\frac{k^2}{4\tau}+\alpha\tau)}(t-\tau)^j d\tau\right\}$$

и чрез субституцията $v=\dfrac{k}{2\sqrt{\tau}}$ получаваме

$$\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}=\left\{\frac{1}{j!}\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{4v^2})}\frac{1}{v^2}(t-\frac{k^2}{4v^2})^j dv\right\}=\left\{\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_{m+1}\right\}$$

където $E_{m+1} = \left(\frac{k}{2}\right)^{2m+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{4v^2})}}{v^{2(m+1)}}dv$.

Чрез интегриране по части получаваме

$$E_{m+1} = \frac{2t^m}{2m+1}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-(\frac{k^2}{4t}+\alpha t)} - \frac{k^2}{2(2m+1)}E_m + \frac{2\alpha}{2m+1}E_{m+2}$$

и като заменим m с $m-1$ намираме E_{m+1} според /1.2.8/.

За $E_0 = \frac{2}{k}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{4v^2})}dv$ и $E_1 = \frac{k}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-(v^2+\frac{\alpha k^2}{4v^2})}}{v^2}dv$

както в Т4 намираме съответно /1.2.10/ и /1.2.9/. С това доказателството на теоремата е завършено.

Теорема 6 : "Операторът"

/1.2.11/ $\bar{\Psi}_\nu(s,k,\alpha,\beta) = \frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{\nu+1}(\sqrt{s+\alpha}+\beta)} \in \mathcal{M}$, $k\geq 0$, $\alpha>0$, $\beta\neq 0$; $\nu=0,1,2,\ldots$

е функцията

/1.2.12/ $\Psi_\nu(t,k,\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu-j+1}}\left(\beta F_j(t,k,\alpha) - \alpha\Phi_j(t,k,\alpha) - \Phi_{j-1}(t,k,\alpha)\right) + \frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu+1}}\Psi_{-1}(t,k,\alpha,\beta)$ при $\alpha\neq\beta^2$

или

/1.2.13/ $\Psi_\nu(t,k,\beta^2,\beta) = \beta^2\Phi_{\nu+1}(t,k,\beta^2) + \Phi_\nu(t,k,\beta^2) - \beta F_{\nu+1}(t,k,\beta^2)$,

където $F_j(t,k,\alpha)$, $j=0,1,2,\ldots$ и $\Phi_j(t,k,\alpha)$, $j=0,1,2,\ldots$ са функциите /1.2.2/, /1.2.7/ и

/1.2.14/ $\Psi_{-1}(t,k,\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-(\frac{k^2}{4t}+\alpha t)} - \beta e^{k\beta+(\beta^2-\alpha)t}\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}+\beta\sqrt{t}\right)$, $\Phi_{-1}(t,k,\alpha) = \Psi_{-1}(t,k,\alpha,0)$.

Доказателство :

1 случай : $\alpha\neq\beta^2$,

$$\Theta_n(s) = \frac{1}{s^n(\sqrt{s+\alpha}+\beta)} = \frac{1}{\beta^2-\alpha}\,\frac{\beta^2-(s+\alpha)+s}{s^n(\sqrt{s+\alpha}+\beta)} = \frac{1}{\beta^2-\alpha}\,\frac{(\beta+\sqrt{s+\alpha})(\beta-\sqrt{s+\alpha})+s}{s^n(\sqrt{s+\alpha}+\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\beta^2-\alpha}\left(\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s^n}+\Theta_{n-1}(s)\right)$$

$$\theta_{n-1}(s)=\frac{1}{\beta^2-\alpha}\left(\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s^{n-1}}+\theta_{n-2}(s)\right)$$

$$\theta_2(s)=\frac{1}{\beta^2-\alpha}\left(\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s^2}+\theta_1(s)\right)$$

$$\theta_1(s)=\frac{1}{\beta^2-\alpha}\left(\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s}+\theta_0(s)\right)$$

$$\theta_0(s)=\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}+\beta}$$

Чрез последователно заместване отдолу нагоре намираме

$$\theta_2(s)=\frac{1}{\beta^2-\alpha}\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s^2}+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^2}\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s}+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^2}\theta_0(s)$$

и чрез математична индукция се доказва

$$\theta_n(s)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{n-j+1}}\frac{\beta-\sqrt{s+\alpha}}{s^j}+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^n}\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}+\beta}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{n-j}}\left(\frac{\beta}{s^{j+1}}-\frac{\sqrt{s+\alpha}}{s^{j+1}}\right)+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^n}\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}+\beta}$$

откъдето

$$\frac{1}{s^{\nu+1}(\sqrt{s+\alpha}+\beta)}=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu-j+1}}\left(\frac{\beta}{s^{j+1}}-\alpha\frac{1}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}-\frac{1}{s^j\sqrt{s+\alpha}}\right)+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu+1}}\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}+\beta}.$$

Следователно

$$\bar{\Psi}_\nu(s,k,\alpha,\beta)=\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{\nu+1}(\sqrt{s+\alpha}+\beta)}=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu-j+1}}\left(\beta\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}}-\alpha\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}\sqrt{s+\alpha}}-\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^j\sqrt{s+\alpha}}\right)+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu+1}}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{\sqrt{s+\alpha}+\beta}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu-j+1}}\left(\beta\bar{F}_j(s,k,\alpha)-\alpha\bar{\Phi}_j(s,k,\alpha)-\bar{\Phi}_{j-1}(s,k,\alpha)\right)+\frac{1}{(\beta^2-\alpha)^{\nu+1}}\bar{\Psi}_{-1}(s,k,\alpha,\beta)$$

и като вземем предвид Т4, Т5 и че $\bar{\Phi}_{-1}(s,k,\alpha)=\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{\sqrt{s+\alpha}}=\bar{\Psi}_{-1}(s,k,\alpha,0)$ и известната формула /0.2.10/, съобразена с /0.2.13/, теоремата е доказана в 1-вия случай.

2. случай: $\alpha=\beta^2$.

$$\frac{1}{s^{\nu+1}(\sqrt{s+\beta^2}+\beta)}=\frac{\sqrt{s+\beta^2}-\beta}{s^{\nu+2}}=\frac{\sqrt{s+\beta^2}}{s^{\nu+2}}-\beta\frac{1}{s^{\nu+2}}=$$

$$=\frac{1}{s^{\nu+1}\sqrt{s+\beta^2}}+\beta^2\frac{1}{s^{\nu+2}\sqrt{s+\beta^2}}-\beta\frac{1}{s^{\nu+2}}$$

откъдето следва

$$\bar{\Psi}_{\nu}(s,\kappa,\beta^2,\beta)=\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\beta^2}}}{s^{\nu+1}(\sqrt{s+\beta^2}+\beta)}=\beta^2\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\beta^2}}}{s^{\nu+2}\sqrt{s+\beta^2}}+\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\beta^2}}}{s^{\nu+1}\sqrt{s+\beta^2}}-\beta\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\beta^2}}}{s^{\nu+2}}=$$

$$=\beta^2\bar{\Phi}_{\nu+1}(s,\kappa,\beta^2)+\bar{\Phi}_{\nu}(s,\kappa,\beta^2)-\beta\bar{F}_{\nu+1}(s,\kappa,\beta^2)$$

и като вземем предвид Т4 и Т5, доказателството е завършено и в този случай.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ И I ГРАНИЧНА ЗАДАЧА

Разглеждаме обобщеното уравнение на топлопроводността

$$/2.0.1/ \quad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} - cu + d(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

в областта $\begin{cases} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{cases}$ с постоянни коефициенти $a>0$, b, $c \geq 0$, където $d(x,t) = d_1(x) . d_2(t)$ е смутителната функция / външния приток на топлина /. В инженерната практика винаги се случва $c \geq 0$.

Начално условие е

$$/2.0.2/ \quad u(x,0) = \varphi(x) \;,\quad \varphi(x) = O(e^{\lambda_1 x}) \text{ при } x \to \infty \text{ за } \lambda_1 > 0 .$$

Очевидно, последното условие е изпълнено, ако $\varphi(x)$ е полином или частично полиномна функция. Гранично условие от I род е

$$/2.0.3/ \quad u(0,t) = f(t) \;,\quad f(t) \in \mathcal{K}^{(1)} .$$

Ако и $d_1(x) = O(e^{\lambda_2 x})$ при $x \to \infty$ за $\lambda_2 > 0$ и $d_2(t) \in \mathcal{K}$, ще търсим решението $u(x,t)$ на /2.0.1/ при началното условие /2.0.2/ и граничното условие /2.0.3/ така, че

$$/2.0.4/ \quad u(x,t) = O(e^{\lambda x}) \text{ при } x \to \infty \text{ за } \lambda > 0 .$$

За целта ще приложим принципа за суперпозицията, като положим

$$/2.0.5/ \quad u(x,t) = V(x,t) + W(x,t) + Z(x,t)$$

и разгледаме поотделно трите уравнения :

$$/2.0.6/ \quad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b\frac{\partial V}{\partial x} - cV = \frac{\partial V}{\partial t} \;,\quad \begin{cases} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

с

$$/2.0.7/ \quad V(x,0) = \varphi(x)$$

и

$$/2.0.8/ \quad V(0,t) = 0 \;;$$

$$/2.0.9/ \quad a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\frac{\partial W}{\partial x} - cW = \frac{\partial W}{\partial t} \;,\quad \begin{cases} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

с

/2.0.10/ $W(x,0)=0$

и

/2.0.11/ $W(0,t)=f(t)$;

/2.0.12/ $a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial z}{\partial x}-cz+d_1(x).d_2(t)=\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\begin{cases} 0\leq x<\infty \\ 0\leq t<\infty \end{cases}$

с

/2.0.13/ $z(x,0)=0$

и

/2.0.14/ $z(0,t)=0$.

Според принципа за суперпозицията, а и чрез непосредствена проверка следва, че ако : $V(x,t)=O(e^{\lambda_3 x})$ при $x\to\infty$ за $\lambda_3>0$ е решението на /2.0.6/ при /2.0.7/, /2.0.8/; $W(x,t)=O(e^{\lambda_4 x})$ при $x\to\infty$ за $\lambda_4>0$ е решението на /2.0.9/ при /2.0.10/, /2.0.11/ и $z(x,t)=O(e^{\lambda_5 x})$ при $x\to\infty$ за $\lambda_5>0$ е решението на /2.0.12/ при /2.0.13/, /2.0.14/, то $u(x,t)$ от /2.0.5/ е решението на /2.0.1/ при /2.0.2/, /2.0.3/, с изпълнено /2.0.4/.

Като използуваме терминологията на Микусински [1] , от /2.0.6/ и /2.0.7/, съобразено с /0.2.4/, получаваме операционното уравнение $a\bar{V}''+b\bar{V}'-c\bar{V}=s\bar{V}-V(x,0)$, т.е.

/2.0.15/ $a\bar{V}''+b\bar{V}'-(s+c)\bar{V}=-\varphi(x)$,

където "операторната" функция $\bar{V}=\bar{V}(x,s)$ се разглежда като функция на λ и производните са спрямо x , а /2.0.8/ ни дава

/2.0.16/ $\bar{V}(0,s)=0$.

Ако с $\bar{V}^*(x,s)$ означим едно частно решение на /2.0.15/, то поради $\varphi(x)=O(e^{\lambda_1 x})$ следва $\bar{V}^*(x,s)=O(e^{\lambda x})$ за $x\to\infty$, $\lambda_1>0$, $\lambda>0$ и заедно с изискването $\bar{V}(x,s)=O(e^{\lambda_3 x})$, следващо от $V(x,t)=O(e^{\lambda_3 x})$ за $x\to\infty$, $\lambda_3>0$, ни дава възможност да определим решението

$\bar{V}(x,s)=C_1 e^{-\frac{bx}{2a}}e^{-k\sqrt{s+\alpha}}+\bar{V}^*(x,s)$,където сме означили

/2.0.17/ $k=\dfrac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$, $\alpha=\dfrac{b^2+4ac}{4a}>0$ при $b\neq 0$ и $c\geq 0$,

$C_1 = -\bar{V}^*(0,S)$ намираме от условието /2.0.16/, така че решението на /2.0.15/ добива вида

/2.0.18/ $\bar{V}(x,S) = \bar{V}^*(x,S) - e^{-\frac{Bx}{2a}} \bar{V}^*(0,S) e^{-\kappa\sqrt{S+\alpha}}$.

Аналогично, от /2.0.9/, /2.0.10/, /0.2.4/, /2.0.11/ и предположенията за $W(x,t)$ получаваме операционното уравнение

/2.0.19/ $a\bar{W}'' + B\bar{W}' - (S+C)\bar{W} = 0$, $\bar{W} = W(x,S)$

където производните са спрямо x , с

/2.0.20/ $\bar{W}(0,S) = \bar{f}(S)$, $\bar{f}(S) = \{f(t)\}$

и решение

/2.0.21/ $\bar{W}(x,S) = e^{-\frac{Bx}{2a}} \bar{f}(S) e^{-\kappa\sqrt{S+\alpha}}$.

От /2.0.12/, /2.0.13/, /0.2.4/, /2.0.14/ и предположенията за $Z(x,t)$ и $d_1(x)$ получаваме операционното уравнение

/2.0.22/ $a\bar{Z}'' + B\bar{Z}' - (S+C)\bar{Z} = -\bar{d}_2(S) d_1(x)$, $\bar{Z} = \bar{Z}(x,S)$, $\bar{d}_2(S) = \{d_2(t)\}$,

където производните са спрямо x , с

/2.0.23/ $\bar{Z}(0,S) = 0$

и решение

/2.0.24/ $\bar{Z}(x,S) = \bar{d}_2(S)\bar{Z}^*(x,S) - e^{-\frac{Bx}{2a}} \bar{Z}^*(0,S)\bar{d}_2(S) e^{-\kappa\sqrt{S+\alpha}}$,

където $\bar{d}_2(S)\bar{Z}^*(x,S)$ е едно частно решение на /2.0.22/.

За да намерим $U(x,t)$ според /2.0.5/, остава да изтълкуваме $\bar{V}(x,S)$, $\bar{W}(x,S)$ и $\bar{Z}(x,S)$ от /2.0.18/, /2.0.21/ и /2.0.24/ като функции $V(x,t)$, $W(x,t)$ и $Z(x,t)$, което ще направим за някои конкретни случаи на $\varphi(x)$, $f(t)$, $d_1(x)$, $d_2(t)$. Ще се наложи да използваме Т4, а ако се случи $\alpha = 0$, което е възможно при $B = C = 0$, бихме получили аналогични резултати чрез използване съответно на Т1, с който случай няма да се занимаваме.

§ 2.1. ПОЛИНОМНО И ЧАСТИЧНО ПОЛИНОМНО НАЧАЛНО УСЛОВИЕ

Тук ще намерим решението $V(x,t)$ на /2.0.6/, когато $\varphi(x)$ е полином или частично полиномна функция.

1. Нека

/2.1.1/ $\varphi(x)=\sum_{p=0}^{m}\nu_p x^p \quad , \quad \nu_p=const \quad , \quad 0\le x<\infty$.

Частното решение $\bar{V}^*(x,s)$ на /2.0.15/ търсим по метода на неопределените коефициенти от вида $\bar{V}^*(x,s)=\sum_{p=0}^{m}B_p(s)x^p$. Чрез заместване в /2.0.15/ и сравняване коефициентите пред степените на x , като вземем предвид /2.1.1/, получаваме

$$a(p+2)(p+1)B_{p+2}(s)+b(p+1)B_{p+1}(s)-(s+c)B_p(s)=-\nu_s \;,\; s=0,1,2,\dots,m-2 \,,$$

$$bmB_m(s)-(s+c)B_{m-1}(s)=-\nu_{m-1} \,,$$

$$(s+c)B_m(s)=\nu_m$$, откъдето последователно намираме

$$B_m(s)=\frac{\nu_m}{s+c}$$

$$B_{m-1}(s)=bm\frac{\nu_m}{(s+c)^2}+\frac{\nu_{m-1}}{s+c}$$

$$B_{m-2}(s)=b^2m(m-1)\frac{\nu_m}{(s+c)^3}+(m-1)\frac{am\nu_m+b\nu_{m-1}}{(s+c)^2}+\frac{\nu_{m-2}}{s+c} \,.$$

$$B_0(s)=2a\frac{B_2(s)}{s+c}+b\frac{B_1(s)}{s+c}+\frac{\nu_0}{s+c} \,.$$

Очевидно, в първите два члена на $B_0(s)$ ще участвуват дробите

$\frac{1}{(s+c)^{m+1}} \,,\dots,\, \frac{1}{(s+c)^2}$, Следователно

$$B_0(s)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_{pj}}{(s+c)^{j+1}}$$

$$B_1(s)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_{pj}}{(s+c)^{j+1}}$$

$$B_p(s)=\sum_{j=0}^{m-p}\frac{a_{pj}}{(s+c)^{j+1}} \quad , \quad p=0,1,2,\dots,m \,,$$

където a_{pj} са известни константи, получени чрез по-горните

пресмятания, така че получаваме $\bar{V}^*(x,s)=\sum_{\rho=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{m-\rho}\frac{a_{\rho j}}{(s+c)^{j+1}}\right)x^{\rho}$
и

$$\bar{V}^*(0,s)=B_0(s)\cdot\sum_{j=0}^{m}\frac{a_{0j}}{(s+c)^{j+1}}\ .$$

Като заместим намерените $\bar{V}^*(x,s)$ и $\bar{V}^*(0,s)$ в /2.0.18/, за решението $\bar{V}(x,s)$ на /2.0.15/ с /2.0.16/ според /2.1.1/ намираме

$$\bar{V}(x,s)=\sum_{\rho=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{m-\rho}\frac{a_{\rho j}}{(s+c)^{j+1}}\right)x^{\rho}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{m}a_{0j}\frac{e^{-k\sqrt{(s+c)+\alpha-c}}}{(s+c)^{j+1}}\ ,$$

където k, α са според /2.0.17/ и $\alpha-c\ \frac{b^2+4ac}{4a}-c=\frac{b^2}{4a}>0$.

Оттук, като вземем предвид T4 и операцията, дефинирана чрез /0.2.13/, за решението $V(x,t)$ на /2.0.6/ с /2.0.8/ и /2.0.7/ според /2.1.1/ получаваме

$$V(x,t)=e^{-ct}\left(\sum_{\rho=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{m-\rho}\frac{a_{\rho j}}{j!}t^{j}\right)x^{\rho}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{m}a_{0j}F_j\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)\ ,$$

или като сменим реда на сумирането в двойната сума,

$$/2.1.2/\quad V(x,t)=e^{-ct}\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{\rho=0}^{m-j}a_{\rho j}x^{\rho}\right)\frac{t^{j}}{j!}-a_{0j}e^{-\frac{bx}{2a}}F_j\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)\ .$$

2. Нека $\varphi(x)$ е частично полиномна функция, като макар че няма принципни трудности, когато е представена чрез полином от по-висока степен, ще илюстрираме намирането на решението $V(x,t)$ на уравнението /2.0.6/, когато $\varphi(x)$ е представена частично чрез полиноми от степен, не по-висока от втора :

$$/2.1.3/\quad \varphi(x)=\lambda_{\rho}+\mu_{\rho}x+\nu_{\rho}x^2 \quad \text{за } x_{\rho}\leq x<x_{\rho+1}\ ;\ \rho=0,1,2,\dots;\ x_0=0\ ,$$

където съществуват границите $\lim_{\rho\to\infty}\lambda_{\rho}$, $\lim_{\rho\to\infty}\mu_{\rho}$, $\lim_{\rho\to\infty}\nu_{\rho}$.

Съществуването на тези граници е съществено за сходимостта на реда, който се използува по-надолу.

Чрез единичната функция на Хевисайд

$$\sigma(x)=\begin{cases}0 & \text{за } x<0\\ 1 & \text{за } x\geq 0\end{cases}$$ можем да запишем

$$/2.1.4/\quad \psi(x) = (\lambda_0+\mu_0 x+\nu_0 x^2)\sigma(x)+\sum_{p=1}^{\infty}\left(\lambda_p-\lambda_{p-1}+(\mu_p-\mu_{p-1})x+(\nu_p-\nu_{p-1})x^2\right)\sigma(x-x_p)$$

за $0 \leq x \leq \infty$. Чрез метода на неопределените коефициенти частното решение $\bar{V}^*(x,s)$ на /2.0.6/ търсим от вида

$\bar{V}^*(x,s) = B_p+C_p x+D_p x^2$ за $x_p \leq x < x_{p+1}$; $p = 0,1,2,\ldots$; $x_0 = 0$,

и чрез заместване в /2.0.6/ според /2.1.3/ намираме

$$\bar{V}^*(x,s) = \frac{\lambda_p}{s+c}+\frac{2a\nu_p+b\mu_p}{(s+c)^2}+\frac{2b^2\nu_p}{(s+c)^3}+\left(\frac{\mu_p}{s+c}+\frac{2b\nu_p}{(s+c)^2}\right)x+\frac{\nu_p}{s+c}x^2$$

за $x_p \leq x < x_{p+1}$; $p = 0,1,2,\ldots$; $x_0 = 0$, и още

$\bar{V}^*(0,s) = \frac{\lambda_0}{s+c}+\frac{2a\nu_0+b\mu_0}{(s+c)^2}+\frac{2b^2\nu_0}{(s+c)^3}$, а според /2.1.4/ имаме

$$\bar{V}^*(x,s) = \left((\lambda_0+\mu_0 x+\nu_0 x^2)\frac{1}{s+c}+(2a\nu_0+b\mu_0+2b\nu_0 x)\frac{1}{(s+c)^2}+2b^2\nu_0\frac{1}{(s+c)^3}\right)\sigma(x)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\Bigg(\left(\lambda_p-\lambda_{p-1}+(\mu_p-\mu_{p-1})x+(\nu_p-\nu_{p-1})x^2\right)\frac{1}{s+c}+\left(2a(\nu_p-\nu_{p-1})+b(\mu_p-\mu_{p-1})+2b(\nu_p-\nu_{p-1})x\right)\frac{1}{(s+c)^2}+$$

$$+2b^2(\nu_p-\nu_{p-1})\frac{1}{(s+c)^3}\Bigg)\sigma(x-x_p) \qquad \text{за } x \geq 0 .$$

Като заместим намерените $\bar{V}^*(x,s)$ и $\bar{V}^*(0,s)$ в /2.0.18/, за решението $\bar{V}(x,s)$ на /2.0.15/ при /2.0.16/ според /2.1.4/ намираме

$$\bar{V}(x,s) = \left((\lambda_0+\mu_0 x+\nu_0 x^2)\frac{1}{s+c}+(2a\nu_0+b\mu_0+2b\nu_0 x)\frac{1}{(s+c)^2}+2b^2\nu_0\frac{1}{(s+c)^3}\right)\sigma(x)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\Bigg(\left(\lambda_p-\lambda_{p-1}+(\mu_p-\mu_{p-1})x+(\nu_p-\nu_{p-1})x^2\right)\frac{1}{s+c}+\left(2a(\nu_p-\nu_{p-1})+b(\mu_p-\mu_{p-1})+2b(\nu_p-\nu_{p-1})x\right)\frac{1}{(s+c)^2}+$$

$$+2b^2(\nu_p-\nu_{p-1})\frac{1}{(s+c)^3}\Bigg)\sigma(x-x_p)-e^{-\frac{bx}{2a}}\left(\lambda_0\frac{e^{-K\sqrt{(s+c)+\alpha-c}}}{s+c}+(2a\nu_0+b\mu_0)\frac{e^{-K\sqrt{(s+c)+\alpha-c}}}{(s+c)^2}+2b^2\nu_0\frac{e^{-K\sqrt{(s+c)+\alpha-c}}}{(s+c)^3}\right),$$

където K , α са според /2.0.17/ и $\alpha-c = \frac{b^2}{4a}$ и отново, като вземем предвид Т4 и формулите /0.2.13/, /0.2.7/, за решението $V(x,t)$ на /2.0.6/ с /2.0.8/ и /2.0.7/ според /2.1.4/ получаваме

$$/2.1.5/\quad V(x,t) = e^{-\alpha t}\left((\lambda_0+\mu_0 x+\nu_0 x^2+(2a\nu_0+b\mu_0+2b\nu_0 x)t+b^2\nu_0 t^2\right)\sigma(x)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\lambda_p-\lambda_{p-1}+(\mu_p-\mu_{p-1})x+(\nu_p-\nu_{p-1})x^2+\big(2a(\nu_p-\nu_{p-1})+b(\mu_p-\mu_{p-1})+2b(\nu_p-\nu_{p-1})x\big)t+$$

$$+b^2(\nu_p-\nu_{p-1})t^2\Big)\sigma(x-x_p)-e^{-\frac{bx}{2a}}\Big(\lambda_0 F_0\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)+(2a\nu_0+b\mu_0)F_1\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)+2b^2\nu_0 F_2\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)\Big)\Big)$$

а според /2.1.3/, без използуване на единичната функция на Хевисайд, можем да запишем

$$/2.1.6/\quad V(x,t)=e^{-\alpha t}\Big(\lambda_p+\mu_p x+\nu_p x^2+(2a\nu_p+b\mu_p+2b\nu_p x)t+b^2\nu_p t^2-$$

$$-e^{-\frac{bx}{2a}}\Big(\lambda_0 F_0\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)+(2a\nu_0+b\mu_0)F_1\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)+2b^2\nu_0 F_2\big(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\big)\Big)\Big)$$

за $x_p \leqq x < x_{p+1}$; $p=0,1,2,\dots$; $x_0=0$.

§ 2.2. ПОЛИНОМНО И ЧАСТИЧНО ПОЛИНОМНО ГРАНИЧНО УСЛОВИЕ ОТ I РОД

В този параграф ще намерим решението $W(x,t)$ на /2.0.9/, когато $f(t)$ е полином или частично полиномна функция, а също ще дадем интегрално представяне на $W(x,t)$, когато имаме произволна функция $f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$, както и един частен случай, водѐщ до прост резултат.

1. Нека

$$/2.2.1/\quad f(t)=\sum_{j=0}^{n}A_j t^j \quad ,\ A_j=const \quad ,\ 0\leqq t<\infty \quad .$$

Понеже според /0.2.7/ имаме $\left[f(t)\right]=\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{j!A_j}{s^{j+1}}$, като заместим в /2.0.21/ добиваме $\bar{W}(x,s)=e^{-\frac{bx}{2a}}\sum\limits_{j=0}^{n}j!A_j\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}}$, където κ и α са според /2.0.17/. Като приложим Т4, за решението $W(x,t)$ на /2.0.9/ с /2.0.10/ и /2.0.11/ според /2.2.1/ получаваме

$$/2.2.2/\quad W(x,t)=e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{n}j!A_j F_j(t,\kappa,\alpha) \quad ,\ \kappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geqq 0,\ \alpha=\frac{b^2+4ac}{4a}>0 .$$

2. Нека $f(t)$ е частично полиномна функция,

$$/2.2.3/\quad f(t)=\sum_{j=0}^{n}A_{\nu j}t^j \quad \text{за } t_\nu\leqq t<t_{\nu+1}\ ;\ \nu=0,1,2,\dots,\ t_0=0 ,$$

където съществуват границите $\lim\limits_{\nu\to\infty} A_{\nu j}$ за $j = 0, 1, \ldots, n$.
Разбира се, някои от константите $A_{\nu j}$ може да са нула, така че степените на полиномите в отделните интервали изобщо са различни.
Чрез единичната функция на Хевисайд /0.2.14/ може да запишем

$$/2.2.4/ \quad f(t) = \sum_{j=0}^{n} A_{0j} t^j \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (A_{\nu j} - A_{\nu-1,j}) t^j \sigma(t - t_\nu) \quad \text{за} \quad t \geqq 0 \quad .$$

Като се възползуваме от /0.2.7/, /0.2.15/ и /0.2.20/, оттук следва

$$\left\{f(t)\right\} = \sum_{j=0}^{n} A_{0j} \left\{t^j \sigma(t)\right\} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (A_{\nu j} - A_{\nu-1,j}) \left\{t^j \sigma(t - t_\nu)\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{j!\, A_{0j}}{s^{j+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left((A_{\nu j} - A_{\nu-1,j}) \sum_{p=0}^{j} V_j^p t_\nu^{j-p} \frac{e^{-t_\nu s}}{s^{p+1}} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{j!\, A_{0j}}{s^{j+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^j \, t_\nu^p \right) \frac{e^{-t_\nu s}}{s^{j+1}}$$

и като заместим в /2.0.21/, за решението $\bar{W}(x,s)$ на /2.0.19/ с /2.0.20/ според /2.2.4/ получаваме представянето

$$\bar{W}(x,s) = e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j} \frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} V_{p+j}^j (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) t_\nu^p \right) \frac{e^{-t_\nu s} e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}} \right) ,$$

където отново $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$, $\alpha = \frac{b^2 + 4ac}{4a} > 0$. Като се възползуваме от T4 и формула /0.2.18/, за решението $W(x,t)$ на /2.0.9/ с /2.0.10/ и /2.0.11/ според /2.2.4/ получаваме

$$/2.2.5/ \quad W(x,t) = e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j} F_j(t,\kappa,\alpha) \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} V_{p+j}^{j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) t_\nu^p \right) F_j(t - t_\nu, \kappa, \alpha) \sigma(t - t_\nu) \right) .$$

Нека напишем решението $W(x,t)$ за един много често срещан случай в инженерната практика, а именно, когато $f(t)$ е стъпаловидна функция $/ n = 0 /$, т.е.

$$f(t) = A_0 \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu - A_{\nu-1}) \sigma(t - t_\nu) \quad .$$

От /2.2.5/ следва

$$W(x,t) = e^{-\frac{bx}{2a}} \left(A_0 F_0(t,\kappa,\alpha) \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu - A_{\nu-1}) F_0(t - t_\nu, \kappa, \alpha) \sigma(t - t_\nu) \right) \quad .$$

3. Нека най-после $f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$ е произволна. Тогава от /2.0.21/, като вземем предвид /0.2.11/ и /0.2.13/, получаваме

$$W(x,t)=e^{-\frac{bx}{2a}}f(t)*\frac{K}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\left(\frac{K^2}{4t}+\alpha t\right)}=e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{K}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\left(\frac{K^2}{4\tau}+\alpha\tau\right)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}f(t-\tau)\,d\tau$$

Много прост резултат се получава, ако

/2.2.6/ $f(t)=Ce^{-\alpha t}$, $\alpha=\dfrac{b^2+4ac}{4a}>0$, C -константа.

Сега $\varphi(t-\tau)=Ce^{-\alpha t}e^{\alpha\tau}$ и

$$W(x,t)=Ce^{-\left(\frac{bx}{2a}+\alpha t\right)}\frac{K}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\frac{K^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau=Ce^{-\left(\frac{bx}{2a}+\alpha t\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{K}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz$$

т.е.

/2.2.7/ $W(x,t)=Ce^{-\left(\frac{bx}{2a}+\alpha t\right)}\operatorname{erfc}\left(\frac{K}{2\sqrt{t}}\right)$, $K=\dfrac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$, $\alpha=\dfrac{b^2+4ac}{4a}>0$

§ 2.3. ПОЛИНОМНА И ЧАСТИЧНО ПОЛИНОМНА СМУТИТЕЛНА ФУНКЦИЯ

В този параграф ще намерим решението $z(x,t)$ на уравнението /2.0.12/ при нулево начално условие и нулево гранично условие от I род, като за смутителната функция $d(x,t)=d_1(x).d_2(t)$ ще разгледаме случаите : $d(x,t)=d_1(x)$, където $d_1(x)$ е полином или частично полиномна функция; $d(x,t)=d_2(t)$, където $d_2(t)$ е полином или частично полиномна функция; $d(x,t)=d_1(x)d_2(t)$, където $d_1(x)$ и $d_2(t)$ са полиноми.

I. Нека $d(x,t)=d_1(x)$, т.е. $d_2(t)=1$. Тогава /2.0.22/ става

/2.3.1/ $a\bar{z}''+b\bar{z}'-(s+c)\bar{z}=-\frac{1}{s}d_1(x)$ с условие /2.0.23/ $\bar{z}(0,s)=0$

Но това уравнение не се отличава съществено от уравнението /2.0.15/ с условие /2.0.16/. Затова можем да използуваме получените вече резултати в § 2.1, стига да забележим, че вместо изразите $\dfrac{1}{(s+c)^{p+1}}$, $p=0,1,2,\ldots$ ще имаме $\dfrac{1}{s(s+c)^{p+1}}$, $p=0,1,2,\ldots$

1 случай : $c = 0$

Сега $\frac{1}{s(s+c)^{p+1}} = \frac{1}{s^{p+2}}$, $p = 0,1,2,\ldots$ и решението $z(x,t)$ на /2.0.12/ с условия /2.0.13/ и /2.0.14/ при $d_1(x)$ – полином или частично полиномна функция ще получим формално от изразите /2.1.2/ и /2.1.6/ като положим $c = 0$ и вместо j заместим $j+1$ на съответните места, тъй като на $\frac{1}{s^{p+1}}$ отговаря сега $\frac{1}{s^{p+2}}$.

Следователно, ако

/2.3.2/ $d_1(x) = \sum_{p=0}^{m^*} \nu_p^* x^p$, ν_p^* -константи, $0 \leq x < \infty$; $d_2(t) = 1$,

то

/2.3.3/ $$z(x,t) = \sum_{j=0}^{m^*}\left(\sum_{p=0}^{m^*-j} a_{pj}^* x^p\right)\frac{t^{j+1}}{(j+1)!} - e^{-\frac{bx}{2a}} \sum_{j=0}^{m^*} a_{0j}^* F_{j+1}\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right)$$

и ако

/2.3.4/ $d_1(x) = \lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2$ за $x_p^* \leqq x < x_{p+1}^*$, $p = 0,1,2,\ldots$; $x_0^* = 0$; $d_2(t) = 1$,

то

/2.3.5/ $$z(x,t) = (\lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2)t + \frac{1}{2}(2a\nu_p^* + b\mu_p^* + 2b\nu_p^* x)t^2 + \frac{1}{3} b^2 \nu_p^* t^3 -$$

$$- e^{-\frac{bx}{2a}}\left(\lambda_0^* F_1\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right) + (2a\nu_0^* + b\mu_0^*) F_2\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right) + 2b^2 \nu_0^* F_3\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right)\right)$$

за $x_p^* \leqq x < x_{p+1}^*$, $p = 0,1,2,\ldots$; $x_0^* = 0$.

2 случай : $c > 0$.

Можем да представим

/2.3.6/ $$\frac{1}{s(s+c)^m} = \frac{1}{c^m}\frac{1}{s} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{c^{i+1}(s+c)^{m-i}}$$.

Следователно, ако

/2.3.7/ $d_1(x) = \sum_{p=0}^{m^*} \nu_p^* x^p$ както /2.3.2/,

от /2.0.24/ с $\bar{d}_2(s) = \frac{1}{s}$ получаваме

$$\bar{z}(x,s) = \sum_{p=0}^{m^*}\left(\sum_{j=0}^{m^*-p} \frac{a_{pj}^*}{s(s+c)^{j+1}}\right)x^p - e^{-\frac{bx}{2a}} \sum_{j=0}^{m^*} a_{0j}^* \frac{e^{-k\sqrt{s+d}}}{s(s+c)^{j+1}} =$$

$$= \sum_{p=0}^{m^*} \left(\sum_{j=0}^{m^*-p} a^*_{pj} \left(\frac{1}{c^{j+1}} \frac{1}{s} - \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{c^{i+1}} \frac{1}{(s+c)^{j-i+1}} \right) \right) x^p -$$

$$- e^{-\frac{bx}{2a}} \sum_{j=0}^{m^*} a^*_{0j} \left(\frac{1}{c^{j+1}} \frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s} - \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{c^{i+1}} \frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{(s+c)^{j-i+1}} \right)$$

и оттук като сменим реда на сумиране при двойните суми, то

$$/2.3.8/ \quad z(x,t) = \sum_{j=0}^{m^*} \frac{1}{c^{j+1}} \sum_{p=0}^{m^*-j} a^*_{pj} x^p - e^{-ct} \sum_{j=0}^{m^*} \left(\sum_{p=0}^{m^*-j} a^*_{pj} x^p \right) \sum_{i=0}^{j} \frac{t^{j-k}}{c^{i+1}(j-i)!} -$$

$$- e^{-\frac{bx}{2a}} \left(F_0\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}+c\right) \sum_{j=0}^{m^*} \frac{a^*_{0j}}{c^{j+1}} - e^{-ct} \sum_{j=0}^{m^*} a^*_{0j} \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{c^{i+1}} F_{j-i}\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right) \right).$$

Ако

$$/2.3.9/ \quad \varphi_1(x) = \lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2$$ както /2.3.4/, то

$$\bar{z}(x,s) = (\lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2)\frac{1}{s(s+c)} + (2a\nu_p^* + b\mu_p^* + 2b\nu_p^* x)\frac{1}{s(s+c)^2} + 2b^2\nu_p^* \frac{1}{s(s+c)^3} -$$

$$- e^{-\frac{bx}{2a}}\left(\lambda_p^* \frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s(s+c)} + (2a\nu_p^* + b\mu_p^*)\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s(s+c)^2} + 2b^2\nu_p^* \frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s(s+c)^3}\right)$$

за $x_p^* \leqq x < x_{p+1}$, $p = 0,1,2,\dots;$ $x_0^* = 0$. По според /2.3.6/

имаме $\frac{1}{s(s+c)} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+c}\right)$, $\frac{1}{s(s+c)^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+c} - \frac{c}{(s+c)^2}\right)$

$\frac{1}{s(s+c)^3} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+c} - \frac{c}{(s+c)^2} - \frac{c^2}{(s+c)^3}\right)$ и вече не е трудно да получим

решението

$$/2.3.10/ \quad z(x,t) = \frac{1}{c}(\lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2) + \frac{1}{c^2}(2a\nu_p^* + b\mu_p^* + 2b\nu_p^* x) + \frac{1}{c^3}\cdot 2b^2\nu_p^* -$$

$$- e^{-ct}\left(\frac{1}{c} b^2\nu_p^* t^2 + \left(\frac{1}{c}(2a\nu_p^* + b\mu_p^* + 2b\nu_p^* x) + \frac{1}{c^2} 2b^2\nu_p^*\right)t + \frac{1}{c}(\lambda_p^* + \mu_p^* x + \nu_p^* x^2) + \frac{1}{c^2}(2a\nu_p^* + b\mu_p^* + 2b\nu_p^* x) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^3} 2b\nu_p^*\right) - e^{-\frac{bx}{2a}}\left(\left(\frac{1}{c}\lambda_p^* + \frac{1}{c^2}(2a\nu_p^* + b\mu_p^*) + \frac{1}{c^3} 2b^2\nu_p^*\right) F_0\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a} + c\right) -\right.$$

$$- e^{-ct}\left(\frac{1}{c} 2b^2\nu_p^* F_2\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right) + \left(\frac{1}{c}(2a\nu_p^* + b\mu_p^*) + \frac{1}{c^2} 2b^2\nu_p^*\right) F_1\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right) +\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{c}\lambda_p^* + \frac{1}{c^2}(2a\nu_p^* + b\mu_p^*) + \frac{1}{c^3} 2b^2\nu_p^*\right) F_0\left(t, \frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{b^2}{4a}\right)\right)\right) .$$

за $x_p^* \leqq x \leqq x_{p+1}^*$, $p = 0,1,2,\dots;$ $x_p^* = 0$.

II. Нека $d(x,t)=d_2(t)$, т.е. $d_1(x)=1$. Тогава /2.0.22/ става

/2.3.11/ $a\bar{z}''+b\bar{z}'-(s+c)\bar{z}=-\bar{d}_2(s)$

и за частното му решение $\bar{d}_2(s)\bar{z}^*(x,s)$ получаваме $\bar{z}^*(x,s)=\bar{z}^*(0,s)=\frac{1}{s+c}$

и като заместим в /2.0.24/, намираме

/2.3.12/ $\bar{z}(x,s)=\frac{\bar{d}_2(s)}{s+c}-e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{\bar{d}_2(s)e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s+c}$.

1. Да предположим, че $d_2(t)$ е полином,

/2.3.13/ $d_2(t)=\sum_{j=0}^{n^*}A_j^* t^j$, A_j^* - константи, $0\leqq t<\infty$.

Тогава $\bar{d}_2(s)=\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!A_j^*}{s^{j+1}}$ и следователно

/2.3.14/ $\bar{z}(x,s)=\sum_{j=0}^{n^*}j!A_j^*\frac{1}{s^{j+1}(s+c)}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{n^*}j!A_j^*\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}(s+c)}$.

1 случай : $c=0$.

От /2.3.14/ получаваме

$$\bar{z}(x,s)=\sum_{j=0}^{n^*}j!A_j^*\frac{1}{s^{j+2}}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{n^*}j!A_j^*\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+2}}$$

и от тук решението

/2.3.15/ $z(x,t)=\sum_{j=0}^{n^*}A_j^*\left(\frac{t^{j+1}}{j+1}-j!e^{-\frac{bx}{2a}}F_{j+1}\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)$.

2 случай : $c>0$.

Можем да представим

/2.3.16/ $\frac{1}{s^n(s+c)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(-c)^i}\frac{1}{s^{n-i}}+\frac{1}{(-c)^n}\frac{1}{s+c}$.

Като заместим в /2.3.14/ и разменим реда на сумирането при двойните суми, получаваме

$$\bar{z}(x,s)=\sum_{j=0}^{n^*}j!A_j^*\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{(-c)^{j-i+1}}\left(e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{i+1}}-\frac{1}{s^{i+1}}\right)+\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!A_j^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(\frac{1}{s+c}-e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s+c}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n^*}(-c)^i\left(\sum_{j=i}^{n^*}\frac{j!A_j^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{i+1}}-\frac{1}{s^{i+1}}\right)+\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!A_j^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(\frac{1}{s+c}-e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s+c}\right)$$.

$$/2.3.21/\quad z(x,t)=\sum_{j=0}^{n^*} A_{0j}^*\left(\frac{t^{j+1}}{j+1}-j!\,e^{-\frac{bx}{2a}}F_{j+1}\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)\sigma(t)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n^*}\left(\sum_{p=0}^{n^*-j}\left(A_{\nu,p+j}^*-A_{\nu-1,p+j}^*\right)V_{p+j}^{\,j}\,t_\nu^{*p}\right)\left(\frac{(t-t_\nu^*)^{j+1}}{(j+1)!}-e^{-\frac{bx}{2a}}F_{j+1}\left(t-t_\nu^*,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)\right)\sigma(t-t_\nu^*)\quad .$$

2 случай : $c>0$.

Като вземем предвид /2.3.16/, от /2.3.20/ след лека преработка получаваме

$$\bar{\bar{z}}(x,s)=\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_{0j}^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(\frac{1}{s+c}-e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s+c}\right)+\sum_{i=0}^{n^*}(-c)^i\left(\sum_{j=i}^{n^*}\frac{j!\,A_{0j}^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{i+1}}-\frac{1}{s^{i+1}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{(-c)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{n^*-j}\left(A_{\nu,p+j}^*-A_{\nu-1,p+j}^*\right)V_{p+j}^{\,j}\,t_\nu^{*p}\right)\right)\left(\frac{e^{-t_\nu^* s}}{s+c}-e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-t_\nu^* s}e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s+c}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n^*}(-c)^i\left(\sum_{j=i}^{n^*}\frac{1}{(-c)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{n^*-j}\left(A_{\nu,p+j}^*-A_{\nu-1,p+j}^*\right)V_{p+j}^{\,j}\,t_\nu^{*p}\right)\right)\left(e^{-\frac{bx}{2a}}\frac{e^{-t_\nu^* s}e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{s^{i+1}}-\frac{e^{-t_\nu^* s}}{s^{i+1}}\right)\right),$$

откъдето намираме решението

$$/2.3.22/\quad z(x,t)=\left(e^{-ct}\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_{0j}^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(1-e^{-\frac{bx}{2a}}F_0\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)+\sum_{i=0}^{n^*}(-c)^i\left(\sum_{j=i}^{n^*}\frac{j!\,A_{0j}^*}{(-c)^{j+1}}\right)\left(e^{-\frac{bx}{2a}}F_i\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}+c\right)-\frac{t^i}{i!}\right)\right)\sigma(t)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(e^{-ct}\left(\sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{(-c)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{n^*-j}\left(A_{\nu,p+j}^*-A_{\nu-1,p+j}^*\right)V_{p+j}^{\,j}\,t_\nu^{*p}\right)\right)\left(1-e^{-\frac{bx}{2a}}F_0\left(t-t_\nu^*,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n^*}(-c)^i\left(\sum_{j=i}^{n^*}\frac{1}{(-c)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{n^*-j}\left(A_{\nu,p+j}^*-A_{\nu-1,p+j}^*\right)V_{p+j}^{\,j}\,t_\nu^{*p}\right)\right)\left(e^{-\frac{bx}{2a}}F_i\left(t-t_\nu^*,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}+c\right)-\frac{(t-t_\nu^*)^i}{i!}\right)\right)\sigma(t-t_\nu^*)\,.$$

III. Нека $d(x,t)=d_1(x)d_2(t)$, където

$$/2.3.23/\quad d_1(x)=\sum_{p=0}^{m^*}\nu_p^* x^p \quad , \quad \nu_p^* \text{ - константи, } 0\le x<\infty \quad ,$$

$$/2.3.24/\quad d_2(t)=\sum_{j=0}^{n^*}A_j^* t^j \quad , \quad A_j^* \text{ - константи, } 0\le t<\infty \quad .$$

Като потърсим частното решение $\bar{d}_2(s)\bar{z}^*(x,s)$ на

$/2.0.22/ \; a\bar{z}''+b\bar{z}'-(s+c)\bar{z}=-\bar{d}_2(s)d_1(x)$, намираме

$\bar{z}^*(x,s)=\sum_{i=0}^{m^*}\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a^*_{pi}x^p\right)\frac{1}{(s+c)^{i+1}}$, където a^*_{pi} се получават при пресмятането на $\bar{z}^*(x,s)$, и още имаме $\bar{z}^*(0,s)=\sum_{i=0}^{m^*}\frac{a^*_{0i}}{(s+c)^{i+1}}$

и понеже $\bar{d}_2(s)=\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!A^*_j}{s^{j+1}}$, като заместим в /2.0.24/, получаваме

$$/2.3.25/ \; \bar{z}(x,s)=\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}j!A^*_j\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a^*_{pi}x^p\right)\frac{1}{s^{j+1}(s+c)^{i+1}}-$$

$$-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}j!A^*_j a^*_{0i}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{j+1}(s+c)^{i+1}}$$

1 случай : $c=0$.

От /2.3.25/ получаваме

$$\bar{z}(x,s)=\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}j!A^*_j\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a^*_{pi}x^p\right)\frac{1}{s^{i+j+2}}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}j!A^*_j a^*_{0i}\frac{e^{-k\sqrt{s+\alpha}}}{s^{i+j+2}}$$

и, очевидно, решението $z(x,t)$ на /2.0.12/ с нулево начално условие, нулево гранично условие от I род и $d_1(x)$, $d_2(t)$ според /2.3.23/, /2.3.24/, при $c=0$ е

$$/2.3.26/ \; z(x,t)=\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!A^*_j}{(i+j+1)!}\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a^*_{pi}x^p\right)t^{i+j+1}-e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}j!A^*_j a^*_{0i}F_{i+j+1}\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{b^2}{4a}\right)$$

2 случай : $c>0$.

Трябва ни разложението в елементарни дроби на $\frac{1}{s^n(s+c)^m}$.

Сравнително лесно е да установим, че ако си мислим

$$\frac{1}{s^n(s+c)^m}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{M_\nu}{s^{n-(\nu-1)}}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{N_\nu}{(s+c)^{m-(\nu-1)}}$$, то

$$M_\nu=\frac{\binom{m+\nu-2}{\nu-1}}{c^m(-c)^{\nu-1}}, \quad \nu=1,2,\dots,n \; ; \quad N_\nu=\frac{\binom{n+\nu-2}{\nu-1}}{(-c)^n c^{\nu-1}}, \quad \nu=1,2,\dots,m$$

Следователно

$$/2.3.27/ \; \frac{1}{s^n(s+c)^m}=\frac{1}{c^m}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(-c)^\nu}\binom{m+\nu-1}{\nu}\frac{1}{s^{n-\nu}}+\frac{1}{(-c)^n}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{c^\nu}\binom{n+\nu-1}{\nu}\frac{1}{(s+c)^{m-\nu}}=$$

$$=\frac{1}{C^m(-C)^n}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}(-C)^{\nu+1}\binom{m+n-\nu-2}{m-1}\frac{1}{S^{\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{m-1}C^{\nu+1}\binom{m+n-\nu-2}{n-1}\frac{1}{(S+C)^{\nu+1}}\right).$$

Лесно се вижда, че /2.3.6/ и /2.3.16/ са следствия от /2.3.27/.

От /2.3.27/ в частност получаваме

$$\frac{1}{S^{j+1}(S+C)^{i+1}}=\frac{1}{C^{i+1}(-C)^{j+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{j}(-C)^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{i}\frac{1}{S^{\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{i}C^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{j}\frac{1}{(S+C)^{\nu+1}}\right)$$

и като заместим в /2.3.25/, от

$$\bar{z}(x,S)=\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_j^*}{C^{i+1}(-C)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a_{pi}^*x^p\right)\left(\sum_{\nu=0}^{j}(-C)^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{i}\frac{1}{S^{\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{i}C^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{j}\frac{1}{(S+C)^{\nu+1}}\right)-$$

$$e^{-\frac{Bx}{2a}}\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_j^*a_{0i}^*}{C^{i+1}(-C)^{j+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{j}(-C)^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{i}\frac{e^{-K\sqrt{S+\alpha}}}{S^{\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{i}C^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{j}\frac{e^{-K\sqrt{S+\alpha}}}{(S+C)^{\nu+1}}\right)$$

лесно получаваме решението $z(x,t)$ на уравнението /2.0.12/ с нулево начално условие, нулево гранично условие от I род и $d_1(x)$, $d_2(t)$ според /2.3.23/,/2.3.24/, при $C>0$:

$$/2.3.28/\quad z(x,t)=\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_j^*}{C^{i+1}(-C)^{j+1}}\left(\sum_{p=0}^{m^*_i}a_{pi}^*x^p\right)\left(\sum_{\nu=0}^{j}\frac{(-C)^{\nu+1}}{\nu!}\binom{i+j-\nu}{i}t^\nu+e^{-Ct}\sum_{\nu=0}^{i}\frac{C^{\nu+1}}{\nu!}\binom{i+j-\nu}{j}t^\nu\right)-$$

$$e^{-\frac{Bx}{2a}}\sum_{i=0}^{m^*}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{j!\,A_j^*a_{0i}^*}{C^{i+1}(-C)^{j+1}}\left(\sum_{\nu=0}^{j}(-C)^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{i}F_\nu\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{B^2}{4a}+C\right)+e^{-Ct}\sum_{\nu=0}^{i}C^{\nu+1}\binom{i+j-\nu}{j}F_\nu\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}},\frac{B^2}{4a}\right)\right).$$

Г Л А В А 3

ОБОБЩЕНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ ПРИ II И III ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ И НУЛЕВО НАЧАЛНО УСЛОВИЕ

В тази глава ще разгледаме обобщеното уравнение на топлопроводността

$$/3.0.1/ \quad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}-cu=\frac{\partial u}{\partial t}$$

в областта $\begin{cases} 0\leq x<\infty \\ 0\leq t<\infty \end{cases}$ с постоянни коефициенти $a>0$, b , $c\geq 0$,

с начално условие

$$/3.0.2/ \quad u(x,0)=0$$

и гранично условие

$$/3.0.3/ \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=f(t) \quad , f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$$, при II гранична задача,

или

$$/3.0.4/ \quad A\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+Bu(0,t)=f(t) \quad , f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}, A\neq 0$$ и B - константи, при III гранична задача. Ограничаваме се да разглеждаме уравнението /3.0.1/ без смутителна функция и с нулево начално условие, защото в противен случай бихме получили резултати, аналогични на тези в § 2.1 и § 2.3, и без да получаваме принципно нови резултати, само бихме увеличили ненужно обема на тази глава. Достатъчно е да илюстрираме получаването на решението за II и III гранични задачи по начин, аналогичен на този в § 2.2 за случая, когато $f(t)$ е полином или частично полиномна функция, като тук ще използуваме Т5 и Т6, респективно Т2 и Т3 при $b=c=0$.

§ 3.1. ВТОРА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА С ПОЛИНОМНО И ЧАСТИЧНО ПОЛИНОМНО ГРАНИЧНО УСЛОВИЕ

От /3.0.1/ и /3.0.2/, съобразено с /0.2.4/, получаваме операционното уравнение

/3.1.1/ $a\bar{u}'' + b\bar{u}' - (s+c)\bar{u} = 0$, $\bar{u} = \bar{u}(x,s)$,

като производните са спрямо x , с условие, следващо от /3.0.3/,

/3.1.2/ $\bar{u}'(0,s) = \bar{f}(s)$.

Ако и тук търсим решение $u(x,t)$ на /3.0.1/ :

/3.1.3/ $u(x,t) = O(e^{\lambda x})$ при $x \to \infty$ за $\lambda > 0$,

както в глава 2, получаваме, че решението на /3.1.1/ с условие /3.1.2/ е

/3.1.4/ $\bar{u}(x,s) = -\sqrt{a}\, e^{-\frac{bx}{2a}} \dfrac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{\sqrt{s+\alpha} + \beta} \bar{f}(s)$,

където

/3.1.5/ $\kappa = \dfrac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$, $\alpha = \dfrac{b^2}{4a} + c \geqq 0$, $\beta = \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$.

Нека $f(t)$ е представена частично чрез полиноми от произволна степен, като за определеност считаме, че максималната степен е n :

/3.1.6/ $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} A_{\nu j} t^j$ за $t_\nu \leqq t < t_{\nu+1}$; $\nu = 0,1,2,\ldots$; $t_0 = 0$,

$A_{\nu j}$ - константи, където предполагаме, че съществуват границите $\lim\limits_{\nu\to\infty} A_{\nu j}$ за $j = 0,1,2,\ldots, n$. Не е изключено, разбира се, някои от коефициентите $A_{\nu j}$ да са нули, така че за някои от интервалите $t_\nu \leqq t < t_{\nu+1}$ съответният полином да е от степен, по-ниска от максималната степен n . Както в § 2.2 получаваме

/3.1.7/ $\bar{f}(s) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{j!\,A_{0j}}{s^{j+1}} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} \left(\sum\limits_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j}\, t_\nu^{p} \right) \dfrac{e^{-t_\nu s}}{s^{j+1}}$

и като заместим в /3.1.4/, имаме :

1. При $b \neq 0$, т.е. $\alpha = \frac{b^2}{4a} + c > 0$, $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}} \neq 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$,

$$\bar{u}(x,s) = -\sqrt{a}\, e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \bar{\Psi}_j(s,\kappa,\alpha,\beta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) e^{-t_\nu s}\, \bar{\Psi}_j(s,\kappa,\alpha,\beta) \right)$$

и за търсеното решение $u(x,t)$ според T6 получаваме

$$/3.1.8/\ u(x,t) = -\sqrt{a}\, e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \Psi_j(t,\kappa,\alpha,\beta)\sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) \Psi_j(t-t_\nu,\kappa,\alpha,\beta)\sigma(t-t_\nu) \right)$$

2. При $b = 0$, $c > 0$, т.е. $\alpha = c > 0$, $\beta = 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$,

$$\bar{u}(x,s) = -\sqrt{a} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \bar{\Phi}_j(s,\kappa,\alpha) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) e^{-t_\nu s}\, \bar{\Phi}_j(s,\kappa,\alpha) \right)$$

и според T5 получаваме решението

$$/3.1.9/\ u(x,t) = -\sqrt{a} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \Phi_j(t,\kappa,\alpha)\sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) \Phi_j(t-t_\nu,\kappa,\alpha)\sigma(t-t_\nu) \right).$$

3. При $b = c = 0$, т.е. $\alpha = \beta = 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$,

$$\bar{u}(x,s) = -\sqrt{a} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \bar{\Phi}_j(s,\kappa) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) e^{-t_\nu s}\, \bar{\Phi}_j(s,\kappa) \right)$$

и според T2 получаваме решението

$$/3.1.10/\ u(x,t) = -\sqrt{a} \left(\sum_{j=0}^{n} j!\, A_{0j}\, \Phi_j(t,\kappa)\sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} \cdot t_\nu^{p} \right) \Phi_j(t-t_\nu,\kappa)\sigma(t-t_\nu) \right).$$

Като частен случай получаваме търсеното решение $u(x,t)$ когато $f(t)$ е полином:

$$/3.1.11/\ f(t) = \sum_{j=0}^{n} A_j t^j \quad , \ A_j \text{ - константи, } 0 \leqq t < \infty .$$

Получаваме

$/3.1.12/\ u(x,t) = -\sqrt{a}\, e^{-\frac{bx}{2a}} \sum_{j=0}^{n} j!\, A_j \Psi_j(t,\kappa,\alpha,\beta)$ според T6, $\alpha = \frac{b^2}{4a} + c > 0$, $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}} \neq 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$, при $b \neq 0$; или

$/3.1.13/\ u(x,t) = -\sqrt{a} \sum_{j=0}^{n} j!\, A_j\, \Phi_j(t,\kappa,\alpha)$ според T5, $\alpha = c > 0$, $\beta = 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$, при $b = 0$, $c > 0$; или

$/3.1.14/\ u(x,t) = -\sqrt{a} \sum_{j=0}^{n} j!\, A_j\, \Phi_j(t,\kappa)$ според T2, $\alpha = \beta = 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geqq 0$, при $b = c = 0$.

§ 3.2. ТРЕТА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА С ПОЛИНОМНО И ЧАСТИЧНО ПОЛИНОМНО ГРАНИЧНО УСЛОВИЕ

От /3.0.1/ и /3.0.2/, съобразено с /0.2.4/, получаваме операционното уравнение

/3.2.1/ $a\bar{u}'' + b\bar{u}' - (s+c)\bar{u} = 0$, $\bar{u} = \bar{u}(x,s)$,

като производните са спрямо x , с условие, следващо от /3.0.4/,

/3.2.2/ $A\bar{u}'(0,s) + B\bar{u}(0,s) = \bar{f}(s)$.

Ако търсим решение $u(x,t)$ на /3.0.1/ според /3.1.3/, получаваме, че решението на /3.2.1/ с условие /3.2.2/ е

/3.2.3/ $$\bar{u}(x,s) = -\frac{\sqrt{a}}{A} e^{-\frac{bx}{2a}} \frac{e^{-\kappa\sqrt{s+\alpha}}}{\sqrt{s+\alpha} + \beta} \bar{f}(s) ,$$

където

/3.2.4/ $$\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geq 0 , \quad \alpha = \frac{b^2}{4a} + c \geq 0 , \quad \beta = \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}B}{A} .$$

Ако $f(t)$ е частично полиномната функция /3.1.6/, за която следва /3.1.7/, като заместим в /3.2.3/, имаме :

1. При $\alpha = \frac{b^2}{4a} + c > 0$, $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}B}{A} \neq 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geq 0$,

$$\bar{u}(x,s) = -\frac{\sqrt{a}}{A} e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j! A_{0j} \bar{\Psi}_j(s,\kappa,\alpha,\beta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} t_\nu^{p} \right) e^{-t_\nu s} \bar{\Psi}_j(s,\kappa,\alpha,\beta) \right)$$

и за решението $u(x,t)$ според Т6 получаваме

/3.2.5/ $$u(x,t) = -\frac{\sqrt{a}}{A} e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j! A_{0j} \Psi_j(t,\kappa,\alpha,\beta) \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} t_\nu^{p} \right) \Psi_j(t-t_\nu,\kappa,\alpha,\beta) \sigma(t-t_\nu) \right)$$

2. При $\alpha = \frac{b^2}{4a} + c > 0$, $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}B}{A} = 0$, $\kappa = \frac{x}{\sqrt{a}} \geq 0$,

$$\bar{u}(x,s) = -\frac{\sqrt{a}}{A} e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j! A_{0j} \bar{\Phi}_j(s,\kappa,\alpha) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} t_\nu^{p} \right) e^{-t_\nu s} \bar{\Phi}_j(s,\kappa,\alpha) \right)$$

и според Т5 получаваме решението

/3.2.6/ $$u(x,t) = -\frac{\sqrt{a}}{A} e^{-\frac{bx}{2a}} \left(\sum_{j=0}^{n} j! A_{0j} \Phi_j(t,\kappa,\alpha) \sigma(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-j} (A_{\nu,p+j} - A_{\nu-1,p+j}) V_{p+j}^{j} t_\nu^{p} \right) \Phi_j(t-t_\nu,\kappa,\alpha) \sigma(t-t_\nu) \right)$$

3. При $\alpha=0$ / т.е. $b=c=0$ /, $\beta=-\frac{\sqrt{a}B}{A}\neq 0$ / т.е. $B\neq 0$ при типична III гранична задача/, $\kappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$,

$$\bar{u}(x,s)=-\frac{\sqrt{a}}{A}\left(\sum_{j=0}^{n} j!A_{0j}\bar{\psi}_j(s,\kappa,\beta)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-j}(A_{\nu,p+j}-A_{\nu-1,p+j})V_{p+j}^{j}t_\nu^{p}\right)e^{-t_\nu s}\bar{\psi}_j(s,\kappa,\beta)\right)$$

и според Т3 получаваме решението

$$/3.2.7/\ u(x,t)=-\frac{\sqrt{a}}{A}\left(\sum_{j=0}^{n} j!A_{0j}\psi_j(t,\kappa,\beta)\sigma(t)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-j}(A_{\nu,p+j}-A_{\nu-1,p+j})V_{p+j}^{j}t_\nu^{p}\right)\psi_j(t-t_\nu,\kappa,\beta)\,\sigma(t-t_\nu)\right).$$

Като частен случай получаваме решението $u(x,t)$, когато $f(t)$ е полинома /3.1.11/. Имаме

$$/3.2.8/\ u(x,t)=-\frac{\sqrt{a}}{A}e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{n} j!A_j\psi_j(t,\kappa,\alpha,\beta)$$ според Т6, $\alpha=\frac{b^2}{4a}+c>0$,

$\beta=\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}B}{A}\neq 0$, $\kappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$, или

$$/3.2.9/\ u(x,t)=-\frac{\sqrt{a}}{A}e^{-\frac{bx}{2a}}\sum_{j=0}^{n} j!A_j\varphi_j(t,\kappa,\alpha)$$ според Т5, $\alpha=\frac{b^2}{4a}+c>0$,

$\beta=\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}B}{A}=0$, $\kappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$, или

$$/3.2.10/\ u(x,t)=-\frac{\sqrt{a}}{A}\sum_{j=0}^{n} j!A_j\psi_j(t,\kappa,\beta)$$ според Т3, $\alpha=0$,

$\beta=-\frac{\sqrt{a}B}{A}\neq 0$, $\kappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geq 0$, при $b=c=0$, $B\neq 0$.

Г Л А В А 4

ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ И ТРАНСФОРМАЦИИ, СВЪРЗАНИ С БЕСЕЛОВОТО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

В тази глава се излага операционно смятане за сингулярния диференциален оператор от беселов тип

$$/4.0.1/ \quad B_K = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{K}{r}\frac{d}{dr} \quad , \quad K \geqq 1 \ .$$

Първо се намира конволюция за десния обратен линеен оператор L_K на B_K, дефиниран с нулеви начални условия. За него е изпълнено

$$/4.0.2/ \quad B_K L_K = I \quad ,$$

където I е идентитетът. Полученият пръстен е област на цялостност и може да бъде разширен до поле от частни, което е изоморфно на полето $\mathcal{M}$ на Микусински. Намираме подобия между операторите L_K и ℓ^2, където ℓ е операторът за интегриране,

$$/4.0.3/ \quad \ell f(r) = \int_0^r f(\rho)\,d\rho \quad .$$

Чрез намерените подобия намираме връзка между беселовите диференциални оператори B_K и $\frac{d^2}{dr^2}$.

Ще използуваме следните дефиниции /вж. [6] и [14] / :

<u>Дефиниция 1</u> : Класът C_α се състои от функции $f(r)$ от вида $f(r) = r^p \tilde{f}(r)$ с $p > \alpha$, където $\tilde{f}(r) \in C$ - класа от комплексно-значни непрекъснати функции в интервала $0 \leqq r < \infty$.

<u>Дефиниция 2</u> : Класът $C_\alpha^{(n)}$ се състои от функции $f(r)$ от вида $f(r) = r^p \tilde{f}(r)$ с $p > \alpha$, където $\tilde{f}(r) \in C^{(n)}$ - класа от n -кратно гладките комплексно-значни функции в интервала $0 \leqq r < \infty$. Под $C^{(0)}$ ще разбираме C .

Очевидно, от $\alpha > \beta$ следва $C_\alpha \subset C_\beta$ и от $f(r) \in C_\alpha^{(n)}$ следва $f'(r) \in C_{\alpha-1}^{(n-1)}$.

<u>Дефиниция 3</u> : Конволюция на линейния оператор L в C_α наричаме всяка билинейна, комутативна и асоциативна операция $f(r)\tilde{*}g(r)$, за която от $f(r)$, $g(r)\in C_\alpha$ следва $f(r)\tilde{*}g(r)\in C_\alpha$, с мултипликативното свойство за L ,

/4.0.4/ $L(f\tilde{*}g)=(Lf)\tilde{*}g$.

Ако операцията $f\tilde{*}g$ няма делители на нулата, условието /4.0.4/ е равносилно / вж. [14] / на

/4.0.5/ $(Lf)\tilde{*}g=f\tilde{*}(Lg)$,

което в някои случаи е по-удобно за прилагане.

<u>Дефиниция 4</u> : Обратима линейна трансформация φ , изобразяваща линейно пространство C върху линейно пространство $\bar{C}$, наричаме линейно подобие или, по-кратко, подобие между линейните оператори $L: C\to C$ и $\bar{L}:\bar{C}\to\bar{C}$, ако

/4.0.6/ $\varphi L=\bar{L}\varphi$.

Тогава $L=\varphi^{-1}\bar{L}\varphi$ и $\bar{L}=\varphi L\varphi^{-1}$.

Известна е следната / вж. [14] /

<u>Теорема 7</u> : Ако φ е линейно обратимо изображение на линейно пространство C върху линейното пространство $\bar{C}$, а $\bar{f}*\bar{g}$ е конволюция на оператора $\bar{L}$ в $\bar{C}$, операцията $f\tilde{*}g=\varphi^{-1}((\varphi f)*(\varphi g))$ е конволюция на оператора $L=\varphi^{-1}\bar{L}\varphi$ в C .

<u>Дефиниция 5</u> / вж. [19] , стр. 26 / : Начален проектор F на диференциалния оператор B спрямо негов десен обратен линеен оператор L наричаме оператора

/4.0.7/ $F=I-LB$,

където I е идентитетът.

Ще използуваме някои добре известни свойства на функциите

$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt$, $\nu>0$ и $B(\lambda,\mu)=\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt$, $\lambda>0$, $\mu>0$:

$\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$,

$\Gamma(n+1)=n!$ за n - цяло неотрицателно,

/4.0.8/ $\int_0^1 t^\lambda(1-t)^\mu dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}=B(\lambda+1,\mu+1)$ за $\lambda>-1$, $\mu>-1$.

§ 4.1. ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ ЗА ЕДИН КЛАС ОТ БЕСЕЛОВИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОПЕРАТОРИ

Разглеждаме сингулярния диференциален оператор от беселов тип $B_K=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{K}{r}\frac{d}{dr}$. За него търсим представяне от вида

/4.1.1/ $B_K=r^{\alpha_0}\frac{d}{dr}r^{\alpha_1}\frac{d}{dr}r^{\alpha_2}$.

Лесно се пресмята

/4.1.2/ $B_K u=r^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}u''+(\alpha_1+2\alpha_2)r^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-1}u'+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-1)r^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2}u$.

Изобщо за всеки диференциален оператор от беселов тип е характерно намаляването с единица на степените пред производните. Като сравним $B_K u=u''+\frac{K}{r}u'$ с /4.1.2/, намираме

$$\left|\begin{array}{l}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2=K\\ \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-1)=0\end{array}\right.$$,

където тази система уравнения от втора степен има в случая две реални решения: $\alpha_0=-K$, $\alpha_1=K$, $\alpha_2=0$ и $\alpha_0=-1$, $\alpha_1=2-K$, $\alpha_2=K-1$. Като заместим в /4.1.1/, получаваме двете представяния

/4.1.3/ $B_K=r^{-K}\frac{d}{dr}r^{K}\frac{d}{dr}$

и

/4.1.4/ $B_K=r^{-1}\frac{d}{dr}r^{2-K}\frac{d}{dr}r^{K-1}$, чрез които могат да се получат два различни линейни десни обратни оператора. Ще се спрем на представянето /4.1.3/ и оттук нататък ще използуваме само това представяне на B_K. При $K=1$ представянето е единствено:

/4.1.5/ $B_1 = r^{-1}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}$.

Търсим линеен десен обратен оператор L_K на B_K, т.е. удовлетворяващ /4.0.2/, в някакво пространство C_α, когато $K \geq 1$. Точната стойност на α ще уточним след някои предварителни разглеждания. Ако $f(r) \in C_\alpha$, функцията $u(r) = L_K f(r)$ търсим като решение на диференциалното уравнение

$r^{-K}\frac{d}{dr} r^K \frac{d}{dr} u(r) = f(r)$ при нулевите начални условия

/4.1.6/ $\lim\limits_{r\to+0} r^K u'(r) = 0$

и

/4.1.7/ $\lim\limits_{r\to+0} u(r) = 0$.

Като умножим диференциалното уравнение с r^K и интегрираме в граници от 0 до r, получаваме

$r^K \frac{d}{dr} u(r) = \int_0^r \tau^K f(\tau)\,d\tau$, което умножено с r^{-K} и интегрирано от 0 до r ни дава

$u(r) = \int_0^r \left(\sigma^{-K} \int_0^\sigma \tau^K f(\tau)\,d\tau\right) d\sigma$, т.е.

/4.1.8/ $L_K f(r) = \int_0^r \left(\sigma^{-K} \int_0^\sigma \tau^K f(\tau)\,d\tau\right) d\sigma$.

Да уточним класа от функции C_α, за които съществуват интегралите в /4.1.8/. Нека $f(r)$ да е от вида $f(r) = r^p \tilde{f}(r)$, където $\tilde{f}(r) \in C$. Тогава $\tau^K f(\tau) = \tau^{p+K} \tilde{f}(\tau)$, $\tilde{f}(\tau) \in C$ и за да съществува вътрешният интеграл трябва $p+K > -1$, т.е. $p > -K-1$.

Като се извърши вътрешното интегриране, следва

$\sigma^{-k}\sigma^{p+k+1}\tilde{f}_1(\sigma)=\sigma^{p+1}\tilde{f}_1(\sigma)$, $\tilde{f}_1(\sigma)\in C^{(1)}$, и за да съществува външният интеграл трябва $p+1>-1$, т.е. $p>-2$. Тъй като разглеждаме случая, когато

/4.1.9/ $k\geq 1$,

от двете неравенства за p следва $p>-2$. Следователно двата интеграла в /4.1.8/ съществуват, ако

/4.1.10/ $f(r)\in C_{-2}$,

което е дефиниционната област на този линеен десен обратен оператор L_k на B_k .

Да проверим, че L_k е наистина десен обратен линеен оператор на B_k в C_{-2} . Интересуваме се в какво се преобразува пространството C_{-2} чрез оператора L_k . След външното интегриране в /4.1.8/ на $\sigma^{p+1}\tilde{f}_1(\sigma)$, където $\tilde{f}_1(\sigma)\in C^{(1)}$, получаваме $u(r)=L_k f(r)=r^{p+2}\tilde{f}_2(r)$, където $\tilde{f}_2(r)\in C^{(2)}$. Тогава от $f(r)\in C_{-2}$ следва $f(r)=r^p\tilde{f}(r)$ с $p>-2$, $\tilde{f}(r)\in C$, откъдето $p+2>-2+2=0$, което показва, че

/4.1.11/ $u(r)=L_k f(r)\in C_0^{(2)}$,

т.е.

/4.1.12/ $L_k: C_{-2}\longrightarrow C_0^{(2)}$

и понеже $C_0^{(2)}\subset C_{-2}$, следва, че след прилагане на оператора L_k не напускаме класа на разглежданите функции, т.е.

/4.1./13/ $L_k: C_{-2}\longrightarrow C_{-2}$.

Да проверим дали са изпълнени началните условия. Нека $f(r)\in C_{-2}$ и $u(r)=L_k f(r)$. Тогава

/4.1.14/ $u(r)\in C_0^{(2)}$

и следователно началното условие /4.1.7/ е изпълнено. От /4.1.14/

следва $\frac{d}{dr}u(r)\in C_{-1}^{(1)}$, а оттук, че $r^{k}\frac{d}{dr}u(r)\in C_{k-1}^{(1)}$.
Но от /4.1.9/ следва $k-1\geq 0$, така че всяка функция от класа $C_{k-1}^{(1)}$ има вида $f(r)=r^{p}\tilde{f}(r)$, $\tilde{f}(r)\in C^{(1)}$, с $p>k-1\geq 0$, т.е. с $p>0$. Следователно

/4.1.15/ $r^{k}u'(r)\in C_{k-1}^{(1)}\subset C_{0}^{(1)}$ за $k\geq 1$

и началното условие /4.1.6/ също е изпълнено.

От /4.1.8/ чрез смяна на променливите $\tau=\sigma\tau_1$, $\sigma=t\tau_2$ получаваме $L_k f(r)=r^2\int_0^1\int_0^1\tau_1^{k}\tau_2 f(r\tau_1\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$ и чрез още една смяна на променливите $\tau_1=\sqrt{\rho_1}$, $\tau_2=\sqrt{\rho_2}$ намираме по-удобното представяне

/4.1.16/ $L_k f(r)=\frac{1}{4}r^2\int_0^1\int_0^1\rho_1^{\frac{k-1}{2}}f(r\sqrt{\rho_1\rho_2})\,d\rho_1\,d\rho_2$.

Като имаме предвид формата /0.2.1/ на конволюцията на оператора за интегриране, естествено е да очакваме операцията

/4.1.17/ $f(r)\circ g(r)=r^2\int_0^1\int_0^1(\rho_1(1-\rho_1))^{\frac{k-1}{2}}f(r\sqrt{\rho_1\rho_2})\,g(r\sqrt{(1-\rho_1)(1-\rho_2)})\,d\rho_1\,d\rho_2$

да е конволюция на L_k в линейното пространство C_{-2}.

Нека $f(r)$, $g(r)$, $h(r)\in C_{-2}$ и λ е константа от $\mathbb{C}$.

1. От $f(r)$, $g(r)\in C_{-2}$ следва $f(r)=r^{p}\tilde{f}(r)$ с $p>-2$, $g(r)=r^{q}\tilde{g}(r)$ с $q>-2$, $\tilde{f}(r)$, $\tilde{g}(r)\in C$. От вида на /4.1.17/ лесно се вижда, че $f(r)\circ g(r)$ е от вида $r^{p+q+2}\tilde{\Phi}(r)$, $\tilde{\Phi}(r)\in C$. Но $p+q+2>-2-2+2=-2$, т.е. $p+q+2>-2$. Следователно $f(r)\circ g(r)\in C_{-2}$, т.е. $f(r)\circ g(r)$ не напуска дефиниционната област C_{-2} на L_k.

2. Билинейността на операцията $\circ$ е очевидна, т.е. очевидни са равенствата $\lambda(f(r)\circ g(r))=(\lambda f(r))\circ g(r)$,
$(f(r)+g(r))\circ h(r)=f(r)\circ h(r)+g(r)\circ h(r)$.

3. Комутативността $f(r)\circ g(r)=g(r)\circ f(r)$ на операцията $\circ$ също е очевидна.

4. Проверка на мултипликативността

/4.1.18/ $\left(L_K f(r)\right)\circ g(r)=f(r)\circ\left(L_K g(r)\right)$.

Ще проверим това тъждество първоначално за степени на r . Нека $f(r)=r^p$, $g(r)=r^q$. От /4.1.17/ за $p_1>-2$, $q_1>-2$ следва

$$r^{p_1}\circ r^{q_1}=r^{p_1+q_1+2}\int_0^1 \rho_1^{\frac{p_1+K-1}{2}}(1-\rho_1)^{\frac{q_1+K-1}{2}}d\rho_1\int_0^1 \rho_2^{\frac{p_1}{2}}(1-\rho_2)^{\frac{q_1}{2}}d\rho_2$$

и като вземем предвид /4.0.8/, получаваме

/4.1.19/ $$r^{p_1}\circ r^{q_1}=\frac{\Gamma\left(\frac{p_1+K+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q_1+K+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1+q_1}{2}+K+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q_1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1+q_1}{2}+2\right)}r^{p_1+q_1+2}$$.

От /4.1.16/ пресмятаме

/4.1.20/ $$L_K r^p=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{p+K+1}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)}r^{p+2}$$

и като заместим в /4.1.19/ при $p_1=p+2$, $q_1=q$, следва

$$\left(L_K r^p\right)\circ r^q=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{p+K+1}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{p+K+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q+K+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+K+2\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+3\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{p+K+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+K+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+K+2\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+3\right)}r^{p+q+4}$$

т.е. $\left(L_K r^p\right)\circ r^q=r^p\circ\left(L_K r^q\right)$, поради получената симетрия относно p и q , което доказва /4.1.18/ за степени на r . От билинейността на операцията $\circ$ и линейността на оператора L_K оттук следва валидността на /4.1.18/ за функции от вида $f(r)=r^pF(r)$, $g(r)=r^qG(r)$, където $F(r)$ и $G(r)$ са полиноми, а когато $f(r)=r^p\tilde{f}(r)$, $g(r)=r^q\tilde{g}(r)$, където $\tilde{f}(r)$, $\tilde{g}(r)\in C$, чрез апроксимиране на $\tilde{f}(r)$ и $\tilde{g}(r)$ с полиноми от степен n , при равномерния граничен преход за $n\to\infty$ следва верността на /4.1.18/ за произволни функции от разглеждания клас C_{-2} .

Често ще използуваме този начин за проверка на тъждества чрез предварително установяване верността им за степени. По-нататък няма да повтаряме такива разсъждения.

5. Проверка на асоциативността

/4.1.21/ $(f(r)\circ g(r))\circ h(r)=f(r)\circ(g(r)\circ h(r))$.

Нека $p>-2$, $q>-2$, $\tau>-2$ и пресмятаме според /4.1.19/

$$(r^p\circ r^q)\circ r^\tau=\frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)}r^{p+q+2}\circ r^\tau=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q+k+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tau+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+\tau}{2}+k+2\right)\Gamma\left(\frac{p+q+\tau}{2}+3\right)}r^{p+q+\tau+4}$$

Очевидно, симетрия относно p , q , τ няма само в израза $\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+q+k+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)}$. При $k=1$ числителят и знаменателят на последния израз са равни и той е равен на 1, поради което следва $(r^p\circ r^q)\circ r^\tau=r^p\circ(r^q\circ r^\tau)$ за този случай.

При $k\neq 1$ / интересуваме се по-точно при $k>1$ / за операцията $\circ$ асоциативността не е валидна. Ще поправим нещата чрез линейния оператор $T_k : C_{-2}\to C_{-2}$, така че за новата операция

/4.1.22/ $f(r)\,\tilde{*}\,g(r)=T(f(r)\circ g(r))$

да е изпълнена асоциативността. Поради линейността на T_k лесно следват :

2/ Билинейността на $\tilde{*}$ от тази на $\circ$.

3/ Комутативността на $\tilde{*}$ от тази на $\circ$.

4/ Мултипликативността на $\tilde{*}$ от тази на $\circ$.

/4.1.23/ $(L_k f(r))\,\tilde{*}\,g(r)=T_k((L_k f(r))\circ g(r))=T_k(f(r)\circ(L_k g(r)))=f(r)\,\tilde{*}\,(L_k g(r))$

5/ Оператора T_k ще търсим от вида

$$/4.1.24/ \quad T_k y(r) = \frac{r^\nu}{A}\int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu y(r\sqrt{\rho})\,d\rho ,$$

за някакви стойности на константите ν, λ и $\mu > -1$ така, че асоциативността на операцията $\widetilde{*}$ да е изпълнена. Иска се $\mu > -1$ за да е сходящ интегралът в /4.1.24/. За $y(r) = r^n$ следва

$$T_k(r^n) = \frac{r^{\nu+n}}{A}\int_0^1 \rho^{\lambda+\frac{n}{2}}(1-\rho)^\mu d\rho = \frac{r^{\nu+n}}{A}\,\frac{\Gamma(\lambda+\frac{n}{2}+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+2)} .$$

Следователно удобно е да изберем константата $A = \Gamma(\mu+1)$ и /4.1.24/ става

$$/4.1.25/ \quad T_k y(r) = \frac{r^\nu}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu y(r\sqrt{\rho})\,d\rho ,$$

като за произволни степени r^n, с изпълнено $\lambda + \frac{n}{2} > -1$, имаме

$$/4.1.26/ \quad T_k(r^n) = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+2)}\, r^{\nu+n} .$$

За степени на r получаваме

$$r^p \widetilde{*} r^q = T_k(r^p \circ r^q) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)}\, T_k(r^{p+q+2}) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+\mu+3\right)}\, r^{\nu+p+q+2} .$$

Оттук следва

$$(r^p \widetilde{*} r^q)\widetilde{*} r^\tau = T_k((r^p \widetilde{*} r^q)\circ r^\tau) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+\mu+3\right)}\, T_k(r^{\nu+p+q+2}\circ r^\tau) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+\mu+3\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p+q+k+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\tau+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+p+q+\tau}{2}+k+2\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p+q}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+p+q+\tau}{2}+3\right)}\, T_k(r^{\nu+p+q+\tau+4}) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+2\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\frac{\nu}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+\lambda+\mu+3\right)}\, C(p,q,\tau)\, r^{2\nu+p+q+\tau+4}$$

където симетрия относно ρ , q , τ имаме в

$$C(\rho,q,\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tau+k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+q+\tau}{2}+\lambda+3\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+q+\tau}{2}+k+2\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+q+\tau}{2}+3\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+q+\tau}{2}+\lambda+\mu+4\right)}$$

и $r^{2\nu+\rho+q+\tau+4}$. Следователно за да е изпълнена асоциативността

$$/4.1.27/\quad \left(f(r)\tilde{*}g(r)\right)\tilde{*}h(r)=f(r)\tilde{*}\left(g(r)\tilde{*}h(r)\right)$$

на операцията $\tilde{*}$ в случая $k>1$, трябва да подберем ν , λ , $\mu>-1$ така, че в израза

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+\lambda+2\right)\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+\frac{\nu}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{\rho+q}{2}+\lambda+\mu+3\right)}$$

да се получат съкращения и той да не зависи от ρ и q .

Явяват се следните непротиворечиви възможности:

а/ $\lambda+2=2$, $\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1=k+1$, $\frac{\nu}{2}+2=\lambda+\mu+3$, откъдето $\nu=k-1$, $\lambda=0$ и $\mu=\frac{k-3}{2}>-1$ за $k>1$;

б/ $\lambda+2=2$, $\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1=\lambda+\mu+3$, $\frac{\nu}{2}+2=k+1$, откъдето $\nu=2(k-1)$, $\lambda=0$ и $\mu=\frac{3k-5}{2}>-1$ за $k>1$;

в/ $\lambda+2=k+1$, $\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1=2$, $\frac{\nu}{2}+2=\lambda+\mu+3$, откъдето $\nu=1-k$, $\lambda=k-1$ и $\mu=\frac{1-3k}{2}>-1$ за $k<1$;

г/ $\lambda+2=k+1$, $\frac{k+1}{2}+\frac{\nu}{2}+1=\lambda+\mu+3$, $\frac{\nu}{2}+2=2$, откъдето $\nu=0$, $\lambda=k-1$ и $\mu=-\frac{k+1}{2}>-1$ за $k<1$.

От тези 4 **възможности** използуваеми са само първите две за $k>1$. **Нека се спрем на първата.** Следователно един линеен оператор T_k е

$$/4.1.28/\quad T_k y(r)=\frac{r^{k-1}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{k-3}{2}}y(r\sqrt{\rho})\,d\rho ,$$

при който асоциативността на операцията $\tilde{*}$ е изпълнена за случая $k>1$.

1/ От $f(r)$, $g(r) \in C_{-2}$ следва

$$f(r) \circ g(r) \in C_{-2} \xrightarrow{T_K} f(r) \tilde{*} g(r) \in C_{-2+K-1} = C_{K-3} \subset C_{-2}$$

за $K > 1$, т.е. от $f(r)$, $g(r) \in C_{-2}$ следва $f(r) \tilde{*} g(r) \in C_{-2}$ за $K > 1$.

Аналог на теоремата на Тичмарш / доказан от Микусински и Рил-Нарджевски през 1953 г./ е

<u>Теорема 8</u> : Ако за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2 \dots, x_n) \in C$ имаме конволюция $f * g = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} f(x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_n - t_n) g(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$, от $f * g \equiv 0$ за $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,..., $x_n \geq 0$ следва $f \equiv 0$ или $g \equiv 0$.

Тази теорема, приложена за операцията $\circ$, ни дава, че от $f(r) \circ g(r) = 0$ следва $f(r) = 0$ или $g(r) = 0$ и понеже $T_K\, y(r) = 0$, когато $y(r) = f(r) \circ g(r) = 0$, от $f(r) \tilde{*} g(r) = T_K (f(r) \circ g(r)) = 0$ следва $f(r) = 0$ или $g(r) = 0$, което показва, че операциите $\circ$, дефинирана чрез /4.1.17/, и $\tilde{*}$, дефинирана чрез /4.1.17/ и /4.1.22/, са без делители на нулата. Тогава от /4.1.18/ и /4.1.23/ следват

/4.1.29/ $L_K (f(r) \circ g(r)) = (L_K f(r)) \circ g(r)$, $K \geq 1$

и

/4.1.30/ $L_K (f(r) \tilde{*} g(r)) = (L_K f(r)) \tilde{*} g(r)$, $K > 1$,

за функции от класа C_{-2} .

По този начин, като вземем предвид дефиниция 3, доказахме следните теореми :

<u>Теорема 9</u> : Операцията $f \tilde{*} g$, дефинирана чрез

$$f(r) \tilde{*} g(r) = r^2 \int_0^1 \int_0^1 f(r\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})\, g(r\sqrt{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)})\, d\varrho_1\, d\varrho_2 ,$$

е конволюция за десния обратен линеен оператор

$L_1 f(r) = \frac{1}{4} r^2 \int_0^1 \int_0^1 f(r\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})\, d\varrho_1\, d\varrho_2$ на оператора $B_1 = r^{-1} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}$

в пространството C_{-2} и е без делители на нулата.

<u>Теорема 10</u> : Операцията $f \tilde{*} g$, дефинирана чрез

$f(r) \tilde{*} g(r) = T_K (f(r) \circ g(r))$, където

$$f(r) \circ g(r) = r^2 \int_0^1 \int_0^1 (\varrho_1 (1-\varrho_1))^{\frac{K-1}{2}} f(r\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})\, g(r\sqrt{(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)})\, d\varrho_1\, d\varrho_2 \quad \text{и}$$

$T_K y(r) = \frac{r^{K-1}}{\Gamma(\frac{K-1}{2})} \int_0^1 (1-\varrho)^{\frac{K-3}{2}} y(r\sqrt{\varrho})\, d\varrho$, е конволюция за десния обратен

линеен оператор $L_K f(r) = \frac{1}{4} r^2 \int_0^1 \int_0^1 \varrho_1^{\frac{K-1}{2}} f(r\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})\, d\varrho_1\, d\varrho_2$ на оператора

$B_K = r^{-K} \frac{d}{dr} r^K \frac{d}{dr}$ за $K > 1$ в пространството C_{-2} и е без делители на нулата.

Подобна теорема е доказана от Димовски за най-общия диференциален оператор от беселов тип. По метода на Микусински [1] , така построеният пръстен C_{-2} от функции над полето $\mathbb{C}$ с операции $+$ и $\tilde{*}$, като област на цялостност, може да се разшири до поле от конволюционни частни. От мултипликативността на конволюцията $f \tilde{*} g$ следва, че конволюционното частно $\frac{L_K f(r)}{f(r)}$ не зависи от $f(r)$. Ако означим $L_K = \frac{L_K f(r)}{f(r)}$, съществува и елементът $L_K^{-1} = S_K$. Ако $\alpha \in \mathbb{C}$ и положим $[\alpha] = \frac{\alpha f(r)}{f(r)}$, тези елементи образуват подполе $[\mathbb{C}]$ на полето от конволюционните частни. Съответно, $[\alpha] \longrightarrow \alpha$ е изоморфизъм между $[\mathbb{C}]$ и $\mathbb{C}$.

§ 4.2. ТРАНСФОРМАЦИОННИ ОПЕРАТОРИ ЗА ЕДИН КЛАС ОТ БЕСЕЛОВИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОПЕРАТОРИ

В този параграф намираме подобия φ_κ между линейния десен обратен оператор L_κ на беселовия диференциален оператор $B_\kappa = r^{-\kappa}\frac{d}{dr} r^{\kappa}\frac{d}{dr}$, $\kappa \geq 1$, получен при нулеви начални условия, и оператора за двукратно интегриране ℓ^2 :

/4.2.1/ $\ell^2 f(r) = \int_0^r \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt = \int_0^r (r-\tau)f(\tau)d\tau$.

Търсим φ_κ от вида /4.1.24/ на оператора T_κ, така че да е подобие между L_κ и ℓ^2, т.е.

/4.2.2/ $\varphi_\kappa L_\kappa = \ell^2 \varphi_\kappa$.

Нека

/4.2.3/ $\varphi_\kappa h(r) = A r^{\nu} \int_0^1 \rho^{\lambda}(1-\rho)^{\mu} h(r\sqrt{\rho})d\rho$.

Тук константата $A \neq 0$ не е съществена и може да се избира произволно. Ще подберем константите ν, λ, $\mu > -1$ по такъв начин, че подобието φ_κ според /4.2.3/ да удовлетворява /4.2.2/ за произволни степени r^p, стига само интегралът в /4.2.3/ да има смисъл. От /4.2.3/ следва

/4.2.4/ $\varphi_\kappa r^p = A r^{\nu+p} \int_0^1 \rho^{\lambda+\frac{p}{2}}(1-\rho)^{\mu}d\rho = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{p}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{p}{2}+2)} r^{\nu+p}$

стига само $p > -2(\lambda+1)$. Ако изберем $A = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}$ и като вземем предвид /4.1.20/, от /4.2.4/ получаваме

/4.2.5/ $\varphi_\kappa L_\kappa r^p = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{p+\kappa+1}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)}\varphi_\kappa r^{p+2} = \frac{1}{(p+\kappa+1)}\frac{1}{(p+2)}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{p}{2}+2)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{p}{2}+3)} r^{\nu+p+2}$.

Вместо /4.2.3/ сега имаме

/4.2.6/ $\varphi_\kappa h(r) = \frac{r^{\nu}}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^1 \rho^{\lambda}(1-\rho)^{\mu} h(r\sqrt{\rho})d\rho$

и следователно

$$\ell^2 \varphi_K r^{\rho} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)} \ell^2 r^{\nu+\rho}$$

и ако $\rho > -(\nu+1)$, то

$$/4.2.7/ \quad \ell^2 \varphi_K r^{\rho} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)} \cdot \frac{1}{(\nu+\rho+1)(\nu+\rho+2)} r^{\nu+\rho+2} .$$

Като сравним /4.2.5/ и /4.2.7/, от изискването /4.2.2/ да е вярно за произволни $\rho > -\min(2(\lambda+1), \nu+1)$ следва

$$\frac{1}{(\rho+K+1)(\rho+2)} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+2)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)} \cdot \frac{1}{(\nu+\rho+1)(\nu+\rho+2)} ,$$

т.е. равенството

$$/4.2.8/ \quad \frac{(\rho+\nu+1)(\rho+\nu+2)(\rho+2\lambda+2)}{(\rho+K+1)(\rho+2)(\rho+2\lambda+2\mu+4)} = 1$$

трябва да е вярно за произволни $\rho > -\min(2(\lambda+1), \nu+1)$.

Имаме следните непротиворечиви възможности :

а/ $\nu+1 = K+1$, $\nu+2 = 2\lambda+2\mu+4$, $2\lambda+2=2$, откъдето

$\nu = K$, $\lambda = 0$, $\mu = \frac{K}{2}-1 > -1$ за $K>0$, следователно и за $K \geqq 1$;

б/ $\nu+1=2$, $\nu+2 = 2\lambda+2\mu+4$, $2\lambda+2 = K+1$, откъдето

$\nu = 1$, $\lambda = \frac{K-1}{2}$, $\mu = -\frac{K}{2} > -1$ за $K<2$;

в/ $\nu+1 = 2\lambda+2\mu+4$, $\nu+2=2$, $2\lambda+2 = K+1$, откъдето

$\nu = 0$, $\lambda = \frac{K-1}{2}$, $\mu = -\frac{K}{2}-1 > -1$ за $K<0$;

г/ $\nu+1 = 2\lambda+2\mu+4$, $\nu+2 = K+1$, $2\lambda+2=2$, откъдето

$\nu = K-1$, $\lambda = 0$, $\mu = \frac{K}{2}-2 > -1$ за $K>2$.

За нашите цели най-удобна е първата възможност, която ни дава φ_K за степени r^{ρ} с $\rho > -\min(2, K+1) = -2$ за $K \geqq 1$. Така едно подобие φ_K между L_K и ℓ^2, като вземем предвид /4.2.6/, се дава чрез

/4.2.9/ $\varphi_K h(r) = \frac{r^K}{\Gamma(\frac{K}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{K}{2}-1} h(r\sqrt{\rho})d\rho$ за $K>0$,

като и за $K \geqq 1$ подобието φ_K е приложимо за функции $h(r) \in C_{-2}$ и $\varphi_K : C_{-2} \longrightarrow C_{K-2} \subset C_{-2}$.

Понеже трябва $B_K h(r)$ да е от класа C_{-2} - дефиниционната област на L_K за $K \geqq 1$, интересуваме се и от $h(r) \in C_0^{(2)}$. Тогава $\varphi_K : C_0^{(2)} \longrightarrow C_K^{(2)} \subset C_1^{(2)} \subset C_0^{(2)}$ за $K \geq 1$ и понеже конволюцията $*$ на ℓ^2 е както на ℓ, а от /4.2.2/ следват равенствата $L_K = \varphi_K^{-1}\ell^2\varphi_K$ или $L_K\varphi_K^{-1} = \varphi_K^{-1}\ell^2$ или $\ell^2 = \varphi_K L_K \varphi_K^{-1}$ от T7 следва, че конволюцията $\tilde{*}$ на L_K може да се намери по друг начин, а именно,

/4.2.10/ $f(r)\,\tilde{*}\,g(r) = \varphi_K^{-1}((\varphi_K f(r)) * (\varphi_K g(r)))$.

За нашите цели ще ни трябва φ_K^{-1}. Разглеждаме интегралното уравнение

/4.2.11/ $\varphi_K h(r) = g(r)$, $g(r) \in C_K^{(n)}$, $n = [\frac{K}{2}]+1$,

където с $[\frac{K}{2}]$ сме означили цялата част на $\frac{K}{2}$. От интегралното уравнение

/4.2.12/ $\frac{r^K}{\Gamma(\frac{K}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{K}{2}-1} h(r\sqrt{\rho})d\rho = g(r)$

ще търсим $h(r) \in C_0$. От /4.2.11/ получаваме

/4.2.13/ $h(r) = \varphi_K^{-1} g(r)$,

а от /4.2.12/, като заменим r с $\sqrt{r}$, имаме

$$\frac{r^{\frac{K}{2}}}{\Gamma(\frac{K}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{K}{2}-1} h(\sqrt{r\rho})d\rho = g(\sqrt{r})$$

и като положим тук $r\rho = \tau$, получаваме

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{K}{2})}\int_0^r (r-\tau)^{\frac{K}{2}-1} h(\sqrt{\tau})\,d\tau = g(\sqrt{r})$$,

което според формула /0.2.9/ за дробно интегриране ни дава операторното уравнение $\ell_{\tau}^{\frac{K}{2}}\{h(\sqrt{r})\} = \{g(\sqrt{r})\}$, откъдето

/4.2.14/ $\{h(\sqrt{r})\} = S^{\frac{K}{2}}\{g(\sqrt{r})\} = S^n \frac{1}{S^{n-\frac{K}{2}}}\{g(\sqrt{r})\} = S^n\left\{\frac{r^{n-\frac{K}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{K}{2})} * g(\sqrt{r})\right\}, n=[\frac{K}{2}]+1 \geq 1.$

Ако за момент положим $\theta(r) = \frac{r^{n-\frac{K}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{K}{2})} * g(\sqrt{r})$, от $g(r) \in C_K^{(n)}$ следва $g(\sqrt{r}) \in C_{\frac{K}{2}}^{(n)}$ и като вземем предвид, че конволюцията $*$ увеличава индекса на класа от функции с 1, следва $\theta(r) \in C^{(n)}_{(n-\frac{K}{2}-1)+\frac{K}{2}+1} = C_n^{(n)} \subset C_0$. Следователно $\theta(0)=0$ и още $\theta'(r) \in C_{n-1}^{(n-1)} \subset C_0$, откъдето следва $\theta'(0)=0$ и т.н., от $\theta^{(n-1)}(r) \in C_1^{(1)} \subset C_0$ следва $\theta^{(n-1)}(0)=0$ и $\theta^{(n)}(r) \in C_0$.

Като вземем предвид формула /0.2.6/, получаваме

$$S^n\{\theta(r)\} = \{\theta^{(n)}(r)\} + S^{n-1}\theta(0) + S^{n-2}\theta'(0) + \ldots + S\theta^{(n-2)}(0) + \theta^{(n-1)}(0) = \{\theta^{(n)}(r)\}.$$

Тогава от /4.2.14/ следва

$$h(\sqrt{r}) = \frac{d^n}{dr^n}\left(\frac{r^{n-\frac{K}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{K}{2})} * g(\sqrt{r})\right) \quad , h(\sqrt{r}) \in C_0 \quad , n=[\tfrac{K}{2}]+1 ,$$

т.е.

$$h(\sqrt{r}) = \frac{1}{\Gamma(n-\frac{K}{2})}\frac{d^n}{dr^n}\int_0^r (r-\tau)^{n-\frac{K}{2}-1} g(\sqrt{\tau})\,d\tau = \frac{1}{\Gamma(n-\frac{K}{2})}\left(\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{n-\frac{K}{2}}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{K}{2}-1} g(\sqrt{r\rho})\,d\rho\right)$$

Ако тук заменим r с r^2 , т.е. $r=x^2$, откъдето следва

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{dx} : \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx} \quad , \text{то} \quad \frac{d^n}{dr^n} = \left(\frac{d}{dr}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n .$$

Следователно

/4.2.15/ $h(r) = \frac{1}{2^n\Gamma(n-\frac{K}{2})}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{2n-K}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{K}{2}-1} g(r\sqrt{\rho})\,d\rho\right), \; h(r) \in C_0 \;, n=[\frac{K}{2}]+1$

Така получихме за $g(r) \in C_K^{(n)}$, $n=[\frac{K}{2}]+1$, че подобието φ_K^{-1} се дава чрез

$$/4.2.16/\quad \varphi_k^{-1} g(r) = \frac{1}{2^n\Gamma(n-\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{2n-k}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{k}{2}-1} g(r\sqrt{\rho})\,d\rho\right),\ \varphi_k^{-1} g(r) \in C_0 .$$

Нека означим $\tilde{h}(r) = \varphi_k h(r)$. За нашите цели ще ни трябват $\tilde{1}$ и $\tilde{h}'(r)$. От /4.2.9/ лесно получаваме

$$\tilde{1} = \varphi_k 1 = \frac{r^k}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{k}{2}-1}d\rho \quad , \text{т.е.}$$

$$/4.2.17/\quad \tilde{1} = \frac{r^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} ,$$

$$\tilde{h}'(r) = \frac{kr^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{k}{2}-1} h(r\sqrt{\rho})\,d\rho + \frac{r^k}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{k}{2}-1}\sqrt{\rho}\, h'(r\sqrt{\rho})\,d\rho \quad , \text{т.е.}$$

$$/4.2.18/\quad \tilde{h}'(r) = \frac{r^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{k}{2}-1}\left(kh(r\sqrt{\rho}) + r\sqrt{\rho}\, h'(r\sqrt{\rho})\right)d\rho \quad .$$

Да намерим друго подобие χ_k между L_k и ℓ^2, като изходим от еквивалентното на /4.2.2/ условие за подобие

$$/4.2.19/\quad L_k \chi_k^{-1} = \chi_k^{-1}\ell^2 \quad .$$

Нека първо намерим директно χ_k^{-1} от вида

$$/4.2.20/\quad \chi_k^{-1} g(r) = \frac{r^\nu}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu g(r\sqrt{\rho})\,d\rho \quad ,$$

където константите ν, λ и $\mu > -1$ определяме от условието $L_k \chi_k^{-1} g(r) = \chi_k^{-1}\ell^2 g(r)$ за произволни степени r^ρ, за които интегралът в /4.2.20/ има смисъл. Както при намирането на φ_k, лесно получаваме

$$/4.2.21/\quad \chi_k^{-1} r^\rho = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)}\, r^{\nu+\rho} ,$$

стига само $\rho > -2(\lambda+1)$ и като вземем предвид /4.1.20/, следва

$$/4.2.22/\quad L_k \chi_k^{-1} r^\rho = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)} L_k r^{\nu+\rho} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{\rho}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{\rho}{2}+2)}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{\nu+\rho+k+1}{2}\left(\frac{\nu+\rho}{2}+1\right)}\, r^{\nu+\rho+2}$$

Освен това, имаме $\ell^2 r^\rho = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)} r^{\rho+2}$, ако $\rho > -1$, и от /4.2.21/ следва

/4.2.23/ $\chi_k^{-1} \ell^2 r^p = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \chi_k^{-1} r^{p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{p}{2}+2)}{\Gamma(\lambda+\mu+\frac{p}{2}+3)} r^{\nu+p+2}$

Като сравним /4.2.22/ и /4.2.23/, от изискването /4.2.19/ да е вярно за произволни $p>-\min(2(\lambda+1),1)$ следва след леко преобразуване, че равенството $\frac{(p+\nu+k+1)(p+\nu+2)(p+2\lambda+2)}{(p+1)(p+2)(p+2\lambda+2\mu+4)}=1$ трябва да е вярно за произволни $p>-\min(2(\lambda+1),1)$. От представилите ни се четири непротиворечиви възможности намираме

а/ $\nu=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{k}{2}-1>-1$ за $k>0$;

б/ $\nu=1-k$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=-\frac{k}{2}>-1$ за $k<2$;

в/ $\nu=-k$, $\lambda=0$, $\mu=-\frac{k}{2}-1>-1$ за $k<0$;

г/ $\nu=-1$, $\lambda=0$, $\mu=\frac{k}{2}-2>-1$ за $k>2$,

и като изберем първата възможност, която ни дава χ_k^{-1} за произволни степени r^p с $p>-\min(1,1)=-1$, намираме следното представяне за χ_k^{-1} :

/4.2.24/ $\chi_k^{-1} g(r) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 \rho^{-\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{k}{2}-1} g(r\sqrt{\rho})\,d\rho$ за $k>0$, $g(r)\in C_{-1}$

следователно и за $k\geq 1$. Сега χ_k^{-1} трансформира всяко пространство с индекс не по-малък от -1 , за чиито функции, очевидно, интегралът в /4.2.24/ е сходящ, в същото пространство.

Нека $g(r)\in C_k^{(n)}$. Тогава и $\chi_k^{-1} g(r)\in C_k^{(n)}$. От /4.2.24/ ще намерим χ_k , като решим интегралното уравнение

/4.2.25/ $\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^1 \rho^{-\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{k}{2}-1} g(r\sqrt{\rho})\,d\rho = h(r) = \chi_k^{-1} g(r)$,

откъдето ще получим $g(r)=\chi_k h(r)$. Както при намирането на φ_k , заменяме r с $\sqrt{r}$ и от /4.2.25/ намираме след полагането $r\rho=\tau$, че

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^r (r-\tau)^{\frac{k}{2}-1}\frac{g(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}d\tau = r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r}) .$$

Но това е точно $\ell^{\frac{k}{2}}\left\{\frac{g(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}\right\} = \left\{r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})\right\}$, откъдето

/4.2.26/ $\left\{\frac{g(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}\right\} = S^{\frac{k}{2}}\left\{r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})\right\} = S^n\frac{1}{S^{n-\frac{k}{2}}}\left\{r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})\right\} = S^n\left\{\frac{r^{n-\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{k}{2})}*r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})\right\}$,

$n=[\frac{k}{2}]+1\geq 1$. Ако за момент положим $\theta(r)=\frac{r^{n-\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{k}{2})}*r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})$,

от $h(r)\in C_k^{(n)}$ следва $h(\sqrt{r})\in C_{\frac{k}{2}}^{(n)}$ и както преди имаме

$\theta(r)\in C^{(n)}_{(n-\frac{k}{2}-1)+\frac{k-1}{2}+\frac{k}{2}+1} = C^{(n)}_{n+\frac{k-1}{2}} \subset C_n$ поради $k-1\geq 0$ за $k\geq 1$.

Оттук следват $\theta(0)=\theta'(0)=\ldots=\theta^{(n-1)}(0)=0$, $\theta^{(n)}(r)\in C_{\frac{k-1}{2}}\subset C_0$ и

$S^n\{\theta(r)\}=\{\theta^{(n)}(r)\}$. Тогава от /4.2.26/ следва

$$\frac{g(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = \frac{d^n}{dr^n}\left(\frac{r^{n-\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(n-\frac{k}{2})}*r^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r})\right) , g(\sqrt{r})\in C_{\frac{k}{2}} , n=[\tfrac{k}{2}]+1 ,$$

т.е.

$$\frac{g(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\Gamma(n-\frac{k}{2})}\frac{d^n}{dr^n}\int_0^r (r-\tau)^{n-\frac{k}{2}-1}\tau^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{\tau})d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\frac{k}{2})}\left(\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{n-\frac{1}{2}}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{k}{2}-1}\rho^{\frac{k-1}{2}}h(\sqrt{r\rho})d\rho\right)$$

и като заменим r с r^2 получаваме

/4.2.27/ $g(r)=\frac{r}{2^n\Gamma(n-\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{2n-1}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{k}{2}-1}\rho^{\frac{k-1}{2}}h(r\sqrt{\rho})d\rho\right), g(r)\in C_k; n=[\frac{k}{2}]+1.$

Така получихме за $h(r)\in C_k^{(n)}\subset C_0$, $n=[\frac{k}{2}]+1$, че χ_k се дава чрез

/4.2.28/ $\chi_k h(r)=\frac{r}{2^n\Gamma(n-\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\left(r^{2n-1}\int_0^1 (1-\rho)^{n-\frac{k}{2}-1}\rho^{\frac{k-1}{2}}h(r\sqrt{\rho})d\rho\right), \chi_k h(r)\in C_k .$

§ 4.3. ВРЪЗКИ МЕЖДУ БЕСЕЛОВИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОПЕРАТОРИ.

В този параграф с φ_K ще означаваме кое да е от подобията φ_K или χ_K между операторите L_K и ℓ^2, намерени в предния параграф. Чрез подобието φ_K ще намерим връзка между диференциалните оператори B_K и $\frac{d^2}{dr^2}$. Накрая ще докажем по съвсем елементарен начин формулата на Дарбу-Вайнщайн и ще направим някои бележки върху приложението й.

Ако $u(r)\in C_0^{(2)}$, от $B_K = r^{-K}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}$ следва $B_K u(r)\in C_{-2}$. Знаем, че $B_K L_K = I$. Да пресметнем $L_K B_K u(r)$. Като вземем предвид представянето /4.1.8/ на L_K и приложим оператора L_K над

$$B_K u(r) \equiv r^{-K}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}u(r)$$, получаваме

$$L_K B_K u(r) = \int_0^r\left(\sigma^{-K}\int_0^\sigma \tau^K \tau^{-K}\frac{d}{d\tau}\tau^K\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau\right)d\sigma = \int_0^r\left(\sigma^{-K}\int_0^\sigma \frac{d}{d\tau}\tau^K\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau\right)d\sigma$$

Понеже от $u(r)\in C_0^{(2)}$ следва $\frac{d}{dr}u(r)\in C_{-1}$, то $r^K\frac{d}{dr}u(r)\in C_{K-1}^{(1)} \subset C_0^{(1)}$ за $K\geq 1$. Следователно $\lim\limits_{r\to+0} r^K\frac{d}{dr}u(r) = 0$. Тогава

$$/4.3.1/ \quad L_K B_K u(r) = \int_0^r \sigma^{-K}\sigma^K\frac{d}{d\sigma}u(\sigma)d\sigma = \int_0^r\frac{d}{d\sigma}u(\sigma)d\sigma = u(r) - \lim_{r\to+0}u(r) = u(r)$$

защото $\lim\limits_{r\to+0}u(r)=0$, поради $u(r)\in C_0^{(2)}$, т.е. и $L_K B_K = I$.

Нека F_K е операторът на началните условия за оператора L_K, т.е.

$$/4.3.2/ \quad F_K = I - L_K B_K .$$

Очевидно, F_K е проектор, т.е. $F_K^2 = F_K F_K = F_K$. От /4.3.1/ и /4.3.2/ получаваме

$$/4.3.3/ \quad F_K u(r) = (I - L_K B_K)u(r) = u(r) - L_K B_K u(r) = u(r) - u(r) = 0 .$$

Интересува ни в крайна сметка представянето на $\varphi_K B_K$. От $F_K = I - L_K B_K$ и доказаното в § 4.2 $\varphi_K L_K = \ell^2\varphi_K$ следва

$\varphi_K F_K = \varphi_K I - \varphi_K L_K B_K = \varphi_K - \ell^2 \varphi_K B_K$. Следователно

$\frac{d^2}{dr^2}\varphi_K F_K = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K - \frac{d^2}{dr^2}\ell^2\varphi_K B_K = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K - I\varphi_K B_K = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K - \varphi_K B_K$,

откъдето получаваме

/4.3.4/ $\varphi_K B_K = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K - \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K F_K$.

Но от /4.3.3/ и вида на φ_K следва $\varphi_K(F_K u(r)) = \varphi_K(0) = 0$. Следователно

/4.3.5/ $\varphi_K B_K u(r) = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K u(r)$ за всяка функция $u(r) \in C_0^{(2)}$, $K \geq 1$,

т.е. получихме подобие

/4.3.6/ $\varphi_K B_K = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_K$, $K \geq 1$,

което, както ще видим в следващата глава, може ефективно да се използува при решаването на беселовото уравнение на топлопроводността. Нека отбележим, че изобщо от съществуването на подобие между L_K и ℓ^2 не следва съществуване на подобие между B_K и $\frac{d^2}{dr^2}$, защото при ненулеви начални условия изобщо не е изпълнено $L_K B_K = I$.

Тук ще докажем формулата на Дарбу-Вайнщайн. В § 4.1 получихме двете представяния на B_K : /4.1.3/ $B_K = r^{-K}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}$ и /4.1.4/ $B_K = r^{-1}\frac{d}{dr}r^{2-K}\frac{d}{dr}r^{K-1}$, независимо какво е числото K . От второто представяне формално получаваме

/4.3.7/ $B_{2-K} = r^{-1}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}r^{1-K}$.

Сега от /4.1.3/ и /4.3.7/ намираме $r^{K-1}B_K = r^{-1}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}$ и $B_{2-K}r^{K-1} = r^{-1}\frac{d}{dr}r^K\frac{d}{dr}$, което доказва формулата на Дарбу-Вайнщайн

/4.3.8/ $r^{K-1}B_K = B_{2-K}r^{K-1}$.

Когато $K<1$, то $2-K>1$ и тогава, като използуваме /4.3.8/, $B_K u(r)$ чрез умножение отляво с r^{K-1} свеждаме до

$r^{k-1} B_k u(r) = B_{2-k} r^{k-1} u(r)$. Ако положим $V(r) = r^{k-1} u(r)$,

получаваме $r^{k-1} B_k u(r) = B_{2-k} V(r)$. Операторът B_{2-k} вече е изследван, тъй като $2-k = \tilde{k} > 1$. Това позволява просто решаване на уравнението на централно-симетричната топлопроводност

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t}$. Наистина, ако в /4.3.8/ положим $k=2$, получаваме $r B_2 = B_0 r$, където $B_0 = \frac{d^2}{dr^2}$ и чрез умножение на $B_2 u(r)$ отляво с r и полагането $V(r) = r u(r)$ получаваме $r B_2 u(r) = B_0 r u(r) = B_0 V(r) = \frac{d^2}{dr^2} V(r)$.

ГЛАВА 5

БЕСЕЛОВО И АКСИАЛНО-СИМЕТРИЧНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

Първо разглеждаме беселовото уравнение на топлопроводността

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \; a>0 \; , \text{ в областта } \begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$$

за случая $k \geqq 1$ с начално условие $u(r,0)=\varphi(r) \in C_{-1}^{(2)}$ и гранично условие от I род $u(+0,t)=f(t)\in \mathcal{K}^{(1)}$ и показваме по принцип възможността за трансформирането му до класическото уравнение на топлопроводността. Ако познаваме съответното решение на последното уравнение, лесно намираме решението на беселовото уравнение на топлопроводността. Разглеждаме и пример за случая, когато $\varphi(r)$ и $f(t)$ са полиноми, като за намиране решението на трансформираното класическо уравнение на топлопроводността използваме в модифициран вид резултатите от глава 2. Аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността / $k=1$ / е следствие от беселовото уравнение на топлопроводността.

Разглеждаме и два варианта на гранично условие от II род за аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността / $k=1$ /, а именно : първи вариант $\lim\limits_{r\to+0} r\frac{\partial u}{\partial r} = f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$. Другия вариант на гранично условие от II род $\lim\limits_{r\to+0} r^p\frac{\partial u}{\partial r} = f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$, $0\leqq p<1$, разглеждаме първоначално за беселовото уравнение на топлопроводността / $k\geqq 1$ /, а след това в частния случай / $k=1$, $p=0$ / даваме два начина за намиране на решението.

При решаване на аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността, свързано с диференциалния оператор от беселов тип

/5.0.1/ $B_1 = r^{-1}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}$

ще използваме трансформационните оператори φ_1 и χ_1 , които са подобия между B_1 и $\frac{d^2}{dr^2}$:

/5.0.2/ $\varphi_1 B_1 = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_1$ и $\chi_1 B_1 = \frac{d^2}{dr^2}\chi_1$.

Като следствия от /4.2.9/, /4.2.16/, /4.2.25/ и /4.2.28/ лесно получаваме :

/5.0.3/ $\varphi_1 h(r) = \frac{r}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{h(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}d\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r \frac{\rho h(\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho = \frac{2r}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(r\sin\rho)\sin\rho\, d\rho,\ h(r)\in C_2$;

/5.0.4/ $\varphi_1^{-1} g(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, r}\int_0^1 \frac{g(r\sqrt{\rho})+r\sqrt{\rho}\, g'(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r^2}\int_0^r \frac{\rho g(\rho)+\rho^2 g'(\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\rho\left(g(r\sin\rho)+r\sin\rho\, g'(r\sin\rho)\right)d\rho$, $g(r)\in C_1^{(1)}$;

/5.0.5/ $\chi_1 h(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{h(r\sqrt{\rho})+r\sqrt{\rho}\, h'(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\int_0^r \frac{\rho h(\rho)+\rho^2 h'(\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\rho\left(h(r\sin\rho)+r\sin\rho\, h'(r\sin\rho)\right)d\rho$, $h(r)\in C_{-1}^{(1)}$;

/5.0.6/ $\chi_1^{-1} g(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{g(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}d\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r \frac{g(\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r\sin\rho)d\rho,\ g(r)\in C_{-1}$;

и лесно е да се види, че $\chi_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\varphi_1$. От формулите /5.0.3/ и /5.0.5/ лесно следват :

/5.0.7/ $\varphi_1 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r$;

/5.0.8/ $\chi_1 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$;

/5.0.9/ $\left(\varphi_1 h(r)\right)' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{h(r\sqrt{\rho})+r\sqrt{\rho}\, h'(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}d\rho$, $h(r)\in C_{-2}^{(1)}$;

/5.0.10/ $\left(\chi_1 h(r)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{2\sqrt{\rho}\, h'(r\sqrt{\rho})+r\rho\, h''(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}d\rho$, $h(r)\in C_{-1}^{(2)}$.

При полиномни начални условия се налага трансформирането и на степени. Лесно намираме от /4.2.9/, /4.2.28/, /4.2.16/ и /4.2.24/, че

/5.0.11/ $\varphi_k r^i = \dfrac{\Gamma(\frac{i}{2}+1)}{\Gamma(\frac{i+k}{2}+1)} r^{i+k}$, $i > -2$, $k \geq 1$;

/5.0.12/ $\chi_k r^i = \dfrac{\Gamma(\frac{i+k+1}{2})}{\Gamma(\frac{i+1}{2})} r^i$, $i > -1$, $k \geq 1$;

/5.0.13/ $\varphi_k^{-1} r^i = \dfrac{\Gamma(\frac{i}{2}+1)}{\Gamma(\frac{i-k}{2}+1)} r^{i-k}$, $i > k-2$, $k \geq 1$;

/5.0.14/ $\chi_k^{-1} r^i = \dfrac{\Gamma(\frac{i+1}{2})}{\Gamma(\frac{i+k+1}{2})} r^i$, $i > -1$, $k \geq 1$.

Ще се наложи да трансформираме чрез φ_1 и χ_1 и $\ln r$.

От /5.0.3/ намираме

$$\varphi_1 \ln r = \frac{r}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\ln(r\sqrt{\rho})}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho = \frac{r \ln r}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}} + \frac{r}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\ln \rho}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho \quad .$$

Но от [20] , стр. 549, формула 4.241/2, следва

$$\int_0^1 \frac{\ln \rho}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho = 4(\ln 2 - 1)$$. Следователно

/5.0.15/ $$\varphi_1 \ln r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r \ln r + \frac{2(\ln 2 - 1)}{\sqrt{\pi}} r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r \ln(2e^{-1} r) \quad .$$

От /5.0.5/ аналогично следва

$$\chi_1 \ln r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\ln(r\sqrt{\rho})+1}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho = \frac{1+\ln r}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\ln \rho}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho$$

т.е.

/5.0.16/ $$\chi_1 \ln r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ln(2r) \quad .$$

§ 5.1. ТРАНСФОРМИРАНЕ НА БЕСЕЛОВОТО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА ДО КЛАСИЧЕСКОТО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА ПРИ I ГРАНИЧНА ЗАДАЧА

Нека разгледаме беселовото уравнение на топлопроводността

/5.1.1/ $aB_k u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$ за $k\geqq 1$

където

/5.1.2/ $B_k = r^{-k}\frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial}{\partial r}$,

с начално условие

/5.1.3/ $u(r,0) = \varphi(r) \in C^{(2)}_{-1}$,

гранично условие от I род

/5.1.4/ $u(+0,t) = f(t) \in \mathcal{K}^{(1)}$

и условие за спрегнатост на началното и гранично условия

/5.1.5/ $\varphi(+0) = f(0) = u(+0,0)$.

В глава 4 подобието $\varphi_k B_k = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_k$, респективно $\chi_k B_k = \frac{d^2}{dr^2}\chi_k$, бе изпълнено в класа от функции $C_0^{(2)}$, докато тук е дадено ненулевото условие /5.1.4/. Налага се една предварителна проста трансформация на уравнението. Полагаме

/5.1.6/ $u(r,t) = V(r,t) + f(t)$.

Тъй като $B_k u = B_k V$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + f'(t)$, $V(r,0) = u(r,0) - f(0)$,

$V(+0,t) = u(+0,t) - f(t) = f(t) - f(t) = 0$, вместо диференциалното уравнение /5.1.1/ получаваме новото диференциално уравнение

/5.1.7/ $aB_k V - f'(t) = \frac{\partial V}{\partial t}$, $a>0$, $V=V(r,t)$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$ за $k\geqq 1$,

с начално условие

/5.1.8/ $V(r,0) = \varphi(r) - f(0)$

и нулево гранично условие от I род

/5.1.9/ $V(+0,t)=0$.

1. Ако означим

/5.1.10/ $\widetilde{V}=\varphi_K V$,

където трансформационният оператор φ_K относно променливата r е /4.2.9/ при $K\geqq 1$, в частност - /5.0.3/ при $K=1$, нека подложим уравнението /5.1.7/, началното условие /5.1.8/ и граничното условие /5.1.9/ на трансформацията φ_K и използуваме резултатите /4.3.5/ и /4.2.17/, т.е. /5.0.11/ при $i=0$. Получаваме класическото уравнение на топлопроводността

/5.1.11/ $a\dfrac{\partial^2\widetilde{V}}{\partial r^2}-f'(t)\dfrac{r^K}{\Gamma(\frac{K}{2}+1)}=\dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leqq t<\infty\end{cases}$ за $K\geqq 1$,

с начално условие

/5.1.12/ $\widetilde{V}(r,0)=\varphi_K\,\psi(r)-\dfrac{r^K}{\Gamma(\frac{K}{2}+1)}f(0)$

и нулево гранично условие от I род

/5.1.13/ $\widetilde{V}(+0,t)=0$.

Ако $\widetilde{V}(r,t)$ е решението на уравнението /5.1.11/ с начално условие /5.1.12/ и гранично условие /5.1.13/, като вземем предвид полаганията /5.1.10/ и /5.1.6/, за решението $u(r,t)$ на даденото уравнение /5.1.1/ с начално условие /5.1.3/ и ненулево гранично условие от I род /5.1.4/ получаваме

/5.1.14/ $u(r,t)=\varphi_K^{-1}\widetilde{V}(r,t)+f(t)$,

където трансформационният оператор φ_K^{-1} относно променливата r е /4.2.16/ при $K\geqq 1$, в частност - /5.0.4/ при $K=1$.

2. Ако означим

/5.1.15/ $\widetilde{V}=\chi_k V$

където трансформационният оператор χ_k относно променливата r е /4.2.28/ при $k\geqq 1$, в частност - /5.0.5/ при $k=1$, нека подложим уравнението /5.1.7/, началното условие /5.1.8/ и граничното условие /5.1.9/ на трансформацията χ_k и използуваме резултатите /4.3.5/ и /5.0.12/ при $i=0$. Получаваме класическото уравнение на топлопроводността

/5.1.16/ $a\dfrac{\partial^2\widetilde{V}}{\partial r^2}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)f'(t)=\dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\ 0\leqq t<\infty\end{cases}$ за $k\geqq 1$,

с начално условие

/5.1.17/ $\widetilde{V}(r,0)=\chi_k\,\varphi(r)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)f(0)$

и нулево гранично условие от I род

/5.1.18/ $\widetilde{V}(+0,t)=0$.

Ако $\widetilde{V}(r,t)$ е решението на уравнението /5.1.16/ с начално условие /5.1.17/ и гранично условие /5.1.18/, като вземем предвид полаганията /5.1.15/ и /5.1.6/, за решението $u(r,t)$ на даденото уравнение /5.1.1/ с начално условие /5.1.3/ и ненулево гранично условие от I род /5.1.4/ получаваме

/5.1.19/ $u(r,t)=\chi_k^{-1}\,\widetilde{V}(r,t)+f(t)$,

където трансформационният оператор χ_k^{-1} относно променливата r е /4.2.24/ при $k\geqq 1$, в частност - /5.0.6/ при $k=1$.

Очевидно, използуването на трансформационния оператор χ_k води до решаването на по-просто класическо уравнение на топлопроводността, отколкото използуването на φ_k .

ПРИМЕР :

Нека $k\geqq 1$ е цяло число и $\varphi(r)$, $f(t)$ са полиноми от произволна степен :

/5.1.20/ $\varphi(r)=\sum_{i=0}^{m} a_i r^i$, a_i - константи,

/5.1.21/ $f(t)=\sum_{j=0}^{n} b_j t^j$, b_j - константи.

Очевидно, при $k=1$ се получава аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността.

Имаме да търсим решението на уравнението

/5.1.22/ $a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{k}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$

за цялото число $k\geqq 1$, с полиномно начално условие

/5.1.23/ $u(r,0)=\sum_{i=0}^{m} a_i r^i$

и полиномно гранично условие от I род

/5.1.24/ $u(+0,t)=\sum_{j=0}^{n} b_j t^j$,

като условието за спрегнатост на началното и граничното условия сега е $a_0=b_0$. От /5.1.7/, /5.1.8/ и /5.1.9/ получаваме сега уравнението $aB_k V-\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)b_{j+1}t^j=\frac{\partial V}{\partial t}$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$

с начално условие $V(r,0)=\sum_{i=1}^{m} a_i r^i$ и нулево гранично условие от I род $V(+0,t)=0$. След прилагане на трансформацията χ_k получаваме уравнението $a\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial r^2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)b_{j+1}t^j=\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t}$

с начално условие, получено след прилагането на /5.0.12/,

$\tilde{V}(r,0)=\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{\Gamma\left(\frac{i+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}r^i$. Ако за краткост положим

$\nu_i=a_i\frac{\Gamma\left(\frac{i+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}$, $i=1,2,\dots,m$; $\nu_0=0$

и

$A_j=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)(j+1)b_{j+1}$, $j=0,1,\dots,n-1$,

имаме да решаваме уравнението

$$a\frac{\partial^2\tilde V}{\partial r^2}-\sum_{j=0}^{n-1}A_j t^j=\frac{\partial\tilde V}{\partial t}$$, $a>0$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\ 0\leqq t<\infty\end{cases}$

за цялото число $k\geq 1$, с начално условие $\tilde V(r,0)=\sum_{i=1}^{m}\nu_i r^i$

и нулево гранично условие от I род $\tilde V(+0,t)=0$.

Като използуваме резултатите /2.1.2/ и /2.3.15/ от глава 2 при $\beta=c=0$, за решението $\tilde V(r,t)$ на последното уравнение получаваме

$$\tilde V(r,t)=\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{i=0}^{m-j}a_{ij}r^i\right)\frac{t^j}{j!}-a_{0j}F_j\left(t,\frac{r}{\sqrt a}\right)\right)+\frac{1}{\sqrt\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{j+1}\left((j+1)!\,F_{j+1}\left(t,\frac{r}{\sqrt a}\right)-t^{j+1}\right),$$

където a_{ij} се пресмятат, както е показано в § 2.1, и F_{ij} е според T1 по формули /1.1.2/, /1.1.3/, /1.1.4/. Като вземем предвид формула /5.0.14/ и вида на χ_k^{-1} от /4.2.24/, чрез заместване в /5.1.19/ намираме търсеното решение $u(r,t)$ на беселовото уравнение на топлопроводността /5.1.22/ с полиномно начално условие /5.1.23/ и полиномно гранично условие от I род /5.1.24/ :

$$u(r,t)=\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{i=0}^{m-j}a_{ij}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+k+1}{2}\right)}r^i\right)\frac{t^j}{j!}-a_{0j}\,\chi_k^{-1}F_j\left(t,\frac{r}{\sqrt a}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{j+1}\left((j+1)!\,\chi_k^{-1}F_{j+1}\left(t,\frac{r}{\sqrt a}\right)\right)+\beta_0 ,$$

където

$$\chi_k^{-1}F_j\left(t,\frac{r}{\sqrt a}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^1\rho^{-\frac12}(1-\rho)^{\frac{k}{2}-1}F_j\left(t,\frac{r\sqrt\rho}{\sqrt a}\right)d\rho .$$

§ 5.2. БЕСЕЛОВО И АКСИАЛНО-СИМЕТРИЧНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА ПРИ II ГРАНИЧНА ЗАДАЧА

1. Нека разгледаме аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността

/5.2.1/ $aB_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$,

където

/5.2.2/ $B_1 = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$,

с начално условие

/5.2.3/ $u(r,0) = \varphi(r) \in C_1^{(2)}$

и гранично условие от II род

/5.2.4/ $\lim\limits_{r\to+0} r\frac{\partial u}{\partial r} = f(t) \in \mathcal{K}^{(1)}$.

В глава 4 за оператора B_1 се изискваше условието /4.1.15/ $r\frac{\partial u}{\partial r} \in C_0^{(1)}$, докато тук от /5.2.4/ виждаме, че това условие изобщо е нарушено. Затова предварително трансформираме уравнението чрез

/5.2.5/ $u(r,t) = V(r,t) + f(t)\ln r$.

Тъй като $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} + f(t)\frac{1}{r}$, т.е. $r\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial V}{\partial r} + f(t)$, откъдето следва $r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial u}{\partial r} = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial V}{\partial r}$, което е все едно $B_1 u = B_1 V$, а също $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + f'(t)\ln r$, $V(r,0) = u(r,0) - f(0)\ln r = \varphi(r) - f(0)\ln r$ и $\lim\limits_{r\to+0} r\frac{\partial V}{\partial r} = \lim\limits_{r\to+0} r\frac{\partial u}{\partial r} - f(t) = f(t) - f(t) = 0$, получаваме по този начин новото диференциално уравнение

/5.2.6/ $aB_1 V - f'(t)\ln r = \frac{\partial V}{\partial t}$, $a>0$, $V = V(r,t)$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$,

с начално условие

/5.2.7/ $V(r,0) = \varphi(r) - f(0)\ln r$

и нулево гранично условие от II род

/5.2.8/ $\lim\limits_{r\to+0} r\dfrac{\partial V}{\partial r}=0$.

От еквивалентното на /5.2.8/ условие $r\dfrac{\partial V}{\partial r}\in C_0^{(1)}$ следва $\dfrac{\partial V}{\partial r}\in C_{-1}^{(1)}$ и $V\in C_0^{(2)}$. Следователно нулевото гранично условие от II род /5.2.8/ можем да заменим с еквивалентното му нулево гранично условие от I род

/5.2.9/ $V(+0,t)=0$.

Ако означим

/5.2.10/ $\widetilde{V}=\mathcal{X}_1 V$,

където трансформационният оператор $\mathcal{X}_1$ относно променливата r е /5.0.5/, и като подложим уравнението /5.2.6/, началното условие /5.2.7/ и граничното условие /5.2.9/ на трансформацията $\mathcal{X}_1$, след прилагане на резултатите /5.0.2/ и /5.0.16/, получаваме класическото уравнение на топлопроводността

/5.2.11/ $a\dfrac{\partial^2\widetilde{V}}{\partial r^2}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}f'(t)\ln(2r)=\dfrac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leq t<\infty\end{cases}$

с начално условие

/5.2.12/ $\widetilde{V}(r,0)=\mathcal{X}_1\varphi(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}f(0)\ln(2r)$

и нулево гранично условие от I род

/5.2.13/ $\widetilde{V}(+0,t)=0$.

Нека $\widetilde{V}(r,t)$ е решението на последното уравнение. Като вземем предвид /5.2.5/ и /5.2.10/, за решението $u(r,t)$ на уравнението /5.2.1/ с начално условие /5.2.3/ и ненулево гранично условие от II род /5.2.4/ получаваме

/5.2.14/ $u(r,t)=\mathcal{X}_1^{-1}\widetilde{V}(r,t)+f(t)\ln r$,

където трансформационният оператор $\mathcal{X}_1^{-1}$ относно променливата r е /5.0.6/.

2. Нека разгледаме беселовото / в частност при $k=1$ аксиално-симетричното / уравнение на топлопроводността

/5.2.15/ $aB_k u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leq t<\infty \end{cases}$ за $k\geq 1$,

където

/5.2.16/ $B_k = r^{-k}\frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial}{\partial r}$,

с начално условие

/5.2.17/ $u(r,0) = \varphi(r) \in C_{-2}^{(2)}$

и втори вариант на гранично условие от II род

/5.2.18/ $\lim_{r\to+0} r^p \frac{\partial u}{\partial r} = f(t) \in \mathcal{K}^{(1)}$ за $0\leq p<1$, в частност $p=0$.

Тук от /5.2.18/ следва $r^k \frac{\partial u}{\partial r} \in C_0^{(1)}$ за $k\geq 1$, откъдето $\frac{\partial u}{\partial r} \in C_{-k}^{(1)}$ и $u \in C_{1-k}^{(2)}$, като $C_{1-k}^{(2)} \subset C_0^{(2)}$ само за $k=1$. Затова, изобщо при $k\geq 1$, предварително трансформираме уравнението чрез

/5.2.19/ $u(r,t) = V(r,t) + \frac{r^{1-p}}{1-p} f(t)$.

Оттук следва

/5.2.20/ $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^p} f(t)$

и тогава $r^{-k}\frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial u}{\partial r} = r^{-k}\frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{k-p}{r^{p+1}} f(t)$, т.е. $B_k u = B_k V + \frac{k-p}{r^{p+1}} f(t)$. Лесно намираме $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{r^{1-p}}{1-p} f'(t)$ и $V(r,0) = u(r,0) - \frac{1}{1-p} f(0) r^{1-p} = \varphi(r) - \frac{1}{1-p} f(0) r^{1-p}$. От /5.2.20/ следва

$r^p \frac{\partial V}{\partial r} = r^p \frac{\partial u}{\partial r} - f(t)$ и оттук и /5.2.18/ получаваме

$\lim_{r\to+0} r^p \frac{\partial V}{\partial r} = \lim_{r\to+0} r^p \frac{\partial u}{\partial r} - f(t) = f(t) - f(t) = 0$. По този начин идваме до диференциалното уравнение

/5.2.21/ $aB_k V + a(k-p)\frac{1}{r^{p+1}} f(t) - \frac{1}{1-p} r^{1-p} f'(t) = \frac{\partial V}{\partial t}$, $a>0$, $V = V(r,t)$

в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$ за $k\geqq 1$, с начално условие

/5.2.22/ $V(r,0)=\varphi(r)-\frac{1}{1-\rho}f(0)r^{1-\rho}$

и втори вариант на нулево гранично условие от II род

/5.2.23/ $\lim\limits_{r\to+0} r^{\rho}\frac{\partial V}{\partial r}=0$.

Сега имаме $r^{\rho}\frac{\partial V}{\partial r}\in C_0^{(1)}$ и още повече $r^{k}\frac{\partial V}{\partial r}\in C_0^{(1)}$ за $k\geqq 1$ поради $k>\rho$. Още от $r^{\rho}\frac{\partial V}{\partial r}\in C_0^{(1)}$ следва $\frac{\partial V}{\partial r}\in C_{-\rho}^{(1)}$ и $V\in C_{1-\rho}^{(2)}\subset C_0^{(2)}$, поради $\rho<1$. Следователно приложима е формула /4.3.5/ и, освен това, нулевото гранично условие от II род /5.2.23/ можем да заменим с еквивалентното му нулево гранично условие от I род

/5.2.24/ $V(+0,t)=0$.

Тъй като и $\frac{1}{r^{\rho+1}}\in C_{-2}$ при $0\leqq\rho<1$, можем да приложим относно променливата r трансформационния оператор φ_k от /4.2.9/, в частност φ_1 от /5.0.3/ при $k=1$. Като положим

/5.2.25/ $\widetilde{V}=\varphi_k V$

и използваме резултатите /4.3.5/ и /5.0.11/, от уравнението /5.2.21/ с начално условие /5.2.22/ и нулево гранично условие от I род /5.2.24/ получаваме класическото уравнение на топлопроводността

/5.2.26/ $a\frac{\partial^2\widetilde{V}}{\partial r^2}+a(k-\rho)\frac{\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\rho+k}{2}\right)}r^{k-\rho-1}f(t)-\frac{1}{1-\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\rho+k}{2}+1\right)}r^{1-\rho+k}f'(t)=\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}$

$a>0$ в областта $\begin{cases} 0<r<\infty \\ 0\leqq t<\infty \end{cases}$ за $k\geqq 1$, с начално условие

/5.2.27/ $\widetilde{V}(r,0)=\varphi_k\varphi(r)-\frac{1}{1-\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\rho+k}{2}+1\right)}f(0)r^{1-\rho+k}$

и нулево гранично условие от I род

/5.2.28/ $\tilde{V}(+0,t)=0$.

Ако $\tilde{V}(r,t)$ е решението на последното уравнение, като вземем предвид /5.2.19/ и /5.2.25/, получаваме решението $u(r,t)$ на даденото уравнение /5.2.15/ с начално условие /5.2.17/ и втори вариант на ненулево гранично условие от II род /5.2.18/, а именно :

/5.2.29/ $u(r,t)=\varphi_k^{-1}\tilde{V}(r,t)+\frac{r^{1-\rho}}{1-\rho}f(t)$,

където трансформационният оператор φ_k^{-1} относно променливата r е /4.2.16/, в частност φ_1^{-1} е /5.0.4/ при $k=1$.

3. В частност при $k=1$ и $\rho=0$ имаме аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността

/5.2.30/ $a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$, $a>0$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leqq t<\infty\end{cases}$

с начално условие

/5.2.31/ $u(r,0)=\Phi(r)\in C_{-2}^{(2)}$,

втори вариант на гранично условие от II род

/5.2.32/ $\frac{\partial u(+0,t)}{\partial r}=f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$

и условие за спрегнатост на началното и гранично условия

$\Phi'(+0)=f(0)$. Сега чрез предварителната трансформация

/5.2.33/ $u(r,t)=V(r,t)+rf(t)$,

прилагането на трансформационния оператор φ_1 според /5.0.3/ и полагането

/5.2.34/ $\tilde{V}=\varphi_1 V$

получаваме класическото уравнение на топлопроводността

$a\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial r^2}+a\sqrt{\pi}f(t)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}r^2f'(t)=\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t}$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leqq t<\infty\end{cases}$

с начално условие $\tilde{V}(r,0)=\varphi_1\psi(r)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)r^2$ и нулево гранично условие от I род $\tilde{V}(+0,t)=0$. В частния случай, когато $\psi(r)$ и $f(t)$ са полиноми от произволна степен : $\psi(r)=\sum_{i=0}^{m}a_i r^i$, a_i - константи; $f(t)=\sum_{j=0}^{n}b_j t^j$, b_j - константи, като приложим метода и резултатите, изложени в глава 2, не е трудно да намерим решението $\tilde{V}(r,t)$ на последното уравнение. Като вземем предвид /5.2.33/ и /5.2.34/, за решението $u(r,t)$ на уравнението /5.2.30/ с начално условие /5.2.31/ и втори вариант на ненулево гранично условие от II род /5.2.32/ получаваме

$u(r,t)=\varphi_1^{-1}\tilde{V}(r,t)+rf(t)$, където трансформационният оператор φ_1^{-1} спрямо променливата r е /5.0.4/.

4. Ще изложим един друг начин за намиране решението на аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността

/5.2.35/ $aB_1u=\frac{\partial u}{\partial t}$, $B_1=r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}$ в областта $\begin{cases}0<r<\infty\\0\leq t<\infty\end{cases}$

с начално условие

/5.2.36/ $u(r,0)=\psi(r)\in C_{-1}^{(2)}$,

втори вариант на гранично условие от II род

/5.2.37/ $\frac{\partial u(+0,t)}{\partial r}=f(t)\in\mathcal{K}^{(1)}$

и условие за спрегнатост на началното и гранично условия

$\psi'(+0)=f(0)$. От /5.2.37/ следва, че е изпълнено $r\frac{\partial u}{\partial r}\in C_0^{(1)}$, а следователно и $u\in C_0^{(2)}$, поради което /5.0.2/ е изпълнимо. Следователно можем направо да приложим трансформационния оператор χ_1 относно променливата r според формула /5.0.5/. Ако положим

/5.2.38/ $\tilde{u}=\chi_1 u$

и вземем предвид формула /5.0.10/, от /5.2.37/ следва

$$\frac{\partial \tilde{u}(+0,t)}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{2\sqrt{\rho} f(t)}{\sqrt{1-\rho}} d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(t) \int_0^1 \rho^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(t) \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(t) .$$

Следователно, като подложим уравнението /5.2.35/, началното условие /5.2.36/ и ненулевото гранично условие от II род /5.2.37/ на трансформацията χ_1 , получаваме класическото уравнение на топлопроводността $a\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ в областта $\begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{cases}$ с начално условие $\tilde{u}(r,0) = \chi_1 \varphi(r)$ и гранично условие от II род $\frac{\partial \tilde{u}(+0,t)}{\partial r} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(t)$. За случая, когато $\varphi(r)$ и $f(t)$ са полиноми от произволна степен, като намерим $\varphi_1(\varphi(r))$ по формула /5.0.12/ при $k=1$, за последното уравнение не е трудно да намерим решението $\tilde{u}(r,t)$ чрез прилагане на методите и резултатите от глави 1, 2 и 3. Тогава решението $u(r,t)$ на аксиално-симетричното уравнение на топлопроводността /5.2.35/ с полиномно начално условие $u(r,0) = \sum_{i=0}^{m} a_i r^i$, a_i - константи, и втори вариант на полиномно гранично условие от II род $\frac{\partial u(+0,t)}{\partial r} = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$, b_j - константи, е $u(r,t) = \chi_1^{-1} \tilde{u}(r,t)$, където трансформационният оператор χ_1^{-1} спрямо променливата r е /5.0.6/.

20. 5. 1975 г.

С о ф и я

Л И Т Е Р А Т У Р А :

1. Mikusinski J., Operational Calculus, Oxford-, 1967.
2. Ердей А., Операционно смятане и обобщени функции,София,1970.
3. Полубаринова-Кочина П.Я., Теория движения грунтовых вод,Москва,1952.
4. Карслоу Г.,Д.Егер, Теплопроводность твердых тел,Москва,1964.
5. Лыков А.В., Теория теплопроводности,Москва-,1967.
6. Dimovski I., Foundations of Operational Calculi for the Bessel Type Differential Operators,Сердика, 1, 1975 , to appear.
7. Левитан Б.М., Разложение по функциям Беселя в ряды и интегралы Фурье,Усп.математ.наук,т.6,вып.2,1951.
8. Haimo D.T., Integral equations associated with Hankel convolutions, Transaction of the American Math.Society,vol.116(1965),330-375.
9. Haimo D.T., Generalized temperature functions,Duke Math.Jour.,vol.33, 2(1966),305-322.
10. Haimo D.T.,F.M.Cholewinski, Integral representations of solutions of the generalized heat equations,Illinois Jour.of Math.,vol.10,4(1966).
11. Colton D., Cauchy's problem for a singular parabolic differential equation,Jour.of Diff.Equat.,vol.8(1970),250-257.
12. Romberg G., Über den radialen Värmestorm in Zylindern,ZAMM,42(1962), 7/8,317-331.
13. Диткин В.А.,А.П.Прудников, Справочник по операционному исчислению,Москва,1965.
14. Димовски И.Х., Върху основите на операционното смятане,Математика и матем.образование,БАН,София,1974,103-112.
15. Копрински С.Ц., Алгебричен метод за намиране оригиналите на операторните функции $\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{p^{J+1}}$ и $\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{p^{J+1}\sqrt{p}}$ при трансформацията на Лаплас,Год.ВТУЗ,Матем.,т.VIII,София,1972,195-206.