Единен център за наука и подготовка на кадри по математика
и механика

Факултет по математика и механика

МАРГАРИТА ДИМИТРОВА КОСТОВА

Върху разпределението на нулите на някои класи полиноми и цели функции

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научна степен
"кандидат на математическите науки"

СОФИЯ, 1975

Предлаганата работа съдържа твърдения за разпределението на нулите на полиномите и на целите функции принадлежащи на някои специални класи, които дълго време са били предмет на изследвания на редица математици.

В теорията на полиномите и цели функции представими с интеграли, особен интерес представлява въпросът за разпределението на нулите на функциите от вида:

$$F(z)=\int_{-1}^{1}\phi(t)p(z+t)\,dt, \qquad (1)$$

където $\phi(t)$ е реална, R - интегруема функция, $p(z)$ е полином с нули в ивицата $\alpha \le R_e z \le \beta$ или цяла функция, граница на такива полиноми.

В непосредствена връзка с този въпрос е и изучаването на целите функции:

$$C_f(z)=\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt, \quad S_f(z)=\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt, \qquad (2)$$

където $f(t)$ е функция свързана подходящо с $\phi(t)$.

В първата част на настоящата работа ние си поставяме задачата да търсим условия на които трябва да отговаря функцията $f(t)$ за да бъдат нулите на целите функции (2) само реални.

Едно решение на тази задача ни дава теорема 1 от § 2 т.1. ч.I.

Нека δ е рационално число от интервала $[0,\frac{1}{2}]$. Ако $f(t)$ е положителна, непрекъсната в $[0,1]$ функция, монотонно расте в интервалите $[0,\delta]$ и $[1-\delta,1]$, а стойностите ѝ за $t\in(\delta,1-\delta)$

остават между тези на $f(\delta)$ и $f(1-\delta)$ и още $f(t)$ удовлетворява едно специално изискване за монотонност (което в т. 1 § 2 сме означили като условие 3), то всички нули на функциите (2) са реални.

Друго решение е теорема 2. Ако $\varphi(t)$ е неотрицателна, монотонно растяща в [0,1] функция, то при

$$f(t)=t^s[\varphi(1-t)-\varphi(t)] \quad , s\in N$$

функциите (2) имат само реални нули.

По-нататък в т. 2 на § 2 наред с твърдения за принадлежност към класата E посочваме конструкция за построяване на функции за които всички нули на (2) са реални.

Накрая в т.3 се спираме и на едно необходимо условие за принадлежност на класата E, като се опитваме да търсим полиноми за които то е и достатъчно.

В част II получаваме резултати, които потвърждават някои известни вече (като например теорема 23 от [1] на Обрешков, аналог на една теорема на Шур и др.), както и получаваме твърдение, което е по-общо от изказаното от нас твърдение на Т2 от част I. Резултатите от част II се явяват изключително като приложение на една самостоятелна теория развита на основата на теорията на редици от множители запазващи определени свойства на нулите на даден полином в кръгова област.

Наред с това тук получаваме възможността да обозрем по-пълно функциите $f(t)$ от класите E и G, за които говорим в първата част.

В третата част разглеждаме т.н. λ-редици. В редица публикации ([17] - [22]) от последните 10 години Илиев разкри в нова светлина приложението на функциите от вида (1), към въпросите на функционалния анализ, ортогоналните многочлени и въпросите свързани с разпределението на нулите. Не малка роля в осветляването на това приложение играят и λ - редиците. За изясняване на характера и свойствата на тези редици са установени редица твърдения в § 2 на част III.

Първите параграфи и на трите части са уводни. Те съдържат кратък обзор на резултатите известни до сега, теоремите, които ползуваме, както и новите определения и означения, които въвеждаме.

Получените резултати са най-вече свързани с изследванията на Обрешков, Илиев и Божоров.

Известна част от резултатите се съдържат в работите [43] - [46].

Ч А С Т 1

§ 1. В тази част ще се занимаем с нулите на цели функции със следното интегрално представяне

$$C_f(z)=\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt\,,\qquad S_f(z)=\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt\,,$$

където $f(t)$ е реална, интегруема в Риманов смисъл в интервала $[0,1]$ функция.

В теоретичната физика се срещат редица функции от този вид. Достатъчно е да посочим функциите

$$\int_0^1 t\sin tz\,dt=\frac{\sin z - z\cos z}{z^2}=\frac{\cos z}{z^2}\,(tg z - z)$$

и

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos tz}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\,n}=J_0(z)\,.$$

За краткост да приемем следните означения: с f ще означаваме функцията $f(t)$ - реална и R - интегруема в интервала $[0,1]$; $f>0$ ще пишем вместо условието $f(t)>0$ за $t\in[0,1]$; $f\uparrow$ (респ. $f\downarrow$ вместо $f(t)$ - ненамаляваща (респ. нерастяща) в интервала $[0,1]$; $f\bar{\uparrow}$ - вместо $f(t)$ - не монотонна изобщо за $t\in[0,1]$; N - множеството на естествените числа.

Да приемем още следните определения:

<u>Определение 1.</u> Функцията f , наричаме функция от класата E, ако съществува редица от естествени числа

$$n_1<n_2<\dots<n_k<\dots\;,\qquad n_k\in N'\subset N,$$

за която нулите на полиномите

$$F_{n_k}(z)=\sum_{k=0}^{n_k} f\left(\frac{k}{n_k}\right)z^k$$

принадлежат на областта $|z|\leq 1$ или накратко

$$f\in E \leftrightarrow \left\{z;\ \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k=0,\ \forall n\in N'\right\}\subset\left\{z;\ |z|\leq 1\right\}.$$

<u>Определение 2.</u> Класа G:

$$f\in G \leftrightarrow \left\{z;\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k=0,\ \forall n\in N\right\}\subset\left\{z;\ |z|\leq 1\right\}.$$

<u>Определение 3.</u> С класа T_1, съответно T_2 означаваме множеството на целите рационални и трансцендентни функции, които са полиноми със само реални неположителни нули, съответно със само реални нули, или във всяка крайна област са граница на такива полиноми.

Очевидно $T_1 \subset T_2$.

<u>Определение 4.</u> Класа C:

$$f\in C \leftrightarrow \left\{f;\ C_f(z)\in T_2\right\}$$

<u>Определение 5.</u> Класа S:

$$f\in S \leftrightarrow \left\{f;\ S_f(z)\in T_2\right\}$$

Един от методите за изследване разпределението на нулите на (2) използува принципа за вариация на аргумента, който поставя в непосредствена връзка това разпределение с въпроса за принадлежността на нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k$$

на областта $|z|\le 1$. Едно просто приложение на този принцип показва, че ако нулите на един полином

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

лежат в единичния кръг, $|z|\le 1$, тогава тригонометричните полиноми

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kz \;, \quad Q(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kz$$

имат само реални нули.

От тук следва, че ако редицата от полиноми

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k \;, \quad n=1,2,3,\ldots$$

притежава подредица със следното свойство - всеки принадлежащ й полином има нулите си в единичния кръг, то функциите (2) притежават само реални нули, т.е.

$$(f\in E) \to f\in C \,, f\in S .$$

Пойа [35] пръв установява твърдението.

– <u>Теорема на Пойа</u>

$$(f>0, \uparrow) \to f\in E$$

и следователно $f\in C \,, f\in S .$

В редица изследвания на чужди и наши математици усилията са били насочени към търсене на нерастящи и по-общо не монотонни функции принадлежащи на класите C и S.

По-главни резултати в това направление са получени от Пойа [35], Илиев [10], [11], [12], Божоров [23] и др., които могат накратко да се резюмират така

$$\exists f; \quad (f>0, \downarrow) \to f \in C, f \in S;$$

Чакалов [7]:

$$(f>0, \downarrow) \to S_f(z)>0 \quad , \quad 0<z<\infty;$$

Божоров [24]:

$$(f>0, \downarrow, f \text{ - изпъкнала}) \to C_f(z)>0 \, , \, -\infty<z<\infty;$$

Пойа [35], Обрешков [1], Илиев [11], [12], Божоров [25] и др.:

$$\exists\{f\}; \quad (f>0, \downarrow) \to f \in C$$

Тук $\{f\}$ означава класа от функции с посочените свойства;

Илиев [12]:

$$(f \in C) \to \{f_n; f_n \in C, \quad n \in N\} \quad ;$$

Тодоринов [29], [30], Русев [28], Димитров [31] и др.:

$$\exists f; \quad (f>0, f\uparrow) \to f \in C, f \in S.$$

Ние ще се опитаме в § 2 да разширим класата от функции E (съответно C и S), като за целта ползваме известни теореми на Какея и Енестрвом ([2] стр. 172), на Шур ([2] стр. 199) и на Илиев [10]. Предвид ролята която имат при следващите доказателства ще си позволим да ги формулираме тук.

<u>Теорема на Какея - Енестрьом.</u> Ако кофициентите на полинома

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

са реални и удовлетворяват неравенствата

$$0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n$$

то нулите на $p(z)$ лежат в кръга $|z| \le 1$.

Ако сменим z с $\frac{1}{z}$ теоремата може да се изкаже още така:

Ако кофициентите на полинома $p(z)$ са реални и

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0 ,$$

то нулите му лежат в кръговата област $|z| \le 1$.

<u>Теорема на Шур.</u> За да има полиномът

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad , \quad a_n \neq 0$$

само нули в кръга $|z| \le 1$, необходимо и достатъчно е $|a_n| \geq |a_0|$ и полиномът

$$P_1(z) = \frac{1}{z}\left[\bar{a}_n P(z) - a_0 z^n \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right] \qquad (3)$$

от $n-1$ ва- степен да има също само нули в кръга $|z|\le 1$.

С други думи

$$\left(\{z; P(z)=0\}\subset\{z; |z|\le 1\}\right)\Leftrightarrow\left(\{z; P_1(z)=0\}\subset\{z; |z|\le 1\}\ \&\ |a_n|\geqslant|a_0|\right)$$

Теорема на Илиев. Ако нулите на полинома

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n=a_n(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)$$

са с абсолютна стойност $\geqslant 1$ и ако положим

$$P^*(z)=z^n\bar{P}\left(\tfrac{1}{z}\right)=\bar{a}_n(1-\bar{\alpha}_1z)\dots(1-\bar{\alpha}_nz)\ ,$$

то нулите на полинома

$$P(z)+\varepsilon z^k P^*(z)\qquad ,\ |\varepsilon|=1\ ,\ k\geqslant 0$$

са по единичната окръжност.

При $k=0$ получаваме една добре известна теорема на Шур. В този случай, предполагаме още, че има поне едно α_s , за което $|\alpha_s|>1$.

В случая, когато $|\alpha_k|>1$ за всяко k , нулите на полинома

$$P(z)+\varepsilon z^k P^*(z)$$

са прости / [16] . [13] /.

Наред с тези основни теореми, ние ще ползуваме и други известни твърдения, като например теореми на Обрешков, на Илиев и др. автори, но ще си запазим правото да ги цитираме по-късно.

§ 2. 1. Най-напред ще установим следната

Лема 1. Нулите на полинома с реални коефициенти

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

лежат в кръга $|z| \le 1$, ако коефициентите му удовлетворяват следните условия:

1. $a_n \geq a_{n-1} \geq a_k \geq a_1 \geq a_0 > 0$, $2 \le k \le n-2$

2. редицата с общ член

$$c_{k-2} = (a_n^2 - a_0^2)(a_n a_k - a_0 a_{n-k}) - (a_n a_1 - a_0 a_{n-1})(a_n a_{n-k+1} - a_0 a_{k-1})$$

расте за $2 \le k \le n$.

Доказателство. Използуваме теоремата на Шур. Чрез двукратно прилагане конструкцията на Шур (3) върху полинома $P(z)$ получаваме полинома

$$P_2(z) = \sum_{k=2}^{n} c_{k-2} z^{k-2},$$

където

$$c_{k-2} = (a_n^2 - a_0^2)(a_n a_k - a_0 a_{n-k}) - (a_n a_1 - a_0 a_{n-1})(a_n a_{n-k+1} - a_0 a_{k-1})$$

От условие 1) следва, че всички $c_{k-2} > 0$. Наистина

$$a_n^2 - a_0^2 > a_n a_{n-k+1} - a_0 a_{k-1},$$

тъй като

$$a_n^2 - a_0^2 - a_n a_{n-k+1} + a_0 a_{k-1} = a_n(a_n - a_{n-k+1}) + a_0(a_{k-1} - a_0) > 0$$

и

$$a_n a_k - a_0 a_{n-k} > a_n a_1 - a_0 a_{n-1},$$

понеже

$$a_n a_k - a_0 a_{n-k} - a_n a_1 + a_0 a_{n-1} = a_n(a_k - a_1) + a_0(a_{k-1} - a_0) > 0.$$

Условието 2) гарантира монотонността на редицата $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$. Тогава съгласно теоремата на Какейа-Енестрьом, нулите на полинома $P_2(z)$ лежат в областта $|z| \leq 1$, а следователно и нулите на полинома $P_1(z)$, където

$$P_1(z) = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} z^{k-1}, \quad b_{k-1} = a_n a_k - a_0 a_{n-k}$$

са в същия кръг.

За коефициентите b_0 и b_{n-1} може да се докажат неравенствата

$$0 < b_0 < b_{n-1}.$$

Наистина

$$b_0 = a_n a_1 - a_0 a_{n-1}, \quad b_{n-1} = a_n^2 - a_0^2.$$

Тогава

$$b_{n-1} - b_0 = a_n(a_n - a_1) + a_0(a_{n-1} - a_0) > 0$$

и

$b_0 = a_n a_1 - a_0 a_{n-1} > 0$, тъй като $a_n > a_{n-1}$, $a_1 > a_0$.

Щом полинома $P_1(z)$ има нулите си в областта $|z| \leq 1$ и за коефициентите му b_0 и b_{n-1}, са в сила горните неравенства, то според теоремата на Шур и нулите на $P(z)$ принадлежат на $|z| \leq 1$.

Ако положим

$$\alpha_k^{(0)} = a_k$$

$$\alpha_k^{(1)} = \alpha_n^{(0)} \alpha_k^{(0)} - \alpha_0^{(0)} \alpha_{n-k}^{(0)} = a_n a_k - a_0 a_{n-k}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_n^{(1)} \alpha_k^{(1)} - \alpha_1^{(1)} \alpha_{n-k+1}^{(1)} =$$

$$= (a_n^2 - a_0^2)(a_n a_k - a_0 a_{n-k}) - (a_n a_1 - a_0 a_{n-1})(a_n a_{n-k+1} - a_0 a_{k-1}),$$

веднага следва, че условие 2) на лемата може да се сведе към изискването редицата

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_n^{(1)} \alpha_k^{(1)} - \alpha_1^{(1)} \alpha_{n-k+1}^{(1)} , \quad k = 2,3,\ldots,n$$

да бъде монотонно растяща.

Доказаното твърдение може да се обобщи в следната форма

Лема 2.. Нека

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

е произволен полином от степен n с реални коефициенти и да положим

$$\alpha_k^{(0)} = a_k , \quad \alpha_k^{(s)} = \alpha_n^{(s-1)} \alpha_k^{(s-1)} - \alpha_{s-1}^{(s-1)} \alpha_{n-k+s-1}^{(s-1)} ,$$

където $s \leq k \leq n$, а s е произволно естествено число $\leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Нека за коефициентите на полинома $P(z)$ имаме

1. $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_{n-s} \geq a_k \geq a_s \geq \cdots \geq a_0 > 0$,

където $s+1 \leq k \leq n-(s+1)$, $s \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, $s \in N$.

2. Редицата

$$\alpha_k^{(s)} = \alpha_n^{(s-1)} \alpha_k^{(s-1)} - \alpha_{s-1}^{(s-1)} \alpha_{n-k+s-1}^{(s-1)} \tag{4}$$

монотонно расте за $s \leq k \leq n$ и фиксирано s .

При тези условия

$$\left\{ z ; P(z) = 0 \right\} \subset \left\{ z ; |z| \leq 1 \right\} .$$

Доказателство. Ще докажем първо, че след s - кратно прилагане $\left(s \le \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ на операцията на Шур (3) върху полинома $P(z)$, коефициентите на полинома, който се получава

$$P_s(z) = \sum_{k=s}^{n} c_{k-s} z^{k-s}$$

са точно числата $\alpha_k^{(s)}$, $s \le k \le n$. Това може да се установи индуктивно. Наистина, при $s=1$ според (3)

$$P_1(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_n a_k - a_0 a_{n-k}) z^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} z^{k-1},$$

където

$$c_{k-1} = a_n a_k - a_0 a_{n-k} = \alpha_n^{(0)} \alpha_k^{(0)} - \alpha_0^{(0)} \alpha_{n-k}^{(0)} = \alpha_k^{(1)}$$

При $s=2$ получаваме съответния резултат от Лема 1.

Нека твърдението е вярно за някакво s, т.е.

$$P_s(z) = \sum_{k=s}^{n} \alpha_k^{(s)} z^{k-s},$$

където $\alpha_k^{(s)}$ се определя от формулата (4) и да намерим чрез операцията на Шур $P_{s+1}(z)$.

$$P_{s+1}(z) = \frac{1}{z}\left[\alpha_n^{(s)} P_s(z) - \alpha_s^{(s)} z^{n-s} \bar{P}_s\left(\frac{1}{\bar z}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=s+1}^{n} \left(\alpha_n^{(s)} \alpha_k^{(s)} - \alpha_s^{(s)} \alpha_{n-k+s}^{(s)}\right) z^{k-(s+1)}$$

$$= \sum_{k=s+1}^{n} \alpha_k^{(s+1)} z^{k-(s+1)}$$

Нулите на полинома $P_s(z)$ принадлежат на $|z|\leq 1$. Това е така, защото редицата от коефициенти на този полином

$$c_0=\alpha_s^{(s)},\ c_1=\alpha_{s+1}^{(s)},\ \dots,\ c_{n-s}=\alpha_n^{(s)}$$

е монотонно растяща (съгласно второто условие на Лема 2) и още коефициента $c_0=\alpha_s^{(s)}$ е неотрицателен.

Наистина

$$c_0=\alpha_s^{(s)}=\alpha_n^{(s-1)}\alpha_s^{(s-1)}-\alpha_{s-1}^{(s-1)}\alpha_{n-1}^{(s-1)}\geq 0,$$

тъй като $\alpha_n^{(s-1)}\geq\alpha_{n-1}^{(s-1)}$ и $\alpha_s^{(s-1)}\geq\alpha_{s-1}^{(s-1)}$. Това следва от монотонността на редицата $\{\alpha_k^{(s)}\}$ при фиксиране s и $s\leq k\leq n$.

Тези резултати дават основание да твърдим (съгласно теоремата на Шур), че полинома $P_{s-1}(z)$ има всичките си нули в $|z|\leq 1$. За да можем да твърдим същото за полинома $P_{s-2}(z)$ и т.н. трябва да са спазени известни условия, които теоремата на Шур налага на коефициентите пред 0-вата и най-високата степен на z.

Ако разгледаме редицата от полиноми предшестващи $P_s(z)$

$$P_s(z)=\sum_{k=s}^{n}\alpha_k^{(s)}z^{k-s}$$

$$P_{s-1}(z)=\sum_{k=s-1}^{n}\alpha_k^{(s-1)}z^{k-(s-1)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_1(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(1)}z^{k-1},$$

то условията които трябва да са изпълнени са

$$0 < \alpha_s^{(s)} < \alpha_n^{(s)}$$

$$0 < \alpha_{s-1}^{(s-1)} < \alpha_n^{(s-1)}$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$0 < \alpha_1^{(1)} < \alpha_n^{(1)} .$$

Тяхната верност, обаче, следва непосредствено от монотонността на редицата $\{\alpha_k^{(s)}\}$ при $s \le k \le n$ (за всяко фиксирано s) и от неотрицателността на нейните членове.

Щом нулите на $P_1(z)$ принадлежат на $|z| \le 1$ и още $0 < \alpha_1^{(1)} < \alpha_n^{(1)}$, то и нулите на $P(z)$ принадлежат на областта $|z| \le 1$.

Нека f е реална функция от интервала $[0,1]$. Да додефинираме: $f = 0$ за $t < 0$ и $t > 1$ и да въведем означенията

$$f_0 = f_0(t) = f(t)$$

$$f_1 = f_1(t;0) = f_0(1) f_0(t) - f_0(0) f_0(1-t)$$

$$f_2 = f_2(t;\alpha) = f_1(1) f_1(t) - f_1(\alpha) f_1(1-t+\alpha)$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$f_s = f_s(t;\alpha) = f_{s-1}(1) f_{s-1}(t) - f_{s-1}(\alpha) f_{s-1}(1-t+\alpha) ,$$

където $s \in N$, α - рационално число, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$.

Ползвайки Лема 2 и означенията (5), можем да изкажем

<u>Теорема 1.</u> Нека δ е рационално число от интервала $[0, \frac{1}{2}]$; $\delta = \frac{p}{q}$. $(p,q)=1$. Ако $f>0$ е непрекъсната функция в $[0,1]$ и удовлетворява условията:

1. $f \uparrow$, $t \in [0, \delta]$, $t \in [1-\delta, 1]$

2. $f(\delta) < f(t) < f(1-\delta)$, $t \in (\delta, 1-\delta)$

3. $f_s = f_s(t; \frac{s-1}{q}) \uparrow$, когато $s = p+1$ и $t \in (\delta, 1-\delta)$,

то $f \in E$.

Доказателство. Образуваме полинома

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k , \tag{6}$$

$$n \in N'' , \quad N'' = \left\{ n ;\ n = mq ,\ m \in N ,\ \delta = \frac{p}{q} \right\}$$

Коефициентите на (6) удовлетворяват условие 1 на Лема 2. Това следва от първо и второ условие на теоремата. След $s = p+1$ кратно прилагане на споменатата вече операция на Шур (3), получаваме

$$Q_s(z) = \sum_{k=s}^{n} c_{k-s} z^{k-s} = \sum_{k=s}^{n} \alpha_k^{(s)} z^{k-s} ,$$

където $\alpha_k^{(s)}$ са числата определени от (4). Като вземем предвид, че

$$\alpha_k^{(0)} = a_k = f\left(\frac{k}{n}\right) = f_0\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\alpha_k^{(1)} = a_n a_k - a_0 a_{n-k} = f(1) f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) f\left(1 - \frac{k}{n}\right) = f_1\left(\frac{k}{n} ; 0\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

то

$$\alpha_k^{(s)} = f_s\left(\frac{k}{n}\right) = f_s\left(\frac{k}{n} ; \frac{s-1}{n}\right)$$

и следователно

$$Q_s(z)=\sum_{k=s}^{n} f_s\left(\frac{k}{n};\frac{s-1}{n}\right)z^{k-s}$$

От условие 3) на теоремата следва съществуването на число $n_0\in N$ такова, че при $n>n_0$ и $n\in N''$, коефициентите c_{k-s}, $s\leq k\leq n$ образуват растяща редица от вида (4). Прилагайки лема 2, получаваме

$$\left\{z;\ Q(z)=0\ ,\ \forall n\in N'', n>n_0\right\}\subset\left\{z;\ |z|\leq 1\right\},$$

т.е. функцията f принадлежи на класата E.

Теоремата остава вярна, ако f е прекъсната в точките δ и $1-\delta$, но тогава трябва да приемем

$$f(\delta)=f(\delta_{-0})\quad ,\quad f(1-\delta)=f(1-\delta_{+0})$$

Ако f е монотонно растяща функция в целия интервал $[0,1]$, то всички функции $f_1, f_2,\dots,f_{p+1}$ са също монотонно растящи и за тях условието 3 винаги е изпълнено, така че теорема 1 обобщава в известен смисъл теоремата на Пойа.

При $\delta=0$ изискването за монотонност на f в интервалите $[0,\delta]$ и $[1-\delta,1]$ отпада. Условията 2 и 3 приемат съответно вида

2'. $f(0)<f(t)<f(1)$

3'. $f_1=[f(1)f(t)-f(0)f(1-t)]\uparrow$.

Получаваме теорема на Божоров [27] .

Пример на функция f , за която теоремата е в сила, напр. при $\delta = \frac{1}{4}$ (и следователно $s = 2$), но която не е монотонна в $[0,1]$ е следния

$$f = \begin{cases} t+1 & , \ t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{8}{3}t^3 + 14t^2 - \frac{101}{6}t + \frac{149}{24} & , \ t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ t+4 & , \ t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

или по-общо

$$f = \begin{cases} \varphi_1 & , \ t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \psi & , \ t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ \varphi_2 & , \ t \in [\frac{3}{4}, 1] , \end{cases}$$

където

1. $0 < \varphi_1(\frac{1}{4}) < \psi(t) < \varphi_2(\frac{3}{4})$,

2. $\varphi_2 \uparrow$, $\varphi_1 \uparrow$

3. $\psi = \frac{1}{2}[\varphi_2(1)\varphi(t) + \varphi_1(0)\varphi(1-t)]$

за

$$\varphi(t) = \frac{4}{3}t^3 + 4t^2 - \frac{65}{12}t + \frac{25}{12} .$$

Не е трудно да се провери немонотонността на функцията ψ в интервала (1/4, 3/4) и това, че при така подбраната функция φ функцията f удовлетворява условие 3 на теоремата, без да удовлетворява съответното условие $3')$ от [27].

Теорема 2.

$$(f>0,\uparrow) \Rightarrow t^s[f(1-t)-f(t)]\in E\ ,\quad s\in N$$

Доказателство. Съгласно теоремата на Пойа функцията $f\in E$, т.е.

$$\left\{z;\ Q(z)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k=0\ ,\ n\in N'\right\}\subset\left\{z;\ |z|\le 1\right\}.$$

Тогава

$$\left\{z;\ z^n\bar{Q}\left(\frac{1}{z}\right)=0\ ,\ n\in N'\right\}\subset\left\{z;\ |z|\ge 1\right\}$$

Прилагаме теоремата на Илиев за полинома

$$P(z)=z^n\bar{Q}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}\right)z^k$$

и $\varepsilon=-1,\ k=0$.

Получаваме

$$R(z)=P(z)-P^*(z)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{n-k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]z^k=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$$

и още

$$\left\{z;\ R(z)=0\ ,\ n\in N'\right\}\subset\left\{z;\ |z|=1\right\}.$$

От известната теорема на Гаус-Люка ([2] стр. 110), която гласи, че ако изпъкналата област K , съдържа всичките нули на един полином $p(z)$, то тя съдържа и нулите на производния полином $p'(z)$, следва че

$$\left\{z;\ R'(z)=0\ ,\ n\in N'\right\}\subset\left\{z;\ |z|\le 1\right\}$$

И така, полиномът

$$R'(z)=\sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \quad \text{или} \quad \frac{z}{n}R'(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}a_k z^k$$

има нули само в областта $|z|\leq 1$. След s -кратно диференциране можем да твърдим, че

$$\left\{ z;\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^s a_k z^k=0,\ n\in N' \right\} \subset \left\{ z;\ |z|\leq 1 \right\},$$

т.е. функцията

$$u(t)=t^s\left[f(1-t)-f(t)\right], \qquad s\in N$$

принадлежи на класата E.

От монотонността на f в интервала $[0,1]$ следва

$$u(t)\geq 0, \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

$$u(t)\leq 0, \quad t\in\left(\frac{1}{2},1\right],$$

$$u(0)=u\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Пример. Нека

$$f(t)=e^t, \quad s=1.$$

Да означим

$$u_0=u_0(t)=f(1-t)-f(t), \qquad u=u(t)=tu_0.$$

И така

$$u=tu_0, \quad u'=u_0+tu_0', \quad u''=2u_0'+tu_0''.$$

Но

$$u_0''=u_0=(1-2t)e^{\xi}, \quad 0<t<\xi<1-t$$

$$u''=2u_0'+tu_0=-2\left(e^{1-t}+e^{t}\right)+t(1-2t)e^{\xi}$$

В интервала $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $u''<0$, т.е. функцията u е вдлъбната. От $u'' \leq (e^{1-t}+e^{t})(t^2-2t-2)<0$, следва че и в интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, функцията u е вдлъбната.

От теорема 1 и 2 могат да се формулират твърдения на чийто доказателства няма да се спираме.

<u>Следствие 1.</u> Ако f е функция удовлетворяваща условията на теорема 1, то $f \in C$, $f \in S$.

<u>Следствие 2.</u>

$$(f>0, \uparrow) \Rightarrow u \in C, \; u \in S,$$

където $u = u(t) = t^s [f(1-t) - f(t)]$, $s \in N$.

По повод на следствие 2 може да се направи следната <u>забележка</u>.

Ако f е реален полином, неотрицателен и монотонно растящ в $[0,1]$, то и функцията u ще бъде реален полином, при това с нули за които $R_e t \leq \frac{1}{2}$ и съгласно една теорема на Обрешков [1] $u \in C$, $u \in S$.

Теоремата на Обрешков гласи: Нека $f(t)$ е положителна и намаляваща функция в интервала $[0,1]$ и $h(t)$ е реален полином, нулите на който лежат в полуравнината $R_e t \leq \frac{1}{2}$. Тогава функциите

$$U(z) = \int_0^1 f(t) h(t) \cos tz \, dt,$$

$$V(z) = \int_0^1 f(t) h(t) \sin tz \, dt$$

са цели със само реални нули.

Достатъчно е да приемем $f(t)=1$, $h(t)=u(t)$, за да можем да я приложим за разглеждания по-горе случай.

С теорема 2 се установява съществуването на функции $u(t)$ (не непременно полиноми) с нули с $Re\, t \le \frac{1}{2}$, за които цитираната теорема на Обрешков остава в сила.

Следствие 2 остава в сила, ако подчиним функцията f на условието да бъде R - интегруема и принадлежаща на класата E.

Наистина, интегруемостта на u ще следва от интегруемостта на f, а от $f \in E$ ще имаме

$$\left\{ z ;\ \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}\right) z^k = 0 \ , \ n \in N' \right\} \subset \left\{ z ;\ |z| \geq 1 \right\}$$

Следвайки познатия вече метод, получаваме, че $u \in E$. Това позволява да изкажем теорема 2 в една по-силна форма.

<u>Теорема 3.</u>

$$(f \in E) \rightarrow u \in C \ , \ u \in S \ ,$$

където

$$u = t^s \left[f(1-t) - f(t) \right] \ , \ s \in N .$$

Доста широка класа от функции за които горното твърдение ще бъде в сила могат да се посочат, като имаме предвид получените досега резултати за принадлежност на класата E.

<u>2. Теорема 4.</u> Ако функцията $f(t)$ е неотрицателна, симетрична относно правата $t = \frac{1}{2}$ в интервала $(0,1)$, растяща в $(1/2, 1)$, то нулите на целите функции

$$C_f(z) = \int_0^1 f(t) \cos tz \, dt \quad , \quad S_f(z) = \int_0^1 f(t) \sin tz \, dt$$

са реални и взаимно разделящи се.

Доказателство. При доказателството ще използуваме следното твърдение на Обрешков (формулирано под № 101* в Сб. задачи и теореми по висша алгебра, София 1966):

Ако нулите на полинома $p(z)$ са по правата g, λ е комплексно число с радиус-вектор перпендикулярен на g и полиномът

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

има само нули с модул 1, то нулите на полинома

$$\sum_{k=0}^{m} a_k p(z+k\lambda)$$

лежат на права g' успоредна на g и отместена на разстояние $-m\frac{\lambda}{2}$ от g.

Нека изберем функцията $\varphi(t)>0$, ↑ в интервала $(0,1)$ и четна в интервала $(-1,1)$

За полинома

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k = \sum_{k=0}^{2n} \varphi\left(\frac{2n-2k}{2n}\right) z^k + \varphi(0) z^n$$

може да се докаже (Илиев [10]), че има нули само с модул 1.

Нека $p(z)$ е полином с нули z по имагинерната ос, т.е. $R_e z=0$ и λ е реално число.

Тогава според горното твърдение, всички нули на полинома

$$\sum_{k=0}^{2n} \varphi\left(\frac{2n-2k}{2n}\right) p(z+k\lambda) + \varphi(0) p(z)$$

лежат на правата $g' = -2n\frac{\lambda}{2} = -n\lambda$.

Да изберем $\lambda = \frac{1}{2n}$ и да положим $2n = m$. Получаваме, че нулите на полинома

$$\frac{1}{m}\left[\sum_{k=0}^{m}\varphi\left(\frac{m-2k}{m}\right)p\left(z+\frac{k}{m}\right)+\varphi(0)p(z)\right]$$

са върху правата $g' \equiv x = -\frac{1}{2}$, т.е. за всички нули имаме $R_e z = -\frac{1}{2}$.

От тук чрез граничен преход (теорема на Хурвиц [34] стр. 140) следва, че и функцията

$$\int_0^1 \varphi(1-2t)p(z+t)\,dt$$

има нулите си върху $x = -\frac{1}{2}$.

Ако изберем $p(z) = z^n$, то нулите на полиномите

$$q_n(z) = \int_0^1 \varphi(1-2t)(z+t)^n\,dt$$

и

$$z^n q_n(z) = \int_0^1 \varphi(1-2t)(1+tz)^n\,dt$$

ще имат $R_e z < 0$.

Замествайки $z \subset i\frac{z}{n}$ ще получим полинома

$$r_n(z) = \int_0^1 \varphi(1-2t)\left(1+\frac{itz}{n}\right)^n dt$$

с нули в полуравнината $J_m z > 0$.

Тогава според теоремата на Билер-Ермит ([2] стр.11) нулите на полиномите

$$\frac{1}{2}\left\{r_n(z)+\overline{r_n}(x)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(1-2t)\left\{\left(1+\frac{itz}{n}\right)^n+\left(1-\frac{itz}{n}\right)^n\right\}dt$$

и

$$\frac{1}{2i}\left\{r_n(z)-\overline{r_n}(z)\right\} = \frac{1}{2i}\int_0^1 \varphi(1-2t)\left\{\left(1+\frac{itz}{n}\right)^n-\left(1-\frac{itz}{n}\right)^n\right\}dt$$

са реални и взаимно разделящи се.

От тук чрез граничен преход $n \to \infty$, получаваме че $C_\varphi(z)$ и $S_\varphi(z)$ имат реални, взаимно разделящи се нули.

От направените уговорки за функцията $\varphi(t)$ е ясно, че $\varphi(1-2t)$ е симетрична функция спрямо правата $t=\frac{1}{2}$ и намалява- ща в интервала $(0,\frac{1}{2})$. Достатъчно е да положим(

$$f(t)=\varphi(1-2t)$$

з а да следва твърдението на теоремата.

Забележка 1. Теоремата може да се изкаже още така: Ако f е функция от интервала $(0,1)$, удовлетворявала условията: $f>0$; $f\downarrow$ при $t\in(0,\frac{1}{2})$, $f(t)=f(1-t)$, то $C_f(z)$ и $S_f(z)$ имат само реални, взаимно разделящи се нули.

Забележка 2. Построяването на полином с нули върху окръжността $|z|=1$ може да се извърши и като се използува следното твърдение на Илиев [16] :

Ако положителните числа

$$a_k \, , \quad k=0,1,\dots,n$$

удовлетворяват условията:

1. $a_k=a_{n-k} \quad , \quad k=0,1,\dots,n$

2. (A_n) ,

то нулите на полинома

$$a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$$

са прости с модул 1.

Тук условието (A_n) е следното: при $n = 2m-1$

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \dots \geqslant a_{m-1} ,$$

при $n = 2m$

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \dots \geqslant a_m .$$

При направените предпсложения за функцията $\varphi(t)$, не е трудно да се установи, че функцията

$$f(t) = \varphi(1-2t)$$

при $a_k = f(\frac{k}{n})$ удовлетворява горните изисквания, сттдето веднага следва, че нулите на полинсма

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi(1-2\frac{k}{n}) z^k = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) z^k$$

имат модул 1.

Едно непосредствено прилагане на теоремата на Шур позволява от всяка функция от класата E да се получи нова функция от същата класа.

<u>Теорема 5.</u> Функцията $f(t)$, за която $f(1) \neq 0$, принадлежи на класата E, тогава и само тогава, когато

$$|f(0)| \leq |f(1)|$$

и функцията

$$f_1(t) = f(1) f(t) - f(0) f(1-t)$$

също принадлежи на E.

Доказателство. Прилагаме теоремата на Шур за полинсма

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k , \quad a_n \neq 0, \ n \in N'$$

Нулите на този полином са в кръга $|z|\le 1$, тъй като $f\in E$, а според Шур необходимото и достатъчно условие този полином да има всичките си нули в областта $|z|\le 1$ е да бъде изпълнено $|a_0|\le|a_n|$, т.е. $|f(0)|\le|f(1)|$ и полиномът

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_n a_k - a_0 a_{n-k})z^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(1)f(\tfrac{k}{n})-f(0)f(1-\tfrac{k}{n})\right]z^k=\sum_{k=0}^{n-1}f_1(\tfrac{k}{n})z^k$$

да има нулите си в $|z|\le 1$, с други думи $f_1\in E$

Достатъчността на твърдението се доказва по същия начин.

Нека се спрем на следния прост пример. В [28] Русев изказва (в малко по-друга форма) твърдението:

Ако $\varphi(t)\in E$, $\varphi(1)\ne 0$ и λ е реално число, $|\lambda|\ge 2$, то

$$f(t)=\varphi(t)(1-\lambda t)\in E$$

Нека $\lambda=3$, $\varphi(t)=1+3t$, тогава функцията $f(t)=1-9t^2\in E$. За нея $|f(0)|\le|f(1)|$ и $f_1(t)=9t(9t-2)$ принадлежи също на класата E . Функцията f_1 е немонотонна в интервала $[0,1]$.

3. Представлява интерес и намирането на необходими условия, които трябва да се удовлетворяват от интегруемата функция f в интервала $[0,1]$, ако $f\in E$.

Тези необходими условия биха ни дали една представа за приложимостта на метода на вариация на аргумента.

В [43] сме доказали следната

<u>Теорема 6.</u> Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и интегруема в $[0,1]$ и $f(t)\ne 0$ в някакъв интервал $[1-\eta,\eta]$, където $\eta\in(0,1)$. Тогава, ако полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})z^k \quad , \quad n\in N'$$

имат нулите си в единичния кръг, то функцията $f(t)$ удовлетворява условието

$$\int_0^{\delta} f^2(t)\,dt \leq \int_{1-\delta}^{1} f^2(t)\,dt\,, \tag{8}$$

където δ е произволно число от интервала $[0,\frac{1}{2}]$.

Ако функцията е непрекъсната в точките 0 и 1, то ще удовлетворява още неравенството

$$|f(0)| \leq |f(1)|$$

При доказателството е приложена теорема на Шур ([2] стр. 197) ползваща Ермитови форми.

Тук ще покажем, че ако функцията $f(t)$, е полином от първа степен с реални коефициенти, условието (8) е достатъчно, за да твърдим, че нулите на (7) лежат в $|z|<1$, т.е. $f\in E$.

Действително, нека $f(t)=t-\alpha$. Условието (8) може да се запише още така

$$\varphi(\delta)=\int_0^{\delta}[f^2(1-t)-f^2(t)]\,dt \geqslant 0$$

за всяко $\delta\in[0,\frac{1}{2}]$. От тук, като заместим получаваме

$$\varphi(\delta)=(1-2\alpha)(1-\delta)\geqslant 0$$

и тъй като $1-\delta>0$, то $1-2\alpha\geqslant 0$ или $\alpha\leq\frac{1}{2}$. Това е достатъчно, за да твърдим (според теорема на Обрешков [1]), че полинома $f(t)=t-\alpha$ принадлежи на класата E.

Да разгледаме полинома от втора степен

$$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2+pt+q\,,$$

p, q - реални числа и да предположим, че $f(t)$ не мени знака си в интервала $(\frac{1}{2}, 1]$. За разликата $f^2(1-t)-f^2(t)$ получаваме

$$\Delta(t) = f^2(1-t) - f^2(t)$$

$$= [t^2-(2+p)t+(1+p+q)]^2 - (t^2+pt+q)^2$$

$$= (1+p)(1+p+2q) - 2(1+p)(2+p+2q)t + 6(1+p)t^2 - 4(1+p)t^3$$

За $\varphi(\delta)$ ще имаме

$$\varphi(\delta) = (1+p)\delta[(1+p+2q)-(2+p+2q)\delta + 2\delta^2 - \delta^3]$$

$$= (1+p)\delta\,\psi(\delta),$$

където означаваме

$$\psi(\delta) = (1+p+2q) - (2+p+2q)\delta + 2\delta^2 - \delta^3$$

Нека $\varphi(\delta) \geq 0$ за всяко $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$. Това означава, че $p+1$ и $\psi(\delta)$ за всяко $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ имат еднакви знаци. Имаме

а) $p+1 \geq 0$, $\psi(\delta) \geq 0$

От $p+1 \geq 0$ следва $\alpha+\beta \leq 1$.

От $\psi(\delta) \geq 0$ при $\delta = 0$ получаваме неравенството

$$\psi(0) = p+2q+1 \geq 0 \qquad \text{, т.е.}$$

$$|q| \leq \frac{p+1}{2} = \frac{1-(\alpha+\beta)}{2} \leq \frac{1}{2}$$

или $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}$.

Тъй като $f(t)$ е полином с реални кофициенти, ако $\alpha = x+iy$ от получените неравенства ще следва

$$\alpha+\beta = 2x \leq 1 \quad \text{или} \quad Re\,\alpha = Re\,\beta \leq \frac{1}{2},$$

което е достатъчно, за да твърдим, че $f(t) \in E$ (нещо повече $|\alpha\beta| = x^2+y^2 = |\alpha|^2 = |\beta|^2 \leq \frac{1}{2}$).

б) Нека $p+1\leq 0$ и $\psi(\delta)\leq 0$. От второто условие при $\delta=0$ получаваме

$$p+2q+1\leq 0 \tag{9}$$

Едновремената верност на това неравенство и на неравенството

$$p+1\leq 0 \tag{10}$$

е невъзможна. От (10) получаваме

$$R_e\alpha = x \geq \frac{1}{2},$$

а (9) води до

$$y^2 \leq -\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)<0$$

при $x\geq\frac{1}{2}$.

И така, за полиномите от първа и втора степен (8) се явява необходимо и достатъчно условие, за принадлежност на класата E.

С други думи, в сила е

Теорема 7. Ако $f(t)$ е полином от първа степен или полином от втора степен, който не мени знака си в интервала $\left(1/2,\ 1\right]$ за реални стойности на t, необходимото и достатъчно условие $f(t)$ да принадлежи на E, е да бъде изпълнено условието

$$\int_0^\delta f^2(t)\,dt \leq \int_{1-\delta}^1 f^2(t)\,dt$$

за произволно δ от интервала $[0,\frac{1}{2}]$.

Остава открит въпроса за достатъчността на това условие за принадлежност на класата E на полиноми от по-висок ред и за произволни функции, за които са налице условията на теорема 6.

Прилагайки теорема 6 може да се посочи широка класа от полиноми, които приемат неотрицателни стойности в интервала $[0,\frac{1}{2}]$

Теорема 8. Нека

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

е полином от n-та степен. Ако $f(t) \in E$, функцията

$$\varphi(t) = f_1(1) - f_1(t) - f_1(1-t),$$

където

$$f_1(t) = \sum_{k=0}^{2n} c_k t^{2n-k+1},$$

$$c_k = \frac{1}{2n-k+1} \sum_{s=0}^{2n} a_s a_{k-s}, \qquad 0 \le k \le 2n$$

приема неотрицателни стойности в $[0, \frac{1}{2}]$.

Доказателството следва непосредствено от теорема 7.

Коефициентите c_k след $n+1$-вия се получават по горната формула, като приемем всички a_k, за които $n+1 \le k \le 2n$ равни на нули.

Ч А С Т II

§ 1. Ще изследваме такива редици от множители, които запазват определени свойства на нулите на даден полином в една кръгова област. Като се има предвид обаче, че каква да е кръгова област винаги може с подходяща трансформация да се сведе към произволна затворена област от равнината на комплексната променлива z, то въпросът за определянето на редици от множители които например запазват броя на нулите в областта $|z| \le 1$, по същество не е различен от въпроса за запазване броя на нулите наляво или надясно от имагинерната ос или по нея.

Още Лагер е посочил редици от числа.

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots \qquad (\gamma)$$

със следните забележителни свойства: ако

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \qquad (1)$$

е произволно алгебрично уравнение със само реални корени, то и корените на уравнението

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 z + \cdots + a_n\gamma_n z^n = 0 \qquad (2)$$

са всички реални.

Редиците (γ) с това свойство са известни като редици от множители от първи вид. Съответно, ако (1) е уравнение само с реални корени с еднакъв знак, а (2) е само с реални корени, редицата (γ) е от втори вид.

Пойа и Шур [24] са намерили редица прости критерии (алгебрични и трансцендентни) за γ - редиците от двата вида.

По-късно с γ - редици и други специални редици са се занимавали Обрешков [1] , [3] , Илиев [10] , [21] и др.

Така например в [1] (теорема 23) Обрешков изследва редици със свойството: за всеки полином $f(z)$, нулите на който лежат в една лента D (D- лента от равнината на комплексните числа z , ограничена с две успоредни прави, сключващи с реалната ос ъгъл φ), полиномът

$$\lambda_0 f(z) + \lambda_1 f'(z) + \lambda_2 f''(z) + \dots$$

да има само нули в D.

В [10] съответно [4] , [6] Илиев и Обрешков по различен път са достигнали до редици $\{\lambda_k\}_0^\infty$, за които от

$$\left\{z;\ \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0\right\} \subset \{z;\ \Im_m z \neq 0\}$$

да следва

$$\left\{z;\ \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k z^k = 0\right\} \subset \{z;\ \Im_m z \neq 0\}$$

Тези редици, които Илиев успешно използува при решаването на проблема на Лагер, той нарече λ - редици.

Връзката между редиците λ и γ се оказа съвсем проста.

Именно ако $\{\gamma_k\}$, $k=0,1,\dots$; $\gamma_k \neq 0$ е γ - редица (от първи вид), то $\left\{\frac{1}{\gamma_k}\right\}$ е λ - редица.

В [14] , [21] от Илиев бяха въведени т.н. γ^φ- редици със специалното свойство; за всеки полином $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ със само отрицателни нули, композираният полином $\sum_{k=0}^{n} a_k \gamma_k z^k$ да има нулите си в областта A_1^φ.

A_1^φ означава (изпъкналата и едносвързана) затворена област от пълната комплексна равнина, заградена от два лъча, които излизат от началото, сключват ъгъл 2φ и имат съответно амплитуди $\pi-\varphi$ и $-\pi+\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

При $\varphi=0$, получаваме Лагеровите γ - редици от втори вид.

Така, че задачата, която си поставяме всъщност не е нова, но решението й в този аспект позволява да получим по чисто алгебричен (и сравнително елементарен) път редица станали вече класически резултати, както и някои нови.

От друга страна, което е и по-важно за нас добиваме възможност за една по-пълна характеристика на функциите от класата E (съответно C и S), с които функции се занимавахме в първата част.

Наред с означенията и определенията, които ползувахме в част I ще въведем още следните:

Под $\alpha=\{\alpha_k\}$ или още по-кратко под символа $\{\alpha_k\}$ ще разбираме редицата

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Ако

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

с $(\alpha_k)p(z)$ или $\alpha p(z)$ ще означаваме композираният полином, получен от полинома $p(z)$ и редицата $\{\alpha_k\}$, т.е.

$$\alpha p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_k z^k .$$

Тогава резултатът от последователното композиране на $p(z)$ с редиците $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ е

$$\beta\alpha p(z)=\beta[\alpha p(z)]$$

Наред с

$$„\left\{z\,;\,p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k=0\right\}\subset\left\{z\,;\,|z|\le 1\right\}$$

често ще пишем

$$„\left(p(z)\quad,\ |z|\le 1\right)"$$

което ще има същия смисъл, т.е. означава че всички нули на полинома $p(z)$ принадлежат от единичния кръг .

С Σ ще означаваме класата на всички полиноми

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

с нули в кръга $|z|\le 1$.

С Ω ще означаваме класата на всички полиноми

$$q(z)=\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k$$

с нули в $|z|\le 1$.

Разделението на всички полиноми с нули в $|z|\le 1$ на класи Σ и Ω е целесъобразно, поради въведените в § 1 ч. I класи от функции E и G.

Ако $f\in E$ под означението $p(f)$ ще разбираме полинома

$$p(f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k ,$$

съответно, ако $f\in G$

$$p(f)=\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

От определенията на § 1, ч. I непосредствено следва

$$f \in E \Leftrightarrow p(f) \in \Sigma$$

$$f \in G \Leftrightarrow p(f) \in \Omega$$

Твърде често ще ползуваме едно следствие на една теорема на Грейс ([2] , стр. 140), носещо името на Сегьо ([2] , стр. 143), което ще споменем тук без доказателство и ще бележим с Т (С).

<u>Теорема на Сегьо.</u> Нека

$$A(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n z^n = 0$$

$$B(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \binom{n}{2} b_2 z^2 + \cdots + \binom{n}{n} b_n z^n = 0$$

са дадени уравнения с произволни коефициенти, като корените на $A(z)=0$ принадлежат на една кръгова област K . Да означим с $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ корените на уравнението $B(z)=0$. Тогава всеки корен ξ на композираното уравнение

$$C(z) = a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 z + \binom{n}{2} a_2 b_2 z^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n b_n z^n = 0$$

има формата $\xi = -k\beta_\mu$, където μ е едно от числата 1, 2 , ... , n а k е число, съответно на точка от областта K (под кръгова област разбираме кой да е кръг с ограничаващата го окръжност или външната област на една окръжност, като към тази област е причислена и самата окръжност или една полуравнина заедно с ограничаващата я права).

В специалния случай, ако нулите на $A(z)$ са в кръга $|z| \leq r_1$, а тези на $B(z)$ са в кръга $|z| \leq r_2$, нулите на $C(z)$ лежат в кръга $|z| \leq r_1 r_2$. Същото твърдение остава в сила, ако заместим вътрешността на разглежданите кръгове с външните им кръгови области. Ако нулите на $A(z)$ са по окръжността $|z|=r_1$, а тези на $B(z)$ по окръжността $|z|=r_2$, то нулите на $C(z)$ лежат по окръжността $|z|=r_1 r_2$.

§ 2. 1. Като използуваме $T(C)$ вече не е трудно да се докаже

Теорема 1. $G \subset E$.

Наистина, нека $f \in G$ т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k , \quad |z| \leq 1 \right).$$

От друга страна

$$\left(\sum_{k=0}^{n} z^k , \qquad |z|=1 \right)$$

От $T(C)$ следва

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k , \quad |z| \leq 1 \right),$$

т.е. $f \in E$.

Да означим с $e_0(z)$ полинома

$$e_0(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n .$$

Този полином има свойството, че ако приложим $T(C)$ за него и кой да е полином от Ω, полученият (композираният) полином принадлежи на E.

<u>Определение 1.</u> Редицата от реални числа

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$$

ще наречем μ - редица, ако притежава свойството: за всеки полином $p(z)$ с нули в областта $|z| \leq 1$, композираният полином $\mu p(z)$ да има нулите си в същата област.

Например редицата

$$1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots \quad , \quad |q| \geq 1$$

е μ - редица.

Нека $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ е произволен полином от Σ_1 (при Ω разсъжденията не се изменят). От

$$\left((1 + qz)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k z^k \quad , \quad |z| \leq 1 \right)$$

и $T(C)$ следва, че и

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q^k z^k \quad , |z| \leq 1 \right),$$

т.е. $\{q^k\}$ е μ - редица при $|q| \geq 1$.

Забележка. С $\mathcal{M}$ ще означаваме множеството на всички μ-редици. Вместо „$\{\mu_k\}$ е μ -редица" ще пишем „$\{\mu_k\} \in \mathcal{M}$".

Тогава

$$\mu = \{\mu_k\} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \left[\{\forall p(z); (p(z), |z| \leq 1)\} \Rightarrow (\mu p(z), |z| \leq 1) \right]$$

Ще установим някои основни свойства на μ -редиците

$$1) \left(\{\mu'_k\} \in \mathcal{M}, \{\mu''_k\} \in \mathcal{M} \right) \Rightarrow \{\mu'_k \mu''_k\} \in \mathcal{M}$$

Следва лесно от определението на μ - редица.

2) $\{\mu_k\} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k z^k, \ |z| \le 1\right)$

$k = 0, 1, \ldots \ ; \ n = 1, 2, \ldots$

Доказателство:

а) Нека $\{\mu_k\} \in \mathcal{M}$. От

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k, \ |z| \le 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k z^k, \ |z| \le 1\right)$$

$n = 1, 2, \ldots$

б) Нека

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k z^k, \ |z| \le 1\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

и $p(z)$ е произволен полином от Σ (съответно Ω).
От $T(C)$ следва, че

$$\mu p(z) \in \Sigma \qquad \text{(съответно } \Omega\text{)}$$

или $\{\mu_k\} \in \mathcal{M}$.

Това свойство ще ни позволи да преценяваме дали дадена редица е μ-редица или не.

3)

$$\left(\{\mu_k^{(n)}\} \in \mathcal{M}, \ \lim_{n \to \infty} \mu_k^{(n)} = \mu_k\right) \Rightarrow \{\mu_k\} \in \mathcal{M}$$

Доказателство. Нека $p_m(z)$ е произволен полином от степен m с нули в кръговата област $|z| \le 1$. Тогава

$$\left((\mu_k^{(n)}) p_m(z), \ |z| \le 1\right).$$

Ако извършим граничен преход $n \to \infty$, получаваме

$$\left((\mu_k) p_m(z), \ |z| \le 1\right)$$

т.е.

$$\{\mu_k\} \in \mathcal{M}.$$

Определение 2. Една крайна редица от числа

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$$

ще наричаме „μ - редица относно степен n", ако притежава свойството: за всеки полином $p(z)$ от степен $\le n$ с нули в $|z|\le 1$ композираният полином $\mu p(z)$ да има нулите си също в $|z|\le 1$.

Множеството на μ - редиците относно степен n ще бележим с $\mathcal{M}_n$; $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$.

Основните свойства на μ - редиците остават в сила и за μ -редиците относно степен n. Така критерият за μ -редица приема вида:

2') Необходимото и достатъчно условие редицата $\{\mu_k\}$ да е μ -редица относно степен m е нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k z^k$$

за всяко $n \le m$ да принадлежат на областта $|z|\le 1$.

<u>Теорема 2.</u>

$$\left(\{b_k\}\uparrow,\ b_k \geq 0,\ k=0,1,\ldots\right) \rightarrow \left\{\frac{b_k}{\binom{n}{k}}\right\}_0^n \in \mathcal{M}_n\ ,\ \forall n \in N$$

Доказателство. От теоремата на Какея и Енестрьом следва

$$\left(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k\ ,\ |z|\le 1\right)\ ,\quad \forall n \in N.$$

Нека $p(z)$ е произволен полином от Σ (респ Ω), тогава по $T(C)$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{b_k}{\binom{n}{k}} z^k\ ,\ |z|\le 1\right).$$

Следователно $\left\{\frac{b_k}{\binom{n}{k}}\right\}_0^n \in \mathcal{M}_n,\ \forall n \in N.$

Нека $\{a_k\}\uparrow,\ a_k \geq 0,\ k=0,1,\ldots$ Монотонно ще расте и редицата

$$\left\{\frac{a_k}{(n-k)!}\right\}_0^n, \quad \forall n\in N$$

От Т2 ще следва че редицата

$$\left\{\frac{a_k}{(n-k)!\binom{n}{k}}\right\}_0^n = \left\{\frac{k!\,a_k}{n!}\right\}_0^n \in \mathcal{M}_n \quad , \ \forall n\in N$$

или

$$\{k!\,a_k\}\in\mathcal{M}.$$

Този резултат може да се получи и като се ползуват свойствата на μ -редици.

От

$$\left(\{n^k\}\in\mathcal{M},\ k=0,1,\ldots;\left\{\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right\}_0^n\in\mathcal{M}_n\subset\mathcal{M}\right)\Rightarrow\left\{\frac{n^k a_k}{\binom{n}{k}}\right\}\in\mathcal{M}_n$$

Да положим

$$\mu_k^{(n)} = \frac{n^k a_k}{\binom{n}{k}} = \frac{k!\,a_k}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}$$

При $n\to\infty$

$$\lim \mu_k^{(n)} = k!\,a_k$$

И тъй като $\{\mu_k^{(n)}\}\in\mathcal{M}$, то (съгласно св. 3) и

$$\{k!\,a_k\}_0^n\in\mathcal{M}$$

Ако с редицата $\{k!\,a_k\}_0^n$ композираме произволен полином от Σ от степен $m\leq n$ т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k z^k,\ |z|\leq 1\right),\ m\leq n$$

получаваме

$$\left(\sum_{k=0}^{m} k!\, a_k b_k z^k \quad, \ |z| \leq 1 \right).$$

С други думи стигаме до следното твърдение

Теорема 3. Ако

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

$$q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m \quad, \ m \leq n$$

са два полинома за които, кофициентите на първия образуват монотонно растяща редица от нестрицателни числа, а нулите на втория принадлежат на областта $|z| \leq 1$, то полиномът

$$r(z) = a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 z + 2!\, a_2 b_2 z^2 + \dots + m!\, a_m b_m z^m$$

има също всичките си нули в $|z| \leq 1$.

Този резултат в известен смисъл разширява съответната теорема на Шур [37].

Теорема 4. Ако $\varphi(t)$ е полином, чийто нули имат $R_e t \leq \frac{1}{2}$, то

$$\left\{ \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\}_0^n \in \mathcal{M}_n$$

Доказателство. От Божоров в [26] е доказано

$$\left(\{ t \,;\, \varphi(t) = 0 \} \subset \{ t \,;\, R_e t \leq \tfrac{1}{2} \} \right) \Rightarrow \varphi(t) \in G ,$$

т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k \quad, \ |z| \leq 1 \right)$$

Критерият за μ-редици (св. 2') ни гарантира, че

$$\left\{ \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\}_0^n \in \mathcal{M}_n$$

От тук веднага следва: ако $\varphi(t)$ е полином от степен n, чийто нули имат $R_e t \le \frac{1}{2}$ и

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \quad , \; m \le n$$

е произволен полином от $\sum$, то

$$\left(\sum_{k=0} a_k \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k \;, |z| \le 1 \right) \qquad (*)$$

т.е. получаваме известната теорема на Обрешков цитирана в ч.I, § 2.

<u>Теорема 5.</u> Ако $\varphi(t)$ е полином за който

$$\{t;\ \varphi(t)=0\} \subset \{t;\ R_e t \le \tfrac{1}{2}\}$$

и $f(t) > 0$ е мнотонно растяща функция в (0,1), то

а) $f(t)\varphi(t) \in E$;

б) $\varphi(t)[f(1-t) + \varepsilon f(t)] \in E$, $\varepsilon = \pm 1$.

Доказателство на а) следва непосредствено от твърдението (*)

Действително, щом $f > 0$, $\uparrow$, то

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k \;, |z| \le 1 \right)$$

за всяко $n \in N$. От условията за функцията $\varphi(t)$, следва че

$$\left\{ \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\}_0^n \in \mathcal{M}_n ,$$

така че

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k \;, |z| \le 1 \right)$$

и следователно функцията $f\varphi$ е от класата E .

Доказателството на б) следва от една теорема на Шур според която

$$\left(\{b_k\}\uparrow,\ b_k \geq 0,\ k=0,1,\dots\right) \Longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n}(b_{n-k}+\varepsilon b_k)z^k,\ |z|=1\right)$$

Достатъчно е да положим

$$b_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

и да композираме полинома

$$\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(1-\frac{k}{n}\right)+\varepsilon f\left(\frac{k}{n}\right)\right]z^k$$

с редицата $\left\{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right\}_0^n$, за да получим твърдението б).

Полученият резултат в т. б) на теорема 5 е по-общ от този получен в ч. I, § 2, където с други средства доказахме, че функцията

$$t^s\left[f(1-t)-f(t)\right]\in E \quad , \quad s\in N.$$

Ако $\{\alpha_k\}$ е абсолютно монотонна редица в смисъл на Фейер [39] , известно е че полиномите

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}z^k$$

имат нули само с модул 1 (Илиев [13] , [16]).

Това позволява да изкажем направо твърдения, които са непосредствени следствия от доказаните по-горе свойства на μ-редиците (в частност μ-редиците от степен n).

1. Ако $\{\alpha_k\}$ е абсолютно монотонна редица, то редиците

$$\left\{\frac{\alpha_k\alpha_{n-k}}{\binom{n}{k}}\right\}_0^n \in M_n .$$

2. Ако $\{\alpha_k\}$ е абсолютно монотонна редица и $\varphi(t)$ е полином, чийто нули имат реална част $R_e t \leq \frac{1}{2}$,

то

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_k \alpha_{n-k} z^k \quad , |z| \leq 1 \right)$$

В ч. I, § 2 изказахме едно твърдение (доказано от Илиев в [13]):(ако положителните числа a_k, $k=0,1,\dots$ удовлетворяват условията

$$a_n = a_{n-k} \qquad , \qquad k=0,1,\dots,n$$

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{m-1} \qquad , \qquad n=2m-1$$

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_m \qquad , \qquad n=2m$$

то нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ са прости с модул 1.

С помощта натова твърдение и 2 може да се докаже

<u>Теорема 6.</u> Ако f и φ са функции удовлетворяващи следните условия в интервала $(0,1)$

1. f е полином за който

$$\{t;\ f(t)=0\} \subset \{t;\ R_e t \leq \tfrac{1}{2}\}$$

2. $\varphi > 0$, $\varphi(t) = \varphi(1-t)$, $\varphi \uparrow$ за $t \in (\frac{1}{2}, 1)$,

то функцията

$$u(t) = f(t)\varphi(t) \in E \ .$$

Доказателство. Ако положим

$$a_k = \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \qquad , \qquad k=0,1,\dots,n$$

за коефициентите на полинома

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

ще имаме

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\varphi\left(1-\frac{k}{n}\right) \quad , \quad k=0,1,\ldots,n$$

$$\varphi(0)\geq\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\geq\cdots\geq\varphi\left(\frac{m-1}{n}\right) \quad , \quad n=2m-1$$

$$\varphi(0)\geq\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\geq\cdots\geq\varphi\left(\frac{m}{n}\right) \quad , \quad n=2m$$

които условия следват от симетричността на φ спрямо правата $t=\frac{1}{2}$ и монотонното й растене в $(\frac{1}{2},1)$.

С това е установено

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)z^k \; , \; |z|=1\right)$$

Като положим

$$b_k=f\left(\frac{k}{n}\right) \quad , \quad k=0,1,\ldots,n$$

получаваме

$$\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}_0^n\in\mathcal{M}_n ,$$

откъдето композирайки ще имаме

$$\left(\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi\left(\frac{k}{n}\right)z^k \; , \; |z|\leq 1\right),$$

т.е. $f\varphi\in E$.

2. Ако f е функция принадлежаща на класата G (определена в ч. I, § 1), то веднага следва

$$f\in G \leftrightarrow \left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}_0^n\in\mathcal{M}_n \quad , \quad \forall n\in N .$$

Функциите "произвеждащи" μ-редици относно степен n

ще наричаме μ - функции. Ако f е μ -функция ще бележим този факт с f_μ . За сега знаем само, че

$$f \in G \Leftrightarrow f_\mu .$$

За μ - функциите имаме

$$f_\mu \cdot \varphi_\mu = (f\varphi)_\mu$$

Следва от свойство 1 на μ - редици.

Ползвайки въведената терминология лесно се доказват твърденията

Теорема 7. $(f \in G, \varphi \in G) \rightarrow f\varphi \in G.$

Доказателство:

$$f \in G \rightarrow f_\mu \quad , \quad \varphi \in G \rightarrow \varphi_\mu .$$

$$f_\mu \cdot \varphi_\mu = (f\varphi)_\mu \rightarrow f\varphi \in G$$

Теорема 8. $(f \in E, \varphi \in G) \rightarrow f\varphi \in E$

Доказателство: $f \in E \rightarrow p(f) \in \Sigma, \varphi \in G \rightarrow \varphi_\mu ,$

тогава

$$(\varphi_\mu) p(f) \in \Sigma ,$$

т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k \quad , \quad |z| \leq 1 \right)$$

или $f\varphi \in E$.

Забележка. Подобни твърдения отнасящи се до функции от класите G и E са установени от Божоров в [26] със други средства.

Теорема 9. μ - функции от непрекъснати функции образуват мултипликативна полугрупа в G .

Доказателство. От теорема 7 следва

$$(\varphi_1 \in G\ ,\ \varphi_2 \in G) \Rightarrow \varphi_1\varphi_2 \in G$$

Ще покажем, че асоциативния закон е в сила. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ са функции от G . Тогава те са μ-функции и можем да пишем

$$(\varphi_{1\mu} \cdot \varphi_{2\mu})\varphi_{3\mu} = (\varphi_1\varphi_2)_\mu \cdot \varphi_{3\mu} = \left[(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3\right]_\mu \Rightarrow (\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \Psi \in G$$

От

$$\Psi \in G \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Psi\left(\frac{k}{n}\right) z^k\ ,\quad |z| \leq 1 \right),$$

където

$$\Psi\left(\frac{k}{n}\right) = \left[\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right]\varphi_3\left(\frac{k}{n}\right) = \varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_3\left(\frac{k}{n}\right)$$

Образуваме

$$\varphi_{1\mu}(\varphi_{2\mu}\varphi_{3\mu}) = \varphi_{1\mu}(\varphi_2\varphi_3)_\mu = \left[\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)\right]_\mu \Rightarrow \varphi_1(\varphi_2\varphi_3) = \Theta \in G,$$

т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Theta\left(\frac{k}{n}\right) z^k = 0\ ,\ |z| \leq 1 \right),$$

където

$$\Theta\left(\frac{k}{n}\right) = \varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)\left[\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_3\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_3\left(\frac{k}{n}\right).$$

Следователно в точките $t = \frac{k}{n}$ имаме

$$\Psi\left(\frac{k}{n}\right) = \Theta\left(\frac{k}{n}\right)$$

Тъй като n може да се направи произволно голямо и Ψ и Θ са непрекъснати функции, то можем да твърдим

$$(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$$

Установените свойства на μ -функциите дават възможност за прилагане на алгебрични операции за получаване на нови функции, принадлежащи на класата $G\subset E$, а оттам и на класите C и S.

§ 3.1. До резултатите от предния параграф, както и до по-общи такива може да се стигне следвайки следните разсъждения.

Нека

$$\Omega=\{a,b,c,\dots\}$$

е множеството от полиноми от вида

$$\left(a=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k z^k\ ,\ |z|\leq 1\right),$$

така както го определихме в § 2 на тази част. В Ω да дефинираме една мултипликативна операция $-\times$ (която ще наречем операция на Сегьо) по следния начин

$$a\times b=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_k z^k$$

Спрямо така въведената операция, Ω е мултипликативна абелова полугрупа с единица e;

$$e=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$$

Имаме

A_1. $a,b\in\Omega\rightarrow a\times b=c\in\Omega$ (теорема на Сегьо)

A_2. $a\times b=b\times a$

A_3. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c),\quad a,b,c\in\Omega$

A_4. $\exists e\in\Omega\ ,\quad a\times e=a$

Тези твърдения следват непосредствено от терремата на

Сегьо.

Нека

$$\Sigma_1 = \{a_0, b_0, c_0, \dots\}$$

е множество от полиноми от вида

$$\left(a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ |z| \leq 1 \right)$$

Не е трудно да се провери, че по отношение на операцията на Сегьо, както Σ_1, така и $\Sigma_1 \cup \Omega$ са полугрупи с единица e.

Нека определим още следната операция в Σ – •

$$a_0 \cdot b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k,$$

която ще наричаме операция на Мало́.

Лесно се проверява, че

$$a_0 = a_0 \times e = a \times e_0 \qquad (1)$$

$$a_0 \cdot b_0 = a \times b_0 = a_0 \times b \qquad (2)$$

Връзката (1) ние забелязахме още в § 1 на тази част. Посредством нея се установява едно съответствие между елементите на съвкупностите Ω и Σ_1. На всеки елемент $a \in \Omega$ се съпоставя точно определен елемент a_0 :

$$a_0 = a \times e_0$$

<u>Теорема 10.</u> Ако $a, b, \dots$ са елементи на класата Ω, то класата Σ_1 от съответни елементи $a_0, b_0, \dots$ е мултипликативна абелева полугрупа с единица e_0 по отношение операцията на Мало́.

Доказателство:

$$B_1. \quad a_0, b_0 \in \Sigma_1 \Rightarrow a_0 \cdot b_0 = c_0 \in \Sigma_1$$

$$a_0 \cdot b_0 = a \times b_0 = a \times (b \times e_0) = (a \times b) \times e_0 = c \times e_0 = c_0 \in \Sigma_1 .$$

$$B_2. \quad a_0, b_0, c_0 \in \Sigma_1 \Rightarrow (a_0 \cdot b_0) \cdot c_0 = a_0 \cdot (b_0 \cdot c_0)$$

$$(a_0 \cdot b_0) \cdot c_0 = (a_0 \cdot b_0) \times c = (a \times b_0) \times c = a \times (b_0 \times c) = a \times (b \times c_0)$$

$$a_0 \cdot (b_0 \cdot c_0) = a \times (b_0 \cdot c_0) = a \times (b \times c_0) = a \times p_0 = q_0 \in \Sigma_1$$

B_3. $a_0 \cdot b_0 = b_0 \cdot a_0$

B_4. $a_0 \cdot e_0 = a_0 \times e = a_0 \quad , \quad e_0 \in \Sigma_1$

Ако $\alpha = \{\alpha_k\}$ е редица от реални числа, то за композираните полиноми от Ω и Σ_1 с α ще имаме

C_1. $a \times (\alpha b) = \alpha (a \times b)$

C_2. $a_0 \cdot (\alpha b_0) = \alpha (a_0 \cdot b_0)$

C_3. $a \times (\alpha b_0) = \alpha (a \times b_0) = \alpha (a_0 \cdot b_0)$

От казаното дотук могат да се направят някои изводи. Така например твърдението B_1 е един аналог на теоремата на Мало́ [87] , който може да се изкаже още така

Теорема 11.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k , |z| \le 1 ; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k z^k , |z| \le 1 \right) \to \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k \quad , |z| \le 1 \right)$$

Доказателство. Означаваме

$$a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k \quad , \quad b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k z^k$$

От

$$a, b \in \Omega \quad \to \quad a_0, b_0 \in \Sigma_1$$

А от тук и B_1 следва

$$a_0 \cdot b_0 \in \Sigma_1 ,$$

т.е. $$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k \quad , |z| \le 1 \right).$$

Още веднаж можем да получим резултатите от т.7, 8 на § 2, в следната

Теорема 12. Умножението на функциите от класите G и E може да се извърши по таблицата

$\varphi \backslash f$	G	E
G	G	E
E	E	$-$

Доказателство:

а) Нека $f \in G, \varphi \in G$.

Тогава

$$p(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k = a \in \Omega$$

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k = b \in \Omega$$

$$p(f\varphi) = a \times b = c \in \Omega \Rightarrow f\varphi \in G$$

б) Нека $f \in E, \varphi \in G$.

Имаме

$$p(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k = a_0 \in \Sigma$$

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k = b \in \Omega$$

$$p(f\varphi) = a_0 \times b = a_0 . b_0 = c_0 \in \Sigma \Rightarrow f\varphi \in E .$$

Ч А С Т III

§ 1. Предмет на нашите разглеждания в тази част ще бъдат свойствата на една класа редици от множители въведени от Илиев още през 1938 година. В [10] , както отбелязахме в § 1, ч. II Илиев дава следното определение на λ - редица.

Определение 1. Безкрайната редица $\{\lambda_k\}$, $k=0,1,\dots$, наричаме λ - редица, ако за всеки полином $P(z)$ с реални коефициенти от произволна степен n , който няма нито една реална нула, композираният полином $\lambda P(z)$ също няма реални нули.

Повод за въвеждането на тези редици са дали въпроси свързани с решаването на известния проблем на Лагер в основата на който лежи следната теорема доказана от Лагер: ако полиномът

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m \quad , \quad g(0) \neq 0$$

има само реални нули, то неговата реципрочна стойност

$$\frac{1}{g(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

се развива в безкраен ред по степените на z , всяка частична сума

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

на който притежава най-много една реална нула.

Опитът на Лагер да обобщи тази теорема и за развитието на $[g(z)]^{-\omega}$, където ω е произволна положителна константа се оказва несполучлив, както е показал Обрешков в [5] . В същата статия Обрешков доказва аналогични твърдения за частичните суми на някои по-общи функции към които се отнася и случая $[g(z)]^{-\omega}$ при $0<\omega<\frac{1}{m}$, където m е степента на полинома $g(z)$.

Така произлиза проблемът на Лагер: да се търсят функциите, за Тейлоровото развитие на които е верно твърдението на Лагер доказано за реда (1).

В тази област са известни работите на Чакалов [8] , [9] Обрешков [4] , [5] , [6] , Илиев [10], [15] .

Например, Чакалов [8] доказва, че твърдението на Лагер е верно и за една по-обширна класа от функции към които принадлежат мероморфни функции от вида $\frac{1}{g(z)}$, където $g(z)$ е произволна реална цяла функция от нулев или първи ред, притежаваща само реални нули и при това $g(0) \neq 0$.

Съгласно една теорема на Гросмер [38] може да се установи верността на твърдението на Лагер и за мероморфни функции от вида

$$\mu + \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu_i}{1 - \alpha_i z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots ,$$

при $\mu_i > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\frac{1}{|\alpha_i|} \geqslant 1$.

(Сродни въпроси се третират и в статията [42] на румънския математик Т. Поповичиу).

В първата докторска дисертация на Илиев [10] е доказана една теорема от която в частност следват известните резултати от проблема на Лагер. За целта се използуват λ - редици с по-горе даденото определение и следната лема (И):

$$\left(\{\gamma_k\} \in \gamma \, , \, \gamma_k \neq 0 \, , \quad k = 0, 1, \ldots \right) \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \right\} \in \lambda$$

Множеството на λ - редиците ще бележим пак с λ .

Отново към λ - редици Илиев се връща през 1973 година, когато в доклада си на сесията на Балканския Математически Съюз през м. април, отбелязвайки връзката между λ - редиците и строго позитивните редици в безкраен интервал (Ахиезер [33] , Натансон [32]) успява да установи редица интересни и важни неравенства удовлетворяващи се от известните класи ортогонални полиноми. Тези неравенства той нарича - неравенства на Хамбургер.

Като частен случай на Хамбургеровите неравенства се явяват една друга класа от неравенства, които имат твърде много общо с Турановите неравенства, затова ще си позволим да ги наричаме неравенства от Туранов тип. Към тях спадат и неравенствата разглеждани от Поповичиу [42] . За неравенствата на Туран за пръв път се споменава през 1948 година от Сегьо [40] и то във връзка с Лежандровите полиноми. Туран е доказал за тези полиноми неравенствата от вида

$$\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}\alpha_{n+1} \geq 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

През 1963 година Илиев [17] показва, че в интервалите на своя ортогоналитет Лежандровите, Чебишевите, ултрасферичните, Хермитовите и Лагеровите полиноми удовлетворяват горните неравенства, както и някои други.

Пак от неравенствата на Хамбургер като частен случай следва и решението на проблема на Лагер.

Забележка. Използуването на моментите на една Стилтесова функция за различни обобщения на проблема на Лагер имаме и при Обрешков [4] , [6] .

В следващия § ще се опитаме да разкрием някои нови свойства на λ - редиците.

Тук ще припомним определението на строго позитивна редица в безкраен интервал, както и някои от важните критерии за охарактеризиране на едно строго позитивна редица в интервала $(-\infty, \infty)$, дължими на Хамбургер [39] .

Да означим с S - класата на всички строго позитивни редици $\{s_k\}$ в интервала $(-\infty, \infty)$. В множеството на всички полиноми можем да определим функционал $\phi(P)$, полагайки

$$\phi(P) = a_0 s_0 + a_1 s_1 + \dots + a_n s_n ,$$

където

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n .$$

Този функционал очевидно е линеен.

Съвкупността на реалните числа ще белезим с R.

<u>Определение 2.</u>

$$\{s_k\} \in S \Leftrightarrow \left\{ \left(\{s_k\} ; P(z) \geq 0, \forall z \in R \right) \Rightarrow \phi(P) > 0 \right\}$$

<u>Първи критерии на Хамбургер</u> - K_1. Ако $\{s_k\} \in S$, то съществува такава реална растяща, ограничена функция $g(t)$ с безбройно много точки на растеж, че при всяко n имаме равенството:

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, dg(t) , \qquad n = 0, 1, \dots$$

Вярно е и обратното твърдение: ако $g(t)$ е растяща ограничена функция с безбройно много точки на растеж и всички интеграли (2) съществуват, то $\{s_k\} \in S$.

<u>Втори критерий на Хамбургер</u> – K_2. Необходимото и достатъчно условие, за да съществува ограничена, растяща реална функция $g(t)$ с безбройно много точки на растеж, удовлетворяваща условията

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \, dg(t) = s_n \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

е

$$\Delta_n(s_0) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

От K_1 и K_2 непосредствено следва

$$K. \qquad \{s_k\} \in S \Leftrightarrow \Delta_n(s_0) > 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

<u>§ 2.</u>

<u>1. Теорема 1.</u> $\{\lambda_k\} \in \lambda \Leftrightarrow \{\lambda_k\} \in S$.

Доказателство: а) нека $\{\lambda_k\} \in \lambda$ и нека $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ е произволен полином с реални коефициенти и нереални нули. За определеност да приемем $a_n > 0$, т.е.

$$P(z) > 0 \quad \text{за} \quad \forall\, z \in R.$$

Тогава

$$\lambda P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k z^k > 0 \quad \text{за} \quad \forall\, z \in R.$$

Специално при $z = 1$

$$\lambda P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k = \Phi(P) > 0.$$

Получаваме $\{\lambda_k\} \in S$, $k=0,1,\dots$

б) Нека $\{\lambda_k\} \in S$. Според K_1 за строго позитивните в интервала $(-\infty,\infty)$ редици, съществува растяща и ограничена функция $g(t)$ с безбройно много точки на растеж, така че при всяко n имаме

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, dg(t) .$$

Нека

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k > 0 \quad , \quad \forall z \in R .$$

Образуваме

$$\lambda P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k z^k = \int_{-\infty}^{\infty} P(tz)\, dg(t)$$

Тъй като $P(z) > 0$ за всяко реално z, то и $P(tz) > 0$ за всяко реално t и z. Още имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(tz)\, dg(t) \geqslant \int_{a}^{b} P(tz)\, dg(t)$$

за произволни крайни числа a и b. Но ако изберем a и b така, че в интервала $[a,b]$ броя на точките на растеж да бъде по-голям от степента на $P(z)$, а това е възможно, тъй като $g(t)$ е с безбройно много точки на растеж, то (по лема 2, § 4, гл. VII [32]):

$$\int_{a}^{b} P(tz)\, dg(t) > 0 ,$$

от където ще следва

$$\lambda P(z) > 0 \qquad \text{, т.е.} \qquad \{\lambda_k\} \in \lambda .$$

И тъй λ - редиците са строго позитивни редици в интервала $(-\infty,\infty)$ по отношение на полиноми, които за всяка реална стойност на z приемат само положителни значения.

Забележка. В нашите разглеждания върху сходимостта на интегралите не се спираме, тъй като тя следва от съществуването на интегралите (2).

Ползвайки теорема 1, можем да докажем следните свойства:

$$C_1. \qquad \{\lambda_k\} \in \lambda \Rightarrow \{\lambda_{2m+k}\} \in \lambda$$

където m е произволно естествено число.

Доказателство. Нека

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k > 0 \quad , \quad \forall z \in R \quad , \ a_k \text{ - реални числа.}$$

Тъй като

$$\{\lambda_k\} \in \lambda \Rightarrow \{\lambda_k\} \in S$$

можем да пишем (съгласно K_1)

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, dg(t) \quad , \qquad k = 0, 1, \dots$$

Композираният полином от $P(z)$ с редицата $\{\lambda_{2m+k}\}$ ще бъде

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_{2m+k} z^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} P(tz) \, dg(t).$$

Според по-горе цитираната лема 2 от [32] можем да твърдим, че редицата

$$\{\lambda_{2m+k}\} \in \lambda .$$

Подобно се доказват

$$C_2. \qquad \{\lambda_k\} \in \lambda \Rightarrow \{\lambda_{2k}\} \in \lambda$$

Тук

$$\lambda P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_{2k} z^k = \int_{-\infty}^{\infty} P(t^2 z) \, dg(t) > 0.$$

C_3. $\{\lambda_k\} \in \lambda \rightarrow \{\lambda_{sk}\} \in \lambda$, s – произволно естествено но число

$$\lambda P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_{sk} z^k=\int_{-\infty}^{\infty} P(t^s z)\,dg(t)>0$$

C_4. $\{k!\}\in\lambda$.

Наистина, ако $P(z)>0$ за всяко реално z, то

$$(k!)P(z)=\sum_{k=0}^{n} k!\,a_k z^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{\infty} e^{-t}t^k dt\right)a_k z^k=\int_0^{\infty} e^{-t}P(tz)\,dt>0$$

Това, че $\{k!\}$ е λ- редица е доказано и в [10], като се ползва лемата на Илиев (И).

От K_2 и теорема 1 следва сполучливо забелязаната от Илиев [15] зависимост

$$\{\lambda_k\}\in\lambda \Leftrightarrow \Delta_n(\lambda_0)>0 \quad , \quad n=0,1,\dots ,$$

където

$$\Delta_n(\lambda_0)=\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \lambda_{n+1} & \dots & \lambda_{2n} \end{vmatrix}$$

Като вземем под внимание и C_1 получаваме по-общия резултат

C_5. $\{\lambda_k\}\in\lambda \Leftrightarrow \Delta_n(\lambda_{2k})>0$,

$$k=0,1,\dots ;\ n=0,1,\dots$$

От тук веднага следва

C_6. Ако $\{\lambda_k\}\in\lambda$, то всички членове с четен индекс са положителни, т.е. $\lambda_{2k}>0$, $k=0,1,2,\dots$

Наистина, от C_5 при $n=0$ следва

$$\Delta_0(\lambda_{2k})=\lambda_{2k}>0 \quad , \; k=0,1,2,\dots$$

В [15] Илиев доказва следната теорема:

Ако $\{\lambda_k^{(n)}\}\in\lambda$, $k=0,1,\dots$; $n=1,2,\dots,p$ и

$$\varphi_n(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}}{k!}z^k ,$$

то редицата $\{L_k(x_1,\dots,x_p)\}$ е λ - редица, където L_k са коефициентите във формалното развитие на произведението

$$\prod_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k z)$$

в ред, т.е.

$$\prod_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}L_k(x_1,x_2,\dots,x_p)\frac{z^k}{k!} .$$

Неравенствата $\Delta_n(L_k)>0$, $k=0,1,\dots$; $n=0,1,\dots$ той нарича неравенства на Хамбургер.

При $n=0$, $k=2m$ от тях се получават неравенствата на Лагер (C_6) свързани с проблема на Лагер.

При $n=1$, k - произволно естествено число се получават неравенства от Туранов тип.

2. Да означим с λ' множеството от λ - редици, които са строго позитивни в интервалите $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$

Ако $P(z)$ е произволен полином, който няма реални нули с изключение на точката $z=0$, то композираният полином на $P(z)$ с редица от λ' ще има само нереални нули.

Това позволява да изведем едно полезно свойство на известна част от λ - редиците

C_7. $\quad (\{\lambda_k\}\in\lambda' , \lambda_k\neq 0, k=0,1,\dots)\Rightarrow\lambda_k\lambda_{k+2}>0 .$

Доказателство. При k - четно число, твърдението следва от C_6.

Нека k е нечетно число и да допуснем, че $\lambda_k \lambda_{k+2} < 0$ при някое фиксирано $k = 2m+1$.

Да разгледаме полиномът

$$P(z) = z^{2m+1} + z^{2m+2} + z^{2m+3} = z^{2m+1}(1+z+z^2),$$

който при реални стойности на z приема неотрицателни значения. При $z>0$, $P(z)>0$, а при $z<0$, $-P(z)>0$, така че композиранит с $\{\lambda_k\}$ полином не притежава реални нули при $z \neq 0$, т.е.

$$Q(z) = \lambda_{2m+1} + \lambda_{2m+2} z + \lambda_{2m+3} z^2 > 0$$

за всяко реално z. Това, обаче води до неравенството

$$\lambda_{2m+2}^2 - 4\lambda_{2m+1}\lambda_{2m+3} < 0$$

нещо което е в противоречие с допускането, че $\lambda_{2m+1}\lambda_{2m+3} = \lambda_k \lambda_{k+2} < 0$.

Твърденията на C_6 и C_7 могат да се формулират още така: или всички членове на една λ' - редица, образувана от различни от нула числа, са положителни числа или са с алтернативно сменящи се знаци.

Забележка. Това свойство притежават и γ' - редиците от първи вид [36]. Но γ' - притежават и такова свойство: ако един член на една γ' - редица е равен на нула и съседните му членове са различни от нула, те трябва да са с различни знаци. При λ - редиците, ако един член е равен на нула, то той трябва да е с нечетен индекс, в такъв случай съседните му членове са с четен индекс и съгласно C_6 са положителни числа.

Да означим с γ_I множеството на γ - редиците от първи вид. Ще докажем

Теорема 2.

$$\left(\{\lambda_k\} \in \lambda', \ \lambda_k \neq 0, \ k=0,1,\dots\right) \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\} \in \gamma_I .$$

Преди да докажем теоремата ще дадем някои помощни твърдения.

Лема 1. Нека $f(z)$ е полином от степен n с τ реални нули; $\tau \leq n$. Ако V_1 и V_2 са вариациите на коефициентите съответно на полиномите $f(z)$ и $f(-z)$. $\{\lambda_k\} \in \lambda'$. $\lambda_k \neq 0$. $k=0,1,\dots$ и τ_1 е броя на реалните нули на композирания полином $\lambda f(z)$, то $\tau_1 \leq V_1 + V_2$.

Доказателство. Ако членовете на редицата $\{\lambda_k\}$ са положителни числа, твърдението следва непосредствено от теоремата на Декарт ([2] стр 24).

Нека означим вариациите на коефициентите на $\lambda f(z)$ и $\lambda f(-z)$ съответно с V' и V''. Ще имаме

$$V' \leq V_1 \quad \text{и} \quad V'' \leq V_2$$

Следователно $\tau_1 \leq V' + V'' \leq V_1 + V_2$.

Ако $\{\lambda_k\}$ е редица с алтерантивно сменящи се знаци, то

$$V' \leq V_2 \ , \ V'' \leq V_1$$

и пак $\tau_1 \leq V_1 + V_2$.

Лема 2. Нека $f(z)$ е полином от степен n, $\{\lambda_k\} \in \lambda'$; като $\lambda_k \neq 1$ за всяко $k \in N$ и τ и τ_1 са съответно броя на реалните нули на $f(z)$ и $\lambda f(z)$. Тогава $\tau_1 < n$ за всяко n.

Доказателство. От лема 1 следва, че $r_1 \leq V_1 + V_2 \leq n$.

Ако $r < n$, то от $r \leq V_1 + V_2 < n$ и $r_1 \leq V_1 + V_2$, следва че и $r_1 < n$.

Ако $r = n$ и допуснем, че $r_1 = n$ стигаме до противоречие с условието, че $\{\lambda_k\}$ е λ - редица.

Достатъчно е да вземем $n = 2$ и нека

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 \in T_2 \quad , \text{ т.е. } \quad r = 2$$

Да приемем още, че

$$\lambda f(z) = \lambda_0 + 2\lambda_1 z + \lambda_2 z^2 \in T_2 ,$$

от където ще следва $\lambda_1^2 - \lambda_0 \lambda_2 \geq 0$ или $\Delta_1(\lambda_0) \leq 0$, което противоречи на условието $\{\lambda_k\} \in \lambda$.

<u>Лема 3.</u> $(r < n) \to r_1 \leq r$.

Доказателство. Да допуснем противното, т-е. при композиране с λ' - редица реалните нули на композирания полином са повече на брой от тези на дадения. Но тогава съществува s - положително цяло число, такова че след s - кратно композиране с $\{\lambda_k\}$, полученият полином (който е пак от степен n) ще има r_s на брой реални нули, като $r_s \geq n$.

Това, обаче противоречи както на $Л_2$, така и на факта че броя на нулите на един полином не надминава степента му.

<u>Доказателство на Т2.</u> Нека $f(z)$ е произволен полином от степен n; $\{\lambda_k\} \in \lambda'$, $\lambda_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$; $f(z) \in \mathcal{F}_2$.
Искаме да докажем, че композираният полином с редицата $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}$ притежава само реални нули, т.е.

$$\frac{1}{\lambda} f(z) \in T_2$$

Ако приемем, че полиномът $\varphi(z)=\frac{1}{\lambda}f(z)$ има r реални нули, то полиномът $\lambda\varphi$ ще има r_1 реални нули, като $r_1 \leq r$. Но $r_1 = n$, тъй като

$$\lambda\varphi(z)=\lambda\left[\frac{1}{\lambda}f(z)\right]=f(z)$$

% Следователно $r=n$, т.е. $\frac{1}{\lambda}f(z)\in T_2$, откъдето пък следва, че

$$\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}\in\gamma_I,\ k=0,1,\dots$$

Обратното твърдение: ако $\{\gamma_k\}\in\gamma_I$, $\gamma_k\neq 0$, $k=0,1,\dots$, то $\left\{\frac{1}{\gamma_k}\right\}\in\lambda$ е доказано от Илиев [10].

Забележка. С доказаната теорема се установява едно съответствие между λ - редиците (и то тези, които са съставени от отлични от нула членове) и γ - редиците от първи вид.

2. Да въведем както това направихме в част II § 2 т. 1 редица от множители λ по отношение на някаква степен.

<u>Определение 3.</u> Една крайна редица от реални числа

$$\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}$$

ще наричаме „λ - редица относно степен $2n$", ако притежава свойството: за всеки полином $P(z)$ от степен $\leq 2n$ с нереални нули, композираният полином $\lambda P(z)$ също да има само нереални нули.

Например $\{(2n-k)!\}$, $k=0,1,\dots,2n$ е λ - редица относно степен $2n$.

Наистина, ако $P(z)>0$ за всяко $z\in R$, където

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_{2n}z^{2n},$$

то

$$\lambda P(z)=\sum_{k=0}^{2n}(2n-k)!\,a_k z^k=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^n P\left(\frac{z}{t}\right)dt>0$$

за всяко реално z и t - реално от интервала $(0,\infty)$

П о-общо може да се докаже свойството: C_8. Ако

$\{\lambda_k\}\in\lambda \Rightarrow \{\lambda_{2m-k}\}\in\lambda$- редица относно степен $2m$; $m=0,1,\dots$; $k=0,1,\dots,2m$.

Доказателство. Нека $\{\lambda_k\}\in\lambda$ и $p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ е произволен полином с нереални нули от степен n; $a_n\neq 0$. Тогава и полиномът $q(z)=z^n\bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)$ няма реални нули за всяко реално $z\neq 0$, а при $z=0$, $q(0)=a_n\neq 0$. Полиномът

$$\lambda q(z)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\lambda_k z^k$$

също няма реални нули, а това е вярно и когато в $\lambda q(z)$ поставим вместо $z\to\frac{1}{z}$, т.е. за полинома

$$r(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_{n-k}z^k;$$

при $z=0$, $r(0)=a_0\lambda_n$. Тук n е четно число $n=2m$, така че $r(0)\neq 0$.

И тъй редицата $\{\lambda_{n-k}\}$ при $n=2m$ е λ- редица относно степен $2m$.

В [10] е отбелязано съществуването на безбройно много редици λ изхождайки от лемата на Илиев $(И)$. Тук ползвайки други твърдения ще дадем примери на λ - редици относно степен $2n$.

Нека $f(z)$ е произволен полином с реални коефициенти, нулите на който да означим с $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

Ако

$$S_i=\alpha_1^i+\alpha_2^i+\dots+\alpha_n^i$$

означават степенните сборове, то известно е (следствие от теорема на Ермит [2] стр. 47), че нулите на $f(z)$ са само тогава реални и прости, когато детерминантите в редицата

$$s_0=n, \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

са всичките положителни. С други думи, α_n са реални и прости, тогава и само тогава, когато всички

$$\Delta_k(s_0)=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0, \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Вземайки предвид горното твърдение и K_2 стигаме до следния извод:

Теорема 3. Нека $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$.

$\left(f\in T_2,\ s_i=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^i,\quad \alpha_k\text{ - реални. прости нули на } f\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\{s_i\}\text{ е }\lambda\text{- редица относно степен } 2n-2\right).$

Така, например от полиномите

$f_1(z)=z^2-z-2,$

$f_2(z)=z^3-7z+6,$

$f_3(z)=z(z-1)(z+1)(z+2),$

$f_4(z)=(z^2-1)(z^2-4)(z^2-9)$

получаваме съответно λ - редиците

2, 1, 5 - относно степен 2;

3, 0, 14, -18, 98 - относно степен 4;

4, -2, 6, -8, 18, -32, 66 - относно степен 6;

6, 0, 28, 0, 196, 0, 1588, 0, 13636, 0, 120, 148 - относно степен 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков Н. - Върху нулите на полиномите и на някои цели функции. Год. Су. Мат. - физ., 1940/41, 1 - 115.
2. Обрешков Н. - Нули на полиномите, БАН, София, 1963
3. Obreschkoff N.: Uber einige Multiplikatoren in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Jahresb.d.D.Math Ver, 35, 1926, 301 - 304.
4. Obreschkoff N.- Uber die Nullstellen einiger Klassen von Polynomen, Math. Ann. 115, 1938, 159 - 162.
5. Obreschkoff N.- Sur une theoreme de Laguerre, Compt. Rend, 203, 1936, 760 - 762.
6. Obreschkoff N.- Sur les zeros de guelgues classes de polynomes et fonctions rationnelles. Bull. Math. de la S.R. des Sciences, 40, 1 - 2, 1938.
7. Чакалов Л. - Върху една класа цели функции. Сп. БАН, 36, 1927, 51 - 89
8. Чакалов Л. - Върху една теорема на Лагер и нейните сбобщения, Сп. БАН, VII, 1938, 87 - 119
9. Tchakaloff L.- Sur un probleme de Laguerre, C.R., 204, 1937, 842 - 844.
10. Илиев Л. - Върху нулите на някои класи от полиноми и цели функции. Дисертация, София, 1940.
11. Илиев Л. - Тригонометрични интеграли, които представят цели функции със само реални нули, Изв. МИ БАН, 1. кн. 2, 1954, 147 - 153.
12. Илиев Л. - Върху разпределението на нулите на една класа цели функции, Год. СУ. Прир. - мат. фак. 44, 1948, 143 - 173.

13. Илиев Л. - Тригонометрични полиноми с монотонни редици на коефициентите, год. СУ, 38, 1941/42, 87-102.
14. Илиев Л. - Върху някои класи цели функции и произведените от тях полиноми. Изв.МИ БАН, 10, 1970, 273-281.
15. Илиев Л. - Неравенства на Хамбургер, доклад на сесия на Балк.мат.съюз, април София, 1975.
16. Iliev L. - Uber trigonometrische Polynome mit monotoner koeffizientfolge. Jahresb d. Math. Ver, 53, 1943, 1, 1 - 23.
17. Iliev L. - Turansche Ungleichungen. C.R. 17, 8, 1964.
18. Iliev L. - Uber emige klassen von Polynomenfolgen, C.R. 17, 9, 1964.
19. Iliev L. - Integraldarstellung einer Klasse von Polynomenfolgen, C.R., 18, 1, 1965.
20. Iliev L. - Ortogonale Systeme in einigen Klassen von Polynomenfolgen, 18, 4, 1965.
21. Iliev L. - Funktionen, die eine Turansche Ungleichung befriedigen. C.R. 19, 2, 1966, 93 - 96.
22. Iliev L. - Uber einige Klassen von ganzen Funktionen. C.R., 19, 7, 1966.
23. Божоров Е. - О расположении нулей одного класса полиномов и целых функций, Докл.БАН, 3,1950, 11-14.
24. Божоров Е, - Върху някои въпроси, свързани с полиноми и цели функции, Год.ХТИ, 8,2, 1962, 251-262.
25. Божоров Е. - Върху разпределението на нулите на една класа полиноми и цели функции, Год. Су. Мат.-физ.фак. 46, 1, 1949/50, 43 - 72.
26. Божоров Е. - Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми, Год. ХТИ, 2, 2, 1955, 151 - 161.

27. Боюров Е. - Об одном классе интегральных многочленов и целых функций, Тр.межд.конф. по констр.т. функций, Варна, 1970, 25 - 29.

28. Russev P. - A class of entire functions with onlyrael zeros, C.R. 19, 7, 1966.

29. Тодоринов С. - Върху разпределението на нулите на една класа цели функции, Год. СУ. физ.-фат. фак., 52, 1957/58, 1, 145 - 147.

30. Тодоринов С. - Върху разпределението на нулите на една класа цели функции представени чрез тригонометрични интеграли, Н.тр.МЕИ, 6,1, 1959, 69 - 74.

31. Димитров Д. - Върху разпределението на нулите на някои полиноми и цели функции, Дисертация, София, 1972.

32. Натансон И.П. - Конструктивная теория функции, Москва, Ленинград, 1949.

33. Ахиезер Н.И. - Класическая проблема моментов, Москва, 1961.

34. Титчмарш Е. - Теория функций, Москва 1951.

35. Polya G. - Uber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Z., 2, 1918, 352 - 383.

36. Polya G., I.Schur- Uber zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, J. r. ang. Math, 144, 1914, 89 - 113.

37. Schur J. - Zwei Sätze über algebraische Gleichugen mit lauter reellen Wurzeln, J. r. ang. Math. 144, 1914, 75 - 88.

38. Grommer J. - Ganze transzendenten Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, J.r. aud. Math. 144, 1914.

39. Hamburger H. - Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, Math, Ann, 81, 1920, 235 - 319.

40. Szegö G. - Ortogonagle polynomials, Bull. Amer, Math. Soc. 54, 1948, 401 - 405.

41. Fejer L. - Potenzreihen mit merfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre Polynome, Gesam. Arb., AK, Budapest, 1970, 621 - 631.

42. Popoviciu T. - Sur une inégalité entre des valeurs moyennes, Publ. elektrotechn. fac. Univ. Beogradu, 1972.

43. Тодоринов С., М.Костова - Необходимо условия за разпределението на нулите на даден клас от функции, ВИХВП, Н. тр. т. 18, св. II - 1971

44. Костова М. - За функциите от класата E, II, Н. тр. ПУ, т. 11, кн. 3, 1973.

45. Kostowa M. - Einige Anwendungen eines Schur - Theorems, Univ. de Plovdiv, Natura, 1, VI, fasc. 1, 1973.

46. Костова М. - Една класа множители запазващи разпределението на нулите на полиномите, Год. по прил. мат. на ВУЗ, т. 10, кн. 1, 1974 (~~под печат~~).

47. Костова М. - Някои свойства на λ-редици, Год. по прил. мат. на ВУЗ, 1975 (под печат).