ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА КАДРИ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
СЕКТОР "АНАЛИТИЧНА МЕХАНИКА"

2-3

Васил Андреев Диамандиев

МЕХАНИЧНИ И ГЕОМЕТРИЧНИ ПРОУЧВАНИЯ СВЪРЗАНИ С ТЕОРИЯТА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ПРАВИ

Дисертация за получаване на научната степен "Кандидат на математическите науки"

София - 1974 г.

У В О Д

Известно е, че теоретичната механика и диференциалната геометрия имат много допирни точки и в съответните области изследванията са тесно преплетени. В трудовете на Darboux, Frenet, Garnier и др. тези идеи са добре развити с метода на подвижния триедър. Класически в това отношение са разглежданията на G. Darboux в книгата "Leçons sur la théorie générale des surfaces". Показано е, че кинематиката на твърда материална система може да служи като метод за геометрични изследвания на криви конгруенции и други геометрични образования. Освен в теория на витловите движения кинематичният подвижен триедър намира приложение в теория на винтовете, възникнала в началото на миналото столетие след работите на Поансо, Шал и Мьобиус. Винтът като съвкупност от момент на вектор и самия вектор представлява геометричен образ описващ както произволно преместване на твърдо тяло, така и произволна система сили. Идеите на винтовото изчисление са развити главно в работите на Плюкер, Котельников, Зейлигер, Блашке и Лагали. По-късно винтовото изчисление намира ново развитие в работите на Кислицин, Шор и др. автори в теорията на винтовите афинори, пространствените механизми и др.

Методът на подвижния триедър при витловите движения се разглежда също в хидромеханиката на несвиваем флуид в работите на Чаплигин, Жуковски, Ляпунов и др. Теоретически е показано, че съществува витлово движение на твърдо тяло във флуид със равномерна ротация и транслация, при което витловата ос на тялото образува конгруенция прави. Изследвания от такъв род са правени в литературата от П.В.Харламов.

Свързването на кинематичната теория на подвижния триедър с теория на конгруенциите и роеве прави в диференциалната геометрия и систематичното изследване на тази връзка е основния въпро разработен в дисертационната работа. Този метод, тесно свързан с векторния и тензорен анализ, намира приложение в римановата метрична геометрия и други многомерни построения.

Относно означенията в работата ще отбележим, че е възприет както класическия апарат на Фиников и Петканчин, така и тензорните означения както за конгруенциите, така и за римановия метричен абстрактен метод. В частност е построена връзка между означенията на Фиников и тензора на Sannia и метричния тензор в тримерното пространство. Въвеждането на тензорите е направено елементарно, като величини, характеризиращи трансформация на координатната система.

Съществено е иследвана връзката между геометричния характер на конгруенциите и роеве прави и съответните витлови движения. В този ред са иследвани W - конгруенция, псевдосферична конгруенция, конгруенция на Бианки, разслояеми двойки конгруенции. Разгледани са също кинематичните свойства на инвариантите на рой витлови оси и особено на тяхната централна точка.

Накрая и методът на подвижния триедър е развит за едно конкретно иследване на конформно-евклидовото съответствие в теория на римановите метрични пространства. Това иследване е свързано както с обобщения тензор на кривината, така и с тензора на конформно-евклидовото съответствие.

Глава I.

Кинематична теория на подвижния триедър. Основни сведения от теория на конгруенциите.

Произволно хеликоидално движение на твърда материална система е определено от движението на един полюс

/1/ $$\bar{r}_0 = x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j} + z_0 \bar{k}$$

и ойлеровите ъгли φ, ψ, θ на подвижния триедър. Векторите на подвижния триедър

/2/ $$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= a_{11} \bar{i} + a_{12} \bar{j} + a_{13} \bar{k} \\ \bar{y}_0 &= a_{21} \bar{i} + a_{22} \bar{j} + a_{23} \bar{k} \\ \bar{z}_0 &= a_{31} \bar{i} + a_{32} \bar{j} + a_{33} \bar{k} \end{aligned}$$

където a_{ij} са директорни косинуси, се изразяват еднозначно чрез φ, ψ, θ. Витловата ос на триедъра е определена от точката

/3/ $$\bar{A} = \bar{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}\left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_0}{dt}\right)$$

и вектора

/4/ $$\bar{\omega} = p\,\bar{x}_0 + q\,\bar{y}_0 + r\,\bar{z}_0$$

където p, q, r са определени от известните формули на Ойлер:

/5/ $$\begin{aligned} p &= \sin\varphi \sin\theta\, \dot{\psi} + \cos\varphi\, \dot{\theta} \\ q &= \cos\varphi \sin\theta\, \dot{\psi} - \sin\varphi\, \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}$$

В книгата на G. Darboux е решен следния кинематичен проблем: дадени са във функция на времето ротационния вектор $\bar{\omega}$ чрез /4/ и /5/ и скоростта на началото на подвижния триедър :

$$/6/ \qquad \bar{v}_0 = \xi \, \bar{x}_0 + \eta \, \bar{y}_0 + \zeta \, \bar{z}_0$$

При тези данни се иска да се определят във функция на времето всички елементи на подвижния триедър. Тук ще дадем наготово резултатите от споменатата книга на G. Darboux [1].

За полюсът /началото/ на подвижната координатна система са намерени зависимостите :

$$x_0 = x_0^0 + \int_{t_0}^{t} (a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)\,dt$$

$$/7/ \qquad y_0 = y_0^0 + \int_{t_0}^{t} (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)\,dt$$

$$z_0 = z_0^0 + \int_{t_0}^{t} (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta)\,dt$$

където x_0^0 , y_0^0 , z_0^0 са началните данни за полюса. Зависимостите /7/ очевидно се получават чрез директно интегриране на уравнението /6/ относно декартовите координати.

Нека с α , β , γ означим коя да е група от директорните косинуси на осите на подвижния триедър. Те удовлетворяват системата диференциални уравнения :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q$$

$$/8/ \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p$$

При полаганията :

/9/

$$\alpha = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \quad \beta = i\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}$$

$$\gamma = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$$

системата /8/ се редуцира на уравненията :

/10/

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{q+ip}{2}\lambda^2 - ir\lambda + \frac{q-ip}{2}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{q+ip}{2}\mu^2 - ir\mu + \frac{q-ip}{2}$$

които в същност представляват едно и също уравнение на Рикати. В това се състои на кратко метода на G. Darboux, който ще приложим по-късно при определяне на паралела между витловите движения и теория на конгруенциите прави.

& 1. Паралел между витлови движения и рой прави.

Както видяхме витловата ос на подвижния репер е определена еднозначно от ойлеровите ъгли и полюса на подвижното начало. Елементите на витловата ос зависят само от един параметър - времето и следователно тя описва рой прави. По този начин може да се установи съответствие между дадено витлово движение и рой прави и обратно на даден рой прави разгледани като витлови оси да се намери съответствуващото витлово движение. Последното съответствие не е еднозначно, както ще видим по-късно чрез метода на Darboux. Аналогично се установява съответствие между съвкупност от витлови движения и конгруенция прави. Съвкупност от витлови движения се получава, когато елементите на подвижния триедър зависят освен от времето, от един допълнителен параметър, имащ кинематично или геометрично значение. Конкретно такъв случай в литературата е разгледан от П.В.Харламов във връзка с някои хидродинамични проблеми.

& 2. Върху някои основни понятия от теория на конгруенциите.

Конгруенция прави се дефинира най-общо чрез точка

$$/11/ \quad \bar{A}(u,v) = A_x \bar{x}^0 + A_y \bar{y}^0 + A_z \bar{z}^0$$

и единичен вектор

$$/12/ \quad \bar{e}(u,v) = e_x \bar{x}^0 + e_y \bar{y}^0 + e_z \bar{z}^0$$

където $\bar{x}^0$, $\bar{y}^0$, $\bar{z}^0$ е съответен подвижен триедър, u , v - параметри, имащи кинематично или геометрично значение.

Коефициентите

$$/13/ \quad \gamma_{11} = (\bar{e}_u)^2, \quad \gamma_{12} = \bar{e}_u \cdot \bar{e}_v, \quad \gamma_{22} = (\bar{e}_v)^2$$

на квадратната форма

$$/14/ \quad (d\bar{e})^2 = \gamma_{11}\, du^2 + 2\gamma_{12}\, du\, dv + \gamma_{22}\, dv^2$$

образуват метричния тензор на конгруенцията. От Фиников С.П. са въведени следните коефициенти:

$$/15/ \quad e = \bar{A}_u \cdot \bar{e}_u, \quad f = \bar{A}_v \cdot \bar{e}_u, \quad f' = \bar{A}_u \cdot \bar{e}_v,$$

$$g = \bar{A}_v \cdot \bar{e}_v$$

Те се обединяват от квадратната форма:

/16/ $$d\bar{e} \cdot d\bar{A} = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2$$

Независимо от Фиников се въвеждат и компонентите на тензора на Sannia:

/17/ $$\mu_{11} = (\bar{e} \times \bar{e}_u) \cdot \bar{A}_u, \quad \mu_{22} = (\bar{e} \times \bar{e}_v) \cdot \bar{A}_v$$
$$\mu_{12} = \frac{1}{2}\left[(\bar{e} \times \bar{e}_u) \cdot \bar{A}_v + (\bar{e} \times \bar{e}_v) \cdot \bar{A}_u \right]$$

които също се обединяват от квадратната форма:

/18/ $$\bar{e} \cdot (d\bar{e} \times d\bar{A}) = \mu_{11}\,du^2 + 2\mu_{12}\,du\,dv + \mu_{22}\,dv^2$$

& 3. Инварианти и точки свързани с дадена конгруенция.

Чрез зависимостта:

/19/ $$\bar{M} = \bar{A} + m\bar{e}$$

се описват всички точки от дадена права на конгруенцията при изменението на m. Съществуват няколко инвариантно свързани точки с конгруенцията, които независят от избора на $\bar{A}$ и на параметрите. Това са:

а/ Граничните точки:

/20/ $$\bar{\Gamma}_1 = \bar{A} + m_1\bar{e}$$
$$\bar{\Gamma}_2 = \bar{A} + m_2\bar{e}$$

където m_1, m_2 са корени на уравнението:

/21/ $$(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\,m^2 + \left[g\gamma_{11} + e\gamma_{22} - \gamma_{12}(f+f')\right] m + $$
$$+ eg - \frac{(f+f')^2}{4} = 0$$

б/ Фокалните точки:

$$\overline{\varphi}_1 = \overline{A} + \rho_1 \overline{e}$$

/22/

$$\overline{\varphi}_2 = \overline{A} + \rho_2 \overline{e}$$

където ρ_1, ρ_2 са корени на уравнението:

/23/ $$(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\rho^2 + [g\gamma_{11} + e\gamma_{22} - \gamma_{12}(f+f')]\rho + eg - ff' = 0$$

Непосредствено се вижда, че отсечките образувани от $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$ и $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ имат обща среда, която се нарича средна или централна точка на конгруенцията, определена от формулата:

$$\overline{M}_{cp} = \overline{A} + m_0 \overline{e}$$

/24/

$$m_0 = \frac{(f+f')\gamma_{12} - e\gamma_{22} - g\gamma_{11}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}$$

Освен споменатите точки със всяка конгруенция са свързани два основни инварианта:

$$H = \frac{\gamma_{11}\mu_{22} - 2\gamma_{12}\mu_{12} + \gamma_{22}\mu_{11}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}$$

/25/

$$K = \frac{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

наречени съответно среден и пълен параметър. Същите са свързани със споменатите по-горе точки чрез релациите:

$$\overline{\Gamma}_{1,2} = \overline{M}_0 \pm \sqrt{H^2 - K}\ \overline{e}$$

/26/

$$\overline{\varphi}_{1,2} = \overline{M}_0 \pm \sqrt{-K}\ \overline{e}$$

§ 4. Роеве прави свързани с дадена конгруенция.

Ако параметрите u, v са свързани с релакцията:

/27/ $$u = u(v)$$

то от нея се отделя рой прави, принадлежащи на конгруенцията. Като характерни роеве ще отбележим:

а/ Параметричните роеве:

$u = const.$ $\quad v = const.$

б/ Разпределителните роеве:

Те се дават от уравнението:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}\,du + \gamma_{12}\,dv & \gamma_{12}\,du + \gamma_{22}\,dv \\ \mu_{11}\,du + \mu_{12}\,dv & \mu_{12}\,du + \mu_{22}\,dv \end{vmatrix} = 0 \qquad /28/$$

което изразява диференциална връзка между параметрите. Наименованието им произлиза от разпределителните параметри c, c^*, съответствуващи на двата роя. За конгруенция, чиито параметрични роеве съвпадат с разпределителните роеве, имаме следните релации:

$$\begin{aligned} 2H &= c + c^* \\ K &= c \cdot c^* \end{aligned} \qquad /29/$$

където H, K са средния и пълен параметър на конгруенцията.

& 5. Метрични зависимости между коефициентите на Фиников и тензора на Sannia.

В & 2 видяхме, че коефициентите характеризиращи дадена конгруенция се изразяват чрез съответни квадратни форми /14/, /16/, /18/. Ще покажем, че между тези форми съществува съответна релация. Наистина, изхождайки от тъждеството на Ойлер - Лагранж за векторите $d\bar{e}$, $\bar{e}$, $d\bar{A}$:

$$[d\bar{t}\times(\bar{e}\times d\bar{A})]^2+[d\bar{t}.(\bar{e}\times d\bar{A})]^2=$$
/30/
$$=(d\bar{e})^2(\bar{e}\times d\bar{A})^2$$

получаваме:

/31/ $$[\bar{e}.(d\bar{e}\times d\bar{A})]^2+(d\bar{e}.d\bar{A})^2=(d\bar{e})^2(\bar{e}\times d\bar{A})^2$$

Въз основа на формите /14/, /16/, /18/ от /31/ следва:

$$[\mu_{11}du^2+2\mu_{12}du\,dv+\mu_{22}dv^2]^2+$$
/32/ $$+[e\,du^2+(f+f')du\,dv+g\,dv^2]^2=$$
$$=(\gamma_{11}du^2+2\gamma_{12}du\,dv+\gamma_{22}dv^2)(\bar{e}\times\bar{A}_u\,du+\bar{e}\times\bar{A}_v\,dv)^2$$

Изравнявайки коефициентите пред съответните степени на диференциалите du, dv получаваме зависимостите:

$$e^2+\mu_{11}^2=\gamma_{11}(\bar{e}\times\bar{A}_u)^2$$
$$g^2+\mu_{22}^2=\gamma_{22}(\bar{e}\times\bar{A}_v)^2$$
/33/ $$e(f+f')+2\mu_{11}\mu_{12}=\gamma_{11}(\bar{e}\times\bar{A}_u).(\bar{e}\times\bar{A}_v)+\gamma_{12}(\bar{e}\times\bar{A}_u)^2$$
$$g(f+f')+2\mu_{22}\mu_{12}=\gamma_{22}(\bar{e}\times\bar{A}_u).(\bar{e}\times\bar{A}_v)+\gamma_{12}(\bar{e}\times\bar{A}_v)^2$$
$$2eg+(f+f')^2+2\mu_{11}\mu_{22}+4\mu_{12}^2=\gamma_{11}(\bar{e}\times\bar{A}_v)^2+$$
$$+\gamma_{22}(\bar{e}\times\bar{A}_u)^2+4\gamma_{12}(\bar{e}\times\bar{A}_u).(\bar{e}\times\bar{A}_v)$$

Системата /33/ съдържа 6 неизвестни величини: $\bar{e}$, $\bar{g}$, $f+f'$, $(\bar{e}\times\bar{A}_u)^2$, $(\bar{e}\times\bar{A}_v)^2$, $(\bar{e}\times\bar{A}_u)(\bar{e}\times\bar{A}_v)$. Като елиминираме последните 3 като ненужни, за първите 3 получаваме формулите:

/34/ $$e = \frac{\lambda}{2\gamma_{22}} + \frac{\sqrt{D}}{2\gamma_{22}}, \quad g = \frac{\lambda}{2\gamma_{11}} - \frac{\sqrt{D}}{2\gamma_{11}}$$

$$f + f' = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{22}}\lambda + \frac{AC}{\sqrt{D}}$$

където λ е произволен параметър, който се получава поради това че броят на неизвестните надвишава с един броя на уравненията. Числата, които влизат в /34/ имат вида:

$$D = \frac{4\gamma_{22}B^2 - \gamma_{11}\gamma_{22}A^2 - 2\gamma_{11}AC + \sqrt{\rho^2 + 4A^2C^2}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}$$

/35/ $$\rho = 4\gamma_{22}B^2 - \gamma_{11}\gamma_{22}A^2 - 2\gamma_{12}AC$$

$$A = \mu_{11}\gamma_{22} - \mu_{22}\gamma_{11}, \quad B = \mu_{11}\gamma_{12} - \mu_{12}\gamma_{11}$$

$$C = 2\mu_{12}\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}(\mu_{11}\gamma_{22} + \mu_{12}\gamma_{11})$$

От формулите /34/ за числата e, g, може да се направят някои прости изводи.

Следствие 1. За конгруенция отнесена спрямо разпределителните си роеве, т.е. $\gamma_{12} = 0$, $\mu_{12} = 0$ имаме:

/36/ $$e = \lambda\gamma_{11}, \quad g = \lambda\gamma_{22}$$

$$f + f' = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}(\gamma_{11}\mu_{22} - \gamma_{22}\mu_{11})$$

т.е. коефициентите на Фиников и коефициентите на метричния тензор са пропорционални.

Следствие 2. Коефициентите на Фиников e, g, $f + f'$ съвпадат с компонентите на тензора на Sannia при следните условия:

$$\gamma_{12}(\mu_{11}\gamma_{22} - \mu_{22}\gamma_{11}) = 2\mu_{12}\gamma_{11}\gamma_{22}$$

/37/

$$(\gamma_{11}\mu_{22} - \gamma_{22}\mu_{11})^2 = 4\gamma_{11}\gamma_{22}\mu_{12}^2 - 2\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{12}(\bar{e}\times\bar{b}_2), (\bar{e}\times\bar{b}_1)$$

В частност при $\gamma_{12}=0$, $\mu_{12}=0$ се получават условията:

/38/ $$\frac{\mu_{11}}{\gamma_{11}} = \frac{\mu_{22}}{\gamma_{22}}, \quad (\bar{e}\times\bar{A}_u).(\bar{e}\times\bar{A}_v)=0$$

Първото условие изразява, че разпределителните параметри σ, σ^* са равни, а второто условие е изпълнено, ако точката $\bar{A}$ е централна точка на конгруенцията.

Витлови движения чиито хеликоидални оси образуват конгруенция от даден вид

В глава 1 отбелязахме, че съвкупност от витлови движения представлява двупараметрична система, чиято хеликоидална ос образува конгруенция прави.

Ще разгледаме подвижен триедър, чиято ос $O\zeta$ сключва постоянен ъгъл θ_0 с неподвижната ос Oz. Движения от такъв род се наричат прецесионни и се изучават в различни области на механиката. Допълнително ще приемем, че останалите ойлерови ъгли φ и ψ на подвижния триедър са свързани с релацията:

/39/ $$\varphi = k\psi$$

коефициентът k има самостоятелно значение, т.е. не зависи от времето. Пример за такива движения е разгледан в класическия курс по механика на Г.К.Суслов и се срещат в литературата в един от класическите случаи на движение на твърдо тяло около неподвижна точка, разгледан от Ойлер[1].

1/ Бл.Долапчиев, Теоретична механика, 1966 г. стр. 709

При тези приемания ще разгледаме положението на витловата ос спрямо неподвижната координатна система $Oxyz$. Формулите на Ойлер за компонентите на вектора ротация $\bar{\omega}$ са:

/40/
$$\omega_x = \sin\psi \sin\theta\, \dot\varphi + \dot\theta \cos\psi$$
$$\omega_y = -\cos\psi \sin\theta\, \dot\varphi + \dot\theta \sin\psi$$
$$\omega_z = \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta$$

Приложени за случая $\theta = \theta_0$ и /39/ те добиват вида:

/41/
$$\omega_x = k \sin\psi \sin\theta_0\, \dot\psi$$
$$\omega_y = -k \cos\psi \sin\theta_0\, \dot\psi$$
$$\omega_z = \dot\psi (1 + k\cos\theta_0)$$

Съответно за големината на $\bar{\omega}$ получаваме:

/42/
$$\omega = \dot\psi \sqrt{1 + 2k\cos\theta_0 + k^2}$$

Витловата ос сключва постоянен ъгъл с неподвижната ос. Това се вижда непосредствено от релацията:

/43/
$$\bar{\omega} \cdot \bar{k} = \omega \cos(\widehat{\bar{\omega}, Oz}) = \dot\psi (1 + k\cos\theta_0)$$

или

/44/
$$\cos v = \frac{1 + k\cos\theta_0}{\sqrt{1 + 2k\cos\theta_0 + k^2}}$$

От релацията /44/ следва обратната връзка:

/45/
$$k = \frac{\sin v}{\sin(\theta_0 - v)}$$

По този начин въвеждаме втори параметър v като прецесионният ъгъл, който витловата ос сключва с неподвижната ос Oz. Първият параметър времето t влиза чрез функцията:

$$\dot{\psi} = \sigma(t) \qquad /46/$$

Замествайки k и ψ в /41/ и /42/ получаваме формулите:

$$\omega_x = \dot{\sigma} \frac{\sin\theta_0 \sin v \sin\sigma}{\sin(\theta_0 - v)}$$

$$\omega_y = -\dot{\sigma} \frac{\sin\theta_0 \sin v \cos\sigma}{\sin(\theta_0 - v)} \qquad /47/$$

$$\omega_z = \dot{\sigma} \frac{\sin\theta_0 \cos v}{\sin(\theta_0 - v)}$$

$$\omega = \dot{\sigma} \frac{\sin\theta_0}{\sin(\theta_0 - v)}$$

& 6. Единичен вектор и точка на конгруенция образувана от витловите оси на съвкупност от прецесионни витлови движения.

Ще построим конгруенция прави от витловите оси на разглежданата съвкупност витлови движения. Единичният вектор на конгруенцията

$$\bar{e} = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

въз основа на /47/ добива вида:

$$e_x = \sin v \sin \sigma$$

$$e_y = -\sin v \cos \sigma$$

/48/

$$e_z = \cos v$$

или във векторна форма получаваме:

/49/ $$\bar{e} = \sin v \sin \sigma \, \bar{i} - \sin v \cos \sigma \, \bar{j} + \cos v \, \bar{k}$$

Точката на конгруенцията се определя от известната формула:

/50/ $$\bar{A} = \bar{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega} \times \bar{v}_0)$$

в която $\bar{r}_0$ е произволен полюс спрямо неподвижната координатна система:

/51/ $$\bar{r}_0 = x_0 \, \bar{i} + y_0 \, \bar{j} + z_0 \, \bar{k}$$

Тъй като векторът $\bar{\omega}$ зависи от два независими параметра, то очевидно $\bar{A}$ ще зависи от 5 параметра /допълнително x_0, y_0, z_0 /.
От /49/ и /50/ чрез несложни пресмятания получаваме:

$$A_x = x_0 - \frac{\sin(\theta_0 - v)}{\sin \theta_0}\left(\sin v \cos \sigma \frac{\partial z_0}{\partial \sigma} + \cos v \frac{\partial y_0}{\partial \sigma}\right)$$

$$A_y = y_0 + \frac{\sin(\theta_0 - v)}{\sin \theta_0}\left(\cos v \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} - \sin v \sin \sigma \frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)$$

/52/

$$A_z = z_0 + \frac{\sin(\theta - v)}{\sin \theta_0}\left(\sin \sigma \sin v \frac{\partial y_0}{\partial \sigma} + \sin v \cos \sigma \frac{\partial x_0}{\partial \sigma}\right)$$

Така построената чрез /49/ и /52/ конгруенция зависи от ~~5~~ 3 независими параметра, което позволява чрез тяхното вариране да се образуват конгруенции от различни видове.

& 7. Коефициенти и тензорни характеристики на кинематичната конгруенция.

За построяването на различни типове конгруенции ще е необходимо предварително да се познават техните инварианти и характеристики.

а/ Метричен тензор на конгруенцията.

Компонентите са:

$$\gamma_{11} = \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}\right)^2, \quad \gamma_{12} = \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}\right), \quad \gamma_{22} = \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}\right)^2$$

или от /49/ следва:

/53/ $$\gamma_{11} = \dot{\sigma}^2 \sin^2 v, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = 1$$

б/ Коефициенти на Фиников.

За определяне на коефициентите /15/ от /49/ и /52/ следват стойностите :

/54/ $$e = \frac{\dot{\sigma}^2 \sin v}{\sin \theta_0} \left[\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \cos\sigma \sin\theta_0 + \frac{\partial y_0}{\partial \sigma} \sin\sigma \sin\theta_0 + \sin(\theta_0 - v)\cos v \sin\sigma \frac{\partial^2 x_0}{\partial \sigma^2} - \sin(\theta_0 - v)\cos v \cos\sigma \frac{\partial^2 y_0}{\partial \sigma^2} - \sin(\theta_0 - v)\sin v \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma^2} \right]$$

$$g = \cos v \sin\sigma \frac{\partial x_0}{\partial v} - \cos v \cos\sigma \frac{\partial y_0}{\partial v} - \sin v \frac{\partial z_0}{\partial v} +$$

$$+ \frac{\cos(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0}\left[\sin\sigma \frac{\partial y_0}{\partial\sigma} + \cos\sigma \frac{\partial x_0}{\partial \sigma}\right] -$$

$$- \frac{\sin(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0}\left[\sin\sigma \frac{\partial^2 y_0}{\partial\sigma\partial v} + \cos\sigma \frac{\partial^2 x_0}{\partial\sigma\partial v}\right]$$

$$f' = \frac{\dot\sigma}{\sin\theta_0}\left[\sin\theta_0 \cos v + \sin^2 v \sin(\theta_0 - v)\right]\left(\frac{\partial x_0}{\partial\sigma}\sin\sigma - \frac{\partial y_0}{\partial\sigma}\cos\sigma\right)$$

$$- \frac{\dot\sigma}{\sin\theta_0}\sin(\theta_0 - v)\left[\frac{\partial^2 x_0}{\partial\sigma^2}\cos\sigma + \frac{\partial^2 y_0}{\partial\sigma^2}\sin\sigma\right] - \frac{\partial z}{\partial\sigma}\frac{\dot\sigma}{\sin\theta_0}\frac{\sin^2 v}{\cos(\theta_0 - v)}$$

в/ Компоненти на тензора на Sannia

От /17/, /49/ и /52/ следват компонентите на тензора на Sannia :

$$\mu_{11} = \frac{\dot\sigma^2 \sin v}{\sin\theta_0}\left[\frac{\partial^2 x_0}{\partial\sigma^2}\cos\sigma \sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial^2 y_0}{\partial\sigma^2}\sin\sigma \sin(\theta_0 - v)\right.$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial\sigma}\sin^2 v \cos(\theta_0 - v) - \frac{\partial x_0}{\partial\sigma}\sin\sigma\left(\sin(\theta_0 - v) +\right.$$

$$\left. + \sin v \cos v \cos(\theta_0 - v)\right) + \frac{\partial y_0}{\partial\sigma}\cos\sigma\left[\sin(\theta_0 - v) +\right.$$

/55/

$$\left.\left. + \sin v \cos v \cos(\theta_0 - v)\right]\right]$$

$$\mu_{22} = \frac{\partial x_0}{\partial v}\cos\sigma + \frac{\partial y_0}{\partial v}\sin\sigma + \frac{1}{\sin\theta_0}\left[-\frac{\partial x_0}{\partial\sigma}\sin\sigma \cos(\theta_0 - 2v) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial y_0}{\partial\sigma}\cos\sigma \cos(\theta_0 - 2v) + \frac{\partial z_0}{\partial\sigma}\sin(2v - \theta_0)\right] +$$

$$\frac{\sin(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0}\left[\frac{\partial^2 x_0}{\partial\sigma\partial v}\sin\sigma \cos v - \frac{\partial^2 y_0}{\partial\sigma\partial v}\cos\sigma \cos v - \frac{\partial^2 z_0}{\partial\sigma\partial v}\sin v\right]$$

$$2\mu_{12} = \frac{\dot{\sigma}}{\sin\theta_0}\Big[-\sin v \cos v \sin\sigma \sin\theta_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + \sin v \cos v \sin\theta_0 \frac{\partial y_0}{\partial v} +$$

$$+ \sin^2 v \sin\theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial v} + \frac{\partial x_0}{\partial \sigma}\cos\sigma \cos v \sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial y_0}{\partial \sigma}\sin\sigma \cos v \sin(\theta_0 - v)$$

$$+ \frac{\partial^2 x_0}{\partial \sigma^2}\sin\sigma \cos v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 y_0}{\partial \sigma^2}\cos\sigma \cos v \sin(\theta_0 - v) -$$

$$- \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma^2}\sin v \sin(\theta_0 - v)\Big]$$

& 8. Кинематична W - конгруенция.

Тук ще докажем следната теорема:

Съществува W - конгруенция от витловите оси на съвкупност от витлови движения.

Доказателство. Ще направим специален подбор на функциите x_0, y_0, z_0 при които формулите в предишния параграф значително се опростяват. Приемаме:

$$x_0 = \frac{\cot^n v \cos\sigma}{\sin v \cos(\theta_0 - v)}, \quad y_0 = \frac{\cot^n v \sin\sigma}{\sin v \cos(\theta_0 - v)}$$

/56/

$$z_0 = 0$$

Тогава за метричния тензор и тензора на Sannia получаваме:

$$\gamma_{11} = \dot{\sigma}^2 \sin^2 v, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = 1$$

/57/

$$\mu_{11} = \frac{\cot^n v}{\sin\theta_0}\sin v \cos v\, \dot{\sigma}^2, \quad \mu_{12} = 0,$$

$$\mu_{22} = -\frac{n \cot^{n-1} v}{\sin\theta_0 \sin^2 v}$$

От формулите /25/ за среден и пълен параметър на конгруенцията намираме:

$$2H = \frac{\cot g^{n-1} v}{\sin \theta_0 \sin^2 v} (\cos^2 v - n)$$

/58/

$$K = - \frac{n \cot g^{2n} v}{\sin^2 \theta_0 \sin^2 v}$$

Тогава формулите за средна точка, гранични и фокални точки /26/ добиват вида:

/59/

$$\bar{M}_0 = \bar{A}$$
$$\bar{\Gamma}_{1,2} = \bar{A} \pm \frac{\cot g^n v}{\sin 2v} (n + \cos^2 v) \bar{e}$$
$$\bar{\Phi}_{1,2} = \bar{A} \pm \sqrt{n} \frac{\cot g^n v}{\sin \theta_0 \sin v} \bar{e}$$

От фокалните точки намираме уравненията на фокалните повърнини:

/60/

$$x_0 = \frac{\cot g^n v}{\sin \theta_0} \cos \sigma \pm \sqrt{n} \frac{\cot g^n v}{\sin \theta_0} \sin \sigma$$
$$y_0 = \frac{\cot g^n v}{\sin \theta_0} \sin \sigma \mp \sqrt{n} \frac{\cot g^n v}{\sin \theta_0} \cos \sigma$$
$$z_0 = \pm \frac{\sqrt{n}}{\sin \theta_0} \cot g^n v$$

и техните гаусови кривини:

/61/ $$K_1 = K_2 = \frac{\sin^2 v \cos^2 v}{\cot g^{2n} v \, (n + \cos^2 v)^2}$$

От формулите за граничните точки намираме разстоянието между тях:

/62/ $$d = \frac{\cot g^{n} v}{\sin v \cos v}\left(n+\cos^{2} v\right)$$

От /61/ и /62/ непосредствено се проверява, че за така построената конгруенция е изпълнено уравнението:

/63/ $$K_1 K_2 = \frac{1}{d^4}$$

необходимо и достатъчно условие за W-конгруенция.

& 9. Кинематична изотропна конгруенция.

Условията една конгруенция да бъде изотропна е граничните й точки да съвпадат. От уравненията за граничните точки условие се изразява чрез релациите:

/64/ $$\frac{e}{\gamma_{11}} = \frac{f+f'}{2\gamma_{12}} = \frac{g}{\gamma_{22}}$$

където e, g, f, f' са коефициентите на Фиников.

За построяването на кинематична изотропна конгруенция предварително ще е необходимо да опростим споменатите коефициенти. За тази цел избираме полюсът на подвижната система O / x_0, y_0, z_0 / да има вида:

/65/ $$x_0 = z\cos\sigma$$
$$y_0 = z\sin\sigma$$

т.е. проекцията му да лежи върху линията на възлите по която се пресичат неподвижната и подвижната равнина. В този случай метричния тензор /53/ се запазва, но тензорът на Sannia и коефициентите на Фиников добиват вида:

$$\mu_{11} = \frac{\dot{\sigma}^2 \sin v}{\sin\theta_0}\left[\tau \sin v \cos v \cos(\theta_0 - v) + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2}\sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\sin^2 v \cos(\theta_0 - v)\right]$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\sin\theta_0}\left[\tau \cos(2v - \theta_0) + \frac{\partial z}{\partial v}\sin v \cos(\theta_0 - v) + \frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\sin(2v - \theta_0) - \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma \partial v}\sin v \sin(\theta_0 - v)\right]$$

/66/

$$2\mu_{12} = \frac{\dot{\sigma}}{\sin\theta_0}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial v}\sin v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial z}{\partial \sigma}\cos v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma^2}\sin v \sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial z_0}{\partial v}\sin\theta_0 \sin^2 v\right]$$

$$e = \frac{\dot{\sigma}^2 \sin v \sin(2v - \theta_0)}{\sin\theta_0}\frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma^2}\dot{\sigma}^2\frac{\sin^2 v \sin(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0}$$

/67/

$$g = \frac{\cos(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0}\frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial v}\frac{\sin(\theta_0 - v)}{\sin\theta_0} - \sin v \frac{\partial z_0}{\partial v}$$

$$f = \frac{\dot{\sigma}\sin v}{\sin\theta_0}\left[\tau \cos(\theta_0 - 2v) + \frac{\partial z}{\partial v}\sin v \cos(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma \partial v}\sin v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\sin(\theta_0 - 2v)\right]$$

Както отбелязахме компонентите на метричния тензор остават същите:

/68/ $$\gamma_{11} = \dot{\sigma}^2 \sin^2 v, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = 1$$

Тогава условията /64/ за изотропна конгруенция добиват вида:

/69/ $$f + f' = 0$$ $$\frac{e}{\gamma_{11}} = \frac{g}{\gamma_{22}}$$

Приложени за /69/ тези уравнения добиват вида:

/70/ $$z \sin^2 v \sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial z}{\partial v} \sin^2 v \cos(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma \partial v} \sin^2 v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial z_0}{\partial \sigma} \sin v \cos v \sin(\theta_0 - v) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} \cos v \sin(\theta_0 - v) + \frac{\partial^2 z_0}{\partial \sigma^2} \sin v \sin(\theta_0 - v) - \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial v} \sin v \sin(\theta_0 - v) - \sin^2 v \sin\theta_0 \frac{\partial z_0}{\partial v} = 0$$

Тази система допуска частното решение:

/71/ $$z_0 = a\sigma$$ $$z = a \operatorname{tg}(\theta_0 - v) + a \sin\theta_0 \frac{\ln \operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\cos(\theta_0 - v)}$$

от където полюсът /65/ е определен. Що се касае за ойлеровите ъгли на подвижния триедър те са определени от условията за прецесионни движения.

& 10. Кинематична псевдосферична конгруенция.

Една конгруенция се нарича псевдосферична, когато разпределителните параметри на разпределителните роеве са постоянни, т.е.

/72/ $$c = const. \qquad c^* = const.$$

Нека полюсът $/ x_0, y_0, z_0 /$ на подвижната система се дава от формулите:

$$x_0 = c\,\sigma \sin\sigma \frac{\sin v \sin\theta_0}{\sin(\theta_0 - v)}$$

$$y_0 = -c\,\sigma \cos\sigma \frac{\sin v \sin\theta_0}{\sin(\theta_0 - v)}$$

/73/ $$z_0 = c\,\sigma \frac{\cos v \sin\theta_0}{\sin(\theta_0 - v)}$$

а единичният вектор е даден с формула /49/. Тогава точката на конгруенцията е определена от формулите:

$$A_x = c\,\sigma \sin\sigma \sin^2 v \cot g(\theta_0 - v)$$

$$A_y = -c\,\sigma \cos\sigma \sin^2 v \cot g(\theta_0 - v)$$

/74/ $$A_z = c\,\sigma \frac{\sin\theta_0 \cos v + \sin^2 v \sin(\theta_0 - v)}{\sin(\theta_0 - v)}$$

Тогава лесно се проверява, че компонентите на Sannia са пропорционални на компонентите на метричния тензор, при което $c^* = 0$. Този резултат показва, че построената конгруенция е псевдосферична от параболичен тип, понеже:

/75/ $$K = c \cdot c^{*} = 0$$

& 11. Кинематична конгруенция на Бианки.

Конгруенция отнесена спрямо разпределните си роеве удовлетворява уравненията:

/76/ $$\frac{\mu_{11}}{\gamma_{11}} = c\,, \qquad \frac{\mu_{22}}{\gamma_{22}} = c^{*}$$

където μ_{11}, μ_{22} са компоненти на тензора на Sannia, γ_{11}, γ_{22}, γ_{12} компоненти на метричния тензор, c, c^{*}, разпределителните параметри. Когато c, c^{*}, които изобщо са функции на параметрите, имат вида:

/77/ $$c = c(\sigma)$$
$$c^{*} = c^{*}(v)$$

конгруенцията е на Бианки.

Ще построим кинематична конгруенция, която е на Бианки. Избираме единичния вектор от вида:

/78/ $$\bar{e} = -\sin v \frac{d\bar{g}}{d\sigma} + \cos v\, \bar{k}$$

и съответно точката на конгруенцията:

/79/ $$\bar{A} = \lambda \bar{g} + \mu \frac{d\bar{g}}{d\sigma} + z_0 \bar{k}$$

Тук единичният вектор $\bar{g}$ има вида:

/80/ $$\bar{g} = \cos\sigma\, \bar{i} + \sin\sigma\, \bar{j}$$

За тензорите на конгруенцията получаваме директно:

$$\gamma_{11} = \sin^2 v, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = 1$$

/81/ $$\mu_{11} = \left(\lambda + \frac{d\mu}{d\sigma}\right)\sin v \cos v + \sin^2 v \frac{\partial z_0}{\partial \sigma}$$

$$\mu_{22} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad \mu_{12} = \frac{1}{2}\left[\sin^2 v \frac{\partial z_0}{\partial v} + \sin v \cos v \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - \mu\right]$$

Прилагаме релациите /76/ при условията /77/ и същевременно $\mu_{12} = 0$ от където следва:

$$\cos v\left(\lambda + \frac{\partial \mu}{\partial \sigma}\right) + \sin v \frac{\partial z_0}{\partial \sigma} = \sin v \, c(\sigma)$$

/82/ $$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = c^*(v), \quad \sin^2 v \frac{\partial z_0}{\partial v} + \sin v \cos v \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - \mu = 0$$

Тази система допуска решението:

/83/ $$\lambda = c \operatorname{tg} v, \quad \mu = 0, \quad z_0 = \int c \, d\sigma - c\sigma$$

при което разпределителните параметри са:

/84/ $$c = c(\sigma), \quad c^* = \frac{c}{\cos^2 v}$$

Така окончателно получаваме кинематичната конгруенция на Бианки:

/85/ $$\bar{e} = -\sin v \frac{d\bar{g}}{d\sigma} + \bar{k} \cos v$$

$$\bar{A} = c \operatorname{tg} v \, \bar{g} + \bar{k}\left[\int c \, d\sigma - c\sigma\right]$$

& 12. Конгруенция от витловите оси при движение на твърдо тяло във флуид.

Координатната система $Oxyz$ е неизменно свързана с тяло, движещо се във флуид спрямо неподвижната координатна система O_1XYZ. Нека $\bar{u}$ е скоростта на и $\bar{\omega}$ ротационната скорост на тялото. Тогава витловата ос на тялото се дава с :

$$\bar{r} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{u}}{\omega^2} + \lambda \bar{\omega} \tag{66}$$

или в координати:

$$\xi_1 = \frac{\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2}{\omega^2} + \lambda \omega_1 \qquad \xi_3 = \frac{\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1}{\omega^2} + \lambda \omega_3 \tag{67}$$

$$\xi_2 = \frac{\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3}{\omega^3} + \lambda \omega_2$$

В работите на Ляпунов, Чаплигин, Харламов е показано, че съществува движение на твърдо тяло във флуид, при равномерна ротация и транслация, т.е. при постоянни $\bar{u}$ и $\bar{\omega}$. В този случай витловата ос /67/ зависи от два параметра, определящи направлението на вектора $\bar{\omega}$. Такъв случай в литературата подробно е разгледан от П.В.Харламов в статията "Конгруенция осей винтового движения" ДАН, УССР, сер. А, 7 /1967/

Кинематичен смисъл на инвариантите на роя образуван от витловите оси на произволно хеликоидално движение.

Съвкупност от витлови движения представлява двупараметрична система, чиято хеликоидална ос образува конгруенция прави. Произволно витлово движение зависи от един параметър - времето, т.е. витловата му ос образува рой прави. Ще изследваме кинематичния смисъл на инвариантите на този рой в най-общ вид.

& 13. Централен триедър на кинематичен рой образуван от витловите оси на произволно витлово движение.

Произволно витлово движение е дадено с полюс $\bar{r}_o(t)$ и ротационен вектор $\bar{\omega}(t)$, дефиниран от съответните ойлерови ъгли. Тогава роят, дефиниран от това движение е определен с точка:

/67/ $$\bar{A} = \bar{r}_o + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega} \times \bar{v}_o)$$

и вектор
$$\bar{e} = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

Централният триедър на роя е дефиниран с векторите $\bar{e}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$, които са свързани с известните формули на Френе:

/68/ $$\frac{d\bar{e}}{d\sigma} = \bar{g}, \quad \frac{d\bar{g}}{d\sigma} = -\bar{e} + \alpha\bar{h}, \quad \frac{d\bar{h}}{d\sigma} = -\alpha\bar{g}$$

От /67/ и /68/ намираме централния триедър на кинематичния рой:

$$\bar{e} = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

/69/ $$\bar{g} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[\frac{\bar{\varepsilon}}{\omega} - \frac{\omega'}{\omega^2}\,\bar{\omega}\right]$$

$$\bar{h} = \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\left[\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}\right]$$

където

/70/ $$\sqrt{\gamma} = \sigma'$$

σ - естественият параметър на роя. Формулите /69/ определят напълно централния триедър чрез ротационния вектор $\bar{\omega}$ и ъгловото ускорение $\bar{\varepsilon}$ на витловото движение.

& 14. Кинематичен смисъл на ротацията α на роя.

Ще изразим инвариантът ротация α чрез компонентите на кинематичния вектор $\bar{\omega}$ и неговите производни. За тази цел изхождаме от последната формула /69/ :

/71/ $$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\right](\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) + \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\,(\bar{\omega} \times \dot{\bar{\varepsilon}})$$

От друга страна:

/72/ $$\frac{d\bar{h}}{dt} = -\alpha\bar{g}\,\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha\bar{g}\sqrt{\gamma}$$

От изравняването на /71/ и /72/ се получава:

/73/ $$-\alpha\bar{g}\sqrt{\gamma} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\right](\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) + \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\,(\bar{\omega} \times \dot{\bar{\varepsilon}})$$

Умножаваме /73/ с $\bar{g}$ и получаваме:

$$/74/ \quad -\alpha\sqrt{\gamma} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\right](\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})\cdot\bar{g} + \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{\omega}\times\dot{\bar{\varepsilon}})\cdot\bar{g}$$

или въз основа на втората формула от /69/ получаваме:

$$/75/ \quad \alpha\sqrt{\gamma} = \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{\omega},\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}})\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}$$

т.е.

$$/75^1/ \quad \alpha = \frac{1}{\omega^3(\sqrt{\gamma})^3}(\bar{\omega},\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}})$$

Спрямо неподвижната система $OXYZ$ изразяваме $\bar{\omega}$ и неговите производни:

$$/76/ \quad \begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{\omega}_x\bar{i} + \dot{\omega}_y\bar{j} + \dot{\omega}_z\bar{k} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= \ddot{\omega}_x\bar{i} + \ddot{\omega}_y\bar{j} + \ddot{\omega}_z\bar{k} \end{aligned}$$

от където /75¹/ добива вида:

$$/77/ \quad \alpha = \frac{1}{\omega^3(\sqrt{\gamma})^3}\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z \\ \ddot{\omega}_x & \ddot{\omega}_y & \ddot{\omega}_z \end{vmatrix}$$

Спрямо подвижният триедър $Oxyz$ имаме следното изразяване:

$$/78/ \quad \begin{aligned} \bar{\omega} &= p\,\bar{x}_0 + q\,\bar{y}_0 + r\,\bar{z}_0 \\ \bar{\varepsilon} &= \dot{p}\,\bar{x}_0 + \dot{q}\,\bar{y}_0 + \dot{r}\,\bar{z}_0 \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= \ddot{p}\,\bar{x}_0 + \ddot{q}\,\bar{y}_0 + \ddot{r}\,\bar{z}_0 + \bar{\omega}\times\bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

или

$$/79/ \quad \alpha = \frac{1}{\omega^3(\sqrt{\gamma})^3}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \\ \ddot{p} & \ddot{q} & \ddot{r} \end{vmatrix} + \frac{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}{\omega^3(\sqrt{\gamma})^3}$$

Получените формули показват, че α е диференциален инвариант от втори ред относно компонентите на ротационния вектор.

& 15. Централна точка на кинематичния рой и нейното изразяване чрез кинематични инварианти.

В & 13 видяхме, че точката $\overline{A}$ на роя се определя от /67/ чрез полюса $\overline{r}_0$ и ротационния вектор $\overline{\omega}$. Това представяне на $\overline{A}$ създава известен произвол поради различния избор на полюса $\overline{r}_0$.

От теорията на роевете е известно съществуването на централна точка $\overline{Z}$, която се дефинира аналитично чрез формулата:

/80/ $$\overline{Z} = \overline{A} - \frac{\dot{\overline{A}} \cdot \dot{\overline{e}}}{\dot{\overline{e}}^2} \overline{e}$$

Същата точка се дефинира конструктивно като гранично положение на общия перпендикуляр на две съседни прави от роя, т.е. нейната дефиниция е инвариантна спрямо точката $\overline{A}$, параметъра и координатната система.

Аналитично витловата ос се представя чрез уравнението:

/81/ $$\overline{A} = \overline{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\overline{\omega} \times \overline{v}_0) + \lambda \overline{\omega}$$

Да означим точката $\overline{A}_0$, която представлява ортогоналната проекция на $O/0, 0, 0/$ върху същата ос, т.е.

/82/ $$\overline{A}_0 . \overline{\omega} = 0$$

От /81/ намираме:

/83/ $$\overline{A}_0 = \overline{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\overline{\omega} \times \overline{v}_0) + \lambda_0 \overline{\omega}$$

Като следствие от /82/ и /83/ намираме:

/84/ $$\overline{r}_0 . \overline{\omega} + \lambda_0 \omega^2 = 0$$

или

/85/ $$\lambda_0 = -\frac{\bar{r}_0 . \bar{\omega}}{\omega^2}$$

След заместване в /83/ намираме:

/86/ $$\bar{A}_0 = \bar{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega} \times \bar{v}_0) - \frac{\bar{r}_0 . \bar{\omega}}{\omega^2}\bar{\omega}$$

Тогава за централната точка се получава:

/87/ $$\bar{Z} = \bar{A}_0 - \frac{\dot{\bar{A}}_0 \dot{\bar{e}}}{\dot{\bar{e}}^2}\bar{e}$$

или след известно преобразуване намираме:

/88/ $$\bar{Z} = \bar{A}_0 + \frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}\left[\bar{h} . \bar{W}_{A_0}\right]\bar{e}$$

Това е аналитичният израз на централната точка, който само привидно зависи от координатната система.

& 16. Друг инвариантен израз за ценралната точка.

Ще дадем друг израз на формулата /88/, която да зависи от кинематични инварианти. За тази цел ще изходим от формула за разпределение на ускоренията по витловата ос. От общата формула на Ривалс

/89/ $$\bar{W}_M = \bar{\varepsilon} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OM})$$

като заместим

$$\overline{OM} = \frac{OM}{\omega}\bar{\omega}$$

получаваме:

/90/ $$\bar{W}_M = \frac{OM}{\omega}(\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega})$$

Това е формулата за разпределение на ускоренията на точките от витловата ос, в случай, че двете точки O и M лежат на витловата ос. Друг вид ще има формулата, ако за полюс изберем, напр. точката Q, наречена моментен център на ускоренията. Тогава от /89/ получаваме:

$$\overline{W}_M = \overline{\varepsilon} \times \overline{QM} + (\overline{\omega} \cdot \overline{QM})\,\overline{\omega} - \omega^2\,\overline{QM} \tag{91}$$

или, ако вземем

$$\overline{QM} = \overline{QI} + \overline{IM} \tag{92}$$

получаваме:

$$\overline{W}_M = \frac{IM}{\omega}(\overline{\varepsilon} \times \overline{\omega}) + \overline{\varepsilon} \times \overline{IQ} - \omega^2\,\overline{IQ} \tag{93}$$

Формулата /93/ приложена за /88/ ни дава релацията:

$$\overline{W}_M = \frac{IM}{\omega^2}(\overline{\varepsilon} \times \overline{\omega}) + \overline{\varepsilon} \times \overline{IQ} - \omega^2\,\overline{IQ} \tag{94}$$

След съответни кинематични преобразования получаваме:

$$\overline{Z} = \overline{I} - \left[\frac{\dot{u}}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\dot{\omega}}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\,(\overline{\varepsilon} \cdot \overline{IQ})\right]\overline{e} \tag{95}$$

където u е транслационната скорост на витловата ос.

Формулата /95/ за централната точка очевидно зависи само от кинематични инварианти. От тук в частност имаме следната:

Теорема Витловото движение с равномерна ротация и транслация, т.е.

$$u = const. \qquad \omega = const. \tag{96}$$

има просто тълкуване за централната точка на витловия рой. Последната представлява ортогоналната проекция на моментния център на ускоренията $\bar{I}$ върху витловата ос, т.е.

$$\bar{Z} = \bar{I}$$

& 17. Кинематичен смисъл на разпределителния параметър и хлъзгането на кинематичния рой.

От теория на роевете е известно, че централната точка $\bar{Z}$ на роя е свързана с два основни инварианта, съгласно формулата:

/97/ $$\frac{d\bar{Z}}{d\sigma} = a\bar{e} + c\bar{h}, \quad \frac{d\bar{Z}}{dt} = \sqrt{\gamma}(a\bar{e} + c\bar{h})$$

От кинематичното изразяване на централната точка непосредствено следва кинематичния смисъл на a и c. Наистина, от /97/ получаваме:

/98/ $$c = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}[\dot{\bar{Z}}.\bar{h}]$$

или

/99/ $$c = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}[\dot{\bar{I}}.\bar{h}]$$

Въз основа на известни кинематични релации получаваме:

/100/ $$c = -\frac{u}{\omega} - \frac{\dot{u}\dot{\omega}}{\omega^2\gamma} + \frac{\bar{\varepsilon}.\bar{I}\bar{Q}}{\gamma}$$

Аналогично представяне имаме и за инварианта a. От /97/ следва:

/101/ $$a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\dot{\bar{Z}}.\bar{e})$$

или

/102/ $$a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[\bar{e}.\dot{\bar{I}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\acute{\bar{e}}.\dot{\bar{I}}}{\gamma}\right]\right]$$

След съответни кинематични преобразования намираме:

/103/ $$a = \frac{u}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\bar{\varepsilon}.\bar{I}\bar{Q}}{\omega\sqrt{\gamma}} + \frac{\dot{\omega}}{\omega^3\gamma}(\acute{\bar{w}}_Q.\bar{\varepsilon}) + \frac{1}{\omega\gamma}(\acute{\bar{w}}_Q.\bar{\omega}) +$$
$$+ \frac{1}{\omega^3\gamma}(\acute{\bar{w}}_Q, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\acute{u}}{\gamma} + \frac{\dot{\omega}}{\omega^3\gamma}(\bar{\varepsilon}.\bar{I}\bar{Q})\right]$$

Съвкупност от витлови движения съответствуващи на дадена конгруенция

Ще разглезаме проблема за построяването на съвкупността на всички витлови движения, които съответствуват на дадена конгруенция прави. В резултат на построението се получават както прецесионни, така и непрецесионни движения.

& 18. Построяване на ойлеровите ъгли на подвижния триедър при даден единичен вектор на конгруенцията.

Даден е единичният вектор на конгруенцията във вида:

/104/ $$\bar{e}(\sigma, v) = e_x\bar{i} + e_y\bar{j} + e_z\bar{k}$$

Предполагаме, че компонентите e_x, e_y, e_z са такива функции на параметрите σ, v щото да се удовлетворява уравнението:

/105/ $$\frac{\partial e_x}{\partial \sigma} = -e_y, \quad \frac{\partial e_y}{\partial \sigma} = e_x$$

Това очевидно е възможно, когато векторът $\bar{e}$ има вида:

$$
\begin{aligned}
e_x &= A(v)\cos\sigma + B(v)\sin\sigma \\
e_y &= A(v)\sin\sigma - B(v)\cos\sigma \qquad /106/ \\
e_z &= \sqrt{1-A^2-B^2}\,.
\end{aligned}
$$

$A(v),\ B(v)$ - произволни функции

Това представяне на единичния вектор не намалява общността на постановката, понеже е винаги възможна при съответна смяна на параметрите.

Сега даваме следната постановка на проблема: При дадения единичен вектор /106/ да се определят ойлеровите ъгли φ, ψ, θ на подвижния триедър за случая на прецесионни движения, т.е.

/107/ $\theta = \theta_0 = const.$

Изхождайки от равенството:

/108/ $\bar{\omega} = \omega\,\bar{e}$

след проектиране върху координатните оси получаваме:

$$
\begin{aligned}
\omega e_x &= \sin\theta_0 \sin\psi\ \dot{\varphi} \\
\omega e_y &= -\sin\theta_0 \cos\psi\ \dot{\varphi} \qquad /109/ \\
\omega e_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta_0
\end{aligned}
$$

От първите две уравнения намираме:

$$
\begin{aligned}
\cos\psi &= \frac{e_y}{\sqrt{1-e_z^2}} \\
\sin\psi &= -\frac{e_x}{\sqrt{1-e_z^2}} \qquad /110/
\end{aligned}
$$

Чрез диференциране спрямо времето намираме:

/111/ $$\dot{\psi} = \dot{\sigma}$$

За определяне на ω и $\dot{\varphi}$ изхождаме от системата /109/. От първите две уравнения на /109/ намираме:

/112/ $$\omega\sqrt{1-e_z^2} = \dot{\varphi}\sin\theta_0$$

От третото уравнение на /109/ намираме:

/113/ $$\omega = \frac{\dot{\sigma}\sin\theta_0}{\sin\theta_0\, e_z + \cos\theta_0\sqrt{1-e_z^2}}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\sigma}\sqrt{1-e_z^2}}{e_z\sin\theta_0 + \cos\theta_0\sqrt{1-e_z^2}}$$

По този начин са определени ойлеровите ъгли на подвижния триедър и големината на ъгловата скорост при тези прецесионни движения.

& 19. Построяване на полюсът на витловите движения при дадена точка на конгруенцията.

Конгруенцията освен с единичния вектор /106/ е дадена чрез точката:

/114/ $$\bar{A} = \bar{A}(\sigma, v)$$

Полюсът на витловите движения е определен от уравнението:

/115/ $$\bar{r}_0 + \frac{\dot{\sigma}}{\omega}\left(\bar{e}\times\frac{d\bar{r}_0}{d\sigma}\right) = \bar{A} + \lambda\,\bar{e}$$

където λ е произволна функция. Векторът $\bar{r}_0$ представяме във вида:

/116/ $$\bar{r}_0 = \alpha\,\bar{e} + \beta\,\bar{z}^0 + \gamma(\bar{e}\times\bar{z}^0)$$

където α, β, γ са функции на параметрите.

Тук $\bar{k}$ е единичният вектор на неподвижната координатна система.

Съгласно /105/ получаваме:

$$\frac{d\bar{e}}{d\sigma} = \bar{z}^0 \times \bar{e} \tag{117}$$

След диференциране на /116/ и съобразявайки /117/ намираме:

$$\frac{d\bar{z}_0}{d\sigma} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma} - \gamma\right)\bar{e} + \bar{z}^0\left[\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} + \gamma e_z\right] + (\bar{e}\times\bar{z}^0)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} - \alpha\right) \tag{118}$$

Умножаваме векторно /118/ с $\bar{e}$ и получаваме:

$$\begin{aligned}\bar{e}\times\frac{d\bar{z}_0}{d\sigma} = {} & \bar{e}\cdot e_z\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} - \alpha\right) + \bar{z}^0\left(\alpha - \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right) + \\ & + (\bar{e}\times\bar{z}^0)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} + \gamma e_z\right)\end{aligned} \tag{119}$$

Заместваме в /115/ равенствата /116/, /118/ и /119/. В резултат се получава релацията:

$$\begin{aligned}& \alpha\bar{e} + \beta\bar{z}^0 + \gamma(\bar{e}\times\bar{z}^0) + \frac{\dot{\sigma}}{\omega}\Big[\bar{e}\cdot e_z\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} - \alpha\right) + \\ & + \left(\alpha - \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)\bar{z}^0 + (\bar{e}\times\bar{z}^0)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} + \gamma e_z\right)\Big] = \bar{A} + \lambda\bar{e}\end{aligned} \tag{120}$$

Умножаваме последователно /120/ с векторите $\bar{e}$, $(\bar{e}\times\bar{z}^0)$, $\bar{z}^0$ и получаваме зависимостите:

$$\begin{aligned}& \alpha + \beta e_z = (\bar{A}\cdot\bar{e}) + \lambda \\ & \gamma(1-e_z^2) + \frac{\dot{\sigma}}{\omega}(1-e_z^2)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} + \gamma e_z\right) = (\bar{A}, \bar{e}, \bar{z}^0) \\ & \alpha e_z + \beta + \frac{\dot{\sigma}}{\omega}(1-e_z^2)\left(\alpha - \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right) = A_z + \lambda e_z\end{aligned} \tag{121}$$

Системата /121/ съдържа 4 неизвестни и поради това има безбройно много решения. Тук ще дадем едно конкретно решение на тази система. То е:

$$\alpha = \frac{\omega}{\dot{\sigma}(1-e_z^2)}\left[A_z - e_z(\bar{A}.\bar{e}) - \frac{\omega}{\dot{\sigma}} J\right]$$

/122/

$$\beta = \frac{\omega J}{\dot{\sigma}(1-e_z^2)}, \quad \gamma = 0$$

където

/123/ $$J = \int (\bar{A}, \bar{e}, \bar{z}_0)\, d\sigma = \int (A_x e_y - A_y e_x)\, d\sigma$$

За това конкретно решение полюсът има вида:

/124/ $$J = \int (\bar{A}, \bar{e}, \bar{z}_0)\, d\sigma = \int (A_x e_y - A_y e_x)\, d\sigma$$

$$\bar{r}_0 = \frac{\omega}{\dot{\sigma}(1-e_z^2)}\left[A_z - e_z(\bar{A}.\bar{e})\right]\bar{e} + \frac{\omega J}{\dot{\sigma}(1-e_z^2)}\bar{z}_0$$

С това е завършено построяването на съвкупност от витлови прецесионни движения съответствуващи на дадена конгруенция ($\bar{e}$ $\bar{A}$).

& 20. Построяване на всички хеликоидални движения съответствуващи на дадена конгруенция.

Следвайки метода на G. Darbo- въвеждаме помощната величина:

$$\lambda = -i \cot g \frac{\theta}{2} e^{i\psi} \tag{125}$$

която удовлетворява диференциалното уравнение на Рикати:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{i\omega_x + \omega_y}{2} \lambda^2 + i\omega_z \lambda + \frac{i\omega_x - \omega_y}{2} \tag{126}$$

Тук i е имагинерната единица. Вместо t въвеждаме параметъра σ и получаваме:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\omega}{\dot{\sigma}} \left[-\frac{ie_x + e_y}{2} \lambda^2 + ie_z \lambda + \frac{ie_x - e_y}{2} \right] \tag{127}$$

Диференциалното уравнение /127/ дефинира величината λ чрез компонентите на конгруенцията. От друга страна /125/ определя ойлеровите ъгли θ и ψ чрез същата величина λ. Следователно λ се явява връзка между ойлеровите ъгли и компонентите на конгруенцията.

Диференциалното уравнение на Рикати /127/ допуска частното решение:

$$\lambda_0 = -i \cot g \frac{\theta_0}{2} \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{1 - e_z^2}} \tag{128}$$

а от тук и общото решение:

$$\lambda = -i \cot g \frac{\theta_0}{2} \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{1 - e_z^2}} + \frac{f_2 e^{i\sigma(1+p)}}{e^{if_2} + \frac{1}{2} f_1 \sin\theta_0} \tag{129}$$

където f_1, f_2 са произволни функции на v, и

/130/ $$p = \frac{1}{\sin\theta_0}\,\frac{\omega}{\dot{\sigma}}\sqrt{1-e_z^2}$$

От определянето на λ непосредствено се намират ойлеровите ъгли:

/131/ $$\sin\psi = -\frac{e_x}{\sqrt{1-e_z^2}}\,\frac{\cot g\frac{\theta_0}{2}}{\cot g\frac{\theta}{2}}\,\frac{0{,}5 f_1^2 e_x \sin\theta_0 + f_1}{Q\cot g\frac{\theta}{2}}$$

$$\cot g\frac{\theta}{2} = \sqrt{\cot g^2\frac{\theta_0}{2} - \frac{a}{Q} + \frac{b}{Q^2}}$$

и в зависимост от тях

/132/ $$\varphi = \frac{\omega}{\dot{\sigma}}\int\frac{e_x\sin\psi - e_y\cos\psi}{\sin\theta}\,d\sigma$$

където a , b , Q са известни функции на параметрите.

Аналогично обобщение се получава и за координатите на подвижното начало, за които се получават релациите:

$$\alpha = \frac{\omega}{\dot{\sigma}}\,\frac{A_z - e_z(\bar{A}.\bar{e}) - \frac{\omega}{\dot{\sigma}}J}{1-e_z^2} + f_4\sin\left(\frac{\omega}{\dot{\sigma}} - e_z\right)\sigma$$

/133/ $$\beta = \frac{\omega}{\dot{\sigma}}\,\frac{J}{1-e_z^2} - f_4(v)\sin\left(\frac{\omega}{\dot{\sigma}} - e_z\right)\sigma$$

$$\gamma = f_4(v)\cos\left(\frac{\omega}{\dot{\sigma}} - e_z\right)\sigma + f_5(v)\sin\left(\frac{\omega}{\dot{\sigma}} - e_z\right)\sigma$$

От тук формула /116/ определя полюсът на всички хеликоидални движения.

& 21. Построяване на двойка хеликоидални движения, чиито витлови оси образуват разслояема двойка конгруенции

С проективното понятие разслояема двойка конгруенции ще се занимаем по-подробно в следващите параграфи. Тук ще покажем, че може да се построи конкретна двойка конгруенции, която е разслояема, основавайки се на резултатите от предните параграфи.

Съгласно една теорема [12] граничните роеве на произволна псевдосферична конгруенция образуват разслояема двойка конгруенции.

Въвеждаме векторите

$$\bar{e} = \bar{e}(\sigma, v) \quad ; \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\sigma, v) \tag{134}$$

които са централна точка и единичен вектор на псевдосферична конгруенция отнесена спрямо разпределителните си роеве.

Граничните роеве на конгруенцията /134/ се определят от векторите:

$$\bar{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}\right] \tag{135}$$

и точките:

$$\bar{\eta} = \bar{\zeta} - \varepsilon \frac{c - c^*}{2} \bar{e} \tag{136}$$

където γ_{11}, γ_{22} е метричния тензор на $\bar{e}$, c, c^* разпределителните параметри на /134/.

Съгласно развитата теория в предните параграфи на векторите /135/ и точките /136/ може да се построи съвкупност от хеликоидални движения, чиито витлови оси съвпадат с дадените конгруенции. От друга страна тези конгруенции образуват разслояема двойка съгласно цитираната теорема.

Аналитично изразяване на общите условия за разслояемост на двойка конгруенции.

В проективната диференциална геометрия важно място заема теорията на разслояемите двойки конгруенции. С помощта на тази теория се решават редица задачи имащи геометрично значение относно проективните и метрични свойства.

& 21. Двойка витлови движения. Разслояващи повърхнини.

Дадени са витловите движения:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}, \quad \bar{A}_1 = \bar{r}_1 + \frac{1}{\omega_1}\left(\bar{\omega}_1 \times \frac{d\bar{r}_1}{dt}\right) \tag{137}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}, \quad \bar{A}_2 = \bar{r}_2 + \frac{1}{\omega_2}\left(\bar{\omega}_2 \times \frac{d\bar{r}_2}{dt}\right) \tag{138}$$

В предните параграфи видяхме, че по дадени вектор и точка се определя съвкупността от всички хеликоидални движения. Поставяме следния общ проблем : Какви зависимости трябва да съществуват между векторите /137/ и /138/ щото да се образува двустранно разслояема двойка. Повърхнината:

$$\bar{x} = \bar{A}_1(\sigma, v) + p(\sigma, v)\, \bar{e}_1(\sigma, v) \tag{139}$$

където $p(\sigma, v)$ е двукратно диференцируема функция се нарича разслояваща повърхнина за $\bar{e}_1$, $\bar{A}_1$. Аналогично повърхнината

$$\bar{x} = \bar{A}_2(\sigma, v) + q(\sigma, v)\, \bar{e}_2(\sigma, v) \tag{140}$$

се нарича разслояваща за конгруенцията $\bar{e}_2, \bar{A}_2$.

Условието за разслояемост между /137/ и /138/ се изразява така: тангециалните равнини към /139/ да съдържат правата на конгруенцията $\bar{e}_2$, $\bar{A}_2$. Същото условие се изразява обратно от /138/

към /137/.

§ 22. Условията за разслояемост изразени във векторна форма.

Тангенциалната равнина към /139/ се определя от векторите:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\bar{e}_1 + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\bar{e}_1 + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} \tag{141}$$

Тази равнина съдържа също векторите:

$$\bar{e}_2, \quad \bar{x} - \bar{A}_2 = \bar{A}_1 - \bar{A}_2 + p\bar{e}_1 \tag{142}$$

Прилагайки условието за компланарност на 3 вектора получаваме уравненията :

$$\begin{aligned} &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right) = 0 \\ &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = 0 \end{aligned} \tag{143}$$

или заествайки /141/ намираме :

$$\begin{aligned} &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\bar{e}_1 + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) = 0 \\ &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\bar{e}_1 + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) = 0 \end{aligned} \tag{144}$$

От /144/ се получават уравненията :

$$\begin{aligned} &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial p}{\partial t}\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_1\right) = 0 \\ &\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v} + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) + \frac{\partial p}{\partial v}\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_1\right) = 0 \end{aligned} \tag{145}$$

или съответно

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)}{\left(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{x}-\bar{A}_2\right)} \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \frac{\left(\bar{x}-\bar{A}_2,\ \bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v} + p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right)}{\left(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{x}-\bar{A}_2\right)} \end{aligned} \tag{146}$$

Тук величината $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{x} - \bar{A}_2) \neq 0$, което изразява, че витловите оси на движенията не се пресичат, т.е. образуват кръстосани прави.

& 23. Условия за интегруемост на параметъра на разслояващите повърхнини.

По предположение параметърът $p(\sigma, v)$ е двукратно диференцируема функция относно аргументите σ, v, т.е. имаме:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\sigma\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial v\partial\sigma} \tag{147}$$

Тези условия, изразени от уравненията /146/, след съответно преработване добиват вида:

$$a p^2 + b p + c = 0 \tag{148}$$

където коефициентите a, b, c са функции на векторите. Тъй като /148/ е изпълнено тъждествено относно параметъра p, то имаме:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0 \tag{149}$$

Коефициентите a, b, c са твърде сложни функции на векторите. За първия коефициент имаме израза:

$$\begin{aligned} a = {} & \frac{\partial}{\partial\sigma}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\sigma}, \bar{e}_1\right] + \\ & + \left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\sigma}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right) - \left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial\sigma}, \bar{e}_1\right) \\ & + \left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\sigma}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1 - \bar{A}_2\right) - \left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\sigma}, \bar{A}_1 - \bar{A}_2\right) \\ & + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial\sigma}, \bar{e}_1\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\right] \\ & = 0 \end{aligned} \tag{150}$$

$$b = (\bar e_1, \bar e_2, \bar A_1 - \bar A_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial \sigma}, \bar e_1\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial v}, \bar e_1\right)\right] + \tag{151}$$

$$+ 2\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial \sigma}, \bar e_1\right)\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial v}, \bar A_1 - \bar A_2\right) - 2\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial v}, \bar e_1\right)\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial \sigma}, \bar A_1 - \bar A_2\right) +$$

$$+ (\bar e_1, \bar e_2, \bar A_1 - \bar A_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial \sigma}, \bar A_1 - \bar A_2\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial v}, \bar A_1 - \bar A_2\right)\right] + \tag{152}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma}(\bar e_1, \bar e_2, \bar A_1 - \bar A_2)\left[\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial v}, \bar e_1\right) + \left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial v}, \bar A_1 - \bar A_2\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}(\bar e_1, \bar e_2, \bar A_1 - \bar A_2)\left[\left(\bar e_2, \frac{\partial \bar A_1}{\partial \sigma}, \bar e_1\right) + \left(\bar e_2, \frac{\partial \bar e_1}{\partial \sigma}, \bar A_1 - \bar A_2\right)\right] = 0$$

Аналогично като се изразят условията за разслояемост за /140/ относно параметъра q се получава уравнението:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma \partial v} = \frac{\partial^2 q}{\partial v \partial \sigma}, \quad a_1 q^2 + b_1 q + c_1 = 0 \tag{153}$$

От тук за коефициентите имаме:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0 \tag{154}$$

Подробно записани условията /154/ са:

/155/
$$
\begin{aligned}
b_1 = {} & (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right] + \\
& + 2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) - \\
& - 2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) + \\
& + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right)\right] \\
& + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right) + \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right)\right] \\
& - \frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) + \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right)\right] = 0
\end{aligned}
$$

/156/
$$
\begin{aligned}
a_1 = {} & \frac{\partial}{\partial \sigma}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2) . \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2) . \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) + \\
& + \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right) - \\
& - \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) + \\
& + \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) . \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) - \left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) \\
& + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$C_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2) \left[\frac{\partial}{\partial v} (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) - \right.$$

/157/

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) \right] +$$

$$+ (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{e}_2)(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) - (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2)(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) +$$

$$+ (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1)(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) - (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) \cdot (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2) \cdot (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) - \frac{\partial}{\partial v} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1 - \bar{A}_2) \cdot (\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \sigma}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1) = 0$$

§ 24. Интегриране на условията за разслояемост.

Шесте условия за разслояемост за двете конгруенции могат да бъдат решени относно неизвестните вектори. За тази цел полагаме:

$$\bar{A}_1 = \lambda \bar{e}_1 + \nu_1 \bar{e}$$

/158/ $$\bar{A}_2 = \mu \bar{e}_2 - \nu_2 \bar{e}$$

Тогава шесте уравнения за разслояемост се редуцират на следните 5:

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial \sigma} (\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}) - \frac{\partial \nu_2}{\partial v} (\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \sigma}) + (\nu_1 + \nu_2) \left[(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \sigma}) - (\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}) \right] = 0$$

/159/

$$\frac{\partial v_1}{\partial v}\frac{\partial v_2}{\partial \sigma}-\frac{\partial v_1}{\partial \sigma}\frac{\partial v_2}{\partial v}=0$$

$$v_1(v_1+v_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial \sigma}\right)\right]+$$

$$+v_2\left[\frac{\partial v_1}{\partial \sigma}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial v}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial v}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial \sigma}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial v}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial v}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial \sigma}\right)+(v_1+v_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial \sigma}\right)-\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial v}\right)\right]=0$$

Най-после полагайки

/160/ $$v_2=\frac{h}{v_1}$$

получаваме двете уравнения:

/161/ $$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial v}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial v}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial \sigma}\right)+\frac{v_1}{h}(h+v_1^2)\cdot\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v},\frac{\partial \bar{e_1}}{\partial \sigma}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial v}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial v}\left(\bar{e},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial \sigma}\right)+$$
$$+\frac{1}{v_1}(h+v_1^2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial \sigma}\right)-\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma},\frac{\partial \bar{e_2}}{\partial v}\right)\right]=0$$

& 25. Теорема за случай на разслояема двойка.

Тук ще построим векторите $\bar{e_1}$, $\bar{A_1}$, $\bar{e_2}$, $\bar{A_2}$, $\bar{e}$, които удовлетворяват уравненията за разслояемост и следователно образуват разслояема двойка. Нека е дадена функцията R, която е интеграл на

/162/ $$\frac{dR}{dv}=2R^2-6\cot 2v\, R-4$$

Дадени са векторите:

$$\bar{e} = A(v)\cos\sigma\,\bar{i} - A(v)\sin\sigma\,\bar{j} + \sqrt{1-A^2}\,\bar{k}$$

/163/
$$\bar{e_1} = \frac{\cos v}{\sqrt{\gamma_{22}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial v} - \frac{\sin v}{\sqrt{\gamma_{11}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma}$$

$$\bar{e_2} = -\frac{\sin v}{\sqrt{\gamma_{22}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial v} - \frac{\cos v}{\sqrt{\gamma_{11}}}\frac{\partial \bar{e}}{\partial \sigma}$$

които са единични.

Дадени са точките:

$$\bar{A_1} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} v + R(v)}{\operatorname{cotg} v - R(v)}}\;\bar{e}$$

/164/
$$\bar{A_2} = -\sqrt{\frac{\operatorname{cotg} v - R(v)}{\operatorname{tg} v + R(v)}}\;\bar{e}$$

Лесно се проверява, че двойката конгруенции $\bar{e_1}$, $\bar{A_1}$, $\bar{e_2}$, $\bar{A_2}$ образуват разслоема двойка, тъй като удовлетворяват уравненията в предния параграф.

Глава II

Паралелизъм между теорията на конгруенциите прави и някои изоморфни проблеми в 3-мерните линейни пространства.

& 26. Случай на разслояема двойка конгруенции изразен във векторна форма.

Нека са дадени векторите $\bar{e}_1$, $\bar{A}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{A}_2$, които образуват двойка конгруенции. От предната глава установихме, че конгруенциите:

$$/165/ \quad \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \lambda(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2), \quad \bar{e}_1 \equiv \bar{e}_1(\sigma, v) \\ \bar{A}_2 &= -\mu(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2), \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_2(\sigma, v) \end{aligned}$$

образуват разслояема двойка. Тук $\bar{e}_1 \bar{e}_2 = 0$, $\lambda\mu = 1$ и величините λ , μ са произволни функции. Нека $\bar{e}_3$ е общият перпендикуляр на $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, т.е.

$$/166/ \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$$

Като следствие от /165/ следва:

$$/167/ \quad \begin{aligned} d\bar{A}_1 . \bar{e}_1 + \lambda\, \bar{e}_3 . d\bar{e}_1 &= 0 \\ d\bar{A}_1 . \bar{e}_2 + \lambda\, \bar{e}_3 . d\bar{e}_2 &= 0 \\ d\bar{A}_1 . \bar{e}_3 - d\lambda &= 0 \end{aligned}$$

и аналогично за другата конгруенция:

$$/168/ \quad \begin{aligned} d\bar{A}_2 . \bar{e}_1 - \mu \bar{e}_3 . d\bar{e}_1 &= 0 \\ d\bar{A}_2 . \bar{e}_2 - \mu \bar{e}_3 . d\bar{e}_2 &= 0 \\ d\bar{A}_2 . \bar{e}_3 + d\mu &= 0 \end{aligned}$$

Условията /167/ и /168/ се явяват характерни за разслояема двойка. Те ще ни послужат за по-късни изследвания свързани с линейните 3-мерни пространства.

& 27. Обобщение на зависимостите за разслояемост.

Ще покажем, че релациите /167/ могат да бъдат обобщени за произволно 3-мерно пространство. За тази цел нека изберем точката $\overline{A}_1$ от вида:

/169/ $$\overline{A}_1 = \left[\varphi_1(q_1,q_2) + f_1(q_3)\right]\overline{i} + \left[\varphi_2(q_1,q_2) + f_2(q_3)\right]\overline{j} + f_3(q_2,q_3)\overline{k}$$

където $\varphi_1, f_1, \varphi_2, f_2, f_3$, са произволни функции.

Сътветно векторите $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ удовлетворяват релацията:

/170/ $$\lambda(\overline{e}_1 \times \overline{e}_2) = \overline{A}_1$$

Очевидно векторите $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ винаги могат да бъдат подбрани така, че релацията /170/ да бъде удовлетворена. По този начин аналитичните условия за разслояемост са разширени за произволно криволинейно пространство. В частност се оказва, че такова пространство може да бъде цилиндрично. Наистина. Функциите могат да бъдат подбрани така, че да се образува вектора:

/171/ $$\overline{A}_1 = q_1 \cos q_2\, \overline{i} + q_1 \sin q_2\, \overline{j} + q_3\, \overline{k}$$

което съответствува на цилиндрично пространство.

& 28. Пример на построение на конформно-евклидово съответствие между две криволинейни пространства.

Разглеждаме пространството от предния параграф:

/172/ $$\bar{r}_1(q_1, q_2, q_3) = [\varphi_1(q_1, q_2) + f_1(q_3)]\bar{i} + [\varphi_2(q_1, q_2) + f_2(q_3)]\bar{j} + f_3(q_2, q_3)\bar{k}$$

и пространството:

/173/ $$\bar{r}_2(q_1, q_2, q_3) = [\psi_1(q_1) + q_2 a_1(q_3) + b_1(q_3)]\bar{i} + [\psi_2(q_1) + q_2 a_2(q_3) + b_2(q_3)]\bar{j} + [\psi_3(q_1) + q_2 a_3(q_3) + b_3(q_3)]\bar{k}$$

където всички величини са произволни функции. Може да се покаже, че при подходящ подбор на функциите може да се установи релацията:

/174/ $$(d\bar{r}_1)^2 = \rho (d\bar{r}_2)^2$$

или

/175/ $$ds_1^2 = \rho\, ds_2^2$$

характерна за конформно-евклидовото съответствие.

Едновременно с това първото пространство принадлежи на разслояемите двойни конгруенции. По този начин е установена непосредствена връзка между съответствието разслояемост и конформно-евклидовото съответствие, за случай на 3-мерното евклидово пространство.

& 29. Построяване на конкретен пример на метричен тензор за конформно-евклидово пространство в n-мерен случай.

Примерът,който дадохме в предния параграф показва,че може да се построи директно конформно-евклидово съответствие без да се пребягва до условията за това съответствие дадени в класическата монография на Рашевский "Римановая геометрия и тензорний анализ" на стр. 610, уравнения /122,2/ и /123,3/.

Тук ще построим общ пример,който да удовлетворява тези условия. Ще започнем построението с метричния тензор g_{ij} и симетричния тензор S_{ij} , характерни за тези пространства.

Предварително ще дадем някои сведения от тензорния анализ. Тензорът на конформно-евклидовото пространство се дава с уравнението:

$$R_{ij,hl} = g_{ih}S_{jl} + g_{jl}S_{ih} - g_{jh}S_{il} - g_{il}S_{jh}$$

$$\nabla_i S_{jh} - \nabla_j S_{ih} = 0 \qquad /176/$$

където g_{ij} е метричния,а S_{ij} - симетричния тензор. Величината $R_{ij,hl}$ се нарича тензор на кривината и се дава самостоятелно с формулата:

$$R_{ij,hl} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial q_j \partial q_h} + \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial q_i \partial q_l} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial q_j \partial q_l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial q_i \partial q_h}\right] \qquad /177/$$

$$+ g_{pq}\left[\Gamma^p_{il}\Gamma^q_{jh} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^q_{ih}\right]$$

Тук коефициентите Γ^h_{ij} са известни като символи на Кристофел, които се изразяват чрез компонентите на метричния тензор от релациите:

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{hl}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}\right] \qquad /178/$$

Избираме за метричен тензор числата:

/179/ $$g_{ij} = a_{ij} e^{\sum \lambda_i q_i}$$

където λ_i, a_{ij} са произволни константи; / $i = 1, 2, \ldots n$ /.
Величините q_i са променливи криволинейни координати. Числата a_{ij} удовлетворяват на условието:

/180/ $$g = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

За символите на Кристофел се получават числата:

/181/ $$\Gamma_{ij}^{h} = \frac{G^{hl}}{2g} \left(\lambda_j a_{li} + \lambda_i a_{lj} - \lambda_l a_{ij} \right)$$

където G^{hl} са съответните адюнгирани количества на детерминантата /180/. Вижда се, че при избора на g_{ij} символите на Кристофел се явяват константи.

При този избор на g_{ij} тензорът на кривината добива вида:

/182/ $$R_{ijhl} = \frac{1}{2} e^{\sum \lambda_i q_i} \left[a_{hl} \lambda_i \lambda_j - a_{ih} \lambda_j \lambda_l - a_{jl} \lambda_i \lambda_h + a_{jh} \lambda_i \lambda_l \right]$$

Тензорът на конформно-евклидовото съответствие в този случай добива вида:

/183/ $$S_{ij} = -\frac{1}{2} \lambda_i \lambda_j .$$

$$R_{ijhl} = \frac{1}{2} e^{\sum \lambda_i q_i} \left[a_{hl} \lambda_i \lambda_j - a_{ih} \lambda_j \lambda_l - a_{jl} \lambda_i \lambda_h + a_{jh} \lambda_i \lambda_l \right]$$

От сравнението на /182/ и /183/ се получава непосредствено за симитричния тензор:

/184/ $$S_{ij} = -\frac{1}{2}\lambda_i\lambda_j$$

Очевидно компонентите на симетричния тензор са константи. Тогава второто условие на /176/ е изпълнено тъждествено.

По този начин е показано, че условията за тензорите /179/ и /184/ се явяват достатъчни за конформно-евклидово съответствие. Тези тензори чрез метода на подвижния триедър могат към съответни - мерни вектори.

СЪДЪРЖАНИЕ

Кинематичен смисъл на инвариантите на роя образуван от витловите оси на произволно витлово движение

Съвкупност от витлови движения съответствуващи на дадена конгруенция

Аналитично изразяване на общите условия за разслояемост на двойка конгруенции

Г л а в а II

Паралелизъм между теорията на конгруенциите прави и някои изоморфни проблеми в 3-мерните линейни пространства

ЛИТЕРАТУРА

1. Darboux G. Lecons sur la théorie générale des surfaces, Paris, t. I, 1887

2. Garnier R. Cours de Cinematique, t. I, 1954

3. Combescure, Annales des l' Ecole Normale, t. IV

4. Фиников С.П. Теория конгруенции, Москва, 1966

5. Фиников С.П. Теория пар конгруенции, Москва, 1956

6. Дубнов Я.С. Основни векторного изчисления, т. I,II, Москва,

7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Москва, 1965

8. Акивис М.А. Гольдберг В.В.,Тензорное исчисление,Москва, 1969

9. Суслов Г.К., Теоретическая механика,Москва, 1946

10. Петканчин Б.Л. Диференциална геометрия, 1955

11. Гьонов Ал.,Свойства на конгруенция прави средната повърхнина и средната обвивка на която са фокални повърхнини на конгруенция, Год. Соф. унив. физ.мат. фак. 55, /1960-1961/ кн. 1

12. Гьонов Ал., Конгруенция прави чиито централни нормали на граничните роеве образуват разслояема двойка, Год. Соф. унив. физ. мат. фак. 57 /1962-63/ кн. 1

13. Хараламов П.В. Конгруенция осей винтого движения, Допов.Ак. наук,Укр. ССР серия А, т. 7 /1967/, Киев

14. Хараламов П.В. Поступателное движения тяжелого твердого тела в жидкости, ПММ, т. 20, 124 /1956/, стр. 124-129

15. Рашевский Г.К. Римановая геометрия и тензорний анализ, 1964

16. Диамандиев В.А. Конгруенция-W от хеликоидалните оси на клас прецесионни движения, Год. Соф. унив. мат.фак. т. 60,

17. Диамандиев В.А. Прецесионни движения с хеликоидални оси, образуващи разслояема двойка конгруенции, Год. Соф. унив. мат. фак. т. 62,1967/68 г. стр. 261-27

18. Класове движения с хеликоидални оси,образуващи разслояема двойка конгруенции, Год. Соф. унив. т.63 мат. фак. 1968 - 1969 г. стр. 199-212

19. Диамандиев В.А. Кинематично значение на инвариантите на рой образуван от хеликоидалните оси общо винтово движение,БАН, Известия на мат. ин-тут, том XI, стр. 127-144