ЕЦНПКММ

СУ „Климент Охридски“

Георги Л. Илиев

ДИСЕРТАЦИЯ

София - 1977

Георги Л.Илиев

ЧАСТИЧНО МОНОТОННИ И ПАРАМЕТРИЧНИ АПРОКСИМАЦИИ

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на научната степен
"кандидат на математическите науки"

Научен ръководител:

Чл.кор.проф.д-р Бл.Сендов

София, 1977

СЪДЪРЖАНИЕ

ВЪВЕДЕНИЕ

През 1911 год. Джексон в [1] доказва теореми, даващи отговор на един основен въпрос в теорията на апроксимациите, атакуван многократно от известни математици и решен дотогава в някои частни случаи. Проблемът е следния: ако знаем някои свойства на функцията f (например нейния модул на непрекъснатост), какво може да кажем за степента на приближаване на f относно равномерната метрика чрез алгебрични полиноми от определена степен?

Да означим с $E_n(f)$ (съответно с $E_n^T(f)$) най-доброто равномерно приближение на функцията f в интервала $[a,b]$, (на 2π-периодичната функция f в интервала $[0,2\pi]$) с алгебрични, съответно тригонометрични полиноми от степен не по-висока от n :

$$E_n(f) = \inf_{P\in H_n} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| = \inf_{P\in H_n} \|f-P\|_{[a,b]}$$

$$E_n^T(f) = \inf_{T\in H_n^T} \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)-T(x)| = \inf_{T\in H_n^T} \|f-T\|_{[0,2\pi]} ,$$

където H_n е съвкупността от алгебричните полиноми от n-та степен, H_n^T -съвкупността от тригонометричните полиноми от n-ти ред. Понякога за по-голяма точност вместо $E_n(f)$ и $E_n^T(f)$ ще пишем $E_n(f;[a,b])$ и $E_n^T(f;[0,2\pi])$.

В най-обща форма резултатите на Джексон могат да се изкажат така:

$$E_n(f) = O(\omega(f;n^{-1})) ,$$

$$E_n^T(f) = O(\omega(f;n^{-1})),$$

където $\omega(f;\delta)$ е модулът на непрекъснатост на функцията f в интервала $[a,b]$ (съответно $[0,2\pi]$):

$$\omega(f;\delta)=\sup_{|x'-x''|\leq\delta}|f(x')-f(x'')|$$

След работите на Джексон, задачи от такъв вид са разглеждани за функции от различни класове, относно различни метрики и относно различни апарати за приближаване.

В предлаганата дисертация са разгледани проблеми за оценки на най-добрите приближения на класа от частично монотонни функции с частично монотонни полиноми, относно равномерното и хаусдорфовото разстояние и на класа от частично аналитични функции с един по-специален апарат за приближаване, предложен и наречен от Бл.Сендов - параметрични приближения (вж.[2],[3]).

Ще изложим резултатите, дадени в двете глави на дисертацията.

Всяка глава започва с уводни бележки върху резултатите в нея.

Един основен факт, използуван като помощен апарат във всяка теорема, доказана в дисертацията е порядъкът на хаусдорфово приближение на функцията $\operatorname{sign} x$ при $x\in[-1,1]$. Няма да даваме дефиницията и обзор на резултатите, свързани с теорията на хаусдорфовите приближения, тъй като тази теория вече е добре известна. Нека споменем, че хаусдорфовото разстояние между функции е въведено от Бл.Сендов и Б.Пенков [4] и развито по-нататък в теория на апроксимациите от Бл.Сендов и неговите ученици (вж. [2]). Както вече подчертахме, хаусдорфовото приближение на функцията $\operatorname{sign} x$ в $[-1,1]$ се използува многократно в първа и във втора глава, което отново показва, че хаусдорфовите приближения, освен като самостоятелна теория, могат да бъдат използувани и като апарат за атакуване на проблеми от друг характер.

Връзката между първа и втора глава се състои в използуването на техника, свързана с хаусдорфовото разстояние, при доказателството на теоремите в дисертацията.

Първа глава разглежда апроксимирането и интерполирането на частично монотонни функции с частично монотонни полиноми.

През последните 10 години се появиха много работи (главно на американски математици), които разглеждат монотонните и частично монотонните апроксимации.

Първоначално беше разгледана задачата за апроксимиране на монотонни функции с монотонни полиноми (вж. Лоренц и Целер [5], [6] , Шиша [7], Рубинщайн [8] , Рулие [9], [10], [11], Лоренц [12], [13] , Бл.Сендов и В.Попов [14] . Основен резултат, постигнат в [5] , е, че монотонна функция f може да се приближи с монотонен полином от H_n с порядък $O(\omega(f; n^{-1}))$.

Проблемът за частично монотонните апроксимации може да се формулира така: Дадена е функция f , която е монотонна във всеки от краен брой подинтервали като точно в краищата на подинтервалите си сменя монотонността. Какъв е порядъкът на приближение на f с полиноми от H_n , които изцяло спазват монотонността на f ?

Проблеми за частично монотонните апроксимации са разглеждани от известните специалисти в теория на апроксимациите Рулие [15] , Нюман, Пасов, Раймон [16] , Пасов и Раймон [17] . В [15] са разгледани някои въпроси, свързани с частично монотонните апроксимации, които не засягат горния проблем. В [17] е постигнат порядък $O(\omega(f; n^{-1+\varepsilon}))$; $\varepsilon>0$, където $\varepsilon \to 0$, когато $n \to \infty$. В [16] грубо казано, е постигнат следния резултат: Всяка частично монотонна функция f може да бъде приближена с порядък $O(\omega(f; n^{-1}))$, с полиноми от H_n, които спазват монотонността на функцията, освен в интервалчета с дължина $\varepsilon>0$ около точките, където функцията си сменя монотонността. Когато $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. По-подробно за резултатите в [15], [16] и [17] е написано в 1.1.

В 1.2. е даден точен отговор на проблема за частично монотонните апроксимации, когато функцията f е различно монотонна в два подинтервала чрез следната теорема:

Ако f е непрекъсната в $[-1,1]$ функция ($f \in C_{[-1,1]}$), която при $x \in [-1,0]$ е монотонно намаляваща и при $x \in [0,1]$ е монотонно растяща, то

$$E_n^2(f) \leqq 3002\,\omega(f; n^{-1})$$

където за всяко цяло, положително n:

$$E_n^2(f) = \inf_{P \in H_n^2} \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| = \inf_{P \in H_n^2} \|f - P\|_{[-1,1]},$$

$$H_n^2 = \{P : P \in H_n;\ P'(x) \leqq 0 \text{ при } x \in [-1,0],\ P'(x) \geqq 0 \text{ при } x \in [0,1]\}.$$

В 1.3. е разгледана задачата за частично монотонното интерполиране.

Нека са дадени точките (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, m$, $x_i = i/m$, $y_i < y_{i+1}$, $y_0 = 0$, $y_m = 1$. Волибнер [18] и Янг [19] доказаха, че съществува алгебричен полином P, такъв че $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$ и P е монотонен в $[0,1]$, без обаче да дадат оценка за степента на полинома. Николчева [20] уточнява този резултат като показва, че този полином може да бъде от степен $c\, m \ln m$, когато $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i > m^{-\alpha}$, $m < \alpha < 1$. Тази оценка за степента на интерполационния монотонен полином е точна.

В 1.3. са доказани следните две теореми, даващи точен отговор за степента на частично монотонния интерполационен полином:

Нека са дадени точките (x_i, y_i), (x_{-i}, y_{-i}), $i = 1, \dots, m$, $(x_0 = 0,\ y_0 = 0)$, $x_i = i/m$, $x_{-i} = -i/m$, $y_m = y_{-m} = 1$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i > 0$, $\Delta y_{-i} = y_{-(i+1)} - y_{-i} > 0$, $i = 1, \dots, m-1$, $A = \max\{\Delta y_i : 1-m \leqq i \leqq m-1\}$, $B = \min\{\Delta y_i : 1-m \leqq i \leqq m-1\}$.

Нека $k \geqq 1$ е цяло. Ако n удовлетворява условията:

$$k \ln n / n \leqq 1/8m, \quad 4m(A+B)/n^{k/4} \cdot B < 1,$$

то съществува алгебричен полином $P_{n,k} \in H_{4n+1}$, който е монотонно намаляващ в $[-1, 0]$ и монотонно растящ в $[0, 1]$ и за който

$$P_{n,k}(x_i) = y_i, \quad P_{n,k}(x_{-i}) = y_{-i}, \quad i = 1, \dots, m$$
$$P_{n,k}(0) = 0$$

От тази теорема следва следната теорема:

При горните означения нека $B \geqq c\, m^{-\beta}$, $m > \beta > 1$, $n > m > \max\{8/c,\ e^5\}$. Ако $n \geqq 45\beta\, m \ln m$, то съществува алгебричен полином $P_n \in H_{4n+1}$, монотонно намаляващ в $[-1, 0]$ и монотонно растящ в $[0, 1]$, за който $P_n(x_i) = y_i$, $P_n(x_{-i}) = y_{-i}$, $i = 1, \dots, m$; $P_n(0) = 0$

В 1.4. са получени някои следствия от резултатите в 1.3.

свързани с хаусдорфовите и локалните частично монотонни апроксимации.

Оценка на частично монотонното приближение на частично монотонни функции относно хаусдорфовото разстояние се дава чрез следната теорема:

Ако f е непрекъсната функция в $[-1,1]$, монотонно намаляваща в $[-1,0]$ и монотонно растяща в $[0,1]$, то за всяко цяло, положително n, съществува полином $P \in H_n$, монотонно намаляващ в $[-1,0]$ и монотонно растящ в $[0,1]$, за който, ако $x \in [-1,1]$:

$$|f(x) \div P(x)| \leq a \ln n / n,$$

където a е абсолютна константа и

$$|f(x) \div P(x)| = \max\left\{\inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(x)-P(t)|\},\ \inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(t)-P(x)|\}\right\}.$$

Както се вижда, горната оценка не зависи от структурните свойства (например модула на непрекъснатост) на непрекъснатата функция f. Тогава, тъй като допълнената графика на всяка ограничена функция в $[-1,1]$, може да бъде приближена произволно добре с непрекъснати функции относно хаусдорфовото разстояние, то горната оценка е вярна и за хаусдорфовото приближение на произволни, ограничени, частично монотонни функции в $[-1,1]$, с частично монотонни полиноми.

Задачата за локалните приближения е поставена и решена от В.Попов в [21].

Следната теорема, доказана в 1.4. дава отговор на въпроса за оценка на локалните частично монотонни приближения:

Ако f е непрекъсната функция в $[-1,1]$, монотонно намаляваща в $[-1,0]$ и монотонно растяща в $[0,1]$, то за всяко цяло, положително n, съществува полином $P\in H_n$, монотонно намаляващ в $[-1,0]$ и монотонно растящ в $[0,1]$, за който, ако $x\in[-1,1]$:

$$|f(x)-P(x)|\leqq C\omega(f,x;\ln n/n)+O(n^{-1}),$$

където C е една абсолютна константа и $\omega(f,x;\delta)$ е локалният модул на непрекъснатост на f:

$$\omega(f,x;\delta)=\sup_{|h|\leqq\delta}|f(x+h)-f(x)|,\ \delta>0.$$

Във втора глава са получени оценки за параметричните приближения на частично аналитични функции в затворен интервал и на аналитични функции в отворен интервал.

Параметричните приближения са въведени от Бл.Сендов [2]. Ако $f\in C[-1,1]$ в [2] е въведено числото:

$$\varepsilon_{m,n}(f)=\inf_{P\in\hat{H}_n}\ \inf_{Q\in H_m}\ \max_{x\in[-1,1]}|f(P(x))-Q(x)|$$

$$\hat{H}_n=\{P:P\in H_n;P(-1)=-1,P(1)=1;P'(x)\geqq 0,\ x\in[-1,1]\},$$

което се нарича най-добро параметрично приближение на непрекъснатата функция f от ред (m,n). Очевидно, параметричните приближения са обобщение на равномерните приближения, но в някои случаи дават много по-добри порядъци на приближение. Този факт за пръв път е отбелязан от Бл.Сендов в [3], където е доказано, че ако f е непрекъсната функция, която в $[-1,0]$ и в $[0,1]$ е съответно равна на полиномите P_1 и $P_2\in H_r$, то:

$$\mathcal{E}_{n,n}(f) = O(e^{-c(f,r)n}).$$

Този резултат показва, че параметричните приближения дават по-добри порядъци на приближение от рационалните приближения върху класа от частично полиномиални функции, тъй като от резултата на Нюман [22] е известно, че:

$$e^{-c_2\sqrt{n}} \leqq R_n(|x|) \leqq e^{-c_1\sqrt{n}}, \quad c_1, c_2 > 0,$$

където за всяко $f \in C_{[-1,1]}$:

$$R_n(f;[-1,1]) = R_n(f) = \inf_{R \in R_n} \|f - R\|_{[-1,1]},$$

$$R_n = \left\{ R : R = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \right\}.$$

В [3] е поставена и задачата за параметричното приближение на частично аналитични функции и е дадена следната оценка:

Ако $f \in C_{[-1,1]}$ има представянето:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{за } x \in [-1,0] \\ f_2(x) & \text{за } x \in [0,1], \; f_1(0) = f_2(0), \end{cases}$$

където f_i, $i = 1,2$ са аналитични функции в кръг с радиус $r > 1$, то

$$\varepsilon_{n,n}(f) = O(e^{-c_f\sqrt{n}}).$$

Естествено възниква задачата за намирането на по-добри порядъци за параметричните приближения на частично аналитични функции. Задачата за параметричното приближение на частично полиномиални и частично аналитични функции беше обобщена от Сабадош [23], като бяха постигнати порядъци, съответно $O(e^{-c_1(f,s)n})$ и $O(e^{-c_2(f,s)\sqrt{n}})$ за параметричното приближение на функции, които са частично полиномиални, съответно частично аналитични в S подинтервала на $[-1,1]$.

В 2.2. е подобрен резултатът на Сабадош [23] чрез следната теорема:

Нека $f \in C_{[-1,1]}$ е такава функция, за която съществува разделяне $-1=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_s=1$ със свойството: $f(x)=f_i(x)$ за $x\in[\xi_{i-1},\xi_i]$, $i=1,\dots,s$, $(f_i(\xi_i)=f_{i+1}(\xi_i), i=1,\dots,s-1)$, където f_i е аналитична функция в $C_i=\{z: 2|z-\eta_i|\leq(\xi_i-\xi_{i-1})r, \eta_i=(\xi_{i-1}+\xi_i)/2, r>1, \ i=1,\dots,s\}$. Тогава

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)=O\left(\exp(-c_1(f)\sqrt{n\ln n})\right)$$

за $m \geq c_2(f)\sqrt{n/\ln n}$.

В частност

$$\mathcal{E}_{n,n}(f)=O\left(\exp(-c_3(f)\sqrt{n\ln n})\right).$$

В 2.3. е подобрен съществено резултата на Бл.Сендов [3] и резултата на Сабадош [23] при $s=2$ чрез следната теорема:

Нека $f\in C_{[-1,1]}$, $f(0)=0$ и

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{за } -1\leq x\leq 0 \\ f_2(x) & \text{за } 0\leq x\leq 1, \end{cases}$$

където f_1 и f_2 са аналитични в кръг с център в началото и радиус $a, a>1$ и приемат реални стойности за реални стойности на аргумента си. Тогава

$$\mathcal{E}_{n,n}(f)\leq \exp(-c\sqrt[3]{n^2\ln n}),$$

където $c>0$ е абсолютна константа, зависеща от f .

С теоремите от 2.2. и 2.3. се показва, че порядъкът на параметричните приближения е по-добър от порядъка на рационалните приближения в класа на частично аналитичните функции.

В 2.4. се разглеждат някои въпроси, свързани с оценки отдолу при параметричното приближение на частично аналитични функции. В един частен случай на параметричното приближение на частично аналитичната в $[-1,1]$ функция $|x|/(|x|-a)$, $a>1$, е доказана оценка отдолу $O(\exp(-c\sqrt[3]{n^2\ln n}))$. Тази оценка отдолу, която съвпада с оценката отгоре върху целия клас от частично аналитични в два подинтервала функции, показва, че точната оценка при този проблем може да е $O(\exp(-c\sqrt[3]{n^2\ln n}))$.

В [24] А.А.Гончар дава оценка на рационалното приближение на функции, непрекъснати в $[0,1]$ и равни за всяко $x\in(0,1]$ на функция f, която е аналитична в $D=\{z:|z-1|<1\}$. По-точно, ако φ е функция, която удовлетворява казаните условия, то

$$R_n(\varphi;[0,1])=O(\rho^n),$$

където

$$\rho_n=\inf_{t>1}\left[te^{-cn/t}+\omega(\varphi;e^{-t})\right].$$

В 2.5. е постигната аналогична оценка за параметричното приближение на функции, удовлетворяващи същите условия.

Теоремите и лемите в дисертацията са номерирани с два индекса, първият от които обозначава главата,в която се намира теоремата, или лемата, а вторият - съответния номер от началото на първа глава.

Резултатите в дисертацията са публикувани в [25], [26], [27], [28], [29]. Резултатите във втора глава са докладвани на конференцията по "Фуриеров анализ и теория на апроксимациите" в Будапеща през август 1976 год. Всички резултати са докладвани на Семинара по "Теория на апроксимациите" към ЕЦНПКММ с ръководител чл.кор. Бл.Сендов.

Авторът изказва своята най-дълбока благодарност на своя научен ръководител и учител чл.кор. проф. д-р Бл.Сендов, както и на ст.н.с. д-р В.Попов за изключително плодотворната помощ при написването и създаването на предлаганата дисертация.

Г Л А В А П Ъ Р В А

Апроксимиране и интерполиране на частично монотонни функции с частично монотонни полиноми.

1.1. У в о д н и б е л е ж к и .

В тази глава са получени точни оценки за частично монотонното апроксимиране и за степента на частично монотонния интерполационен полином. По-точно, разгледани са следните два проблема:

Проблем 1. Дадена е функцията $f \in C_{[-1,1]}$. При $x \in [-1,1]$, $f(x)$ е монотонно намаляваща, а при $x \in [0,1]$, $f(x)$ е монотонно растяща. За всяко цяло положително n да означим с H_n^2 следния подклас на H_n:

$H_n^2 = \{ P : P \in H_n ,\ P'(x) \leqq 0$ за $x \in [-1,0]$, $P'(x) \geqq 0$ за $x \in [0,1] \}$

Нека

$$E_n^2(f) = \inf_{P \in H_n^2} \| f - P \|_{[-1,1]} .$$

Търси се оценка отгоре на $E_n^2(f)$.

Проблем 2. Нека са дадени точките (x_i, y_i), (x_{-i}, y_{-i}), $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, $i = 1, \dots, m$; $x_i = i/m$, $x_{-i} = -i/m$; $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i > 0$, $\Delta y_{-i} = y_{-(i+1)} - y_{-i} > 0$, $y_m = y_{-m} = 1$; $A = \max\{\Delta y_i : 1 \leqq |i| \leqq m\}$, $B = \min\{\Delta y_i : 1 \leqq |i| \leqq m\}$

Търси се полином $P \in H_n^2$, за който $P_n(x_i) = y_i$, $P_n(x_{-i}) = y_{-i}$, $P_n(0) = 0$, $i = 1, \dots, m$ и освен това $n = n(m, A, B)$

да бъде възможно най-малко.

Ще направим обзор на основните резултати, получени досега, свързани с проблем 1.

Първоначално беше разгледана задачата за апроксимиране на монотонни функции с монотонни полиноми. По-точно, ако с H_n^1 отбележим съвкупността от полиномите $P \in H_n$, за които $P'(x) \geqq 0$ за $x \in [-1,1]$ и ако $f \in C_{[-1,1]}$ е монотонно растяща функция в $[-1,1]$, то задачата е да се оцени величината

$$E_n^1(f) = \inf_{P \in H_n^1} \| f - P \|_{[-1,1]} .$$

Първата теорема в това направление е получена от Лоренц и Целер [5], които показват, че за всяка монотонна в интервала $[-1,1]$ функция f, съществува редица $\{P_n\}_1^\infty$, $P_n \in H_n^1$, такава, че за всяко $x \in [-1,1]$ имаме

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq c\,\omega(f; \sqrt{1-x^2}/n + n^{-2})$$

Тази теорема показва, че порядъкът на монотонните приближения на монотонни функции е същия, както порядъкът на обикновените приближения, когато не се изисква приближаващия полином да е монотонен.

Задачата за монотонните апроксимации е разглеждана от много автори в редица публикации (вж. Шиша [7], Рубинщайн [8], Рулие [9,10,11], Лоренц [12],[13], Лоренц и Целер [5,6] и др.).

В работата на Бл.Сендов и В.Попов [14] е разгледано приближението на монотонни ограничени функции с монотонни полиноми относно хаусдорфовото разстояние. За да можем да изложим резултата на Бл.Сендов и В.Попов и тъй като в тази глава са изложени резултати, свързани с частично монотонните хаусдорфови апроксимации, ще дадем дефиницията и някои основни резултати, свързани с хаусдорфовото разстояние.

Хаусдорфовото разстояние между функции е въведено от Бл.Сендов и Б.Пенков [4] и развито по-нататък в теорията на апроксимациите от Бл.Сендов и неговите ученици (вж. [2]).

Нека множеството F_Δ се състои от всички ограничени по оста y, затворени точкови множества в равнината, които са изпъкнали по отношение на оста y и чиято проекция върху оста x съвпада с интервала Δ. Хаусдорфово разстояние в множеството F_Δ се дефинира чрез

$$r(F,G)=\max\{\sup_{A\in F}\inf_{B\in G} d(A,B), \sup_{A\in G}\inf_{B\in F} d(A,B)\},$$

където $d(A,B)=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$,

$A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$; $F\in F_\Delta$, $G\in F_\Delta$.

Нека f е ограничена в Δ функция. С $\bar{f}$ се означава допълнената графика на f :

$$\bar{f}=\bigcap F: F\in F_\Delta,\ f\subset F,$$

където с f е означена графиката на функцията f .

Очевидно, ако f е непрекъсната функция, то $f=\bar{f}$.

Хаусдорфово разстояние $r(f,g)$, между две ограничени в Δ функции f и g се определя като хаусдорфовото разстояние между техните допълнени графики:

$r(f,g)=r(\bar{f},\bar{g})$.

Нека с

$$E_n(f)_r=\inf_{P\in H_n} r(f,P)$$

означим най-доброто приближение на ограничената в множеството $\Delta=[a,b]$ функция f с алгебрични полиноми от степен не по-висока от n. Основен резултат в теорията на хаусдорфовите приближения е получената от Бл.Сендов[30] универсална оценка

$$E_n(f)_r = O(\ln n/n).$$

Както вече споменахме по-горе, в [14] се разглежда въпросът за монотонните хаусдорфови апроксимации. Доказано е, че ако f е монотонна ограничена функция върху $\Delta=[-1,1]$ и с $E_n^1(f)_r$ отбележим най-доброто приближение на f с полиноми от H_n^1 относно хаусдорфовото разстояние, то

$$E_n(f)_r = O(\ln n/n).$$

Едно обобщение на монотонните апроксимации е проблема за частично монотонните апроксимации. Изложеният в началото проблем 1. е бил неколкократно атакуван от известни (главно американски) математици. В по-обща форма той може да се изкаже така:

Проблем 3. Дадена е функция f, която е непрекъсната в $[a,b]$ и монотонна във всеки един от подинтервалите $[x_i,x_{i+1}]$ на $[a,b]$, като в точките x_i си сменя монотонността, $a=x_0<x_1<\dots<x_s=b$, $i=0,1,\dots,s-1$. Търси се какъв е порядъкът на приближение относно равномерното разстояние на f с полиноми от степен не по-висока от n, които запазват монотонността на f.

Ясно е, че проблем 1. е частен случай на проблем 3, тъй като се получава от него при $a=-1$, $b=1$, $s=2$, $x_1=0$

Оказа се, че проблем 3.(както и проблем 1.) не може да бъде решен чрез модификация на методите, които дават оценки при монотонните приближения. При монотонните апроксимации основен факт, който се използува е, че операторът на Джексон изобразява 2π -периодична, камбановидна, стъпаловидна функция в камбановиден, тригонометричен полином. Да напомним, че 2π -периодичната функция f се нарича камбановидна, ако е четна и ако f не расте за $x \in [0,\pi]$. Аналогът на апроксимирането на монотонни функции с монотонни алгебрични полиноми в 2π -периодичния случай е апроксимирането на камбановидни функции с камбановидни тригонометрични полиноми. При частично монотонните апроксимации, обаче, не може да се използува директно операторът на Джексон, тъй като, ако той се приложи върху частично монотонна функция, в общия случай не се получава частично монотонен полином, т.е. задачи от типа на проблем 1.3 при $s \geqq 2$ не се получават чрез обобщение на методите при монотонните приближения.

Задачи от типа на проблем 1.3 са разглеждани от известните специалисти в теория на апроксимациите Рулие [15], Нюман, Пасов, Раймон [16], Пасов и Раймон [17]. При получаването на оценки в цитираните работи, поради трудности около точките x_i, се приближава малко по-тесен клас от функции (съдържащ се в класа на частично монотонните функции). По-големи изменения са наложени, обаче, върху апарата, с който се приближава. По този начин се решават проблем 1.3 в един техен твърде частен случай.

За да изложим основния резултат от [16] ще използуваме две дефиниции.

Дефиниция 1. Функцията f се нарича строго частично монотонна, ако тя е частично монотонна, според дефиницията дадена в проблем 3 за f и, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува

$\delta > 0$, така че $|(f(x)-f(y))/(x-y)| \geqq \delta$ за $x \neq y$ и $x, y \in [x_{i-1}+\varepsilon, x_i - \varepsilon]$.

Дефиниция 2. Редицата от алгебрични полиноми $\{P_n\}$, $P_n \in H_n$ се нарича почти частично монотонна за частично монотонната функция f върху $[a, b]$, ако за всяко $\varepsilon > 0$, изпълняващо условието $\varepsilon < 1/2 \min_i (x_i - x_{i-1})$ и за n достатъчно голямо, P_n има същата монотонност, както f върху $[x_i+\varepsilon, x_{i+1}-\varepsilon]$.

В [16] е доказана следната

Теорема 1.1. (Нюман, Пасов, Раймон). Ако $f \in Lip_M 1$ върху $[a, b]$ е строго частично монотонна, тогава съществува почти частично монотонна редица от полиноми $\{P_n\}$, $P_n \in H_n$, такава, че

$$\|f - P_n\|_{[a,b]} \leqq cM/n ,$$

където c е абсолютна положителна константа.

Теорема 1.1. дава точна оценка за приближението на строго частично монотонни функции с почти частично монотонни полиноми. Точността следва лесно от оценките отдолу за приближението на $|x|$. Въпреки това, теорема 1.1. не дава решение на проблема 1.3, тъй като върху приближаващия апарат е наложено силното ~~условие~~ изменение за почти частична монотонност. Грубо казано, теорема 1.1. ни дава, че всяка частично монотонна функция може да бъде приближена с порядък, който не може да се подобри, с полиноми от H_n , които спазват монотонността на функцията, освен в интервалчета с дължина ε около точките, където функцията си сменя монотонността. Когато n клони към безкрайност, ε клони към 0 .

В работата на Пасов и Раймон [17] е премахнато условието за почти частична монотонност на приближаващите полиноми и е доказана следната

Теорема 1.2. Ако f е частично монотонна непрекъсната функция в $[a,b]$, тогава за всяко $\varepsilon>0$ при достатъчно голямо n, съществуват константа $b_\varepsilon>0$ и полином $P\in H_n$, който спазва точно монотонността на f, за които

$$\|f-P\|_{[a,b]} \leq b_\varepsilon\,\omega(f;n^{-1+\varepsilon}).$$

Както се вижда, теорема 1.2. спазва изцяло условията на проблем 1.3, но порядъкът на частично монотонното приближение не е добър, тъй като, най-малкото, не е ясно как зависи ε от n. От друга страна, порядъкът, който би трябвало да се очаква при решението на проблем 1.3. е $O(\omega(f;n^{-1}))$.

В [15] е доказана една теорема, която показва, че полиномите на най-добро равномерно приближение за един подклас на строго частично монотонните функции са почти монотонни:

Теорема 1.3. Нека f е строго частично монотонна, непрекъсната функция и нека f' съществува и е непрекъсната в $[a,b]$. За всяко $n=0,1,\dots$, нека P_n е полинома на най-добро равномерно приближение от H_n. Тогава $\{P_n\}$ е почти частично монотонна с f.

В настоящата дисертация не са разглеждани въпроси, свързани с теорема 1.3.

В тази глава от дисертацията е получена точна оценка за приближението на частично монотонни функции (съставени от две различно монотонни), без да се налагат отслабващи

... условия върху приближаваната функция, или приближаващия полином, т.е. решен е напълно проблем 1, или проблем 3 при $s=2$. Чрез модификация на методите, които ще изложим в 1.2. могат да се получат същите оценки и за проблем 3 при $s>2$, s -крайно. В 1.2. е доказано, че непрекъснатата функция f, монотонно намаляваща в $[-1,0]$ и монотонно растяща в $[0,1]$ може да бъде приближена с полином, който спазва монотонността на функцията, с порядък $O(\omega(f;n^{-1}))$, т.е. получена е оценка, аналогична на оценката в теоремата на Джексон, което показва, че частично монотонните приближения не променят порядъка на обикновените равномерни приближения.

В 1.3. е решен проблем 2 за частично монотонното интерполиране.

Нека са дадени точките (x_i, y_i), $i=0,\dots,m$; $x_i=i/m$, $y_i<y_{i+1}$, $y_0=0$, $y_m=1$. Волибнер[18] и Янг [19] доказаха, че съществува алгебричен полином P, такъв, че $P(x_i)=y_i$, $i=0,\dots,m$ и P е монотонен в $[0,1]$, без обаче да дадат оценка за степента на полинома. Николчева[20] уточнява този резултат като показва, че този полином може да бъде от степен $Cm\ln m$, когато $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i>m^{-\alpha}$, $m<\alpha<1$.

Тази оценка за степента на интерполационния, монотонен полином е точна.

В 1.3. е получена аналогична оценка за степента на полином, който интерполира в точките $x_0=0$, $x_i=i/m$, $x_{-i}=-i/m$ стойностите $y_0=0$, y_i и y_{-i}; $y_i<y_{i+1}$, $y_{-i}<y_{-(i+1)}$, $i=1,\dots,m$ и който е монотонно намаляващ в $[-1,0]$

и монотонно растящ в $[0,1]$. Тази оценка е точна. По този начин се дава точен отговор на проблем 2. От оценката за степента на частично монотонния интерполационен полином като следствия в 1.4. са получени точни оценки за частично монотонното приближение на ограничени частично монотонни функции относно хаусдорфовото разстояние и частично монотонното, локално приближение на непрекъснати функции. (Относно локалните приближения виж работата на В.Попов [21]).

1.2. Частично монотонни приближения на частично монотонни функции.

В този параграф ще бъде доказана

Теорема 1.4. Ако f е непрекъсната в $[-1,1]$ функция, която при $x \in [-1,0]$ е монотонно намаляваща и при $x \in [0,1]$ е монотонно растяща, то

$$E_n^2(f) \leqq 3002\, \omega(f; n^{-1}),$$

където според дефинициите в 1.1. за всяко цяло и положително n ,

$$E_n^2(f) = \inf_{P \in H_n^2} \| f - P \|_{[-1,1]}$$

$$H_n^2 = \{ P : P \in H_n,\ P'(x) \leqq 0 \text{ при } x \in [-1,0],\ P'(x) \geqq 0 \text{ при } x \in [0,1] \}.$$

За да докажем теорема 1.4., налага се да бъдат доказани някои помощни резултати.

Лема 1.1. Ако f е камбановидна и стъпаловидна

2π -периодична функция със скокове c_k в точките $k\pi/n$ и ако $f\in Lip_M 1$, то операторът на Джексон за f

$$U_n(f;x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt$$

е също камбановидна функция и

$$\|U_n'(f;x)\|_{[-\pi,\pi]}\leq 13M.$$

Доказателство: Тъй като f е стъпаловидна, със скокове c_k, то

(1) $$U_n(f;x)=\mu_n\sum_{k=1}^{n-1}c_k\int_{-k\pi/n}^{k\pi/n}\psi_n(x-t)\,dt,$$

където

$$\mu_n=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)},\quad \psi_n(y)=\left[\frac{\sin(ny/2)}{\sin(y/2)}\right]^4.$$

Нека

$$\varphi_k(x)=\int_{-k\pi/n}^{k\pi/n}\psi_n(x-t)\,dt.$$

Тогава

(2) $$\varphi_k'(x)=\left(\frac{\sin\left(\frac{x+k\pi/n}{2}n\right)}{\sin\frac{x+k\pi/n}{2}}\right)^4-\left(\frac{\sin\left(n\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}\right)^4=$$

$$\left(\sin\left(n\frac{x+k\pi/n}{2}\right)\right)^4\left\{\left(\sin\frac{x+k\pi/n}{2}\right)^{-4}-\left(\sin\frac{x-k\pi/n}{2}\right)^{-4}\right\}.$$

Очевидно $\varphi_k(x)$ е четна функция и освен това за $x \in [0,\pi]$, от (2) следва, че $\varphi_k'(x) \leqq 0$, тъй като

$$\left|\sin\frac{x+k\pi/n}{2}\right| \geqq \left|\sin\frac{x-k\pi/n}{2}\right| \quad \text{за} \quad x \in [0,\pi].$$

От направените разсъждения, които са същите, както в [5] следва, че $U_n(f;x)$ е също камбановидна функция.

Трябва да докажем, че $U_n(f;x)$ притежава ограничена производна за всяко $x \in [-\pi,\pi]$ и всяко цяло, положително n.

Ще използуваме известните неравенства

$$(3) \qquad |\sin nt| \leqq n|\sin t| \qquad \text{за всяко } t$$

$$(4) \qquad \sin t \geqq \frac{2}{\pi}.t \qquad \text{при } 0 \leqq t \leqq \pi/2 .$$

От (2) получаваме за всяко $x \in [0,\pi]$, $1 \leqq k \leqq n-1$

$$(5) \qquad |\varphi_k'(x)| \leqq \left|\frac{\sin\left(n\frac{x+k\pi/n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+k\pi/n}{2}\right)}\right|^4 + \left|\frac{\sin\left(n\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}\right|^4 .$$

От (3) и (5) получаваме, че за всяко $x \in [0,\pi]$ и k, $1 \leqq k \leqq n-1$

$$(6) \qquad |\varphi_k'(x)| \leqq 2n^4.$$

Нека $\Delta_i = [(i-1)\pi/n, (i+1)\pi/n]$, $i = 1,\dots,n-1$.

Предполагаме, че $x \in \Delta_i$ и $1 \leqq k \leqq i-2$. Ще оценим $|\varphi_k'(x)|$.

Тъй като $k \leqq n-1$, то $\min\limits_{x\in[0,\pi]} \left|\sin\frac{x+k\pi/n}{2}\right|$

се достига или при $x=0$, или при $x=\pi$. Получаваме, че за всяко $x\in[0,\pi]$

$$\left|\sin\frac{x+k\pi/n}{2}\right| \geqq \min\left\{\left|\sin\frac{k\pi}{2n}\right|, \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)\right|\right\}.$$

Но от (4) получаваме

$$\left|\sin\frac{k\pi}{2n}\right| \geqq \frac{k}{n}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)\right| = \sin\frac{\pi(n-k)}{2n} \geqq \frac{n-k}{n}.$$

Следователно, получаваме, че за всяко $x\in[0,\pi]$

$$(7)\quad \left|\frac{\sin\left(n\frac{x+k\pi/n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+k\pi/n}{2}\right)}\right|^4 \leqq \left|\frac{1}{\sin\left(\frac{x+k\pi/n}{2}\right)}\right|^4 \leqq \max\left\{\frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4}\right\}$$

За да оценим второто събираемо в (5), ще използваме условието, че $x\in\Delta_i$, $1\leqq k\leqq i-2$.

Тогава

$$\frac{i-k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2} \leqq \frac{x-k\pi/n}{2} \leqq \frac{i-k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

От (4), като имаме предвид как са ограничени i и k, получаваме

$$\sin\frac{x-k\pi/n}{2} \geqq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x-k\pi/n}{2} \geqq \frac{i-k-1}{n}.$$

Или, ако $x\in\Delta_i$, $1\leqq k\leqq i-2$, $1\leqq i\leqq n-1$, то

$$(8)\qquad \left|\frac{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}\right| \leqq \frac{n}{i-k-1}.$$

Нека $x \in \Delta_i$, $i+2 \leqq k \leqq n-1$.

Тогава

$$(9)\qquad \frac{i-k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2} \leqq \frac{x-k\pi/n}{2} \leqq \frac{i+k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2} < 0.$$

От (4) и (9) получаваме

$$\left|\sin\frac{x-k\pi/n}{2}\right| \geqq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\pi/n-x}{2} \geqq \frac{k-i-1}{n}.$$

Или, ако $x \in \Delta_i$, $i+2 \leqq k \leqq n-1$, ,

$1 \leqq i \leqq n-1$,

$$(10)\qquad \left|\frac{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\cdot n\right)}{\sin\left(\frac{x-k\pi/n}{2}\right)}\right| \leqq \frac{n}{k-i-1}.$$

От (6), (7), (8) и (10) получаваме, ако $x \in \Delta_i$,

$1 \leqq i \leqq n-1$:

$$(11)\qquad |\varphi_k'(x)| \leqq \begin{cases} \max\left\{\frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4}\right\} + \frac{n^4}{(i-k-1)^4} & \text{ако } 1 \leqq k \leqq i-2 \\ 2n^4, & \text{ако } i-2 < k < i+2 \\ \max\left\{\frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4}\right\} + \frac{n^4}{(k-i-1)^4} & \text{ако } i+2 \leqq k \leqq n-1 \end{cases}$$

Нека $x \in \Delta_i$. От (1) получаваме

$$|U_n'(f;x)| \leqq \mu_n \sum_{k=1}^{n-1} c_k |\varphi_k'(x)|.$$

Тъй като $f \in Lip_M 1$, то $0 \leqq c_k \leqq M/n$.

Или

$$\left| U_n^{'}(f;x) \right| \leqq \frac{\mu_n M}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| =$$

$$\frac{\mu_n M}{n} \left[\sum_{k=1}^{i-2} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| + \left| \varphi_{i-1}^{'}(x) \right| + \left| \varphi_i^{'}(x) \right| + \left| \varphi_{i+1}^{'}(x) \right| + \right.$$

$$\left. \sum_{k=i+2}^{n-1} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| \right].$$

От (11) получаваме

$$\left| U_n^{'}(f;x) \right| \leqq \frac{\mu_n M}{n} \left[\sum_{k=1}^{i-2} \left(\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} + \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{n}{i-k-1} \right)^4 \right) + 6n^4 + \sum_{k=i+2}^{n-1} \left(\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} + \left(\frac{n}{k-i-1} \right)^4 \right) \Bigg].$$

Но

$$\sum_{k=1}^{i-2} \left(\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} \right) \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} \right).$$

Без ограничение на общността може да смятаме, че $n-1$ е четно. Тогава, ако $k \leqq (n-1)/2$, то $\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} = \frac{n^4}{k^4}$; ако $k \geqq (n-1)/2$, то $\max\left\{ \frac{n^4}{k^4}, \frac{n^4}{(n-k)^4} \right\} = \frac{n^4}{(n-k)^4}$.

Следователно:

$$\sum_{k=1}^{i-2}\left(\max\left\{\frac{n^4}{k^4},\frac{n^4}{(n-k)^4}\right\}\right)\leqq\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{n^4}{k^4}+\sum_{k=(n-1)/2+1}^{n-1}\frac{n^4}{(n-k)^4}\leqq$$

(12)

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^4}{k^4}=2n^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\leqq 10n^4.$$

По същия начин се доказва, че

(13) $$\sum_{k=i+2}^{n-1}\left(\max\left\{\frac{n^4}{k^4},\frac{n^4}{(n-k)^4}\right\}\right)\leqq 10n^4.$$

Но

(14) $$\sum_{k=1}^{i-2}\left(\frac{n}{i-k-1}\right)^4=n^4\sum_{k=1}^{i-2}\frac{1}{k^4}\leqq 10n^4,$$

(15) $$\sum_{k=i+2}^{n-1}\left(\frac{n}{k-i-1}\right)^4=n^4\sum_{k=1}^{n-i-2}\frac{1}{k^4}\leqq 10n^4.$$

От (12), (13), (14) и (15) получаваме за $x\in\Delta_i$

$$|U_n'(f;x)|\leqq\frac{\mu_n M}{n}n^4\leqq M.46\frac{3n^3}{2\pi n(2n^2+1)}\leqq 13M.$$

Дясната страна на горното неравенство не зависи от i. Тогава за всяко $x\in[0,\pi]$

$$|U_n'(f;x)|\leqq 13M.$$

Тъй като $U_n'(f;x)$ е четна функция, то за всяко $x\in[-\pi,\pi]$

$$|U_n'(f;x)|\leqq 13M.$$

С това лемата е доказана.

Лема 1.2. Ако f е камбановидна 2π -периодична функция и $f \in Lip_M 1$, то съществува тригонометричен, камбановиден полином $U_n(x)$ от ред $2n-2$, за който

$$\| f - U_n \|_{[-\pi,\pi]} \leqq \frac{M(6+\pi)}{n}.$$

И освен това

$$\| U_n' \|_{[-\pi,\pi]} \leqq 13M.$$

Доказателство: Тъй като f е камбановидна 2π -периодична функция и $f \in Lip_M 1$, то съществува 2π -периодична, стъпаловидна и камбановидна функция f_1, със скокове в точките $k\pi/n$, $f_1 \in Lip_M 1$, за който

(16) $$\| f_1 - f \|_{[-\pi,\pi]} \leqq \frac{M\pi}{n}.$$

Нека

$$U_n(x) = U_n(f_1; x),$$

където $U_n(f_1; x)$ е полинома на Джексон за функцията f_1 използуван в лема 1.1. От теоремите на Джексон (вж. напр. [31] стр. 114) е известно, че $U_n(f_1; x)$ е тригонометричен полином от ред $2n-2$ и че

(17) $$\| f_1 - U_n(f_1; x) \|_{[-\pi,\pi]} \leqq 6\frac{M}{n}.$$

От (16) и (17) получаваме

$$\| f - U_n \|_{[-\pi,\pi]} \leqq \frac{M}{n}(6+\pi).$$

От лема 1.1. следва, че

$$\| U_n'(x) \|_{[-\pi,\pi]} \leqq 13M.$$

Лема 1.3. Ако $f(x)$ е монотонно растяща, непрекъсната функция при $x \in [-1,1]$ и $f \in Lip_M 1$ при $x \in [-1,1]$, то съществува алгебричен монотонно растящ в $[-1,1]$ полином P, $P \in H_n$, за който

$$\| f - P \|_{[-1,1]} \leq 10 M n^{-1}$$

$$|P'(x)| \sqrt{1-x^2} \leq 13M \text{ за } x \in [-1,1].$$

Доказателство: Да разгледаме функцията $g(x) = f(\cos x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Очевидно, това е 2π -периодична, камбановидна функция и $g \in Lip_M 1$. Тогава от лема 1.2. следва, че съществува тригонометричен, камбановиден полином $U_{n/2}$ от ред $n-1$, за който

$$\| g - U_{n/2} \|_{[-\pi,\pi]} \leq 2M(6+\pi) n^{-1}$$

и освен това

$$\| U'_{n/2} \|_{[-\pi,\pi]} \leq 13M.$$

Нека $P(x) = U_{n/2}(\arccos x)$, $x \in [-1,1]$. $P(x)$ е алгебричен полином от H_n. Освен това, лесно се вижда, че $P(x)$ е монотонен при $x \in [-1,1]$ и

$$\| f - P \|_{[-1,1]} = \| g - U_n \|_{[-\pi,\pi]} \leq M(6+\pi) n^{-1}.$$

От друга страна

$$|P'(x)| = |U'_n(\arccos x)| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Следователно:

$$|P'(x)| \sqrt{1-x^2} = |U'_n(\arccos x)| \leq 13M.$$

С това лемата е доказана.

Ако f е интегруема функция в $[-\pi,\pi]$, то числото $\omega(f;\delta)_L=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+\delta)-f(x)|\,dx$ се нарича интегрален модул на f.

Лема 1.4. Нека f е произволна стъпаловидна (със скокове в точките $k\pi/n$), камбановидна, 2π-периодична, интегруема функция и нека $-1\leq \max_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)\leq 1$. Тогава за f съществува камбановиден тригонометричен полином U_n от ред $2n-2$, такъв, че

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-U_n(x)|\,dx\leq 6\,\omega(f;n^{-1})_L$$

$$-1\leq U_n(x)\leq 1\,.$$

Доказателство: Нека $U_n(x)=U_n(f;x)$, където $U_n(f;x)$ е полинома на Джексон от лема 1.1. Тогава $U_n(x)$ е камбановиден полином и от доказателството на теоремите на Джексон (вж. напр.[31], стр. 116) следва

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-U_n(x)|\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\left\{\int_0^{\pi/2}|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\right\}dx=$$

$$\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\,dx\right\}dt\,.$$

Нека

$$\omega(f;\delta)_L=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+\delta)-f(x)|\,dx\,.$$

е интегралният модул на функцията f. Лесно се вижда, че

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\,dx \leq 2\,\omega(f;2t)_L .$$

Тогава

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-U_n(x)|\,dx \leq \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} \omega(f;2t)_L \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt .$$

От тук нататък, ако продължим доказателството точно, както в теоремата на Джексон, получаваме, че за камбановидния, тригонометричен полином $U_n(x)$, от ред $2n-2$, е изпълнено

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-U_n(x)|\,dx \leq 6\,\omega(f;n^{-1})_L .$$

От друга страна, тъй като операторът на Джексон е положителен $U_n(1;x)=1$ и $-1 \leq f(x) \leq 1$ при $x\in[-\pi,\pi]$, то

$$-1 \leq U_n(f;x) = U_n(x) \leq 1 .$$

С това лемата е доказана.

Нека

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 . \end{cases}$$

Лема 1.5. За всяко цяло, положително n, съществува монотонен, нечетен, алгебричен полином Q, $Q\in H_n$, такъв, че

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\sigma(x)-Q(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \leq 36\,n^{-1}; \quad -1 \leq Q(x) \leq 1,\ x\in[-1,1]$$

Доказателство: Нека

$$\sigma^T(x) = \sigma(\cos x)\ ,\quad x \in [-\pi, \pi].$$

Очевидно $\sigma^T(x)$ е 2π -периодична, камбановидна, стъпаловидна, със скок при $x = \pm \pi/2$ четна функция. Тогава от лема 1.4. следва, че съществува тригонометричен, камбановиден полином $Q_1(x)$ от ред $n-1$, такъв че

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma^T(x) - Q_1(x)|\, dx \leq 18\, \omega(\sigma^T; n^{-1})_L$$

$$-1 \leq Q_1(x) \leq 1\ ,\quad x \in [-\pi, \pi].$$

Нека $x = \arccos y$. Тогава $Q_2(y) = Q_1(\arccos y) \in H_n$ е монотонно растяща функция и

$$(18)\qquad \int_{-1}^{1} \frac{|\sigma(y) - Q_2(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \leq 18\, \omega(\sigma^T; n^{-1})_L$$

$$(19)\qquad -1 \leq Q_2(y) \leq 1.$$

Лесно се вижда, че ако е изпълнено (18), то е изпълнено и

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\sigma(y) - (-Q_2(-y))|}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \leq 18\, \omega(\sigma^T; n^{-1})_L .$$

Но тогава, ако $Q(x) = (Q_2(x) - Q_2(-x))/2$, то

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\sigma(y) - Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \leq 18\, \omega(\sigma^T; n^{-1})_L .$$

От друга страна, ако Q_2 е монотонен, то Q също ще бъде монотонен при $x \in [-1, 1]$. От (19) получаваме

$$-1 \leq Q(y) \leq 1.$$

Лесно се вижда, че $\omega(\sigma^T; n^{-1}) \leq 2n^{-1}$. Т.е. получихме нечетния монотонен в $[-1,1]$ полином $Q \in H_n$, за който

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\sigma(y)-Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \leqq 36\,n^{-1}\,;\ -1 \leqq Q(y) \leqq 1,\ y\in[-1,1].$$

С това лемата е доказана.

Теорема 1.5. Ако f е функция от $Lip_M 1$ в $[-1,1]$, която при $x\in[-1,0]$ е монотонно намаляваща, при $x\in[0,1]$ е монотонно растяща, то за всяко цяло, положително n, съществува алгебричен полином R, $R\in H_n^2$, за който

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-R(x)| = \|f-R\|_{[-1,1]} \leqq 3000\,M\,n^{-1}.$$

Доказателство: Без ограничение на общността може да смятаме, че $f(0)=0$. Да разгледаме непрекъснатата функция

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & -1\leqq x\leqq 0\\ f(x) & 0\leqq x\leqq 1\,.\end{cases}$$

Очевидно $f_1\in Lip_M 1$, щом $f\in Lip_M 1$. Освен това, $f_1(x)$ е монотонно растяща функция при $x\in[-1,1]$. Тогава от лема 1.3. следва, че за всяко n, съществува монотонно растящ в $[-1,1]$ алгебричен полином $T\in H_n$, за който

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |f_1(x)-T(x)| \leqq 10\,M\,n^{-1},\quad T'(x)\geqq 0 \text{ при } x\in[-1,1],$$

$$|T'(x)|\sqrt{1-x^2}\leqq 13M \text{ при } x\in[-1,1].$$

Да разгледаме полинома $S(x)=T'(x)\,Q(x)$, където Q е полинома от лема 1.5. Полиномът $S(x)$ е от степен не по-висока от $2n-1$. Освен това, тъй като Q е монотонно растящ нечетен полином, то

$$Q(x) < 0 \text{ при } -1 \leqq x < 0, \; Q(0)=0, \; Q(x) > 0 \text{ при } 0 < x \leqq 1.$$

Тогава

$$(20) \quad \begin{array}{ll} S(x) \leqq 0 & \text{при } -1 \leqq x \leqq 0 \\ S(x) \geqq 0 & \text{при } 0 \leqq x \leqq 1. \end{array}$$

Да разгледаме полинома

$$R_1(x) = \int_{-1}^{x} S(y)\,dy,$$

който е от H_{2n}. От (20) следва, че $R_1(x)$ е от класа H_{2n}^2.

Нека $Q(y) = \sigma(y) - \Delta(y)$, където σ е функцията от лема 1.5. Тогава

$$\Delta(y) = 1 - Q(y) \quad \text{при } y > 0$$

$$\Delta(y) = -1 - Q(y) \quad \text{при } y \leqq 0.$$

При $x \leqq 0$, получаваме

$$(21) \quad R_1(x) = \int_{-1}^{x} S(y)\,dy = \int_{-1}^{x} T'(y)\,Q(y)\,dy =$$

$$\int_{-1}^{x} T'(y)\left[-1-\Delta(y)\right]dy = -\int_{-1}^{x} T'(y)\,dy -$$

$$\int_{-1}^{x} T'(y)\,\Delta(y)\,dy = -T(x) + T(-1) - \int_{-1}^{x} T'(y)\,\Delta(y)\,dy.$$

При $x > 0$, получаваме

$$(22) \quad R_1(x) = \int_{-1}^{0} S(y)\,dy + \int_{0}^{x} S(y)\,dy =$$

$$-T(0)+T(-1)-\int_{-1}^{0}T'(y)\Delta(y)\,dy+$$

$$\int_{0}^{x}T'(y)[1-\Delta(y)]\,dy=-T(0)+T(-1)-\int_{-1}^{0}T'(y)\Delta(y)\,dy+$$

$$T(x)-T(0)-\int_{0}^{x}T'(y)\Delta(y)\,dy.$$

От друга страна от лема 1.5. получаваме:

$$\int_{-1}^{1}\frac{|\sigma(y)-Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\int_{-1}^{0}\frac{|\sigma(y)-Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy+\int_{0}^{1}\frac{|\sigma(y)-Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{|-1+1+\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy+\int_{0}^{1}\frac{|1-1-\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\leqq 36n^{-1}.$$

Тъй като $|\Delta(y)|$ и $\sqrt{1-y^2}$ са четни функции, получаваме

$$(23)\qquad \int_{-1}^{0}\frac{|\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\int_{0}^{1}\frac{|\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\leqq 18n^{-1}.$$

Нека $x\leqq 0$. Тогава от (21) получаваме

$$|f_1(x)-R_1(x)|=\left|f_1(x)+T(x)-T(-1)+\int_{-1}^{x}T'(y)\Delta(y)\,dy\right|\leqq$$

$$|f_1(x)+T(x)|+|T(-1)|+\int_{-1}^{0}|T'(y)|\,|\Delta(y)|\,dy.$$

Но при $x\leqq 0$, $f_1(x)=0$:

$$|f_1(x)+T(x)|=|f_1(x)-T(x)|\leqq 10Mn^{-1}.$$

$$|T(-1)|=|f_1(-1)-T(-1)|\leqq 10Mn^{-1}$$

$$|T'(y)|\leqq 13M/\sqrt{1-y^2}.$$

От (23) получаваме

$$|f_1(x) - R_1(x)| \leqq 10Mn^{-1} + 10Mn^{-1} + \int_{-1}^{0} 13M \frac{|\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}} dy \leqq$$

$$20Mn^{-1} + 13M.18n^{-1} < 300Mn^{-1}.$$

Нека $x \geqq 0$. От (22) и (23) получаваме

$$|f_1(x) - R_1(x)| = |f_1(x) - T(x) - T(-1) + 2T(0) +$$
$$\int_{-1}^{0} T'(y)\Delta(y)dy + \int_{0}^{x} T'(y)\Delta(y)dy| \leqq$$
$$|f_1(x) - T(x)| + |T(-1)| + 2|T(0)| +$$
$$13M\int_{-1}^{0} \frac{|\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}} dy + 13M\int_{0}^{1} \frac{|\Delta(y)|}{\sqrt{1-y^2}} dy \leqq$$
$$10Mn^{-1} + 10Mn^{-1} + 20Mn^{-1} + 2.13.18.Mn^{-1} < 600Mn^{-1}.$$

Получихме, че за всяко $x \in [-1,1]$, за полинома $R_1(x) \in H_{2n}^2$:

$$|f_1(x) - R_1(x)| \leqq 600Mn^{-1}.$$

Тогава лесно се вижда, че съществува полином $R_{1,n}(x) \in H_n^2$, за който

$$|f_1(x) - R_{1,n}(x)| \leqq 1200Mn^{-1}.$$

По същия начин се доказва, че съществува полином $R_{2,n}(x)$ от H_n^2, за който

$$|f_2(x) - R_{2,n}(x)| \leqq 1200Mn^{-1}, \quad x \in [-1,1]$$

където

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } -1 \leqq x \leqq 0 \\ 0 & \text{при } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Но тогава полиномът $R(x) = R_{1,n}(x) + R_{2,n}(x)$ ще бъде от H_n^2 и за него ще имаме

$$|f(x) - R(x)| \leqq 3000 M n^{-1}.$$

С това теоремата е доказана.

Сега вече може да преминем към

Доказателство на теорема 1.4. За да докажем оценка за произволна частично монотонна функция ще използуваме, както обикновено в такива случаи, оценката за частично монотонната функция от $Lip_M 1$, получена в теорема 1.5.

Нека $0 < \delta < 1$ е произволно число. Без ограничение на общността може да смятаме, че $f(0) = 0$ и нека за определеност $\max\{f(-\delta), f(\delta)\} = f(\delta)$. Ако $\max\{f(-\delta), f(\delta)\} = f(-\delta)$, разсъжденията, които са изложени по-долу, протичат по аналогичен начин. Очевидно, поради частичната монотонност на f , уравнението $f(x) = f(\delta)$ има освен $x = \delta$ и още само един отрицателен корен τ . Тъй като $\max\{f(-\delta), f(\delta)\} = f(\delta)$, то $\tau \leqq -\delta$.

Да разгледаме функцията

$$(24) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(-1), & -\infty < x \leqq -1 \\ f(x), & -1 \leqq x \leqq \tau \\ f(\delta), & \tau \leqq x \leqq \delta \\ f(x), & \delta \leqq x \leqq 1 \\ f(1), & 1 \leqq x < \infty . \end{cases}$$

Лесно се вижда, че

$$(25) \qquad \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - \varphi(x)| = f(\delta) = |f(\delta) - f(0)| \leqq \omega(f; \delta) .$$

Освен това $\varphi(x)$ е частично монотонна функция. Да образуваме функцията:

$$\psi(x) = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} \varphi(t)\,dt.$$

Получаваме

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} |\varphi(t) - \varphi(x)|\,dt \leqq$$

(26)

$$\frac{1}{\delta}\int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} \omega(\varphi; |t-x|)\,dt \leqq \omega(\varphi; \delta/2) \leqq \omega(f; \delta/2).$$

Функцията $\psi(x)$ представлява първата функция на Стеклов със стъпка δ за функцията φ. От [32], стр. 188 е известно, че $\psi(x)$ е диференцируема в $[-1, 1]$ и

$$\psi'(x) = \frac{1}{\delta}\left\{\varphi(x+\delta/2) - \varphi(x-\delta/2)\right\}.$$

Нека $0 \leqq t \leqq 1$. От (24) и от частичната монотонност на f следва

$$\psi'(t) = \frac{1}{\delta}\left\{\varphi(t+\delta/2) - \varphi(t-\delta/2)\right\} \geqq 0.$$

Ако $-1 \leqq t \leqq 0$, то

$$\psi'(t) \leqq 0.$$

От друга страна, пак от [32] стр. 188 е известно, че

(27) $$\max_{x\in[-1,1]} |\psi'(x)| \leqq 1/\delta\, \omega(\varphi; \delta) \leqq 1/\delta\, \omega(f; \delta).$$

От (27) и теоремата за крайните нараствания получаваме $\psi \in Lip_M 1$, където $M = 1/\delta\, \omega(f; \delta)$. Тъй като $\psi(x)$ е монотонно намаляваща функция при $x \in [-1, 0]$ и монотонно растяща при $x \in [0,1]$, то от теорема 1.5. следва, че за всяко n , съществува полином $P \in H_n^2$, за който

(28) $$\|\psi - P\|_{[-1,1]} \leq 3000\,\omega(f;\delta)(n\delta)^{-1}.$$

От (25), (26) и (28) следва, че

$$\|f - P\|_{[-1,1]} \leq \omega(f;\delta) + \omega(f;\delta/2) + 3000\,\omega(f;\delta)(n\delta)^{-1}.$$

Ако $\delta = n^{-1}$, получаваме

$$\|f - P\|_{[-1,1]} \leq 3002\,\omega(f;n^{-1}).$$

Навсякъде при получаването на теорема 1.4. и теорема 1.5, константите при съответните оценки са получени грубо. Порядъкът на приближение, обаче, е точен, което следва от съответните оценки отдолу за равномерното приближение на функции от $Lip_M 1$ и на произволни непрекъснати функции.

1.3. Частично монотонно интерполиране.

В този параграф са доказани следните две теореми:

Теорема 1.6. Нека са дадени точките (x_i, y_i) , (x_{-i}, y_{-i}), $i = 1, \dots, m$, $(x_0 = 0, y_0 = 0)$; $x_i = i/m$, $x_{-i} = -i/m$, $y_m = y_{-m} = 1$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i > 0$, $\Delta y_{-i} = y_{-(i+1)} - y_{-i} > 0$, $i = 0, \dots, m-1$; $A = \max\{\Delta y_i : 1-m \leq i \leq m-1\}$, $B = \min\{\Delta y_i : 1-m \leq i \leq m-1\}$

Нека $k \geq 1$ е цяло. Ако n удовлетворява $k \ln n/n \leq 1/8m$, $4m(A+B)/n^{k/4} B < 1$, то съществува алгебричен полином $P_{n,k} \in H^2_{4n+1}$, за който

$$P_{n,k}(x_i) = y_i,\ P_{n,k}(x_{-i}) = y_{-i},\ i=1,\dots,m,$$
$$P_{n,k}(0) = 0.$$

Теорема 1.7. При означенията на теорема 1.6, нека $B \geq c\, m^{-\beta}$, $m > \beta > 1$, $n > m > \max\{8/c,\ e^5\}$.

Ако $n \geq 45\beta\, m \ln m$, то съществува алгебричен полином $P_n \in H^2_{4n+1}$, за който $P_n(x_i) = y_i$, $P_n(x_{-i}) = y_{-i}$, $i = 1,\dots,m$, $P_n(0) = 0$.

За по-нататъшните разсъждения са нужни следните три леми, доказани в [20] и [25].

Лема 1.6. За всяко k, $1 \leq k \leq n/2\ln n$, съществува алгебричен полином $A_{n,k} \in H_{2n}$ със свойствата

(1) $A_{n,k}(x) \geq 0$, $x \in [-1,1]$

(2) $A_{n,k}(x) \leq 2e^4/n^{2k-1}$; $\lambda_{k,n} \leq |x| \leq 1$ където $\lambda_{k,n} = k\ln n/n$

(3) $\displaystyle\int_{-\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k,n}} A_{n,k}(x)\,dx \geq 1$.

Лема 1.7. Ако $|\varepsilon_{i,j}| < \varepsilon$; $i,j = 1,\dots,m$ и

$M > m\varepsilon(A+B)/B$, $A = \max\limits_{1\leq i\leq m} b_i$, $B = \min\limits_{1\leq i\leq m} b_i$, $b_i > 0$,

$i = 1,\dots,m$, то системата

$$\begin{bmatrix} M+\varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \dots & \varepsilon_{1,m} \\ \varepsilon_{2,1} & M+\varepsilon_{2,2} & \dots & \varepsilon_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{m,1} & \varepsilon_{m,2} & \dots & M+\varepsilon_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

има единствено положително решение.

Лема 1.8. За всяко $n>1$ и $\delta,\ 8\ln n/n \leqq \delta \leqq 1$ съществува алгебричен полином $\sigma_{n,\delta}(x) \in H_{2n}$, такъв че

(4) $\quad |1+\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq e^{-n\delta/4}$ за $x \in [-1,-\delta]$

(5) $\quad |1-\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq e^{-n\delta/4}$ за $x \in [\delta, 1]$

(6) $\quad -1 \leqq \sigma_{n,\delta}(x) \leqq 1$ за $|x| \leqq \delta$

(7) $\quad \sigma_{n,\delta}(x) \leqq 0$ при $x \in [-1,0]$; $\sigma_{n,\delta}(x) \geqq 0$ при $x \in [0,1]$.

Последната лема ще бъде доказана в 2.2.

Ще докажем следната

Лема 1.9. Ако $3k\ln n/n \leqq \alpha \leqq 1-2k\ln n/n$, то за всяко k, $8 \leqq k \leqq n/2\ln n$, съществува алгебричен полином $A_{n,k}(x,\alpha) \in H_{4n}$, със свойствата

(8) $\quad A_{n,k}(x,\alpha) \leqq 0$ за $x \in [-1,0]$, $A_{n,k}(x,\alpha) \geqq 0$ за $x \in [0,1]$

(9) $\quad |A_{n,k}(x,\alpha)| \leqq 4e^4/n^{2k-1}$ за $-1 \leqq x \leqq \alpha - 2\lambda_{k,n}$

(10) $\quad |A_{n,k}(x,\alpha)| \leqq 4e^4/n^{2k-1}$ за $\alpha + 2\lambda_{k,n} \leqq x \leqq 1$;

$\lambda_{k,n} = k\ln n/n$.

(11) $$\int_{\alpha-2\lambda_{k,n}}^{\alpha+2\lambda_{k,n}} A_{n,k}(x,\alpha)\,dx \geqq 1 - 1/n^{k/4}.$$

Доказателство: Да вземем полинома $A_{n,k}(x,\alpha) = \mathcal{A}_{n,k}\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{n,\delta}(x)$, където $\mathcal{A}_{n,k}$ е полинома от лема 1.6., $\sigma_{n,\delta}$ е полинома от лема 1.8., $\delta = k\ln n/n$.

От лема 1.6. и лема 1.8. следва

1. $A_{n,k}(x,\alpha) \leqq 0$ за $x \in [-1,0]$, $A_{n,k}(x,\alpha) \geqq 0$ за $x \in [0,1]$, тъй като $\mathcal{A}_{n,k}\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) \geqq 0$ за

$x \in [-1,1]$, $\sigma_{n,\delta}(x) \leqq 0$ за $x \in [-1,0]$, $\sigma_{n,\delta}(x) \geqq 0$ за $x \in [0,1]$.

2. Нека $x \in [-1, \alpha - 2\lambda_{k,n}]$. Тогава (според лема 1.6) :

(12) $$A_{n,k}\left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \leqq \frac{2e^4}{n^{2k-1}}.$$

Тъй като $\delta = k \ln n / n$ и $\alpha > 3k \ln n / n$, от лема 1.8. следва, че

(13) $$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq 1 + e^{-n\delta/4} = 1 + 1/n^{k/4}.$$

От (12) и (13) получаваме

(14) $$|A_{n,k}(x,\alpha)| = \left|A_{n,k}\left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right| |\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq \frac{2e^4}{n^{2k-1}}\left(1 + \frac{1}{n^{k/4}}\right) \leqq \frac{4e^4}{n^{2k-1}}.$$

3. При $\alpha + 2\lambda_{k,n} \leqq x \leqq 1$, също от лема 1.6. и лема 1.8. получаваме

$$\left|A_{n,k}\left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right| \leqq \frac{2e^4}{n^{2k-1}}$$

$$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq 1 + 1/n^{k/4}.$$

Или

$$|A_{n,k}(x,\alpha)| \leqq \frac{4e^4}{n^{2k-1}}.$$

4. От лема 1.6, лема 1.8. и от теоремата за средните стойности получаваме:

$$\int_{\alpha - 2\lambda_{k,n}}^{\alpha + 2\lambda_{k,n}} A_{n,k}(x,\alpha)\,dx = \int_{\alpha - 2\lambda_{k,n}}^{\alpha + 2\lambda_{k,n}} A_{n,k}\left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{n,\delta}(x)\,dx =$$

$$\sigma_{n,\delta}(\xi_\alpha) \int_{\alpha-2\lambda_{k,n}}^{\alpha+2\lambda_{k,n}} A_{n,k}\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)dx,$$

където $\alpha-2\lambda_{k,n} \leqq \xi_\alpha \leqq \alpha+2\lambda_{k,n}$.

Или

$$\int_{\alpha-2\lambda_{k,n}}^{\alpha+2\lambda_{k,n}} A_{n,k}(x,\alpha)dx = 2\sigma_{n,\delta}(\xi_\alpha)\int_{-\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k,n}} A_{n,k}(y)dy \equiv$$

$$(1+\tau_\alpha)\int_{-\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k,n}} A_{n,k}(y)dy,$$

където $|\tau_\alpha| \leqq 1/n^{k/4}$, $\int_{-\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k,n}} A_{n,k}(y)dy \geqq 1$.

С това лемата е доказана.

Лема 1.10. Ако $3k\ln n/n \leqq \alpha \leqq 1-2k\ln n/n$, то за всяко k, $8 \leqq k \leqq n/2\ln n$, съществува алгебричен полином $B_{n,k}(x,\alpha) \in H_{4n+1}$, със свойствата

(15) $B_{n,k}(x,\alpha) \leqq 0$ за $x \in [-1,0]$

$B_{n,k}(x,\alpha) \geqq 0$ за $x \in [0,1]$

(16) $0 \leqq B_{n,k}(x,\alpha) \leqq 2/n^{k/4}$ за $-1 \leqq x \leqq \alpha-2\lambda_{k,n}$

(17) $|B_{n,k}(x,\alpha)-N| \leqq 2/n^{k/4}$ за $\alpha+2\lambda_{k,n} \leqq x \leqq 1$,

$\lambda_{k,n} = k\ln n/n$.

(18) $0 \leqq |B_{n,k}(x,\alpha)| \leqq N+2/n^{k/4}$ за $\alpha-2\lambda_{k,n} \leqq x \leqq \alpha+2\lambda_{k,n}$,

където $N = \int_{-\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k,n}} A_{n,k}(y)dy \geqq 1$

(19) $$B_{n,k}(0,\alpha)=0$$

Доказателство: Тази лема следва от лема 1.9. при

$$B_{n,k}(x,\alpha)=\int_{-1}^{x}A_{n,k}(y,\alpha)\,dy-\int_{-1}^{0}A_{n,k}(y,\alpha)\,dy.$$

Доказателство на теорема 1.6. Нека $\varepsilon>0$ е произволно и $c=m\varepsilon(A+B)/B$. Да разгледаме полинома

$$P_{n,k}(x)=\sum_{i=1}^{m}a_{m-i+1}\,c\,B_{n,k}\left(-x,\frac{2i-1}{2m}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_{m+i}\,c\,B_{n,k}\left(x,\frac{2i-1}{2m}\right).$$

Очевидно $P_{n,k}(x)\in H_{4n+1}$. Ще покажем, че системата

(20) $$P_{n,k}(x_{-i})=y_{-i},\ P_{n,k}(x_i)=y_i,\ i=1,\dots,m$$

има положително решение относно $\{a_i\}_{i=1}^{2m}$.

От условието на теоремата $k\ln n/n\leq 1/8m$ и от (16) и (17) получаваме

$$B_{n,k}\left(-j/m,\frac{2i-1}{2m}\right)\leq\frac{2}{n^{k/4}},\quad 1\leq j\leq m$$

$$B_{n,k}\left(j/m,\frac{2i-1}{2m}\right)\leq\frac{2}{n^{k/4}},\quad 1\leq j\leq i-1$$

$$B_{n,k}\left(j/m;\frac{2i-1}{2m}\right)=N+\delta_{k,n},\quad i\leq j\leq m,$$

където $N\geq 1$ не зависи от i,j, а $|\delta_{k,n}|\leq 2/n^{k/4}$

Но тогава системата (20) може да се запише така:

$$
\begin{bmatrix}
M+\delta_{1,1} & M+\delta_{1,2} & M+\delta_{1,3} & \dots & M+\delta_{1,m-1} & M+\delta_{1,m} & \delta_{1,m+1} & \delta_{1,m+2} & \delta_{1,m+3} & \dots & \delta_{1,2m-1} & \delta_{1,2m} \\
\delta_{2,1} & M+\delta_{2,2} & M+\delta_{2,3} & \dots & M+\delta_{2,m-1} & M+\delta_{2,m} & \delta_{2,m+1} & \delta_{2,m+2} & \delta_{2,m+3} & \dots & \delta_{2,2m-1} & \delta_{2,2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{m-1,1} & \delta_{m-1,2} & \delta_{m-1,3} & \dots & M+\delta_{m-1,m-1} & M+\delta_{m-1,m} & \delta_{m-1,m+1} & \delta_{m-1,m+2} & \delta_{m-1,m+3} & \dots & \delta_{m-1,2m-1} & \delta_{m-1,2m} \\
\delta_{m,1} & \delta_{m,2} & \delta_{m,3} & \dots & \delta_{m,m-1} & M+\delta_{m,m} & \delta_{m,m+1} & \delta_{m,m+2} & \delta_{m,m+3} & \dots & \delta_{m,2m-1} & \delta_{m,2m} \\
\delta_{m+1,1} & \delta_{m+1,2} & \delta_{m+1,3} & \dots & \delta_{m+1,m-1} & \delta_{m+1,m} & M+\delta_{m+1,m+1} & \delta_{m+1,m+2} & \delta_{m+1,m+3} & \dots & \delta_{m+1,2m-1} & \delta_{m+1,2m} \\
\delta_{m+2,1} & \delta_{m+2,2} & \delta_{m+2,3} & \dots & \delta_{m+2,m-1} & \delta_{m+2,m} & M+\delta_{m+2,m+1} & M+\delta_{m+2,m+2} & \delta_{m+2,m+3} & \dots & \delta_{m+2,2m-1} & \delta_{m+2,2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{2m,1} & \delta_{2m,2} & \delta_{2m,3} & \dots & \delta_{2m,m-1} & \delta_{2m,m} & M+\delta_{2m,m+1} & M+\delta_{2m,m+2} & M+\delta_{2m,m+3} & \dots & M+\delta_{2m,2m-1} & M+\delta_{2m,2m}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2m} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y-m \\ y-(m-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},
$$

където $|\delta_{i,j}| \leq 2c/n^{k/4}$, $M = c.N.$

От тази система като изваждаме от j -тия ред $j+1$ -вия, $j=1,\dots,m-1$ и от $m+j$ -тия $m+j-1$ вия, $j=1,\dots,m$, получаваме системата:

$$(21)\quad \begin{bmatrix} M+\varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \dots & \varepsilon_{1,2m} \\ \varepsilon_{2,1} & M+\varepsilon_{2,2} & \dots & \varepsilon_{2,2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{2m,1} & \varepsilon_{2m,2} & \dots & M+\varepsilon_{2m,2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_{-(m-1)} \\ \Delta y_{-(m-2)} \\ \vdots \\ \Delta y_{m-1} \end{bmatrix},$$

където $|\varepsilon_{i,j}| \leq 4C/n^{k/4}$, $\Delta y_i > 0$.

Но $C = m\varepsilon(A+B)/B$. Следователно $M > m\varepsilon(A+B)/B$, тъй като $M = cN > C$. От лема 1.7. следва, че ако $|\varepsilon_{i,j}| < \varepsilon$, то системата (21) има положително решение, т.е. трябва да бъде изпълнено условието

$$4C/n^{k/4} < \varepsilon = cB/m(A+B),$$

Или

$$(22)\quad 4m(A+B)/n^{k/4}.B < 1.$$

Следователно, трябва:

$$\ln n > \frac{4}{k}\ln\left(\frac{A+B}{B}.4m\right).$$

Тъй като условието (22) е зададено в условията на теоремата, от лема 1.7. следва, че системата (21), ~~т.е. и систе-мата (21)~~, т.е. и системата (20) имат положително решение. Но тогава полиномът $P_{n,k}(x)$ ще изпълнява условията на теоремата, тъй като $B_{n,k}\left(x, \frac{2i-1}{2m}\right)$ и $B_{n,k}\left(-x; \frac{2i-1}{2m}\right)$

са монотонно намаляващи в $[-1,0]$ и монотонно растящи в $[0,1]$. Условието $P_{n,k}(0)=0$ се получава от това, че $B_{n,k}\left(0;\frac{2i-1}{2m}\right)=0$. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теорема 1.7. Ако $B \geqq c\, m^{-\beta}$, то $(A+B)/B \leqq 2m^{\beta}/c$. Тогава условията на теорема 1.7. приемат вида:

$$k \ln n/n < 1/8m \quad , 8m^{\beta+1}/c\, n^{k/4} < 1.$$

Нека $k=(\beta+2)/4$. Второто условие става:

$$8m^{\beta+1}/c\, n^{\beta+2} < 1.$$

Тъй като по условие $n > m > 8/c$, то това условие е изпълнено.

При $k=(\beta+2)/4$, първото условие приема вида:

$$\left(\frac{\beta+2}{4}\right)\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{8m} \tag{23}$$

Но по условие $\beta > 1$. Следователно

$$(\beta+2)/4 < 3\beta/4.$$

Тогава (23) приема вида

$$6\beta \ln n/n < 1/m. \tag{24}$$

Нека $n \geqq \tau\beta m \ln m$, където засега τ е произволно, положително число. Тогава (24) може да се запише във вида:

$$\frac{6\ln(\tau\beta m \ln m)}{\tau \ln n} < 1. \tag{25}$$

Но

$$\frac{6\ln(\tau\beta m\ln m)}{\tau\ln m} < 6\,\frac{\ln\tau\beta + 2\ln m}{\tau\ln m} =$$

$$6\left(\frac{\ln\tau\beta}{\tau\ln m}+\frac{2}{\tau}\right) \leqq 6\left(\frac{\ln\tau}{\tau\ln m}+\frac{3}{\tau}\right) \leqq$$

$$6\left(\frac{\ln\tau}{5\tau}+\frac{3}{\tau}\right).$$

Последното неравенство следва от условието на теоремата, според което $m > e^5$. Ако $\tau = 45$, то

$$6\left(\frac{\ln\tau}{5\tau}+\frac{3}{\tau}\right) < 1$$

и следователно (25) е изпълнено. Теоремата е доказана.

Като се използува лема 1. от [21] може да се докаже, че порядъкът $O(m\ln m)$ от теорема 1.7. не може да бъде подобрен. В този параграф, обаче, ние няма да доказваме, че този порядък е точен. Това ще стане ясно от разсъжденията в 1.4.

1.4. Частично монотонни апроксимации относно хаусдорфовото разстояние и частично монотонни локални приближения.

Теорема 1.8. дава оценка на частично монотонното приближение на частично монотонни функции относно хаусдорфовото разстояние.

Теорема 1.8. Ако f е непрекъсната функция в $[-1,1]$, монотонно намаляваща в $[-1,0]$ и монотонно растяща в $[0,1]$, то за всяко цяло, положително n, съществува полином $P\in H_n^2$ за който, ако $x\in[-1,1]$:

(1) $|f(x) \dot{-} P(x)| \leqq a \ln n/n ,$

където a е абсолютна константа и

$$|f(x) \dot{-} P(x)| = \max\{\inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(x)-P(t)|\},$$
$$\inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(t)-P(x)|\}\}.$$

Доказателство: Нека m е цяло, положително число. Да разгледаме системата от точки $(x_{-i}, y_{-i}), (x_i, y_i)$, където $x_i = i/m$, $x_{-i} = -i/m$, $y_i = f(i/m)+(i-1)/m^3$, $y_{-i} = f(-i/m)+(i-1)/m^3$, $i=1,\dots,m$.

От теорема 1.7. при $m > e^5$ следва, че съществува полином $P_1(x)$ от степен $135 m \ln m$, който е от класа $H^2_{135 m \ln m}$, за който

$$y_i = P_1(x_i) , \quad y_{-i} = P_1(x_i) , \quad i=1,\dots,m.$$

Нека $x\in[x_{i-1}, x_i]$ или $[x_{-i}, x_{-(i-1)}]$. Лесно се вижда, че тогава

$$\inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(x)-P_1(t)|\} \leqq 1/m + 1/m^3 < 2/m$$

$$\inf_{t\in[-1,1]} \max\{|x-t|, |f(t)-P_1(x)|\} < 1/m + 1/m^3 < 2/m$$

Следователно, ако $m = n/\ln n$,

$$|f(x) \dot{-} P_1(x)| \leqq 2 \ln n/n .$$

Но, ако $m = n \ln n$, то $135 m \ln m \leqq bn$.

Тогава съществува полином $P \in H_n^2$, за който

$$|f(x) \dot{-} P(x)| \leqq a \ln n / n.$$

От дефиницията на хаусдорфово разстояние е ясно, че ако $f \in C_{[-1,1]}$, $P \in H_n$:

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) \dot{-} P(x)| = r(f, P).$$

Тогава оценката (1) от теорема 1.8. може да се запише и така

(2) $$r(f, P) \leqq a \ln n / n.$$

Както се вижда, оценката (2) не зависи от структурните свойства (например модула на непрекъснатост) на непрекъснатата функция f. Тогава, тъй като допълнената графика на всяка ограничена функция в $[-1,1]$ може да бъде приближена произволно добре с непрекъснати функции относно хаусдорфовото разстояние, то оценката (2) е верна и за хаусдорфовото приближение на произволни, ограничени, частично монотонни функции в $[-1,1]$, с частично монотонни полиноми.

Преди да продължим по-нататък се налага да дефинираме понятието локален модул на непрекъснатост за дадена непрекъсната в $[-1,1]$ функция f. Тази дефиниция е дадена в [21].

Нека $f \in C_{[-1,1]}$, $x \in [-1,1]$. Числото

$$\omega(f, x; \delta) = \sup_{|h| \leqq \delta} |f(x+h) - f(x)|, \ \delta > 0$$

се нарича локален модул на непрекъснатост за функцията f в точката $x \in [-1,1]$.

Очевидно

$$\omega(f,x;\delta) \leq \omega(f;\delta), \quad x \in [-1,1];$$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \omega(f,x;\delta) = \omega(f;\delta).$$

От теоремата на Джексон е известно, че за всяко цяло положително n и $f \in C_{[-1,1]}$, съществува полином $P \in H_n$ за който

(3) $$|f(x)-P(x)| \leq 12\,\omega(f;n^{-1}), \quad x \in [-1,1].$$

Известно е, обаче, че в (3) не може да се замени $\omega(f;n^{-1})$ с $\omega(f,x;n^{-1})$. Във връзка с това В. Попов в [21] постави задачата за локалните приближения и я решава по следния начин:

За всяко цяло, положително n и $f \in C_{[-1,1]}$, съществува алгебричен полином $P \in H_n$, за който

(4) $$|f(x)-P(x)| \leq \omega(f,x;\ln n/n) + O(n^{-1}).$$

Оценката (4) е точна.

В този параграф ще докажем следната теорема, даваща точна (по отношение на порядъка) оценка за частично монотонните локални приближения:

Теорема 1.9. Ако f е непрекъсната функция в $[-1,1]$, монотонно намаляваща в $[-1,0]$ и монотонно растяща в $[0,1]$, то за всяко цяло, положително n, съществува полином $P \in H_n^2$ за който, ако $x \in [-1,1]$

(5) $$|f(x)-P(x)| \leq c\,\omega(f,x;\ln n/n) + O(n^{-1}),$$

където c е една абсолютна константа.

Доказателство: Оценка от тип

$$|f(x)-P(x)| \leq C_1\omega(f,x;\ln n/n)+O(\ln n/n)$$

може лесно да се докаже от известното неравенство:

$$|f(x)-P(x)| \leq \omega(f,x;\tau(f,P))+\tau(f,P)$$

и теорема 1.8.

Ще докажем оценката (5) като използуваме директно задачата за частично монотонното интерполиране.

Нека m е цяло, положително число. Да разгледаме системата от точки $(x_i,y_i),(x_{-i},y_{-i})$, където $x_i=i/m$, $y_i=f(i/m)+\frac{i-1}{m^3}; i=-m,\dots,m$. Без ограничение на общността, във връзка с по-нататъшните разсъждения, може да предполагаме, че $y_m=y_{-m}=1$, $y_1=y_{-1}=0$. Тогава от теорема 1.7. следва, че съществува полином $P\in H^2_{135m\ln m}$, $m>e^5$, за който

$$y_i=P(x_i),\ y_{-i}=P(x_{-i}),\ i=1,\dots,m.$$

Нека $x\in[x_{i-1},x_i]$ и нека първо $f(x)\geq P(x)$. Тогава:

$$(6)\quad |f(x)-P(x)|=f(x)-P(x)\leq f(x_i)-P(x_{i-1})=$$

$$f(x_i)-f(x_{i-1})+f(x_{i-1})-P(x_{i-1})=f(x_i)-f(x_{i-1})+$$

$$f(x_{i-1})-f(x_{i-1})-\frac{i-2}{m^3}\leq\omega(f,x;x_i-x_{i-1})+\frac{1}{m^2}\leq$$

$$\omega(f,x;m^{-1})+m^{-2}.$$

Ако $f(x)\leq P(x)$, то

$$|f(x)-P(x)|=P(x)-f(x)\leq P(x_i)-f(x_{i-1})=$$

$$P(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x_{i-1}) \leq \frac{i-1}{m^3} + \omega(f, x; m^{-1}) \leq$$

$$\omega(f, x; m^{-1}) + m^{-2}.$$

По същия начин се доказва отново неравенството (6), когато $x \in [x_{-i}, x_{-(i+1)}]$. Но $P(x)$ е от степен не по-висока от $135 m \ln m$. Ако положим $m = n/\ln n$, $P(x)$ става от степен не по-висока от $135 n$, т.е. $P(x) \in H^2_{135n}$ и

$$|f(x) - P(x)| \leq \omega(f, x; c_1 \ln n / n) + O(n^{-1}).$$

От горното неравенство, което е изпълнено при $P \in H_{135n}$ следва верността на теоремата.

От това, че резултатът на В.Попов (4) е точен следва, че оценката в горната теорема е също точна по порядък. От друга страна, от теорема 1.9. следва, че и оценката от теорема 1.7. е също точна по порядъка на n, тъй като ако се допусне, че в теорема 1.7. n може да стане по-малко по порядък, в зависимост от m, то веднага може да се подобри порядъка в теорема 1.9, което, както отбелязахме, е невъзможно.

От теорема 1.9. като частен случай следва същата оценка и за монотонните локални приближения.

Г Л А В А   В Т О Р А

Параметрични приближения

2.1. У в о д н и   б е л е ж к и.

Параметричните приближения са въведени от Бл.Сендов[2]. Да означим за всяко цяло положително n, с $\hat{H}_n$ следното подмножество на H_n в $[a,b]$: $P(x) \in \hat{H}_n$, ако $P(a)=a$, $P(b)=b$, $P'(x) \geqq 0$ за $x \in [a,b]$.

Ако $f \in C_{[a,b]}$ дефинираме

$$\mathcal{E}_{m,n}(f) = \inf_{P \in \hat{H}_m} \inf_{Q \in H_n} \max_{x \in [a,b]} |f(P(x)) - Q(x)|.$$

Числото $\mathcal{E}_{m,n}(f)$ се нарича най-добро параметрично приближение на f от ред (m,n). Лесно се вижда (вж.[3]), че за всяка двойка цели, положителни числа (m,n), съществува двойка полиноми $P^* \in \hat{H}_m$, $Q^* \in H_n$, за които най-доброто параметрично приближение $\mathcal{E}_{m,n}(f)$ се достига:

$$\mathcal{E}_{m,n}(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(P^*(x)) - Q^*(x)|.$$

Двойката полиноми P^*, Q^* се нарича двойка полиноми на най-добро параметрично приближение от ред (m,n). Очевидно параметричните приближения представляват обобщение на най-добрите равномерни приближения, тъй като при най-доброто равномерно приближение

$$E_n(f) = \inf_{P \in H_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$$

във функцията f стои полинома $x \in \hat{H}_1$. Очевидно

$$\varepsilon_{m,n}(f) \leq E_n(f), \quad m \geq 1.$$

Ако знаем двойката полиноми на най-добро параметрично приближение P^*, Q^*; $P^* \in \hat{H}_m$, $Q^* \in H_n$, лесно може да намерим приближената стойност на f във всяка точка $y \in [a,b]$. Достатъчно е да получим единствения корен на уравнението $y = P^*(x)$ и ако той е x_0 , то $f(y) \approx Q^*(x_0)$.

Известно е, че за функции, които имат особености в краен брой точки, параметричното приближение е по-добро по порядък от обичайното равномерно приближение. Това се дължи на факта, че вътрешният полином P може да "изправя" функцията f до функция с добри структурни или най-вече диференциални свойства, която, както е известно, може да се приближава добре с полиноми.

В [3] Бл.Сендов доказва следните две теореми, които демонстрират добрите порядъци, които се получават при оценките на най-добрите параметрични приближения на някои класи от функции.

Теорема 2.10. Нека функцията $f \in C_{[-1,1]}$ има представянето

$$f(x) = \begin{cases} T_1(x) & \text{за } x \in [-1,0] \\ T_2(x) & \text{за } x \in [0,1] \end{cases}$$

където $T_1, T_2 \in H_r$ при c фиксирано цяло положително r, $T_1(0) = T_2(0)$. Тогава

$$\varepsilon_{n,n}(f) = O(\exp(-c(f,r)n)).$$

Като частен случай от тази теорема следва, че параметричното най-добро приближение от ред (n, n) на функцията $|x|$ в $[-1,1]$ е от порядък e^{-an}. За $|x|$ в [3] са намерени и двойката полиноми на най-добро параметрично приближение от ред (n, n).

Пак в [3] Бл.Сендов поставя задачата за параметричното приближение на частично аналитични функции чрез следната

Теорема 2.11. Нека функцията $f \in C_{[-1,1]}$ има представянето

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{за } x \in [-1,0] \\ f_2(x) & \text{за } x \in [0,1]; \end{cases} \quad f_1(0) = f_2(0),$$

където f_i, $i = 1,2$ са аналитични функции в кръг с радиус $r > 1$. Тогава имаме

$$(1) \qquad \varepsilon_{n,n}(f) = O(\exp(-c_f\sqrt{n})).$$

Естествено възниква задачата за намирането на по-добри порядъци от (1) за параметричните приближения на частично аналитични функции. От теорема 2.10 и теорема 2.11 е ясно, че точният порядък се намира между $e^{-c_f n}$ и $e^{-a_f\sqrt{n}}$, тъй като частично полиномиалните функции са частен случай на частично аналитичните функции. Дълго време, обаче, порядъкът $O(\exp(-c\sqrt{n}))$ за частично аналитичните функции не беше подобрен. Междувременно задачата за параметричното приближение на частично полиномиални и частично аналитични функции беше обобщена от Сабадош [23] със следните две теореми

Теорема 2.12. Нека $-1=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_s=1$ е едно разделяне на интервала $[-1,1]$ и нека $f\in C_{[-1,1]}$ е функция, която във всеки от подинтервалите $[\xi_{i-1},\xi_i]$, $i=1,\dots,s$, е равна на функцията f_i, аналитична в кръга $c_i=\{z:|z-\eta_i|\leq((\xi_i-\xi_{i-1})/2).r,$

$\eta_i=(\xi_i+\xi_{i+1})/2,\ r>1\}$. Тогава

$$\varepsilon_{n,n}(f)=O(\exp(-a_f\sqrt{n})).$$

Теорема 2.13. Нека $-1=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_s=1$ е едно разделяне на интервала $[-1,1]$ и нека $f\in C_{[-1,1]}$. Ако f е равна на полином от H_r, във всеки от подинтервалите $[\xi_{i-1},\xi_i]$, $i=1,\dots,s$, то

$$\varepsilon_{n,n}(f)=O(\exp(-b_f n)).$$

Нека отбележим, че съществува аналогия между рационалните равномерни приближения и параметричните приближения. За класовете от функции, за които рационалните приближения са по-добри по порядък от полиномиалните, параметричните приближения също дават по-добри порядъци от полиномиалните. Освен това, както и при параметричните приближения, при рационалните приближения също се търси двойка полиноми, тъй като рационалната функция е отношение на два полинома. Така например, ако търсим най-доброто параметрично приближение от ред (n, n) и най-доброто рационално приближение от ред n на дадена непрекъсната функция f, броят на свободните параметри, от които зависи параметричното, съответно рационалното приближение, е един и същ и е равен на $2n+2$. Тези параметри са коефициентите на съответните двойки полиноми на най-добро рационално и параметрично приближение. При рационалното приближение на $|x|$, обаче, е известен следния резултат на Нюман [22]

(2) $$e^{-c_2\sqrt{n}} \leqq R_n(|x|) \leqq e^{-c_1\sqrt{n}},$$

От теорема 2.10. следва, че параметричното приближение от ред (n, n) на функцията $|x|$ е от порядък $O(e^{-cn})$. Още от този пример е ясно, че за някои класи (като например частично полиномиалните) от функции параметричните приближения са по-добри по порядък от рационалните приближения от същия ред. Този факт е интересен с това, че макар коефициентите пред съответните двойки полиноми при рационалното и параметричното приближение от един и същи ред да са еднакви по брой, параметричните приближения дават по-добри порядъци за някои класи от функции. От теорема 2.10. и (2) следва, че това е така в класа на частично полиномиалните функции.

П.Туран и П. Сютч [33] показаха, че за най-доброто рационално, равномерно приближение от n-ти ред на функция f, която е частично аналитична в $[-1, 1]$, имаме

$$R_n(f) = O(\exp(-d(f)\sqrt{n})).$$

От (2) следва, че тази оценка е точна.

Във връзка с резултата на П.Туран и П.Сютч е интересно (както вече отбелязахме) дали порядъкът в теорема 2.11. може да се подобри. Ако такова подобрение е възможно, излиза, че параметричните приближения дават по-добри порядъци на приближение в класа от частично аналитични функции, от рационалните, въпреки че и в двата случая функцията се приближава чрез двойка полиноми от една и съща степен.

В 2.2. е доказано, че ако f е функция, удовлетворяваща условията на теорема 2.13, то

(3) $$\varepsilon_{n,n}(f) \leqq \exp\left(-c(f,s)\sqrt{n \ln n}\right); \; c(f,s) > 0.$$

Този резултат е постигнат съвместно с В.Попов.

В 2.3. е доказано, че ако f удовлетворява условията на теорема 2.11.

(4) $$\varepsilon_{n,n}(f) \leqq \exp\left(-c(f)\sqrt[3]{n^2 \ln n}\right), \; c(f) > 0.$$

Оценката (3) за функции, които са аналитични в повече от два подинтервала на $[-1,1]$, по всяка вероятност не е точна. Въпреки това, тя подобрява съответния резултат на Сабадош и демонстрира по-добрите порядъци, които дават параметричните приближения в сравнение с рационалните, в някои случаи.

Оценката (4) за параметричното приближение на функции, които са аналитични в два подинтервала на $[-1,1]$ по всяка вероятност е точна. Въпреки многократни опити, обаче, доказателство за точност на (4) в общия случай не е получено. В един важен частен случай на параметричните приближения на двучастично аналитични функции е получена оценка отдолу, която съвпада по порядък с оценката (4).

Някои въпроси, свързани с оценките отдолу за параметричното приближение на частично аналитични функции са разгледани в 2.4.

В [24] А.А.Гончар дава оценка на рационалното приближение на функции, непрекъснати в $[0,1]$ и равни за всяко $x \in (0,1]$ на функция f, която е аналитична в $D=\{z: |z-1|<1\}$. По-точно, ако φ е функция, която удовлетворява казаните условия

$$R_n(\varphi; [0,1]) = O(\rho_n),$$

където

$$\rho_n = \inf_{t>1} \left[t e^{-cn/t} + \omega(\varphi; e^{-t}) \right].$$

В 2.5. е постигната аналогична оценка за параметричното приближение на функции, удовлетворяващи същите условия.

Известно е, че рационалните приближения са по-добри по порядък от полиномиалните, върху класа от функции с ограничена вариация на r -тата производна. След многократни опити на известни математици [33], [34], [9] за получаване на точния порядък за рационалните приближения на функции с ограничена вариация на r -тата производна, В.Попов получи [35] окончателния резултат

$$R_n(f) \leq \left(\frac{c_r(V)}{n} \right)^{r+1}, \quad r \geq 1 \tag{5}$$

където f е функция с ограничена вариация на r -тата производна и константата $c_r(V)$ зависи от r и вариацията на $f^{(r)}$.

При $r=0$, или когато f е с ограничена вариация е известен резултата на Фройд [34].

(6) $$R_n(f) \leqq C(\ln n)^2/n,$$

когато $f \in Lip\,\alpha$ за някакво фиксирано $\alpha,\ 0<\alpha<1$. Константата C зависи от вариацията на функцията f и от α.

За да бъде пълно сравнението между рационалните и параметричните приближения, ще спомeнем два резултата на М. Николчева за параметричното приближение на функции с ограничена вариация и с ограничена вариация на r-тата производна, $r \geqq 1$.

В [20] е доказано, че ако $f \in C[0,1]$ има ограничена вариация V и ако $f \in Lip\,\alpha\ (0<\alpha<1)$, то съществува константа $C(\alpha)$ такава, че ако $m > V^{-1/\alpha}e^4$ и $n > (15/\alpha).m\ln m$, то $E_{m,n}(f) \leqq C(\alpha)V\ln n/n$.

Този резултат е аналог на (6) за параметричните приближения.

В [36] е доказано, че ако f има ограничена вариация на r-тата производна, $r \geqq 1$, то

$$E_{n,n}(f) \leqq \left(\frac{C_r(V)\ln n}{n}\right)^{r+1}.$$

Този резултат е аналог на (5)

В края на тази глава е дадена таблица, в която се прави сравнение между порядъците на най-добрите рационални и параметрични приближения, за най-известните класове от функции, където тези приближения дават по-добри порядъци от полиномиалните приближения.

2.2. Параметрично приближение на частично аналитични функции.

В този параграф е постигната следната оценка: ако f е частично аналитична в интервала $[-1,1]$, то

$$(1) \qquad \mathcal{E}_{n,n}(f) = O\left(\exp(-c(f)\sqrt{n \ln n})\right),$$

където $c(f) > 0$ е константа, зависеща само от f.

Този резултат подобрява резултата на Сабадош [23], даден в 2.1. чрез георема 2.13.

За да докажем (1) се нуждаем от някои леми. Нека $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_s = 1$ е някакво разделяне на интервала $[-1,1]$, $s > 1$. При всички по-нататъшни разсъждения това разделяне се смята за фиксирано. Нека $V = \min\{\xi_i - \xi_{i-1} : 1 \le i \le s\}$. Следната лема е доказана в [23]:

Лема 2.11. Нека $K > 0$ е произволно цяло число. Съществува алгебричен полином $P \in \hat{H}_r$, $r \le c_1(V,s)K$ такъв, че

$$P(\xi_i) = \xi_i, \ i = 0,\ldots,s; \quad P^{(j)}(\xi_i) = 0, \ j = 1,\ldots,2K; \ i = 0,\ldots,s.$$

Лема 2.12. Нека $[a,b] \subset [c,d]$, $P \in H_n$. Тогава

$$\max_{x \in [c,d]} |P(x)| \le \left(\frac{2(d-c)}{b-a}\right)^n \max_{x \in [a,b]} |P(x)|$$

Доказателство: Известно е (вж. напр.[31] стр.78), че за всеки полином $q \in H_n$ и всяко $x \in [-1,1]$ имаме

$$|q(x)| \leq |T_n(x)| . \|q\|,$$

където T_n е полином на Чебишев от степен n : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. За $x \in [-1,1]$ имаме

$$(2) \quad |T_n(x)| = \frac{1}{2}\left|(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right| \leq (2|x|)^n,$$

тъй като за всяко x , ([31] стр.72)

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right].$$

Прилагайки линейната трансформация

$T : [a,b] \to [-1,1]$, $(Tx = (2x-(a+b))/(b-a)$,

виждаме, че $T([c,d]) \subset [-(d-c)/(b-a), (d-c)/(b-a)]$,

което заедно с (2) доказва лемата.

Лема 2.14. Нека P е полинома от лема 2.11. Тогава за $x \in [\xi_i - \tau, \xi_i + \tau] \cap [-1,1]$, $\tau < 1/4$,

имаме

$$|P'(x)| \leq (c_2(v,s))^k \tau^{2k}.$$

Доказателство: Предполагаме, че $x \in [\xi_i - \tau, \xi_i + \tau]$, $1 \leq i \leq s$. Прилагайки неравенството на Марков, получаваме за $x \in [-1,1]$:

$$(3) \quad |P'(x)| \leq k^2 (c_1(v,s))^2 \|P\| = (c_1(v,s)k)^2.$$

От лема 2.11. имаме

$$(4) \quad P'(x) = (x-\xi_i)^{2k} P^*(x); \; P^* \in H_{r_1}; r_1 = c_1(v,s)k - 2k - 1$$

От (3) получаваме

$$(x-\xi_i)^{2k}\,|P^*(x)| \leqq (C_1(\nu,s)k)^2$$

и поради това

(5) $$\max\{|P^*(x)| : \xi_{i-1} \leqq x \leqq (\xi_{i-1}-\xi_i)/2\} \leqq$$

$$4^{2k}(C_1(\nu,s)k)^2/(\xi_i-\xi_{i-1})^{2k} \leqq 4^{2k}(C_1(\nu,s))^2 k^2/\nu^{2k}.$$

Като използуваме лема 2.12. от (5) получаваме:

(6) $$\max\{|P^*(x)| : \xi_{i-1} \leqq x \leqq \xi_i\} \leqq 4^{C_1(\nu,s)k}(C_1(\nu,s)k)^2(4/\nu)^{2k}.$$

Накрая от (4) и (6) получаваме за $x \in [\xi_i-\tau, \xi_i]$

$$|P'(x)| \leqq \tau^{2k}(C_2(\nu,s))^k,$$

което доказва лемата.

Сега ще докажем една лема, която използувахме в 1.3.

Лема 2.15. За всяко цяло $n>1$ и всяко $\delta \in [8\ln n/n, 1]$ съществува алгебричен полином $\sigma_{n,\delta} \in H_{2n+1}$, такъв че

$$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq \frac{1}{2}e^{-n\delta/4} \quad \text{за } x \in [-1,-\delta]$$

$$|1-\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq \frac{1}{2}e^{-n\delta/4} \quad \text{за } x \in [\delta,1]$$

$$0 \leqq \sigma_{n,\delta}(x) \leqq 1 \quad \text{за } |x| \leqq \delta.$$

Доказателство: Тази лема следва от резултатите в [37], но за пълнота ще дадем пълното доказателство.

Нека $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ е полинома на Чебишев от степен n. Тогава $P_n(x) = T_n((2x^2-(1+\delta^2))/(1-\delta^2))$ притежава следните свойства:

$|P_n(x)| \leqq 1$ за $\delta \leqq x \leqq 1$

$P_n(x) = (-1)^n \{ (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\delta^2-x^2})^{2n} + (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\delta^2-x^2})^{2n} \} / (2(1-\delta^2)^n)$

за $|x| \leqq \delta$.

Следователно, за четни n полиномът $P_n(x)$ е четен, $P_n(x) \geqq 1$ за $|x| \leqq 1$ и $P_n(x)$ е монотонно намаляващ в $[0,\delta]$; за нечетни n, $P_n(x)$ е четен, $P_n(x) \leqq -1$ за $|x| \leqq \delta$ и $P_n(x)$ е монотонно растящ в $[0,\delta]$.

Тъй като $\sqrt{1-x^2} \geqq 1-x^2$ за $|x| \leqq 1$, за $|x| \leqq \delta/2$ получаваме

(7) $$|P_n(x)| \geqq (1-x^2+\delta\sqrt{3}/2)^{2n}/2 \geqq (1+\delta/2)^{2n}/2 .$$

Нека означим:

$$\sigma_{n,\delta}(x) = \left\{ \int_{-1}^{x} P_n(t)\,dt - \int_{-1}^{-\delta} P_n(t)\,dt \right\} \Big/ \left(\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)\,dt \right) .$$

От (7) получаваме

(8) $$\left| \int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)\,dt \right| \geqq \frac{\delta}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2n} \geqq \frac{\delta}{2} e^{-n\delta/2} .$$

Тогава, тъй като $\delta \geqq 8\ln n/n$ и $n \geqq 2$, от (8) получаваме:

За $-1 \leqq x \leqq -\delta$

$$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leqq 2\left| \int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)\,dt \right|^{-1} \leqq 4e^{-n\delta/2}/\delta \leqq$$

$$\frac{n}{2\ln n} e^{-n\delta/4} \cdot e^{-2\ln n} \leqq \frac{1}{2n\ln n} e^{-n\delta/4} \leqq \frac{1}{2} e^{-n\delta/4} ,$$

За $|x| \leqq \delta$:

$$0 \leq \sigma_{n,\delta}(x) = \left(\int_{-\delta}^{x} P_n(t)dt\right) \Big/ \left(\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)dt\right) \leq 1$$

и за $\delta \leq x \leq 1$:

$$|1 - \sigma_{n,\delta}(x)| = \left|\int_{\delta}^{x} P_n(t)dt\right| \Big/ \left(\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)dt\right) \leq \frac{x-\delta}{2} e^{-n\delta/4} \leq \frac{1}{2} e^{-n\delta/4}.$$

Тъй като $\sigma_{n,\delta} \in H_{2n+1}$, лемата е доказана.

Теорема 2.14. Нека $f \in C_{[-1,1]}$ е такава функция, за която съществува разделяне $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_s = 1$ със свойството: $f(x) = f_i(x)$ за $x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$, $i = 1, \ldots, s$; $(f_i(\xi_i) = f_{i+1}(\xi_i), i = 1, \ldots, s-1)$, където f_i е аналитична функция в $C_i = \{z : 2|z - \eta_i| \leq (\xi_i - \xi_{i-1}) r$, $\eta_i = (\xi_{i-1} + \xi_i)/2$, $r > 1$, $i = 1, \ldots, s\}$. Тогава

$$\varepsilon_{m,n}(f) = O(\exp(-c_1(f)\sqrt{n \ln n})) \text{ за } m \geq c_2(f)\sqrt{n/\ln n}.$$

В частност

$$\varepsilon_{n,n}(f) = O(\exp(-c_3(f)\sqrt{n \ln n})).$$

Доказателство: Може да предполагаме, че $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_s = 1$ е разделянето от лема 2.11. От условията на теоремата следва, че съществува число τ_0, $\tau_0 = \tau_0(V, r)$, $V = \min\{(\xi_i - \xi_{i-1}) : 1 \leq i \leq s\}$, такива, че f_i е аналитична в затворения интервал $\Delta_i = [\xi_{i-1} - \tau, \xi_i + \tau]$, $i = 1, \ldots, s$, $\tau \leq \tau_0$. Ще предполагаме още, че $\tau < V/4$. От друга страна, тъй като f_i е аналитична в Δ_i от [31] стр. 228 е известно, че съществува алгебричен полином Q_i, $Q_i \in H_m$, $i = 1, \ldots, s$ и q, $0 < q < 1$, такива че

$$(9)\qquad \max_{x\in\Delta_i} |f_i(x)-Q_i(x)| \leqq cq^m,\ c=\mathrm{const}=c(f).$$

Прилагайки лема 2.14 и лема 2.15. нека да построим полинома Q от степен не по-висока от $2[n/4]+C_1(\nu,s)k.m$:

$$Q(x)=Q_1(P(x))+\sum_{i=1}^{s-1}\sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_i)\{Q_{i+1}(P(x))-Q_i(P(x))\},$$

където P е полинома от лема 2.11., а $\sigma_{[n/4],\tau}$ е полинома от лема 2.15.

Ще оценим $\|f(P(x))-Q(x)\|_{[-1,1]}$.

а) Ако $x\in[\xi_{i_0}-\tau,\ \xi_{i_0}+\tau]$ за някое i_0, $0\leqq i_0\leqq s$, то

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &|f(P(x))-Q(x)|\leqq \Big|Q_1(P(x))+\sum_{i=1}^{i_0-1}\sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_i)\{Q_{i+1}(P(x))-\\ &Q_i(P(x))\}-Q_{i_0}(P(x))\Big|+\big|f(P(x))-(1-\alpha)Q_{i_0}(P(x))-\\ &\alpha Q_{i_0+1}(P(x))\big|+\Big|\sum_{i=i_0+1}^{s-1}\sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_i)\{Q_{i+1}(P(x))-Q_i(P(x))\}\Big|,\end{aligned}\right.$$

където $\alpha=\sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_{i_0})$ и следователно $0\leqq\alpha\leqq 1$ (вж. лема 2.15). Прилагайки лема 2.13, получаваме за всяко i, $i=1,\dots,s$:

$$(11)\quad \max_{x\in[-1,1]}|Q_i(x)|\leqq(4/\nu)^m\max_{x\in[\xi_{i-1},\xi_i]}|Q_i(x)|\leqq 2\|f\|(4/\nu)^m$$

От (10), (11) и лема 2.15. получаваме:

$$(12)\quad |f(P(x))-Q(x)|\leqq 2s\|f\|(4/\nu)^m e^{-[n/4]\tau/4}+$$

$$(1-\alpha)\left|f(P(x))-Q_{i_0}(P(x))\right|+\alpha\left|f(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|;\ 0\leq\alpha\leq 1$$

Имаме: $x\in[\xi_{i_0}-\tau,\xi_{i_0}]$ или $x\in[\xi_{i_0},\xi_{i_0}+\tau]$. Ще разгледаме само първия случай, тъй като вторият се разглежда по същия начин. В този случай имаме $P(x)\in[\xi_{i_0-1},\xi_{i_0}]$, т.е. $f(P(x))=f_{i_0}(P(x))$ и следователно от (9) получаваме

$$(13)\qquad \left|f(P(x))-Q_{i_0}(P(x))\right|\leq c\,q^m.$$

За да оценим $\left|f(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|$, да отбележим, че тъй като f_i са аналитични в Δ_i, $i=1,\dots,s$, то f_i са Липшицови функции, т.е.

$$\left|f_i(x)-f_i(y)\right|\leq K_f\,|x-y|$$

за $x,y\in\Delta_i$ и за някакво K_f , независещо от i, $i=1,\dots,s$. Тъй като $f_{i_0}(\xi_{i_0})=f_{i_0+1}(\xi_{i_0})$, $\xi_{i_0}=P(\xi_{i_0})$, то:

$$\left|f(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|=\left|f_{i_0}(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|\leq$$
$$\left|f_{i_0+1}(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|+\left|f_{i_0+1}(P(x))-f_{i_0+1}(\xi_{i_0})\right|+$$
$$\left|f_{i_0+1}(\xi_{i_0})-f_{i_0}(P(x))\right|\leq cq^m+K_f\left|P(x)-P(\xi_{i_0})\right|+$$
$$\left|f_{i_0}(\xi_{i_0})-f_{i_0}(P(x))\right|\leq cq^m+2K_f\,\tau\max_{x\in[\xi_{i_0}-\tau,\xi_{i_0}]}\left|P'(x)\right|,$$

От лема 2.14. получаваме:

$$(14)\qquad \left|f(P(x))-Q_{i_0+1}(P(x))\right|\leq cq^m+2K_f\,\tau^{2k+1}\left(c_2(\nu,s)\right)^k$$

От (12) - (14) следва за $x\in[\xi_{i_0}-\tau,\xi_{i_0}+\tau]$

$$|f(P(x))-Q(x)| \leq 2s\|f\|(4/v)^m e^{-[n/4]\tau/4} + \tag{15}$$
$$cq^m + 2K_f \tau^{2k+1}(c_2(v,s))^k.$$

б) Случаят, когато $x \in [\xi_{i_0-1}+\tau, \xi_{i_0}-\tau]$ не е толкова труден:

$$|f(P(x))-Q(x)| \leq |Q_1(P(x)) + \sum_{i=1}^{i_0-1} \sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_i)\{Q_{i+1}(P(x)) -$$
$$Q_i(P(x))\} - Q_{i_0}(P(x))| + |f_{i_0}(P(x)) - Q_{i_0}(P(x))| + \tag{16}$$
$$|\sum_{i=i_0}^{s-1} \sigma_{[n/4],\tau}(x-\xi_i)\{Q_{i+1}(P(x)) - Q_i(P(x))\}| \leq$$
$$2s\|f\|(4/v)^m e^{-[n/4]\tau/4} + cq^m.$$

Накрая от (15) и (16) получаваме

$$\|f(P(x))-Q(x)\| \leq 2s\|f\|(4/v)^m e^{-[n/4]\tau/4} + \tag{17}$$
$$cq^m + 2K_f \tau^{2k+1}(c_2(v,s))^k,$$

където Q е алгебричен полином от степен не по-висока от $2[n/4]+c_1(v,s)km$ и $P \in \hat{H}_t$, $t = c_1(v,s)k$.

Нека положим:

$$m = \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{n\ln n}\right], \quad k = \left[c_1^{-1}(v,s)\sqrt{n/\ln n}\right],$$
$$\tau = 32\left(1+\ln\frac{4}{v}\right)\sqrt{\ln n/n}.$$

Очевидно $\tau < v/4$ и $\tau \leq \tau_0$ за достатъчно големи n. Освен това $Q \in H_n$ и $P \in \hat{H}_t$, $t \leq \sqrt{n/\ln n}$.

За така подбраните m, k и τ получаваме

$$
(18)\quad \begin{cases}
2S\,\|f\|\,(4/v)^{m} e^{-[n/4]\tau/4} = \\
O\left(\left(\frac{4}{v}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{n\ln n}}\left(\frac{v}{4}\right)^{\sqrt{n\ln n}} e^{-\sqrt{n\ln n}}\right) = O\left(e^{-\sqrt{n\ln n}}\right) \\
c\,q^{m} = O\left(e^{-c_4(f)\sqrt{n\ln n}}\right) \\
2\,K_f\,\tau^{2k+1}\left(c_2(v,s)\right)^{k} = O\left(c_5(f)\sqrt{\ln n/n}\right)^{[\sqrt{n/\ln n}/c_1(v,s)]} = \\
O\left(e^{-c_6(f)\sqrt{n\ln n}}\right)
\end{cases}
$$

тъй като, ако $\left(c_5(f)\sqrt{\ln n/n}\right)^{[\sqrt{n/\ln n}/c_1(v,s)]} = e^{-\alpha}$,

то

$$
\alpha = [\sqrt{n/\ln n}/c_1(v,s)]\left(\frac{1}{2}\ln n - \ln\left(c_5(f)\sqrt{\ln n}\right)\right) \geq
$$

$$
c_6(f)\sqrt{n\ln n} - c_7(f), \qquad c_6(f) > 0.
$$

От (17) и (18) получаваме

$$
\|f(P(x)) - Q(x)\| = O\left(e^{-c_8(f)\sqrt{n\ln n}}\right),
$$

където $P \in \hat{H}_t$, $t \leq \sqrt{n/\ln n}$, $Q \in H_n$.

С това теорема 2.14. е доказана.

2.3. Параметрично приближение на непрекъснати функции, които са аналитични в два подинтервала.

В този параграф ще бъде доказан основният резултат на тази глава, който подобрява съществено (и в някои частни случаи окончателно) резултата на Бл.Сендов, даден чрез теорема 2.11. Резултатът се съдържа в следната

Теорема 2.15. Нека $f \in C[-1,1]$, $f(0)=0$ и

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{за } -1 \leq x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{за } \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

където f_1 и f_2 са аналитични в кръг с център в началото и радиус $a,\ a>1$ и приемат реални стойности за реални стойности на аргумента си. Тогава

$$\varepsilon_{n,n}(f) \leq \exp(-c_1\sqrt[3]{n^2\ln n}),$$

където c_1 е абсолютна константа, зависеща от f. Понадолу $c_i>0,\ i=1,2,\dots$, ще означават абсолютни, положителни константи, зависещи евентуално само от някаква фиксирана функция.

За да докажем теорема 2.15. ни е нужна

Лема 2.16. Нека $f(u)$ е аналитична функция в кръг с радиус $a,\ a>1$ и център началото. И нека f приема реални стойности за реални стойности на аргумента u . Тогава съществува константа c_2 , такава, че за всяко цяло, положително k

$$E_n\left(\varphi_k(x);[-1,1]\right) \leqq e^{-c_2 n/\sqrt{k}},$$

където

$$\varphi_k(z) = f(z^k), \quad z = x+iy.$$

Доказателство: Ще използуваме следното обобщение на един известен резултат на Бернщайн [38] стр.xxx , дадено в [32] стр. 235 от Ахиезер:

Нека $f(z)$ е аналитична функция, която е регулярна във вътрешността на елипса с фокуси в точките ± 1 и полусума на осите $1/q$, $(z=x+iy)$. Тогава:

$$(1) \quad E_{n-1}\left(f(x);[-1,1]\right) \leqq \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\cdot\frac{q^{(2m+1)n}}{1+q^{2(2m+1)n}}.$$

За всяко k да направим субституцията $u = z^k$. Получаваме $\varphi_k(z) = f(z^k)$. За всяко k функцията $\varphi_k(z)$ е аналитична в кръг с център в началото и радиус $b = a^{1/k}$. Но тогава, тя е регулярна във вътрешността на елипса с фокуси ± 1 и полусума на осите $b + \sqrt{b^2-1}$.
Тогава, от (1), за $1/q = b+\sqrt{b^2-1}$:

$$E_{n-1}\left(\varphi_k(x);[-1,1]\right) \leqq \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{q^{(2m+1)n}}{1+q^{2(2m+1)n}} \leqq$$

$$\frac{8}{\pi}q^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{q^{2mn}}{1+q^{2(2m+1)n}} \leqq c_3 q^n =$$

$$c_3\left(\frac{1}{a^{1/k}+\sqrt{a^{2/k}-1}}\right)^n = c_3\left[\left(a^{1/k}\left(1+\frac{\sqrt{a^{2/k}-1}}{a^{1/k}}\right)\right)^{\sqrt{k}}\right]^{-n/\sqrt{k}} \leqq$$

$$c_3\left[\left(1+\frac{\sqrt{a^{2/k}-1}}{a}\right)^{\sqrt{k}}\right]^{-n/\sqrt{k}}.$$

Но $a^{2/k} - 1 \geq c_4/k$. Получаваме:

$$E_n(\varphi_k(x); [-1,1]) \leq c_3 \left[\left(1 + \frac{c_5}{\sqrt{k}}\right)^{\sqrt{k}} \right]^{-\frac{n+1}{\sqrt{k}}} \leq e^{-c_2 n/\sqrt{k}}.$$

С това лемата е доказана.

Доказателство на теорема 2.15: Да разгледаме функциите $f_1(z^k)$ и $f_2(z^k)$. От лема 2.16 следва, че съществуват полиноми $Q_1 \in H_{n/2}$ и $Q_2 \in H_{n/2}$ и константа c_6 , такива че

(2) $$\| f_1(x^k) - Q_1(x) \|_{[-1,1]} \leq e^{-c_6 n/\sqrt{k}}$$

(3) $$\| f_2(x^k) - Q_2(x) \|_{[-1,1]} \leq e^{-c_6 n/\sqrt{k}}.$$

Да разгледаме функцията

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

От 2.2. знаем, че за всяко $\delta > 0$, съществува полином $\sigma_{n,\delta}(x) \in H_{n/2}$, такъв че

(4) $$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leq 1 \quad \text{за } x \in [-\delta, \delta]$$

(5) $$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leq e^{-c_7 n\delta} \quad \text{за } x \in [-1, -\delta]$$

(6) $$|\sigma_{n,\delta}(x) - 1| \leq e^{-c_7 n\delta} \quad \text{за } x \in [\delta, 1].$$

Да образуваме полинома

$$Q(x) = Q_1(x) + (Q_2(x) - Q_1(x))\,\sigma_{n,\delta}(x).$$

Очевидно $Q \in H_n$, тъй като $Q_1, Q_2, \sigma_{n,\delta} \in H_{n/2}$.

Ще оценим $|f(x^k) - Q(x)|$ за $x \in [-1, 1]$.

За $x \in [-1, -\delta]$, от (2) и (5) получаваме :

$$|f(x^k)-Q(x)| = |f_1(x^k)-Q_1(x)-(Q_2(x)-Q_1(x))\sigma_{n,\delta}(x)| \leq$$

(7) $$|f_1(x^k)-Q_1(x)| + |Q_2(x)-Q_1(x)|\,|\sigma_{n,\delta}(x)| \leq$$

$$e^{-c_6 n/\sqrt{k}} + M e^{-c_7 n\delta},$$

където $M/2 = \max\{\max_{x\in[-1,1]}|Q_1(x)|, \max_{x\in[-1,1]}|Q_2(x)|\}$.

Числото M очевидно съществува, тъй като Q_1 и Q_2 приближават $f_1(x^k)$ и $f_2(x^k)$, които са ограничени в $[-1,1]$.

За $x\in[\delta,1]$ от (3) и (6) получаваме:

(8) $$|f(x^k)-Q(x)| \leq |f_2(x^k)-Q_2(x)| + |Q_2(x)-Q_1(x)|\,|1-\sigma_{n,\delta}(x)| \leq e^{-c_6 n/\sqrt{k}} + M e^{-c_7 n\delta}.$$

За $x\in[-\delta,\delta]$:

(9) $$|f(x^k)-Q(x)| = |f(x^k)-Q_1(1-\sigma_{n,\delta}(x))-Q_2(x)\sigma_{n,\delta}(x)| \leq$$

$$|f(x^k)| + |f_1(x^k)-Q_1(x)|\cdot|1-\sigma_{n,\delta}(x)| + |f_2(x^k)|\,|\sigma_{n,\delta}(x)| +$$

$$|f_2(x^k)-Q_2(x)|\,|\sigma_{n,\delta}(x)| + |f_1(x^k)|\,|1-\sigma_{n,\delta}(x)|.$$

Но f_1 и $f_2 \in Lip_{c_8} 1$ и $f_1(0)=f_2(0)=f(0)=0$.

Тогава

(10) $$\begin{cases} |f_i(x^k)| = |f_i(x^k)-f(0)| \leq c_8|x|^k \leq c_8\delta^k, & i=1,2. \\ |f(x^k)| \leq c_8\delta^k. \end{cases}$$

От друга страна от (4), за $x\in[-\delta,\delta]$, получаваме:

(11) $$|\sigma_{n,\delta}(x)| \leq 1 \quad \text{и} \quad |1-\sigma_{n,\delta}(x)| \leq 1+|\sigma_{n,\delta}(x)| \leq 2.$$

От (9), (10) и (11), за $x\in[-\delta,\delta]$ получаваме:

(12) $$|f(x^k)-Q(x)| \leq c_9\delta^k + e^{-c_{10} n/\sqrt{k}}.$$

От (7), (8) и (12) получаваме за всяко $\delta > 0$ и k, $1 \leq k \leq n$, k -нечетно:

$$(13)\quad \| f(x^k) - Q(x) \|_{[-1,1]} \leq e^{-c_{11} n/\sqrt{k}} + e^{-c_{12} n\delta} + c_9 \delta^k .$$

Ако $k = n^{2/3} (\ln n)^{-2/3}$, $\delta = n^{-1/3} (\ln n)^{1/3}$, то

$$(14)\quad \begin{aligned} e^{-c_{11} n/\sqrt{k}} &= e^{-c_{11} n^{2/3} (\ln n)^{1/3}} \\ e^{-c_{12} n\delta} &= e^{-c_{12} n^{2/3} (\ln n)^{1/3}} \\ \delta^k = (\ln n / n)^{1/3 \, n^{2/3} (\ln n)^{-2/3}} &= \\ e^{(1/3)[\ln\ln n - \ln n] n^{2/3} (\ln n)^{-2/3}} &\leq e^{-c_{13} n^{2/3} (\ln n)^{1/3}} . \end{aligned}$$

От (13) и (14), тъй като k -нечетно, $1 \leq k \leq n$, $x^k \in \hat{H}_n$ следва, че

$$\varepsilon_{n,n}(f) \leq e^{-c_1 \sqrt[3]{n^2 \ln n}} .$$

2.4. Оценки отдолу.

В този параграф са разгледани някои въпроси, свързани с оценки отдолу за параметричното приближение на частично аналитични функции. Както вече споменахме в 2.1, окончателна оценка отдолу в общия случай досега не е постигната. В 2.3. беше постигнат порядък $O(\exp(-c_1 \sqrt[3]{n^2 \ln n}))$ за $\varepsilon_{n,n}$ на двучастично аналитични функции. Има някои основания да се предполага, че това е окончателния порядък, който може да се постигне. Ще се постараем да обосновем това предположение, като същевременно докажем оценка отдолу за един частен случай на параметричните приближения. Както видяхме в 2.3, при постигането на оценки отдолу за вътрешен полином на приближаваната функция се използува $x^k \in \hat{H}_n$, $1 \leq k \leq n$, k нечетно. Има основания да се смята, че поставянето на друг полином от $\hat{H}_n$ няма да подобри параметричното приближение. Този факт, обаче, засега няма пълно доказателство. За вида на вътрешния полином има доказани някои твърдения, които няма да излагаме, поради това, че не решават напълно въпроса за оценка отдолу в общия случай. Във връзка с това, че засега при получаването на оценки отгоре, е използуван за вътрешен полином, полиномът x^k, $1 \leq k \leq n$, k -нечетно, поставяме следната задача, която е частен случай на параметричните приближения:

Ако $f \in C[-1,1]$ има представянето

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{за} \quad x \in [-1,0] \\ f_2(x) & \text{за} \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

където f_i, $i = 1,2$ са аналитични функции в кръг с център в началото и радиус $r > 1$, да се изследва величината

$$\mathcal{E}_{n,n}^{*}(f) = \inf_{1 \leq k \leq [n/2]} \; \inf_{Q \in H_n} \; \max_{|x| \leq 1} \left| f(x^{2k+1}) - Q(x) \right|.$$

Чрез теорема 2.15. доказахме, че

$$\mathcal{E}_{n,n}^{*}(f) \leq \exp(-c_1 \sqrt[3]{n^2 \ln n}).$$

Нещо повече, в теорема 2.15. е доказано, че

$$(1) \qquad \mathcal{E}_{m,n}^{*}(f) \leq \exp(-c_1 \sqrt[3]{n^2 \ln n}),$$

където $m = (n/\ln n)^{2/3}$.

Ще докажем, че неравенството (1) е точно по порядък.

Нека за $x \in [-1,1]$, $f^*(x) = \dfrac{|x|}{|x|-a}$, $a > 1$.

Тази функция удовлетворява условията на теорема 2.15, тъй като

$$f^*(x) = \begin{cases} f_1^*(x) = \dfrac{x}{x-a}, & x \in [0,1] \\ f_2^*(x) = \dfrac{-x}{-x-a}, & x \in [-1,0], \end{cases}$$

където f_1^* и f_2^* са аналитични в кръг с център в началото и радиус $a > 1$.

Лема 2.17. Съществува абсолютна константа C_1, такава че за всяко нечетно k, $1 \leqq k \leqq n$, величината

$$\mathcal{E}_n^*(k) = \inf_{Q \in \tilde{H}_n} \left\| \frac{x^k}{x^k-a} - Q(x) \right\|_{[0,1]} \geqq e^{-C_1 n/\sqrt{k}},$$

където $\tilde{H}_n$ е множеството от всички четни полиноми от степен не по-висока от n.

Доказателство: Тъй като $\dfrac{x^k}{x^k-a} = \dfrac{a}{x^k-a} + 1$, то

$$\mathcal{E}_n^*(k) = a \inf_{Q \in \tilde{H}_n} \left\| 1/x^k - a - Q(x) \right\|_{[0,1]} =$$

$$a \inf_{Q \in \tilde{H}_n} \left\| 1/(x-b)(x^{k-1} + x^{k-2}b + \dots + b^{k-1}) - Q(x) \right\|_{[0,1]},$$

където $b = a^{1/k}$. Но

$$\left\| x^{k-1} + x^{k-2}b + \dots + b^{k-1} \right\|_{[0,1]} = 1 + b + \dots + b^{k-1} = \frac{b^k-1}{b-1}.$$

Получаваме

(2) $$\mathcal{E}_n^*(k) \geqq a \frac{b-1}{b^k-1} \inf_{Q \in H_{n+k-1}} \left\| 1/(x-b) - Q(x) \right\|_{[0,1]} \geqq$$

$$a\frac{b-1}{b^k-1}\inf_{Q\in H_{2n}}\left\|\frac{1}{x-b}-Q(x)\right\|_{[0,1]}.$$

Но

(3) $$\inf_{Q\in H_{2n}}\left\|\frac{1}{x-b}-Q(x)\right\|_{[0,1]}=\inf_{Q\in H_{2n}}\left\|\frac{2}{y+1-2b}-Q(y)\right\|_{[-1,1]}=$$

$$2\inf_{Q\in H_{2n}}\left\|1/(y-c)-Q(y)\right\|_{[-1,1]},$$

където $c=2b-1$. В[32] стр. 69 е доказано, че

(4) $$\inf_{Q\in H_{2n}}\left\|1/(y-c)-Q(y)\right\|_{[-1,1]}=1/(c^2-1)(c+\sqrt{c^2-1})^n.$$

От (2), (3) и (4) получаваме:

(5) $$\mathcal{E}_n^*(k)\geqq 2a\frac{b-1}{(b^k-1)[(2b-1)^2-1][2b-1+\sqrt{(2b-1)^2-1}]^n}=$$

$$\frac{a}{2b(a-1)[2b-1+\sqrt{4b^2-4b}]^n},$$

където $b=a^{1/k}$. Нека $a=1+c_2,\ c_2>0$.

Тогава :

$$b=(1+c_2)^{1/k}.$$

Но

(6) $$(1+c_2)^{1/k}-1=\frac{1}{k}c_2+\frac{1/k(1/k-1)}{2!}c_2^2+\dots+$$

$$\frac{1/k(1/k-1)\dots(1/k-i+1)}{i!}c_2^i+\dots=\frac{c_2}{k}\left(1+\frac{1/k-1}{1!}c_2+\dots+\right.$$

$$\left.\frac{(1/k-1)\dots(1/k-i+1)}{i!}c_2^{i-1}+\dots\right)\leqq\frac{c_2}{k}\left(1+\frac{1/k-1}{1!}c_2+\dots+\right.$$

$$\left.\frac{(1/k-1)\dots(1/k-i+1)}{(i-1)!}c_2^{i-1}+\dots\right)=\frac{c_2}{k}(1+c_2)^{1/k-1}\leqq\frac{c_3}{k},$$

където C_3 не зависи от k.

От (5) и (6) получаваме:

$$\mathcal{E}_n^*(k) \geqq \frac{a}{2b(a-1)\left[a^{1/k}+C_3/k+2\sqrt{C_3 a^{1/k}/k}\right]^n} =$$

$$\frac{a}{2b(a-1)}\left[a^{1/k}\left(1+C_3/ka^{1/k}+2\left(\sqrt{C_3/a^{1/k}}\right).1/\sqrt{k}\right)\right]^{-n} \geqq$$

$$\frac{a}{2(a-1)b}\left[\left(1+C_4/\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k}}\right]^{-n/\sqrt{k}} . \; a^{-n/k} \geqq$$

$$e^{-C_5 n/\sqrt{k}}\, a^{n/k} \geqq e^{-C_1 n/\sqrt{k}}.$$

С това лемата е доказана.

Лема 2.18. Съществува абсолютна константа C_6, такава, че за всяко нечетно k, $1 \leqq k \leqq n$:

$$\mathcal{E}_n^*(k) \geqq (k/ne)^{C_6 k}.$$

Доказателство: Тъй като $|x| \leqq 1$, $a > 1$, то

$$\mathcal{E}_n^*(k) = \inf_{Q \in H_n} \left\| x^k/(x^k-a) - Q(x) \right\|_{[0,1]} \geqq \tag{7}$$

$$\frac{1}{a-1} . \inf_{Q \in \tilde{H}_n} \left\| x^k - Q(x)\,x^k + a\,Q(x) \right\|_{[0,1]} .$$

Нека $\inf$ в (7) се достига за $Q^* \in \tilde{H}_n$.
Лесно се вижда, че

$$|Q^*(0)| \leqq 1/2 . \tag{8}$$

Но тогава, тъй като $Q^* \in \tilde{H}_n$, k е нечетно, полиномът $x^k - Q^*(x)x^k + a\,Q^*(x)$ е полином от степен не по-висока от $2n$ и с коефициент $1+\delta$ пред x^k, където

$$-1/2 \leqq \delta \leqq 1/2 .$$

Но тогава от (7) и (8) получаваме:

$$(9) \quad \varepsilon_n^*(k) \geqq \frac{1}{2(a-1)} \inf_{P \in H_{2n}^k} \|x^k - P(x)\|_{[0,1]},$$

където H_{2n}^k е множеството от всички полиноми от H_{2n} с коефициент равен на 0 пред x^k. От [38] стр. 51 е известно, че

$$\inf_{P \in H_{2n}^k} \|x^k - P(x)\|_{[0,1]} = 1/|A_k| \quad \text{, където}$$

$$(10) \quad |A_k| = \frac{2^{2k} 2n(2n+k-1)(2n+k-2)\dots(2k+1)}{(2n-k)!} \leqq \left(\frac{k}{ne}\right)^{-c_7 k}.$$

От (9) и (10) получаваме

$$\varepsilon_n^*(k) \geqq \left(\frac{k}{ne}\right)^{c_6 k}.$$

Теорема 2.16. Ако $f^*(x) = |x|/(|x|-a)$, то

$$\varepsilon_{n,n}^*(f^*) \geqq \exp(-c_8 \sqrt[3]{n^2 \ln n}), \quad (a>1).$$

Доказателство: Ще предполагаме, че k е нечетно.

$$(11) \quad \varepsilon_{n,n}^*(f^*) = \inf_{1 \leqq k \leqq n} \inf_{Q \in H_n} \max_{|x| \leqq 1} |f(x^k) - Q(x)| =$$

$$\inf_{1 \leqq k \leqq n} \inf_{Q \in H_n} \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x^k) - Q(x)|.$$

От теорема 2.15. следва, че

$$(12) \quad \varepsilon_{n,n}^*(f^*) \leqq \exp(-c_9 \sqrt[3]{n^2 \ln n}).$$

Тогава от лема 2.17 и (12) следва, че това K , за което $\inf$ в (11) се постига, трябва да е такова, че

$$n/\sqrt{K} \geqq C_{10}\sqrt[3]{n^2 \ln n}\ .$$

Или

$$(13) \qquad K \leqq C_{11}\left(n/\ln n\right)^{2/3}.$$

Но от лема 2.18. следва, че ако K удовлетворява (13), то

$$\mathcal{E}^*_{n,n}(f^*) \geqq \left[\left(n/\ln n\right)^{2/3}/n\right]^{C_{12}(n/\ln n)^{2/3}} \geqq \left(1/n^{1/3}\right)^{C_{13}(n/\ln n)^{2/3}} = e^{-(1/3)\cdot C_{13}\ln n\,(n/\ln n)^{2/3}} \geqq e^{-C_8\sqrt[3]{n^2 \ln n}}\ ,$$

което доказва теоремата.

2.5. Параметрично приближение на аналитични функции в отворен интервал.

Както вече споменахме в 2.1, в този параграф е постигната оценка за параметричното приближение на аналитични в отворен интервал функции. Тази оценка е аналогична на оценката, която дава А.А.Гончар в [24], за рационалното приближение на такива функции.

Теорема 2.17. Нека f е функция, непрекъсната в $[0,1]$

и $\omega(f;\delta)$ е модула на непрекъснатост на f в $[0,1]$.
Предполагаме, че в кръга $D=\{z: |z-1|<1\}$ съществува ограничена аналитична функция, съвпадаща с f за $x\in(\dot{0},1]$
Тогава в интервала $[0,1]$:

$$\varepsilon_{n,n}(f)=O(\rho_n)$$

$$\rho_n=\inf_{t>1}\left[t e^{-c_1 n/t}+\omega(f;e^{-t})\right].$$

Доказателство: Отново ще използуваме резултата на Ахиезер[32] стр.235: Ако $\varphi(z)$ е аналитична функция, която е регулярна във вътрешността на елипса с фокуси в точките ± 1 и полусума на осите $1/q$, приемаща реални стойности за реални стойности на z, $(z=x+iy)$, то

$$(1)\quad E_{n-1}(\varphi(x);[-1,1])\leq\frac{8}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{q^{(2i+1)n}}{1+q^{2(2i+1)n}}.$$

Да образуваме функцията

$$\varphi_k(z)=f(z^k).$$

Ще докажем, че ако a, $0<a<1$ е фиксирано число, то съществува константа $c_2>0$, такава че за всяко цяло, положително $m\geq k$:

$$E_m(\varphi_k(x);[a,1])\leq e^{-c_2 m/k}.$$

Тъй като f е регулярна за всяко $z\in D$, то φ_k ще бъде регулярна за всяко z, за което $z^k\in D$.
Лесно се вижда, че ако $z\in D_1$, където

$$D_1=\{z: |z|\leq 2^{1/k^2},\ |\arg(z)|\leq\pi/10k\},$$

то $z^k\in D$. В D_1 може да бъде вписана елипса с фокуси в точките a и 1 и голяма полуос равна на $1-a/2+c_3/k^2$, където c_3 е абсолютна константа, зависеща само от a. Но тогава приближението на функцията φ_k в интервала $[a,1]$ е равно на приближението в $[-1,1]$ на функция, която е регулярна в елипса с фокуси в точките ± 1 и голяма полуос $1+c_4/k^2$. Нека тази функция е $\varphi_k^*(z)$, $(z=x+iy)$. От (1) получаваме:

$$(2)\quad E_{m-1}(\varphi^*(x);[-1,1]) \leqq \frac{8}{\pi} q^m \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{q^{2im}}{1+q^{2(2i+1)m}} \leqq c_5 q^m,$$

където $1/q = 1 + c_4/k^2 + \sqrt{(c_4/k^2+1)^2-1} \geqq 1 + c_6/k$.

От (2) получаваме:

$$E_{m-1}(\varphi_k^*(x);[-1,1]) \leqq c_5 (1+c_6/k)^{-m} \leqq e^{-c_2 m/k}$$

$$E_m(\varphi_k(x);[a,1]) \leqq e^{-c_2 m/k},$$

т.е. съществува полином $Q_2(x) \in H_m$, за който, ако $x \in [a,1]$:

$$(3)\quad |\varphi_k(x) - Q_2(x)| \leqq e^{-c_2 m/k}.$$

От екстремалните свойства на полинома на Чебишев лесно се вижда, че съществува константа $c_7 > 0$, такава, че ако $x \in [0,a]$, то

$$(4)\quad |Q_2(x)| \leqq e^{c_7 m}.$$

Ако $x \in [0,\tau]$, $\tau < 1$, то съществува полином $Q_1 \in H_1$, такъв че

$$(5)\quad |f(x) - Q_1(x)| \leqq \omega(f;\tau).$$

От (5) следва, че ако δ е положително число, такова че $a+2\delta < 1$, то съществува $Q_1 \in H_1$, така че, ако $x \in [0, a+2\delta]$, то

(6) $\left| f(x^k) - Q_1(x^k) \right| \leqq \omega(f; (a+2\delta)^k)$.

Отново ще използваме за всяко $\delta > 0$ полинома $\sigma_{r,\delta}(x) \in H_r$, който използвахме в 2.2. и 2.3. :

(7) $\left| \sigma_{r,\delta}(x) \right| \leqq 1$ за $x \in [-\delta, \delta]$

(8) $\left| \sigma_{r,\delta}(x) \right| \leqq e^{-c_8 r\delta}$ за $[-1, -\delta]$

(9) $\left| \sigma_{r,\delta}(x) - 1 \right| \leqq e^{-c_8 r\delta}$ за $x \in [\delta, 1]$.

(10) Нека $m = [r c_8 \delta / 2 c_7]$.

За $k \leqq m$ да образуваме полинома

(11) $Q(x) = Q_1(x^k) + (Q_2(x) - Q_1(x^k))\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta)$,

$Q \in H_{m+r}$,

където Q_1 и Q_2 са съответно полиномите от (3) и (6). Може да предполагаме, че за всяко $x \in [0,1]$, $|Q_1(x)| \leqq M$. Тогава, ако $x \in [0, a]$, от (4), (6), (8), (10) и (11) получаваме

(12) $$\left| f(x^k) - Q(x) \right| \leqq \left| f(x^k) - Q_1(x^k) \right| + (M + e^{c_7 m}) e^{-c_8 r\delta} \leqq \omega(f; (a+2\delta)^k) + e^{-c_9 r}.$$

Ако $x \in [a+2\delta, 1]$ от (3) и (9) получаваме:

(13) $$\left| f(x^k) - Q(x) \right| \leqq \left| f(x^k) - Q_2(x) + Q_2(x) - Q_1(x^k) - (Q_2(x) - Q_1(x^k))\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta) \right| \leqq$$
$$\left| f(x^k) - Q_2(x) \right| + \left| 1 - \sigma_{r,\delta}(x-a-\delta) \right| \left| M+N \right| \leqq$$

$$e^{-c_2 c_8 \delta r/2c_7 k} + (M+N)e^{-c_8 r \delta},$$

тъй като, ако $x \in [a, 1]$, $|Q_2(x)| \leqq N$.

Нека $x \in [a, a+2\delta]$. Тогава от (3), (6) и (7):

(14) $|f(x^k) - Q(x)| = |f(x^k)\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta) + f(x^k)(1-\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta)) - Q(x)| \leqq |f(x^k) - Q_1(x^k)||\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta)| + |f(x^k) - Q_2(x^k)|.$

$|1-\sigma_{r,\delta}(x-a-\delta)| \leqq \omega(f;(a+2\delta)^k) + 2e^{-c_2 c_8 \delta r/2c_7}$.

От (12), (13) и (14) получаваме, че за всяко $x \in [0,1]$, всяко r и $k \leqq c_8 \delta r/2c_7$.

(15) $|f(x^k) - Q(x)| \leqq \omega(f;(a+2\delta)^k) + e^{-c_9 r/k}$,

където $Q \in H_{c_{10} r}$.

Ако $c_{10} r = n$, то теоремата следва от (15), тъй като $x^k \in \hat{H}_n$, когато $k \leqq n$.

ТАБЛИЦА КЪМ ГЛАВА ВТОРА

Класове от функции	Оценка на рационалното приближение	Автор	Първоначални оценки на парамет. приближение	Автор	Последни оценки на параметричното приближение	Автор
Частично полиномиални в два подинтервала	$O(e^{-c_1\sqrt{n}})$	Д.Нюман П.Туран и П. Сютч	$O(e^{-c_2 n})$	Бл.Сендов	също	Бл.Сендов
Частично полиномиални в $s>2$ подинтервала	$O(e^{-c_3(s)\sqrt{n}})$	Й.Сабадош	$O(e^{-c_5(s) n})$	Й.Сабадош	също	Й.Сабадош
Частично аналитични в два подинтервала	$O(e^{-c_5\sqrt{n}})$	Д.Нюман П.Туран и П.Сютч	$O(e^{-c_6\sqrt{n}})$	Бл.Сендов	$O(e^{-c_7\sqrt[3]{n^2 \ln n}})$	Г.Илиев
Частично аналитични в $s>2$ подинтервала	$O(e^{-c_8\sqrt{n}})$	Й.Сабадош	$O(e^{-c_9\sqrt{n}})$	Й.Сабадош	$O(e^{-c_{10}\sqrt{n \ln n}})$	В.Попов Г.Илиев
Аналитични в отворен интервал	$O(\rho_n)$ $\rho_n = \inf_{t>1}[t e^{-c_1 n/t}$	А.Гончар	$O(\rho_n)$ $+\omega(\varphi; e^{-t})]$	Г.Илиев	също	Г.Илиев
С ограничена вариация на τ-тата производна, $\tau \geqq 1$.	$O\left(\left(\frac{c_2(V)}{n}\right)^{\tau+1}\right)$	В.Попов	$O\left(\left(\frac{c_2(V)\ln n}{n}\right)^{\tau+1}\right)$	М.Николчева	също	М.Николчева
С ограничена вариация и от $Lip\,\alpha$	$O(c_{12}(\ln n)^2/n)$	Г.Фройд	$O(c_{13} V \ln n/n)$	М.Николчева	също	М.Николчева

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Preisschrift und Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1911.
2. Сендов Бл., Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике, Успехи математических наук, т.24, вып.5(149), 1969, 141-178.
3. Сендов Бл., Параметрично апроксимиране, Годишник на Софийския университет, т.64, 1969/1970, 237-247.
4. Сендов Бл., Пенков Б., ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции, Известия на Математическия институт на БАН, 6,1962, 27-50.
5. Lorentz G., Zeller K., Degree of Approximation by Monotone Polynomials I, Journal of Approx.Theory, 1, 1968, 501-504.
6. Lorentz G., Zeller K., Degree of Approximation by Monotone Polynomials, II, Journal of Approx.Theory , 2, 1969, 265-269.
7. Shisha O., Monotone Approximation, Pacific J.Math., 15, 1965, 667-671.
8. Rubinstein Z., Ibid 3, 1970, 1.
9. Roulier J., Monotone Approximation of certain Classes of Functions, J.Approx. Theory, 1, 1968) 319-324.
10. Roulier J., Monotone and Weighted Approximation, Doctoral Dissertation, Syracuse University, Syracuse, N.Y.,1968.
11. Roulier J., Polynomials of Best Approximation, which are Monotone, J.of Approx.Theory, 9,3,1973.
12. Lorentz G., Approximation of Functions, New York, 1966.

13. Lorentz G., Monotone Approximation, Inequalities III, Academic Press, New York, 1972, 201-215.

14. Sendov Bl., Popov V., Approximation of Monotone Functions by Monotone Polynomials in Hausdorff's Metric, Cluj (to appear).

15. Roulier J., Nearly Monotone Approximation, Proc.of the American Math.Society, Vol. 47, No 1, January 1975.

16, Newman D., Passov E., Raymon L., Piecewise Monotone Polynomial Approximations, Trans.Amer.Math.Soc., 172(1972), 465-472.

17. Passov E., Raymon L., Monotone and Comonotone Approximation, Proc. of the Amer.Math.Soc., Vol. 42, No 2, February 1974.

18. Wolibner W., Colloq.Math. 2, 1951, 136.

19. Young S., Bull. Amer.Soc., 73, 1967, 642.

20. Николчева М., Монотонная интерполация и ее применение для параметрического приближения, Докл. БАН, 29, № 4,1976, 469-473.

21. В.Попов, Мат.заметки, 17,1975, 369.

22. Newman D., Rational Approximation to | x | , Michigan Math. Journal, 11, 1964, 11-14.

23. Szabados J., On Parametric Approximation, Acta Mathematica Acad.Scient.Hung., 23, 1972, 275-287.

24. Гончар А., Мат. сб., 73, № 4,1967, 630-638.

25. Popov V., Iliev G., Parametric Approximation of Piecewise Analytic Functions, Pliska Studia mathematica bulgarica. Vol. 1, Theory of Approximation, Sofia,1977.

26. Iliev G., An Improvement of the Estimation of Bl.Sendov for Parametric Approximation of Partially Analytic Functions. Pliska Studia mathematica bulgarica.Vol.1, Theory of

Approximation,Sofia, 1977.

27.Iliev G., Estimation of the Parametric Approximation of Analytic Functions in an Open Interval, C.R. Acad.Bulg.Sci. 30,1977.

28. Iliev G., Parametric Approximation of Partial Analytic Functions, Proceedings of the Colloquium on Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest, August, 16-21, 1976.

29. Iliev G., Exact Estimations under the Partially Monotone Approximation and Interpolation, C.R. Acad. Bulg.Sci., 30, 1977.

30. Сендов Бл., Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип, Год. на Соф. Унив., Физ.-мат.фак., 55,1962, 1-39.

31. Натансон И., Конструктивная теория функций, Москва,1949.

32. Ахиезер Н., Лекции по теории аппроксимации, Москва,1947.

33. Szüsz P., Turan P., On the Constructive Theory of Functions, III, Studia Sci.Math.Hung., 1, 1966, 315-322.

34. Freud G., Über die Approximation reeler Funktionen, Acta Math.Acad.Sci. Hung., 17,1966, 313-324.

35. Popov V., Rational Uniform Approximation of Functions with Derivatives with Bounded Variation and its Application, Colloquium on Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest, August, 1976.

36. Николчева, М. (под печат)

37. Сендов Бл., Попов В., Точная асимптотика наилучших приближений алгебраических и тригонометрических многочленов в метрике Хаусдорфр Мат.сборник, 89(131),№ 1(9),1972,138-147.

38. Бернштейн С., Собрание сочинения, Том 1, Москва, 1952.