ЕЦММ

Адриян Върбанов Борисов

ДИСЕРТАЦИЯ

София 1977г.

ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Сектор " Геометрия "

АДРИЯН ВЪРБАНОВ БОРИСОВ

ИНТЕГРАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА НЯКОИ МНОЖЕСТВА ОТ ЛИНЕЙНИ ПОДПРОСТРАНСТВА В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Дисертация за присъждане на научната степен
"Кандидат на математическите науки"

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ
ст.н.с. кфмн Гр. Станилов

София, 1977

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ВЪВЕДЕНИЕ

Интегралната геометрия е сравнително млада геометрична дисциплина, която започва своето развитие в теорията на геометричните вероятности. За първи път М. Крофтон [19] , [20] , благодарение на въведените от него произведения на елементарни вероятности, получава интересни геометрични резултати за изпъкнали равнинни фигури. През 1896 г. Е. Картан [14] намира мерките на съвкупностите на правите и равнините в тримерното евклидово (или неевклидово) пространство. Подробно изложение на получените до 1926 г. резултати се съдържа в монографията на Р. Делтей [21] . В нея той излага и много свои теореми, измежду които е особено важната теорема за инвариантност на интегралната мярка относно дадена група на Ли от трансформации. В своите лекции, четени през 1933 г. в Гьотинген, Г. Херглотц [22] съобщава редица нови резултати. Той показва, че всяко линейно подпространство на крайно мерно евклидово пространство притежава единствена гъстота.

През 1934 г. В. Блашке и неговите ученици Л. Сантало, О. Варга, Б. Петканчин, Ш. Ш. Черн, В. Маак, Л. Хадвигер, А. Мюлер и др. започват широко и системно изследване на въпросите от геометрията, свързани с гъстотите и съответните им интегрални мерки. Може да се смята, че именно през този период се оформя новата геометрична дисциплина, която В. Блашке [11], [13] нарича интегрална геометрия. Многобройните съдържателни резултати, които В. Блашке и споменатите негови ученици получават, го навеждат на мисълта, че интегралната геометрия ще се развие като самостоятелен клон на геометрията, сравним по значение с класическата диференциална геометрия.

Определени заслуги за развитието на този кръг от въпроси има и А. Поанкаре [26]. От неговите изследвания води началото си важното понятие кинематична гъстота. Оригинални и важни приложения на кинематичната гъстота са направени от В. Блашке, Л. Сантало и др. Достатъчно е да споменем известната кинематична формула на В. Блашке и изопериметричното неравенство на Т. Бонезен, които поставят началото на многобройни изследвания и стават основа за интересни обобщения (напр. [18]).

В Хамбурския семинар на В. Блашке, който до 1940 г. е главен център на интегралната геометрия, изследванията протичат по следната схема, която в общи линии е актуална и сега:

1) дефиниране на инвариантна мярка на множества от геометрични обекти;

2) пресмятане на тази мярка за специални множества;

3) използуване на получените резултати за намиране на геометрични зависимости между интегралните инварианти.

Оттук се виждат и основните елементи, които са необходими за изграждането на интегралната геометрия:

1) базисно пространство E, в което са определени разглежданите обекти;

2) група от трансформации $\mathcal{G}$, действуващи в E;

3) геометрични обекти F, определени в E, които се трансформират транзитивно от $\mathcal{G}$.

Интересът към интегрално-геометричните изследвания се засилва след включването на методите и резултатите на интегралната геометрия в рамките на теорията на хомогенните пространства, което е дело на А. Вайл [32], [33] и Ш. Ш. Черн [16]. Особено ефикасен е методът на Ш. Ш. Черн за намиране на инвариантни гъстоти на множества от геометрични обекти в хомогенно пространство. Накратко той се състои в следното:

а) намиране на относителните компоненти на съответната група от трансформации;

б) построяване на инвариантна гъстота (ако съществува такава) във вид на външно произведение на част от тези компоненти;

в) изясняване на метричния смисъл на намерената инварианта, като се използуват параметрите на разглежданото множество от геометрични обекти и метода на координатите.

Пренасянето на интегрално-геометричните изследвания в n -мерно пространство е твърде комплицирано. В този случай се срещат много трудности от алгебричен характер, които с изключение на проблеми, имащи проста геометрична интерпретация, са много трудни за преодоляване. Известно удобство предоставя методът на външните диференциални форми на Е. Картан. Но този метод има и своите недостатъци- необозримост на геометричната същност на получените резултати.

С изложеното до сега се опитахме да дадем макар и най-бегла представа за възникването и развитието на интегралната геометрия. Не си поставихме за цел да съобщим отделните резултати, защото това не е предназначение на настоящето въведение, пък и само тези от последните години биха заели много страници.

В този дух ще разгледаме състоянието на интегрално-геометричните изследвания в нашата страна.

Началото поставя Б. Петканчин [25]. В своята докторска дисертация той изгражда интегралната геометрия на множества от линейни подпространства на n -мерното елиптично и n -мерното евклидово пространство. За разглежданите гъстоти и мерки той намира твърде удобни изрази, от които лесно се получават редица класически резултати за равнината и тримерното пространство. Забележителни са намерените от него формули от Крофтонов тип, които той използува за пресмятане на интегралните мерки на изпъкнали тела. Получените от него резултати са добре известни всред научните среди и са цитирани в много монографии, измежду които ще споменем основните курсове [13] , [27] и [31].

В [1] и [2] Н. Обрешков разработва основни въпроси на хиперболичната интегрална геометрия на равнината и тримерното пространство. Намира и съответни инварианти на геометрията на Мьобиус. Посочва със съответната трансформация някои гъстоти в модела на хиперболичната геометрия по Ф. Клайн.

Г. Станилов провежда своите интегрално-геометрични изследвания главно в двуосното и евклидовото пространство. Той намира интегралните инварианти на множества от геометрични обекти в двуосното пространство [8] , [9] и дава забележителна геометрична характеристика на линейните подпространства P_n в бипланарното пространство B_{2n+1} [7]. Г. Станилов и Г. Зуланке [10] изследват конгруенции от прави в E_n и намират интересни формули от Крофтонов тип, които са обобщение на известни формули в E_3 .

Ще направим кратък обзор на основните резултати, които получаваме в дисертацията.

Множествата от геометрични обекти (прави, равнини), които разглеждаме са свързани с линиите и хиперповърхнините в n -мерното реално евклидово пространство E_n . Групата $\mathcal{G}$ на движенията в E_n не винаги трансформира даден геометричен обект от разглежданото множество в геометричен обект от същото множество. Ето защо при определянето на инвариантните относно $\mathcal{G}$ гъстоти и мерки не може да се използува известния критерий на Ш. Ш. Черн [16] и следователно не може да се твърди ,че те са единствени. Въпреки това те притежават редица интересни геометрични свойства: инвариантност относно $\mathcal{G}$, независимост от избрания репер и съответната геометрична интепретация, които обуславят необходимостта от разглеждането им. Трябва да изтъкнем, че това не е единственият случай, когато се разглеждат мерки, които не притежават свойството единственост. Достатъчно е да споменем едно от основните понятия в класическата диференциална геометрия- лице на област върху повърхнина.

Изследванията са проведени по споменатата схема на Ш. Ш. Черн, като използуваме метода на външните диференциални форми на Е.Картан. Дисертацията се състои от две глави, които съдържат пет параграфа.

В §1 разглеждаме n -кратно гладка линия C . С всяка точка $x \in C$ свързваме по познат начин [5] еднозначно определен десен ортонормиран репер $xt_1 \dots t_n$. Въвеждаме множествата K^m_{n-1} ($m = 1, \dots, n$) от прави G , които пресичат C и лежат в съответните ѝ координатни хиперравнини с нормални вектори t_m . Намираме инвариантна диференциална $(n-1)$ - форма dG , с която дефинираме гъстотата на правите $G \in K^m_{n-1}$.

В §2 изразяваме интегралните мерки на множествата K^m_{n-1} от прави G посредством интегрални инварианти на линията C . Основна е следната

Теорема 2.1. Мерките μ_m ($m=1, \dots, n$) на множествата K^m_{n-1} от прави G се изразяват с формулите:

$$(a) \qquad \mu_1 = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \varkappa_1 \, ds \quad, \quad m=1 \; ;$$

$$(2.1) \quad (б) \qquad \mu_m = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \sqrt{\varkappa^2_{m-1} + \varkappa^2_m} \, ds, \quad 1 < m < n-1$$

$$(в) \qquad \mu_{n-1} = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \sqrt{\varkappa^2_{n-2} + \varkappa^2_{n-1}} \, ds, \quad m = n-1 \; ;$$

$$(г)\qquad \mu_n = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int\limits_{(c)} |\kappa_{n-1}|\, ds, \quad m = n,$$

където O_{n-1} е лицето на единичната хиперсфера σ_{n-1} в E_n.

Тук $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ са кривините на линията C.

Дадена е геометрична характеристика на интегралите в десните страни на (2.1): те са равни на дължините на сферичните индикатриси на съответните вектори t_m. В E_3 е разгледан случаят, когато линията c лежи върху повърхнина S_2.

В §3 построяваме каноничен репер на хиперповърхнина S_{n-1}, като прилагаме метода, предложен от М. Р. Роговой [4]. Определени са главните кривини ν_α ($\alpha = 1, \dots, n-1$), които играят основна роля при изследванията в този и следващите параграфи. Намерен е израз за гъстотата на m -мерните допирателни равнини τ_m ($1 \leqq m \leqq n-2$) на хиперповърхнината S_{n-1}.

В §4 намираме интегралните мерки на множествата K^1_{2n-3} и K^{n-2}_{2n-3}, от тангенти G_τ и $(n-2)$-мерни допирателни равнини τ_{n-2} към хиперповърхнина, която се състои от елиптични точки. Основни са следните теореми:

Теорема 4.1. Ако хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки, мярката μ_1 на множеството K^1_{2n-3} от тангенти G_τ на S_{n-1} е равна на полупроизведението от интегралната кривина от ред 1 на хиперповърхнината и лицето на единичната $(n-2)$-мерна сфера в E_n.

Теорема 4.2. Ако хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки, мярката μ_{n-2} на множеството K^{n-2}_{2n-3} от $(n-2)$-мерни допирателни равнини τ_{n-2} към S_{n-1} е равна на полупроизведението от интегралната кривина от ред $n-2$ на хиперповърхнината и лицето на $(n-2)$-мерната единична сфера в E_n.

Пресмятаме мярката μ на множеството $^{\perp}K^{1}_{n-1}$ от нормали G_n на S_{n-1}.

Теорема 4.3. Мярката μ на множеството $^{\perp}K^{1}_{n-1}$ от нормали G_n на хиперповърхнината S_{n-1} се изразява с формулата

$$\mu = \int_{(S_{n-1})} |K|\, dS_{n-1}, \tag{4.27}$$

където K е пълната кривина на S_{n-1}.

В §5 намираме нови изрази за дефинираните в §4 гъстоти, които използуваме за получаване на интегрални формули, свързани с граничната хиперповърхнина S_{n-1} на изпъкнало n -мерно гладко тяло. С формулата

$$\frac{dG_\tau}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2\varphi_\alpha} = \frac{d\tau_{n-2}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}\Big[\prod\limits_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta \cos^2\varphi_\alpha\Big]} \tag{5.8}$$

показваме връзката между гъстотите на тангентите G_τ и $(n-2)$-мерните допирателни равнини τ_{n-2} на S_{n-1}. Тук φ_α са ъглите между тангентата G_τ (която е и нормала на τ_{n-2} в τ_{n-1}) и главните тангенти на S_{n-1}.

Получени са и редица интересни интегрални формули, измежду които ще приведем следните:

$$\int_{(K^{1}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)}\, dG_\tau = \frac{1}{2} O_{n-2} A, \tag{5.11}$$

$$A = \mathrm{Area}\, S_{n-1},$$

$$\int_{(K^{n-2}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})}\, d\tau_{n-2} = \frac{1}{2} O_{n-2} A, \tag{5.12}$$

където $\nu(G_\tau)$ е нормалната кривина на тангентата G_τ, а с $\nu(\tau_{n-2})$ сме означили знаменателя в дясната страна на (5.8).

Като свържем получените от нас резултати с известна интегрална формула на Ш. Ш. Черн [17], намираме

$$(5.20)\qquad \int\limits_{(G_s \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} dG_s = \frac{O_n}{O_1 O_{n-2}} \int\limits_{(K^1_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)}\, dG_\tau ,$$

$$(5.21)\qquad \int\limits_{(G_s \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} dG_s = \frac{O_n}{O_1} \int\limits_{(\perp K^1_{n-1})} \frac{1}{K}\, dG_n .$$

Тук dG_s е гъстотата на правите G_s в E_n.

В E_3 за овалоид S_3 получаваме формулата

$$(5.27)\qquad \int\limits_{(K^1_3)} dG_\tau = \pi \int\limits_{(E \cap S_3 \neq \emptyset)} dE ,$$

която изразява мярката на множеството от тангенти G_τ на S_3 посредством мярката на множеството от равнини E, които го пресичат. Последната интегрална формула е забележителна. Тя изразява намерената от нас мярка на множеството от тангенти G_τ, за които не сме доказали свойството единственост, чрез мярката на множество от равнини E, която притежава това свойство.

Това са накратко получените от нас по-важни резултати в дисертационния труд. Те поставят и редица нерешени проблеми:

1) пресмятане на интегралната мярка на множеството от m-мерни допирателни равнини τ_m $(1 \leqq m \leqq n-2)$ на S_{n-1} в случаите, когато хиперповърхнината се състои от параболични или хиперболични точки;

2) равенството (5.8) ни навежда на мисълта, че знаменателят в дясната му страна (който означихме с $\nu(\tau_{n-2})$) се явя-

ва в известен смисъл аналог на нормалната кривина $\nu(G_\tau)$ на тангентата G_τ и следователно би представлявало самостоятелен интерес директното му въвеждане;

3) изразяване на намерените от нас в §4 мерки посредством единствени мерки на множества от геометрични обекти.

Изложените в дисертацията резултати са докладвани в Семинара по геометрия в ЕЦММ и на Пета и Шеста пролетни конференции на БМД. Публикувани са в статиите [34] - [39] .

Ще направим някои бележки от общ характер. В дисертацията са спазени в общи линии терминологията и означенията, общоприети в диференциалната и интегралната геометрия. Цитирането на резултатите се извършва по следния начин: първата цифра означава номера на параграфа, а числото след точката - номера на съответния резултат. Например (5.27) означава формула 27 от §5.

Приятен дълг ми е да благодаря на научния си ръководител ст.н.с. Г. Станилов за постоянното внимание и помощ по време на работата ми над тази дисертация.

Искрена благодарност дължа и на акад. Б. Петканчин и доц. И. Иванова - Каратопраклиева, които имаха любезността да се запознаят с третираните от нас въпроси и със своите забележки съществено допринесоха за оформянето на резултатите в настоящия им вид.

Благодаря и на моя колега Е. Димитров за проявеното внимание и полезните беседи върху някои въпроси, свързани с дисертацията.

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛНИ ФОРМУЛИ ЗА ГЛАДКИ ЛИНИИ И ПРИДРУЖАВАЩИ МНОЖЕСТВА ОТ ПРАВИ

§1. Гладки линии и придружаващи множества от прави

В този параграф привеждаме някои основни факти от диференциалната геометрия на n -кратно гладка линия в E_n , които използваме съществено в следващите разглеждания. С разглежданата гладка линия свързваме n придружаващи множества от прави. Дефинираме гъстота на правите от тези множества.

Нека в реалното n -мерно евклидово пространство E_n ($n>2$) е дадена n -кратно гладка линия C с векторно параметрично уравнение

$$(1.1) \qquad x = x(s) \; , \qquad 0 \leqq s \leqq L \, ,$$

където s е дължината на дъгата на C . Предполагаме, че във всяка точка x на C векторите $x', \dots, x^{(n-1)}$ са линейно независими, от което следва, че в x съществуват $n-2$ на брой оскулачни равнини $\xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ съответно с димензии $2, \dots, n-1$. При това, ако ξ_p и ξ_q са две такива равнини и $p<q$, то $\xi_p \subset \xi_q$. С всяка точка $x \in C$ може да се свърже еднозначно определен десен ортонормиран репер $x t_1 \dots t_n$, който се построява по следния начин:

1) векторът t_1 се избира върху тангентата към линията c в точката x ;

2) векторът $t_\nu\ (\nu = 2,\dots,n-1)$ се избира така, че да бъде компланарен с оскулачната ν -равнина ξ_ν и перпендикулярен на оскулачната $(\nu-1)$-равнина $\xi_{\nu-1}$.

3) векторът t_n се избира да бъде перпендикулярен на оскулачната хиперравнина ξ_{n-1} така, че векторите $t_1,\dots,t_n$ да образуват дясна n -орка.

Спрямо така построения придружаващ репер $x t_1,\dots,t_n$ формулите на Френе за линията c имат вида

$$\frac{dt_1}{ds} = \kappa_1 t_2 ,$$

$$(1.2) \qquad \frac{dt_\nu}{ds} = -\kappa_{\nu-1} t_{\nu-1} + \kappa_\nu t_{\nu+1} \qquad (\nu = 2,\dots,n-1),$$

$$\frac{dt_n}{ds} = -\kappa_{n-1} t_{n-1} .$$

Коефициентите $\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_{n-1}$ в дясната страна на равенствата (1.2) се наричат съответно първа, втора,..., $(n-1)$ -ва кривина на линията c в точката x . Кривините $\kappa_1,\dots,\kappa_{n-2}$ са положителни. Кривината κ_{n-1} е положителна, когато векторите dt_n/ds и t_{n-1} са разнопосочни и отрицателна- когато указаните вектори са еднопосочни.

За първи път формулите на Френе за гладка линия в E_n са получени от К. Жордан в [23] . В горното изложение ние се придържахме към [5] .

Да фиксираме за момент т. $x \in c$ и нека m е кое да е от числата 1,..., n . Хиперравнината α_{n-1}^m , която минава през x и има за нормален вектор t_m е еднозначно определена. Правите G, лежащи в α_{n-1}^m и пресичащи линията c в x образуват сноп S_{n-2}^m от прави с център x и носител α_{n-1}. Когато точката x описва линията c, хиперравнините α_{n-1}^m образуват еднопараметрична съвкупност (рой) T_1^m. Да означим с K_{n-1}^m множеството от всички прави G на всички снопове S_{n-2}^m на T_1^m които се получават, когато x описва c. Очевидно, така дефинираното множество K_{n-1}^m от прави G зависи от $n-1$ параметъра: дължината на дъгата s на линията c и още $n-2$ параметъра, които обуславят принадлежността на правата G към дадения сноп S_{n-2}^m с център $x(s)$. Ясно е, че по този начин с линията c свързваме n придружаващи множества K_{n-1}^m от прави толкова на брой, колкото са координатните вектори t_m.

С всяка права $G \in K_{n-1}^m$ свързваме семейство от ортонормирани репери $y e_1 \dots e_n$, които построяваме по следния начин:

а) за начало y вземаме пресечната точка x на G и c;

б) избираме векторът e_n да бъде колинеарен с G, а векторът e_1 - да съвпада с вектора t_m.

Координатните вектори $e_2, \dots, e_{n-1}$ са произволни в равнината α_{n-1}^m и удовлетворяват само условията за ортонормираност. Нека деривационните уравнения на репера от разглежданото семейство имат вида

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \omega^i e_i ,$$

$$(1.3) \qquad de_j = \sum_{k=1}^{n} \omega_j^k e_k$$

$$(j = 1, \dots, n),$$

като линейните диференциални форми ω^i, ω_j^k удовлетворяват структурните уравнения на пространството E_n.

$$D\omega^i = \sum_{k=1}^{n} \omega^k \wedge \omega_k^i ,$$

$$(1.4) \qquad D\omega_i^j = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

$$(i,j = 1, \dots , n)$$

и равенствата

$$(1.5) \qquad \omega_i^i = 0 \ , \ \omega_i^k = -\omega_k^i \qquad (i,k = 1, \dots , n).$$

Образуваме диференциалната $(n-1)$-форма

$$(1.6) \qquad dG = \bigwedge_{q=1}^{n-1} \omega_n^q .$$

Понеже пфафовите форми ω_n^q $(q =1,\dots,n-1)$ са относителни компоненти на репера $ye_1 \dots e_n$, те са инварианти относно движенията в E_n, откъдето следва, че и dG е инвариантна. Ще покажем, че тя не зависи и от избора на репера.

Забележка. Инвариантността на dG относно репера не е очевидна, защото ако присъединим друг репер, линейните диференциални форми ω_n^q ще се изменят.

Нека $\bar{y}\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ е друг ортонормиран репер към G, за който $\bar{y}$ и $\bar{e}_n$ лежат върху правата, а векторът $\bar{e}_1$ съвпада с вектора e_1. Тогава елементите на разглежданите репери са свързани с равенствата

$$\bar{y} = y + \lambda . e_n ,$$

$$(1.7) \qquad \bar{e}_1 = e_1 ,$$

$$\bar{e}_u = \sum_{v=2}^{n-1} a_u^v e_v \qquad (u = 2, \dots , n-1) ,$$

$$\bar{e}_n = \varepsilon . e_n ,$$

където $\varepsilon = \pm 1$, а (a_u^v) е $((n-2)\times(n-2))$ -ортогонална матрица.
Пресмятаме

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}_n^1 &= \varepsilon . \omega_n^1 , \\
\bar{\omega}_n^u &= \bar{e}_u \, d\bar{e}_n = \varepsilon . \Big(\sum_{v=2}^{n-1} a_u^v e_v\Big) \, de_n \qquad (1.8)\\
&= \varepsilon . \sum_{v=2}^{n-1} a_u^v (e_v de_n) = \varepsilon . \sum_{v=2}^{n-1} a_u^v \omega_n^v
\end{aligned}
$$

и следователно

$$\bigwedge_{q=1}^{n-1} \bar{\omega}_n^q = \varepsilon . \omega_n^1 \wedge \bigwedge_{u=2}^{n-1} \Big(\varepsilon . \sum_{v=2}^{n-1} a_u^v \omega_n^v\Big) = \det(a_u^v) . \bigwedge_{q=1}^{n-1} \omega_n^q .$$

Понеже $\det(a_u^v) = \pm 1$, получаваме

$$\bigwedge_{q=1}^{n-1} \bar{\omega}_n^q = \pm \bigwedge_{q=1}^{n-1} \omega_n^q ,$$

което показва, че диференциалната форма $\bigwedge_{q=1}^{n-1} \omega_n^q$ се различава най-много със знак от тази при друг репер. Това обаче е без значение, защото гъстотите и мерките на разглежданите геометрични обекти и множества винаги се вземат по абсолютна стойност.

Поради инвариантния характер на диференциалната форма (1.6), ние я наричаме гъстота на правите G на множеството K_{n-1}^1. Направените по-горе разсъждения не зависят от някаква конкретна стойност на m и следователно получените резултати са в сила за всяко $m = 1, \dots, n$.

Съгласно [27] мярката μ_m на множеството K_{n-1}^m от прави G се определя с формулата

$$\mu_m = \int_{(K_{n-1}^m)} \dots \int N(G) \, dG , \qquad (1.9)$$

където $N(G)$ е числото, което показва колко пъти правата G

принадлежи на множеството K_{n-1}^{m} . В дясната страна на (1.9) интегралът има кратност $n-1$ - толкова, колкото е размерността на мереното множество. По-нататък ще използуваме само символа за прост интеграл, освен в случаите, когато това може да въведе в заблуждение.

Да видим какво е геометричното съдържание на израза (1.6) за гъстотата dG на правите G . Линейните диференциални форми ω_n^2 ,..., ω_n^{n-1} са компоненти на вектора de_n относно репера $xe_2 \dots e_n$ в координатната хиперравнина α_{n-1}^{m} с нормален вектор $e_1 = t_m$. Следователно външното произведение на тези форми може да се разглежда като гъстота на правите G в α_{n-1}^{m} , които минават през точката $y = x$. Това е така наречената ротационна гъстота (или гъстота при ротация) [17] . От друга страна, от специфичния избор на репера се получава, че линейната диференциална форма ω_n^1 е пропорционална на ds .

§2. Интегрални формули от Крофтонов тип

В настоящия параграф изразяваме мерките на множествата K_{n-1}^{m} от прави G чрез интегрални инварианти на линията C. Намираме геометрична интерпретация на получените резултати. В E_3 получаваме интегрални формули в случая, когато C лежи върху повърхнина.

При извеждането на почти всички интегрални формули, които следват, съществено използуваме едно свойство на квадратните матрици. Ще го формулираме като

Лема 2.1. Ако (a_i^j) е $(n\times n)$-матрица с $\det(a_i^j)=A$ и елементът a_i^j е различен от нула, то

$$\det\left(a_p^q-\frac{a_i^q}{a_i^j}a_p^j\right)=\frac{(-1)^{i+j}}{a_i^j}A$$

$$(p=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n;\ q=1,\dots,j-1,j+1,\dots,n).$$

Доказателство. Да умножим последователно елементите на j-ия стълб с a_i^q/a_i^j $(q=1,\dots,j-1,j+1,\dots,n)$ и получените произведения да извадим от елементите съответно на първия, втория,...,$(j-1)$-я, $(j+1)$-я,...,n-тия стълб. Получаваме детерминанта Δ, която има вида

$$\Delta=\left|\begin{array}{c:c:c}
\left(a_\alpha^\beta-\dfrac{a_i^\beta}{a_i^j}a_\alpha^j\right) & (a_\alpha^j) & \left(a_\alpha^\gamma-\dfrac{a_i^\gamma}{a_i^j}a_\alpha^j\right)\\
\hdashline
0 & a_i^j & 0\\
\hdashline
\left(a_\delta^\beta-\dfrac{a_i^\beta}{a_i^j}a_\delta^j\right) & (a_\delta^j) & \left(a_\delta^\gamma-\dfrac{a_i^\gamma}{a_i^j}a_\delta^j\right)
\end{array}\right|$$

$$(\alpha=1,\dots,i-1;\ \beta=1,\dots,j-1;\ \gamma=j+1,\dots,n;\ \delta=i+1,\dots,n)$$

и следователно

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_i^j \det\left(a_p^q - \frac{a_i^q}{a_i^j} a_p^j\right)$$

$$(p = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n).$$

От друга страна, от свойствата на детерминантите следва, че

$$\Delta = \det(a_i^j) = A.$$

Тогава

$$\det\left(a_p^q - \frac{a_i^q}{a_i^j} a_p^j\right) = \frac{(-1)^{i+j}}{a_i^j} A$$

$$(p = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n).$$

Ще докажем следната

Теорема 2.1. Мерките μ_m ($m = 1, \ldots, n$) на множествата K_{n-1}^m от прави G се изразяват с формулите

$$(2.1)\quad \begin{aligned}
&(a)\quad \mu_1 = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \varkappa_1\, ds, && m = 1;\\
&(б)\quad \mu_m = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \sqrt{\varkappa_{m-1}^2 + \varkappa_m^2}\, ds, && 1 < m < n-1;\\
&(в)\quad \mu_{n-1} = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} \sqrt{\varkappa_{n-2}^2 + \varkappa_{n-1}^2}\, ds, && m = n-1;\\
&(г)\quad \mu_n = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} \int_{(c)} |\varkappa_{n-1}|\, ds, && m = n,
\end{aligned}$$

където O_{n-1} е лицето на единичната хиперсфера σ_{n-1} в E_n.

Доказателство. Доказателствата на случаите (а) - (г) не се различават принципно едно от друго. Поради това ние ще проведем подробно доказателството само в случая (б). От доказателствата на останалите случаи ще приведем само някои по-важни междинни резултати. Пълните доказателства могат да се намерят в [36].

(б). В §1 с точката $x=y$ свързахме два ортонормирани репера $xt_1 \dots t_n$ и $ye_1 \dots e_n$. Нека трансформационните формули са съответно

$$
\begin{aligned}
&e_1 = t_m, \\
(2.2) \qquad &e_\alpha = \sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\alpha^\varepsilon t_\varepsilon + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\alpha^\delta t_\delta \\
&(\alpha = 2, \dots, n), \\
&t_\varepsilon = \sum_{\alpha=2}^{n} a_\alpha^\varepsilon e_\alpha \quad (\varepsilon = 1, \dots, m-1), \\
(2.3) \qquad &t_m = e_1, \\
&t_\delta = \sum_{\alpha=2}^{n} a_\alpha^\delta e_\alpha \quad (\delta = m+1, \dots, n),
\end{aligned}
$$

като трансформационната матрица

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
a_2^1 & \dots & a_2^{m-1} & 0 & a_2^{m+1} & \dots & a_2^n \\
- & - & - & - & - & - & - \\
a_n^1 & \dots & a_n^{m-1} & 0 & a_n^{m+1} & \dots & a_n^n
\end{pmatrix}
$$

е ортогонална и детерминантата ѝ е равна на 1. Като диференцираме израза за e_n от (2.2), използуваме (1.2) и (2.3), получаваме

$$
\begin{aligned}
&de_n = (a_n^{m-1} \varkappa_{m-1} - a_n^{m+1} \varkappa_m)\, ds \,.\, e_1 \\
(2.4) \qquad &+ \sum_{\nu=2}^{n-1} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\nu^\varepsilon da_n^\varepsilon + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\nu^\delta da_n^\varepsilon \Big) e_\nu + (\dots)\, ds.
\end{aligned}
$$

След сравняване с (1.3) намираме

$$\omega_n^1 = (a_n^{m-1} \varkappa_{m-1} - a_n^{m+1} \varkappa_m)\, ds,$$

$$(2.5) \qquad \omega_n^{\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\nu^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\nu^{\delta}\, da_n^{\delta} + (\ldots)\, ds$$

$$(\nu = 2, \ldots, n-1).$$

Пресмятаме

$$(2.6) \qquad dG = \left| (a_n^{m-1} \varkappa_{m-1} - a_n^{m+1} \varkappa_m)\, ds \wedge \bigwedge_{\nu=2}^{n-1} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\nu^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\nu^{\delta}\, da_n^{\delta} \Big) \right|$$

От

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_n^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_n^{\delta}\, da_n^{\delta} = 0$$

получаваме

$$da_n^n = -\frac{1}{a_n^n} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_n^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\varrho=m+1}^{n-1} a_n^{\varrho}\, da_n^{\varrho} \Big)$$

и следователно

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\nu^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\nu^{\delta}\, da_n^{\delta}$$

$$= \sum_{\varepsilon=1}^{m-1} \Big(a_\nu^{\varepsilon} - \frac{a_\nu^n}{a_n^n} a_n^{\varepsilon} \Big) da_n^{\varepsilon} + \sum_{\varrho=m+1}^{n-1} \Big(a_\nu^{\varrho} - \frac{a_\nu^n}{a_n^n} a_n^{\varrho} \Big) da_n^{\varrho}.$$

Като приложим лема 2.1 получаваме

$$\bigwedge_{\nu=2}^{n-1} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{m-1} a_\nu^{\varepsilon}\, da_n^{\varepsilon} + \sum_{\delta=m+1}^{n} a_\nu^{\delta}\, da_n^{\delta} \Big) = \frac{(-1)^{m+1}}{a_n^n} \bigwedge_{\varepsilon=1}^{m-1} da_n^{\varepsilon} \wedge \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} da_n^{\varrho},$$

откъдето следва, че

$$(2.7)\quad dG = \left| \frac{a_n^{m-1} \kappa_{m-1} - a_n^{m+1} \kappa_m}{a_n^n} ds \wedge \bigwedge_{\varepsilon=1}^{m-1} da_n^\varepsilon \wedge \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} da_n^\varrho \right| .$$

Сега нашата цел ще бъде да преработим дясната страна на (2.7) във вид, удобен за интегриране. Да означим с θ_1 ъгъла между векторите e_n и t_1 . Очевидно

$$a_n^1 = \cos\theta_1 .$$

Ако e_n' е ортогоналната проекция на e_n върху ортогоналното допълнение на t_1 и $\sphericalangle(e_n', t_2) = \theta_2$, то

$$a_n^2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 .$$

Аналогично, ако e_n'' е ортогоналната проекция на e_n' върху равнината $(t_3 \ldots t_{m-1} t_{m+1} \ldots t_n)$ и $\sphericalangle(e_n'', t_3) = \theta_3$, получаваме

$$a_n^3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 .$$

Продължаваме този процес още $n-4$ пъти и така достигаме до следното параметрично представяне на единичната хиперсфера в координатната хиперравнина $(t_1 \ldots t_{m-1} t_{m+1} \ldots t_n)$:

$$
\begin{aligned}
a_n^1 &= \cos\theta_1 ,\\
a_n^2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 ,\\
a_n^3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 ,\\
&\text{-------------------}\\
(2.8)\qquad a_n^{m-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{m-2} \cos\theta_{m-1} ,\\
a_n^{m+1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{m-1} \cos\theta_{m+1} ,\\
&\text{-------------------------------}\\
a_n^{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} ,\\
a_n^n &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} .
\end{aligned}
$$

Понеже множеството K_{n-1}^{m} се състои от неориентирани прави, то

$$0 < \theta_\varepsilon < \pi \quad , \quad 0 < \theta_\rho < \pi \tag{2.9}$$
$$(\varepsilon = 1, \dots, m-1\ ;\ \rho = m+1, \dots, n-1).$$

Пресмятаме

$$\bigwedge_{\varepsilon=1}^{m-1} da_n^{\varepsilon} \wedge \bigwedge_{\rho=m+1}^{n-1} da_n^{\rho}$$

$$= (-1)^{n-2} \prod_{\varepsilon=1}^{m-1} (\sin\theta_\varepsilon)^{n-\varepsilon-1} \prod_{\rho=m+1}^{n-1} (\sin\theta_\rho)^{n-\rho} \bigwedge_{\varepsilon=1}^{m-1} d\theta_\varepsilon \wedge \bigwedge_{\rho=m+1}^{n-1} d\theta_\rho .$$

Тогава

$$dG = |\kappa_{m-1}\cos\theta_{m-1} - \kappa_m \sin\theta_{m-1}\cos\theta_{m+1}|$$

$$\times (\sin\theta_{m-1})^{n-m-1} \prod_{\lambda=1}^{m-2} (\sin\theta_\lambda)^{n-\lambda-1} \prod_{\rho=m+1}^{n-1} (\sin\theta_\rho)^{n-\rho-1} ds \wedge \bigwedge_{\varepsilon=1}^{m-1} d\theta_\varepsilon \wedge \bigwedge_{\rho=m+1}^{n-1} d\theta_\rho . \tag{2.10}$$

Сега вече можем да интегрираме двете страни на (2.10), като държим сметка за (2.9). Получаваме

$$\mu_m = \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-m+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m-1}{2}\right)} \int_{(C)} \Big[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\kappa_{m-1}\cos\theta_{m-1} - \kappa_m \sin\theta_{m-1}\cos\theta_{m+1}| \tag{2.11}$$

$$\times (\sin\theta_{m-1})^{n-m-1} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} d\theta_{m-1}\, d\theta_{m+1} \Big] ds .$$

Остава да пресметнем двойния интеграл в средните скоби. В областта $D = \{0 < \theta_{m-1} < \pi, 0 < \theta_{m+1} < \pi\}$ функцията

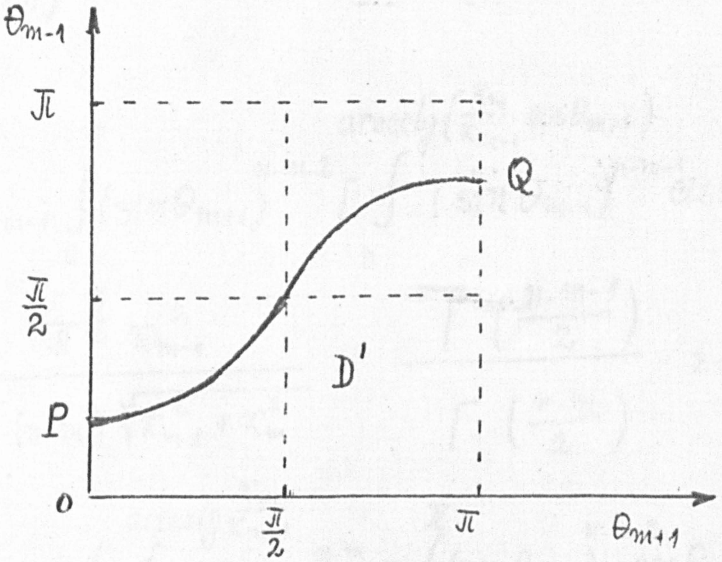
$$\kappa_{m-1}\cos\theta_{m-1} - \kappa_m \sin\theta_{m-1}\cos\theta_{m+1}$$

$$= \kappa_m \sin\theta_{m-1}\left(\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m}\operatorname{cotg}\theta_{m-1} - \cos\theta_{m+1}\right)$$

се анулира в точките на кривата

$$\theta_{m-1} = \operatorname{arccotg}\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\cos\theta_{m+1}\right).$$

Тази крива пресича ординатната ос $\theta_{m+1} = 0$ в точката P с координати $\left(0, \operatorname{arccotg}\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\right)$ и правата $\theta_{m+1} = \pi$ в точката $Q\left(\pi, \operatorname{arccotg}\left(-\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\right)\right)$.



Да означим с D' онази от двете подобласти, на които се разделя областта D от горната крива, в точките на която е изпълнено неравенството

$$\theta_{m-1} \leqq \operatorname{arccotg}\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\cos\theta_{m+1}\right).$$

В D' ще бъде вярно неравенството

$$\operatorname{cotg}\theta_{m-1} \geqq \frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\cos\theta_{m+1}$$

и следователно и еквивалентното му

$$\kappa_{m-1}\cos\theta_{m-1} - \kappa_m\sin\theta_{m-1}\cos\theta_{m+1} \geqq 0 .$$

Очевидно

$$(2.12)\qquad I = 2\,(I_1 + I_2),$$

където с I сме означили двойния интеграл, който искаме да пресметнем, а

$$I_1 = \kappa_{m-1} \iint\limits_{(D')} \cos\theta_{m-1} (\sin\theta_{m-1})^{n-m-1} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} d\theta_{m-1}\, d\theta_{m+1},$$

$$I_2 = -\kappa_m \iint\limits_{(D')} (\sin\theta_{m-1})^{n-m} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} \cos\theta_{m+1}\, d\theta_{m-1}\, d\theta_{m+1}.$$

Пресмятаме

$$I_1 = \kappa_{m-1} \int_0^{\pi} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} \Big[\int_0^{\operatorname{arccotg}\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\cos\theta_{m+1}\right)} (\sin\theta_{m-1})^{n-m-1} \cos\theta_{m-1}\, d\theta_{m-1} \Big] d\theta_{m+1}$$

$$(2.13)\qquad = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \kappa_{m-1}^2}{(n-m)\sqrt{\kappa_{m-1}^2 + \kappa_m^2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)},$$

$$I_2 = -\kappa_m \Big\{ \int_0^{\operatorname{arccotg}\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}} (\sin\theta_{m-1})^{n-m} \Big[\int_0^{\pi} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} \cos\theta_{m+1}\, d\theta_{m+1} \Big] d\theta_{m-1}$$

$$(2.14)\qquad + \int_{\operatorname{arccotg}\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}}^{\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-1}}\right)} (\sin\theta_{m-1})^{n-m} \Big[\int_{\arccos\left(\frac{\kappa_{m-1}}{\kappa_m}\operatorname{cotg}\theta_{m-1}\right)}^{\pi} (\sin\theta_{m+1})^{n-m-2} \cos\theta_{m+1}\, d\theta_{m+1} \Big] d\theta_{m-1} \Big\}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \kappa_m^2}{(n-m)\sqrt{\kappa_{m-1}^2 + \kappa_m^2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}.$$

От (2.12) - (2.14) получаваме равенството

$$(2.15)\qquad I = \frac{2\sqrt{\kappa_{m-1}^2+\kappa_m^2}\;\Gamma\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}{(n-m)\;\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\,\pi^{\frac{1}{2}},$$

което заместваме в (2.11). Получаваме интегралната формула

$$(2.16)\qquad \mu_m = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{(c)}\sqrt{\kappa_{m-1}^2+\kappa_m^2}\,ds.$$

Лицето O_r на r -мерната единична сфера σ_r в E_n се пресмята по формулата [29]

$$(2.17)\qquad O_r = 2\,\frac{\pi^{\frac{r+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}.$$

Заместваме (2.17) в (2.16) и получаваме (б) от (2.1).

Ето по-важните междинни резултати в доказателствата на останалите случаи:

(а). Нека

$$e_1 = t_1,$$

$$e_\alpha = \sum_{\beta=2}^{n} a_\alpha^\beta t_\beta$$

$$(\alpha = 2, \dots, n).$$

Тогава

$$\omega_n^1 = -a_n^2 \kappa_1 . ds,$$

$$\omega_n^\nu = \sum_{\beta=2}^{n} a_\nu^\beta da_n^\beta + (\dots)ds$$

$$(\nu = 2, \dots, n-1).$$

От горните формули и лема 2.1 следва равенството

$$dG = \varkappa_1 \left| ds \wedge \bigwedge_{\sigma=3}^{n} da_n^{\sigma} \right|,$$

от което, като въведем подходящи сферични координати [5], намираме

$$dG = \varkappa_1 \left| \prod_{\tau=1}^{n-2} (\cos\theta_\tau)^{\tau} \right| . ds \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{n-2} d\theta_\tau .$$

(в). Нека

$$e_1 = t_{n-1},$$

$$e_\alpha = \sum_{\tau=1}^{n-2} a_\alpha^{\tau} t_\tau + a_\alpha^{n} t_n$$

$$(\alpha = 2, \dots, n).$$

Намираме

$$\omega_n^1 = (a_n^{n-2} \varkappa_{n-2} - a_n^{n} \varkappa_{n-1})\, ds,$$

$$\omega_n^{\nu} = \sum_{\tau=1}^{n-2} a_\nu^{\tau} da_n^{\tau} + a_\nu^{n} da_n^{n} + (\dots)\, ds$$

$$(\nu = 2, \dots, n-1),$$

откъдето

$$dG = \left| \frac{a_n^{n-2} \varkappa_{n-2} - a_n^{n} \varkappa_{n-1}}{a_n^{n}} ds \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{n-2} da_n^{\tau} \right| .$$

Като използваме сферични координати от типа на (2.8), получаваме

$$dG = \left| \varkappa_{n-2} \operatorname{cotg}\theta_{n-2} - \varkappa_{n-1} \right| \prod_{\tau=1}^{n-2} (\sin\theta_\tau)^{n-\tau-1} ds \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{n-2} d\theta_\tau .$$

(г). Нека

$$e_1 = t_n$$

$$e_\alpha = \sum_{q=1}^{n-1} a_\alpha^q t_q$$

$$(\alpha = 2, \dots, n).$$

Пресмятаме

$$\omega_n^1 = a_n^{n-1} \varkappa_{n-1} ds,$$

$$\omega_n^\nu = \sum_{q=1}^{n-1} a_\nu^q da_n^q + (\dots) ds$$

$$(\nu = 2, \dots, n-1).$$

Тогава

$$dG = \left| \varkappa_{n-1} ds \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{n-2} da_n^\tau \right|$$

и като използваме сферични координати, намираме

$$dG = |\varkappa_{n-1}| \prod_{\tau=1}^{n-2} (\sin\theta_\tau)^{n-\tau-1} ds \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{n-2} d\theta_\tau .$$

Ще отбележим геометричната интерпретация на получените интегрални формули (2.1). Тя е следната: интегралите в десните страни на формулите (2.1) са равни на дължините на сферичните индикатриси съответно на векторите t_1, t_m $(1 < m < n-1)$, t_{n-1} и t_n. Така от теорема (2.1) получаваме

Следствие 2.1. Мерките $\mathcal{M}_m$ на множествата K_{n-1}^m $(m = 1, \dots, n)$ от прави G са равни на произведението на разделеното с 2π лице на единичната хиперсфера в E_n и дължините L_m на съответните сферични индикатриси на векторите t_m, т.е.

$$(2.18) \qquad \mu_m = \frac{1}{2\pi} O_{n-1} L_m .$$

Действително, за дължината на сферичната индикатриса на вектора t_m е изпълнено

$$L_m = \int_{(c)} \sqrt{t_m'^2}\, ds ,$$

откъдето, като използуваме формулите на Френе (1.2), получаваме желаното равенство

$$L_m = \int_{(c)} \sqrt{\varkappa_{m-1}^2 + \varkappa_m^2}\, ds .$$

Приложение. В E_3 ще намерим аналог на получените интегрални формули (2.1) в случая, когато линията c лежи върху повърхнина.

Нека в реалното тримерно евклидово пространство E_3 е дадена трикратно гладка повърхнина S_2 с векторно параметрично уравнение

$$x = x(u,v) \quad , \quad (u,v) \in D$$

и върху нея - трикратно гладка правилна крива c с уравнение

$$(2.19) \qquad x = x\left(u(s), v(s)\right) \qquad (0 \leqq s \leqq L).$$

Предполагаме, че кривата c е отнесена относно дължината на дъгата. За краткост ще пишем уравнението (2.19) във вида

$$(2.19') \qquad x = x(s).$$

От класическата диференциална геометрия [3] е известно, че с всяка точка x на кривата c могат да се свържат два десни ортонормирани триедъра: триедърът на Френе $xt_1t_2t_3$, зависящ само от кривата C и триедърът $xh_1h_2h_3$, който зависи и от повърхнината. Триедърът $xh_1h_2h_3$ е определен по следния начин: векторът h_1 съвпада с вектора t_1; h_3 е единичният вектор върху нормалата на повърхнината S_2 в точка x; h_2 е векторното произведение на векторите h_3 и h_1, т.е.

$$h_2 = h_3 \times h_1$$

съгласно изискването триедърът $xh_1h_2h_3$ да бъде ортонормиран и десен. Спрямо така определения триедър са в сила формулите

$$\frac{dh_1}{ds} = \delta . h_2 + \nu . h_3,$$

$$\frac{dh_2}{ds} = -\delta . h_1 + \alpha . h_3, \tag{2.20}$$

$$\frac{dh_3}{ds} = -\nu . h_1 - \alpha . h_2,$$

където δ, ν и α са съответно геодезичната кривина на C върху S_2, нормалната кривина на C върху S_2 и геодезичната торзия на C върху S_2. δ, ν и α са свързани с кривината $\varkappa_1$ и торзията $\varkappa_2$ на кривата C посредством формулите

$$\delta = \varkappa_1 \sin\theta, \quad \nu = \varkappa_1 \cos\theta, \quad \alpha = \theta' + \varkappa_2, \tag{2.21}$$

където θ е ориентираният ъгъл от главната нормала на кривата C до нормалата на повърхнината S_2 в същата точка.

Както постъпихме в §1, с кривата C свързваме множествата H_2^m $(m = 1,2,3)$ от прави G, които пресичат кривата в точката x и лежат в съответните координатни равнини α_2^m с нормални вектори h_m. С всяка права $G \in H_2^m$ свързваме семейство от ортонормирани репери $ye_1e_2e_3$, за които точката y и векторът e_1 лежат върху G, а $e_3 = h_m$. Нека деривационните уравнения на избрания репер са (1.3) при $i,j,k = 1,2,3$, като относителните компоненти ω^i, ω_j^k удовлетворяват структурните уравнения на пространството E_3 и равенствата (1.5). По същия начин се показва, че двуформата

$$dG = \omega_1^2 \wedge \omega_1^3$$

е инвариантна относно движенията в E_3 и не зависи от репера $ye_1e_2e_3$. Следователно можем да я наречем гъстота на правите $G \in H_2^m$.

Теорема 2.2. Мерките μ_m ($m = 1,2,3$) на множествата H_2^m от прави G са равни на удвоените дължини на сферичните индикатриси на съответните вектори h_m.

Както и при доказателството на теорема 2.1, ще извършим доказателството само на един от случаите. Доказателството на останалите случаи може да се намери в [39].

Да разгледаме случая $m = 2$. Имаме да докажем, че

$$\mu_2 = 2L_2, \tag{2.22}$$

където L_2 е дължината на сферичната индикатриса на вектора h_2. Нека трансформационните формули, свързващи двата триедъра $xh_1h_2h_3$ и $ye_1e_2e_3$ имат вида

$$e_1 = \cos\varphi . h_1 - \sin\varphi . h_3,$$

$$e_2 = \sin\varphi . h_1 + \cos\varphi . h_3,$$

$$e_3 = h_2$$

и

$$h_1 = \cos\varphi . e_1 + \sin\varphi . e_2 ,$$

$$h_2 = e_3 \quad ,$$

$$h_3 = -\sin\varphi . e_1 + \cos\varphi . e_2 ,$$

откъдето, по познат вече метод получаваме

$$\omega_1^2 = \nu ds - d\varphi ,$$

$$\omega_1^3 = (\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) ds .$$

Тогава

$$dG = |\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi| d\varphi \wedge ds .$$

Налице са следните възможности:

а) γ и α имат еднакви знаци.

Пресмятаме

$$\mu_2 = \int_{(c)} [\int_0^{\pi} |\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi| d\varphi] ds = \eta \Big\{ \int_{(c)} [\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) d\varphi$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}(-\frac{\gamma}{\alpha})} (\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) d\varphi - \int_{\operatorname{arctg}(-\frac{\gamma}{\alpha})}^{\pi} (\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) d\varphi] ds \Big\} = 2 \int_{(c)} \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} ds ,$$

където $\eta = \operatorname{sgn}\alpha$.

б) γ и α имат различни знаци.

Тогава

$$\mu_2 = \int_{(c)} [\int_0^{\pi} |\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi| d\varphi] ds = \eta \Big\{ \int_{(c)} [- \int_0^{\operatorname{arctg}(-\frac{\gamma}{\alpha})} (\gamma\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) d\varphi$$

$$+\int_{\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sigma}{\alpha}\right)}^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sigma\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)d\varphi\Big]ds\Big\}=2\int_{(c)}\sqrt{\sigma^2+\alpha^2}\,ds,$$

където пак $\eta = \operatorname{sgn}\alpha$.

Като вземем предвид

$$L_2=\int_{(c)}\sqrt{\sigma^2+\alpha^2}\,ds,$$

получаваме (2.22).

В специалните случаи за кривата C, т.е. когато е асимптотична линия, линия на кривината или геодезична линия на повърхнината S_2, някои от получените изрази за мерките на множествата H_2^m от прави G са частни случаи на формулите (2.1) при $n=3$.

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛНИ ФОРМУЛИ ЗА ХИПЕРПОВЪРХНИНА И МНОЖЕСТВА ОТ ПРАВИ И РАВНИНИ

§3. Гъстота на m -мерни допирателни равнини към хиперповърхнина в E_n

В настоящия параграф привеждаме във форма, подходяща за нашите разглеждания, някои основни известни факти от диференциалната геометрия на хиперповърхнина в E_n, които са пряко свързани с третираните в следващите параграфи проблеми. Намираме израз за гъстотата на m -мерните допирателни равнини към хиперповърхнината.

Нека в E_n е дадена хиперповърхнината S_{n-1} с векторно параметрично уравнение

$$(3.1)\qquad x = x(u^1, \dots, u^{n-1}),\quad (u^1, \dots, u^{n-1}) \in D.$$

Предполагаме, че векторната функция (3.1) е достатъчно пъти непрекъснато диференцируема. С всяка точка $x \in S_{n-1}$ свързваме десен ортонормиран репер $x f_1 \dots f_n$ с деривационни уравнения

$$dx = \sum_{i=1}^{n} \psi^i f_i,$$

$$(3.2)\qquad df_i = \sum_{k=1}^{n} \psi_i^k f_k$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Относителните компоненти ψ^i, ψ_i^k на избрания репер удовлетворяват структурните уравнения (1.4) на пространството E_n и равенствата (1.5).

Избираме координатните вектори $f_1, \dots, f_{n-1}$ на репера в допирателната хиперравнина τ_{n-1} на хиперповърхнината S_{n-1}. Тогава

$$\psi^n = 0. \tag{3.3}$$

В общия случай, когато диференциалните форми ψ^α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) са линейно независими, те могат да се изберат за базисни форми на S_{n-1}. Тогава всички останали линейни диференциални форми ψ_i^κ ($i, \kappa = 1, \dots, n$) се изразяват чрез тях. Да предположим, че

$$\psi_i^\kappa = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ij}^\kappa \psi^j \qquad (i, \kappa = 1, \dots, n). \tag{3.4}$$

Ще покажем, че

$$\lambda_{\alpha\beta}^n - \lambda_{\beta\alpha}^n = 0 \quad , \alpha \neq \beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, n-1). \tag{3.5}$$

Наистина от

$$dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \psi^\alpha f_\alpha ,$$

като диференцираме външно, получаваме

$$\sum_{\beta=1}^{n-1} D\psi^\beta f_\beta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \psi^\alpha \wedge df_\alpha = 0. \tag{3.6}$$

Но

$$df_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-1} \psi_\alpha^\beta f_\beta + \psi_\alpha^n f_n$$

и следователно (3.6) приема вида

$$\sum_{\beta=1}^{n-1}\left(D\psi^{\beta}-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\psi^{\alpha}\wedge\psi_{\alpha}^{\beta}\right)f_{\beta}-\left(\sum_{\alpha=1}^{n-1}\psi^{\alpha}\wedge\psi_{\alpha}^{n}\right)f_{n}=0.$$

От структурните уравнения на E_n и (3.3) следва

$$D\psi^{\beta}-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\psi^{\alpha}\wedge\psi_{\alpha}^{\beta}=0$$

$$(\beta=1,\dots,n-1).$$

Тогава

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n-1}\psi^{\alpha}\wedge\psi_{\alpha}^{n}\right)f_{n}=0$$

или

$$(3.7)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1}\psi^{\alpha}\wedge\psi_{\alpha}^{n}=0.$$

Като заместим (3.4) в (3.7), получаваме

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1}\lambda_{\alpha\beta}^{n}\psi^{\alpha}\wedge\psi^{\beta}=0,$$

откъдето веднага следват равенствата (3.5).

Равенствата (3.5) следват и от пълната интегруемост на уравнението (3.3). Ние обаче предпочетохме директното доказателство. В по друг запис то може да се намери в [17] .

Нека

$$(3.8)\qquad I=dx^{2}=\sum_{\alpha=1}^{n-1}(\psi^{\alpha})^{2}$$

е първата основна форма на хиперповърхнината S_{n-1} , а

$$(3.9) \quad \mathrm{II} = d^2x . f_n = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n-1} \lambda_{\alpha\beta}^{n} \psi^{\alpha} \psi^{\beta}$$

- втората й основна форма.

Ако

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s) \quad , \quad s \in J$$

$$(\alpha = 1, \dots, n-1)$$

е произволна линия през x върху S_{n-1}, отношението

$$(3.10) \qquad \nu = -\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = -\frac{\sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n-1} \lambda_{\alpha\beta}^{n} \psi^{\alpha} \psi^{\beta}}{\sum_{\alpha=1}^{n-1} (\psi^{\alpha})^2}$$

се нарича нормална кривина на линията върху хиперповърхнината S_{n-1} в точката x.

Ще определим главните направления на S_{n-1}. За тази цел ще използваме схемата, дадена в [4]. Да запишем (3.10) във вида

$$(3.10') \quad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n-1} \lambda_{\alpha\beta}^{n} \psi^{\alpha} \psi^{\beta} + \nu . \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\psi^{\alpha})^2 = 0$$

и да диференцираме по ψ^{α}. Получаваме хомогенната система

$$\sum_{\beta=1}^{n-1} \lambda_{\alpha\beta}^{n} \psi^{\beta} + \nu . \psi^{\alpha} = 0$$

$$(\alpha = 1, \dots, n-1),$$

която има ненулево решение тогава и само тогава, когато

$$(3.11) \qquad \det (\lambda_{\alpha\beta}^{n} + \delta_{\alpha\beta} \nu) = 0$$

$$(\alpha, \beta = 1, \dots, n-1).$$

Тук $\delta_{\alpha\beta}$ е символът на Кроникер.

Уравнението (3.11) се нарича характеристично уравнение на хиперповърхнината S_{n-1}. В общия случай то има $n-1$ различни корена. На всеки от тях съответствува направление - главно направление на хиперповърхнината S_{n-1} в точката x.

Да изберем векторите $t_1, \ldots, t_{n-1}$ върху главните направления на S_{n-1} в точката x. Това води до равенствата

$$(3.12) \qquad \lambda_{\alpha\beta}^{n} = 0 \quad , \alpha \neq \beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1).$$

С тази последна стъпка от канонизацията на репера $x t_1 \ldots t_n$ векторите $t_1, \ldots, t_{n-1}$ са напълно определени. Така построения репер $x t_1 \ldots t_n$ се нарича каноничен репер на хиперповърхнината S_{n-1}. Спрямо него с равенствата

$$(3.13) \qquad \nu_\alpha = -\lambda_{\alpha\alpha}^{n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

са определени главните кривини ν_α на S_{n-1}. В елиптична точка те имат еднакви знаци, в хиперболична точка - различни знаци, а в параболична точка някои от тях са равни на нула [5].

Нормалната кривина ν в точка x на дадена линия c върху S_{n-1} и главните кривини ν_α ($\alpha = 1, \ldots, n-1$) на S_{n-1} в същата точка са свързани с равенството

$$(3.14) \qquad \nu = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2 \varphi_\alpha ,$$

където φ_α ($\alpha = 1, \ldots, n-1$) са ъглите между тангентата на линията c и главните направления на S_{n-1}.

Величината

$$(3.15) \qquad K = (-1)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha$$

се нарича пълна кривина на хиперповърхнината S_{n-1} в точка x .

Тези и други факти от диференциалната геометрия на хиперповърхнина в E_n могат да се намерят също така в [15] .

Да означим с K_N^m множеството от всички m -мерни допирателни равнини τ_m на S_{n-1} , където $1 \leqq m \leqq n-2$. Произволна m -мерна допирателна равнина τ_m на S_{n-1} в допирателната хиперравнина τ_{n-1} е определена с допирната точка x и още m линейно независими точки, които изискват $m(n-1)$ координати. От друга страна, всяка точка от τ_m има m степени на свобода и следователно

$$N = \dim K_N^m = m(n-1) - m^2 + n - 1 = (m+1)(n-m) - 1.$$

С всяка m -равнина τ_m свързваме семейство от ортонормирани репери $y e_1 \ldots e_n$, които определяме по следния начин: началото y съвпада с допирната точка x , координатните вектори e_p ($p = 1, \ldots, m$) са компланарни с τ_m , а e_n съвпада с единичния вектор f_n върху нормалата на хиперповърхнината в точка x .

Нека деривационните уравнения на $y e_1 \ldots e_n$ са (1.3), а относителните компоненти ω^i , ω_j^x удовлетворяват (1.4) и (1.5). От условието $y = x$, $e_n = f_n$ и (3.3) следва

$$\omega^n = 0. \tag{3.16}$$

Да разгледаме диференциалната N - форма

$$d\tau_m = \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \omega^\varrho \wedge \bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\varepsilon=m+1}^{n} \omega_p^\varepsilon . \tag{3.17}$$

Тя е инвариантна относно групата на движенията в E_n . Ще покажем, че не зависи и от избора на репера $y e_1 \ldots e_n$. Нека $\bar{y} \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n$ е друг репер, за който векторите $\bar{e}_p$ ($p = 1, \ldots, m$)

са компланарни с τ_m , а $\bar{e}_n = f_n$. Тогава

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= y + \sum_{q=1}^{m} \mu_q e_q ,\\
\bar{e}_p &= \sum_{q=1}^{m} a_p^q e_q \quad (p = 1, \dots, m),\\
\bar{e}_\rho &= \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} b_\rho^\sigma e_\sigma \quad (\rho = m+1, \dots, n-1),\\
\bar{e}_n &= e_n ,
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

където (a_p^q) и (b_ρ^σ) са съответно $(m \times m)$ и $((n-m-1)\times(n-m-1))$-ортогонални матрици. Пресмятаме

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}_p^\rho &= d\bar{e}_p . \bar{e}_\rho = \Big(\sum_{q=1}^{m} da_p^q e_q + \sum_{q=1}^{m} a_p^q de_q\Big) \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} b_\rho^\sigma e_\sigma \\
&= \sum_{q=1}^{m} a_p^q de_q \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} b_\rho^\sigma e_\sigma \\
&= \sum_{q=1}^{m} \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} a_p^q b_\rho^\sigma (de_q e_\sigma) = \sum_{q=1}^{m} \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} a_p^q b_\rho^\sigma \omega_q^\sigma .
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
\bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\rho=m+1}^{n-1} \bar{\omega}_p^\rho &= [\det(a_p^q)]^{n-m-1} [\det(b_\rho^\sigma)]^m \bigwedge_{q=1}^{m} \bigwedge_{\sigma=m+1}^{n-1} \omega_q^\sigma \\
&= \pm \bigwedge_{q=1}^{m} \bigwedge_{\sigma=m+1}^{n-1} \omega_q^\sigma .
\end{aligned}
$$

Аналогично

$$\overline{\omega}^{\varrho} = d\overline{y}.\overline{e}_{\varrho} = \Big(dy + \sum_{q=1}^{m} d\mu_q e_q + \sum_{q=1}^{m} \mu_q de_q\Big) \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} b_{\varrho}^{\sigma} e_{\sigma}$$

$$= \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} b_{\varrho}^{\sigma} \omega^{\sigma} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{\sigma=m+1}^{n-1} (\ldots)\, \omega_q^{\sigma},$$

$$\overline{\omega}_p^{n} = \omega_p^{n}.$$

Тогава

$$\bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \overline{\omega}^{\varrho} \wedge \bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\varepsilon=m+1}^{n} \overline{\omega}_p^{\varepsilon} = \det(b_{\varrho}^{\sigma}) \bigwedge_{\sigma=m+1}^{n-1} \omega^{\sigma} \wedge \bigwedge_{q=1}^{m} \bigwedge_{\delta=m+1}^{n} \omega_q^{\delta}$$

(3.19)

$$= \pm \bigwedge_{\sigma=m+1}^{n-1} \omega^{\sigma} \wedge \bigwedge_{q=1}^{m} \bigwedge_{\delta=m+1}^{n} \omega_q^{\delta}.$$

Полученият резултат (3.19) показва, че диференциалната N -форма (3.17) не зависи и от избрания репер. Ще е наричаме гъстота на допирателните m -равнини τ_m на S_{n-1}.

Ще намерим друго представяне на гъстотата (3.17), като използваме някои от инвариантите на хиперповърхнината S_{n-1}. Нека

(3.20) $$e_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_{\alpha}^{\beta} f_{\beta} \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1),$$

където (a_{α}^{β}) е $((n-1)\times(n-1))$ -ортогонална матрица и $\det(a_{\alpha}^{\beta})=1$. Ако диференцираме равенствата

$$y = x, \quad e_p = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_p^{\beta} f_{\beta} \qquad (p = 1, \ldots, m),$$

използваме (1.3), (3.20) и сравним коефициентите пред f_{α}, получаваме системата

$$\sum_{\gamma=1}^{n-1} a_\gamma^\alpha \omega^\gamma = \psi^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n-1),$$

(3.21)
$$\sum_{s=2}^{n-1} a_s^\alpha \omega_p^s = da_p^s + \sum_{\beta=1}^{n-1} a_p^\beta \psi_\beta^\alpha,$$

$$\omega_p^n = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_p^\alpha \psi_\alpha^n \quad (p = 1, \dots, m).$$

Оттук, като използваме някои свойства на матрицата (a_α^β), намираме

$$\omega^\varrho = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_\varrho^\alpha \psi^\alpha \quad (\varrho = m+1, \dots, n-1),$$

(3.22)
$$\omega_p^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(da_p^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-1} a_p^\beta \psi_\beta^\alpha \right) a_s^\alpha$$

$$(s = 2, \dots, n-1;\ p = 1, \dots, m),$$

$$\omega_p^n = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_p^\alpha \psi_\alpha^n .$$

Означаваме

(3.23)
$$\varphi = \bigwedge_{p=1}^{m} \omega_p^n \wedge \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \omega^\varrho ,$$

(3.24)
$$\psi = \bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \omega_p^\varrho .$$

Очевидно, външното произведение $\varphi \wedge \psi$ е равно (с точност до знак) на (3.17). Като използуваме (3.4), (3.13) и (3.22) за диференциалната форма φ, получаваме

$$(3.25)\quad \varphi = (-1)^m \begin{vmatrix} a_1^1 v_1 & a_1^2 v_2 & \dots & a_1^{n-1} v_{n-1} \\ \hdashline a_m^1 v_1 & a_m^2 v_2 & \dots & a_m^{n-1} v_{n-1} \\ a_{m+1}^1 & a_{m+1}^2 & \dots & a_{m+1}^{n-1} \\ \hdashline a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} . dS_{n-1}$$

където диференциалната ($n-1$)-форма

$$(3.26)\qquad dS_{n-1} = \bigwedge_{\alpha=1}^{n-1} \psi^\alpha$$

е лицевият елемент на хиперповърхнината S_{n-1} [17] . Пресмятаме детерминантата в (3.25) по правилото на Лаплас. Намираме

$$(3.27)\qquad \varphi = (-1)^m \Big[\sum_{\pi} \big(\Delta_{i_1 \dots i_m} \Delta'_{i_1 \dots i_m} v_{i_1} \dots v_{i_m} \big) \Big] dS_{n-1},$$

където $\Delta_{i_1 \dots i_m}$ е минорът

$$\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \dots & a_1^{i_m} \\ a_2^{i_1} & a_2^{i_2} & \dots & a_2^{i_m} \\ \hdashline a_m^{i_1} & a_m^{i_2} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}$$

а $\Delta'_{i_1 \dots i_m}$ - адюнгираното му количество. Сумирането в (3.27) се извършва по всички наредени пермутации π , т.е. пермутациите, за които $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Очевидно в сумата се съдържат $\binom{n-1}{m}$ събираеми.

Да намерим ново представяне и за (3.24). Записваме второто равенство на (3.22) във вида

$$\omega_p^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_s^\alpha\, da_p^\alpha + \ldots \tag{3.28}$$

$$(p = 1, \ldots, m\ ;\ s = 2, \ldots, n-1),$$

където сме пропуснали събираемите, които съдържат диференциалните форми ψ_β^α . Тези диференциални форми, съгласно (3.4), се изразяват посредством главните форми ψ^α $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$, чието външно произведение се съдържа в (3.27). Тогава

$$\psi = \bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_\varrho^\alpha\, da_p^\alpha + \ldots \Big). \tag{3.29}$$

От (3.27) и (3.29) за гъстотата на допирателните m -мерни равнини τ_m на S_{n-1} получаваме формулата

$$d\tau_m = \Big| \sum_{\pi} (\Delta_{i_1 \ldots i_m} \Delta'_{i_1 \ldots i_m} \nu_{i_1} \ldots \nu_{i_m}) \bigwedge_{p=1}^{m} \bigwedge_{\varrho=m+1}^{n-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_\varrho^\alpha\, da_p^\alpha \Big) \wedge dS_{n-1} \Big|, \tag{3.30}$$

в която се съдържат лицевият елемент dS_{n-1} на хиперповърхнината S_{n-1} и m -тата симетрична функция на главните кривини $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$.

§4. Интегрални мерки на множества от тангенти и $(n-2)$-мерни допирателни равнини на хиперповърхнина

В този параграф, като използваме получените резултати в §3, намираме интегралните мерки на множествата от тангенти и $n-2$ -мерни допирателни равнини на хиперповърхнина, която се състои от елиптични точки. Получаваме израз за гъстотата на нормалите на хиперповърхнината и пресмятаме интегралната мярка на тяхното множество.

Ще направим приложение на резултатите от §3, като разгледаме някои конкретни случаи, които са интересни от геометрична гледна точка.

1. Нека $m = 1$. Тогава $N=2n-3$ и множеството K_N^1 от §3 (което сега ще означаваме с K_{2n-3}^1) се състои от тангенти G_τ на хиперповърхнината S_{n-1}. Съгласно доказаното, гъстотата на тангентите G_τ се задава с формулата

$$(4.1)\qquad dG_\tau = \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega^s \wedge \bigwedge_{w=2}^{n} \omega_1^w ,$$

където

$$\omega^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_s^\alpha \varphi^\alpha \qquad (s=2,\dots,n-1),$$

$$(4.2)\qquad \omega_1^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big(da_1^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-1} a_1^\beta \varphi_\beta^\alpha\Big) a_s^\alpha ,$$

$$\omega_1^n = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_1^\alpha \varphi_\alpha^n .$$

От (3.23) и (3.27), (3.24) и (3.29), при $m = 1$, получаваме съответно

$$\varphi = \omega_1^n \wedge \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega^s = -\sum_{\alpha=1}^{n-1} [(a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha] . dS_{n-1},$$

(4.3)

$$\psi = \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega_1^s = \bigwedge_{s=2}^{n-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_s^\alpha da_1^\alpha + \dots \Big).$$

Тогава

$$(4.4) \qquad dG_\tau = \Big| \sum_{\alpha=1}^{n-1} (a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha . \bigwedge_{s=2}^{n-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_s^\alpha da_1^\alpha \Big) \wedge dS_{n-1} \Big| .$$

Записваме второто равенство на (4.2) във вида

$$(4.5) \qquad \omega_1^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_s^\alpha da_1^\alpha + \dots \quad (s = 2, \dots, n-1).$$

От

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_1^\alpha da_1^\alpha = 0$$

следва равенството

$$da_1^{n-1} = -\frac{1}{a_1^{n-1}} \sum_{u=1}^{n-2} a_1^u da_1^u ,$$

което заместено в (4.5) дава

$$\omega_1^s = \sum_{u=1}^{n-2} \Big(a_s^u - \frac{a_s^{n-1}}{a_1^{n-1}} a_1^u \Big) da_1^u + \dots$$

$$(s = 2, \dots, n-1).$$

Тогава

$$\Psi = \det\left(a_s^u - \frac{a_s^{n-1}}{a_1^{n-1}} a_1^u\right) \bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u + \dots$$

и съгласно лема 2.1, получаваме

$$\Psi = \frac{(-1)^n}{a_1^{n-1}} \bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u + \dots$$

Следователно

$$dG_\tau = \left| \frac{1}{a_1^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[(a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha \right] \bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u \wedge dS_{n-1} \right| . \tag{4.6}$$

Като използваме горната формула за гъстотата на тангентите G_τ , ще докажем следната теорема

Теорема 4.1. Ако хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки, мярката μ_1 на множеството K_{2n-3}^1 от тангенти G_τ на S_{n-1} е равна на полупроизведението от интегралната кривина от ред 1 на хиперповърхнината и лицето на единичната $(n-2)$-мерна сфера в E_n .

Доказателство. Понеже хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки, всички главни кривини ν_α ($\alpha = 1,\dots,n-1$) са различни от 0 и имат еднакъв знак. Без ограничение на общността можем да предположим, че $\nu_\alpha > 0$. Нека

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \cos\theta_1 , \\ a_1^2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 , \\ &\text{- - - - - - - - - -} \\ a_1^{n-2} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} , \\ a_1^{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} , \end{aligned} \tag{4.7}$$

където

$$(4.8) \qquad 0 < \theta_\lambda < \pi \quad (\lambda = 1, \dots, n-2).$$

Тогава от

$$\bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u = (-1)^{n-2} \prod_{u=1}^{n-2} (\sin\theta_u)^{n-u-1} \bigwedge_{u=1}^{n-2} d\theta_u ,$$

(4.6) и (4.7) получаваме

$$(4.9) \qquad dG_r = \Big\{ \sum_{u=1}^{n-2} \Big[\frac{\cos^2\theta_u}{\sin^2\theta_u} \prod_{l=1}^{u} (\sin\theta_l)^{n-l} \prod_{\xi=u+1}^{n-2} (\sin\theta_\xi)^{n-\xi-2} \nu_u \Big] + \prod_{v=1}^{n-2} (\sin\theta_v)^{n-v} \nu_{n-1} \Big\} \bigwedge_{u=1}^{n-2} d\theta_u \wedge dS_{n-1}.$$

За да получим интегралната мярка μ_1 на множеството K^1_{2n-3} интегрираме двете страни на (4.9), като се съобразяваме с (4.8). Пресмятаме

$$\mu_1 = \int_{(K^1_{2n-3})} N(G_r)\, dG_r = \int_{(S_{n-1})} \Big\{ \int_0^\pi \Big\{ \sum_{u=1}^{n-2} \Big[\frac{\cos^2\theta_u}{\sin^2\theta_u} \prod_{l=1}^{u} (\sin\theta_l)^{n-l} \prod_{\xi=u+1}^{n-2} (\sin\theta_\xi)^{n-\xi-2} \nu_u \Big]$$

$$(4.10) \qquad + \prod_{v=1}^{n-2} (\sin\theta_v)^{n-v} \nu_{n-1} \Big\} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \Big\} dS_{n-1}$$

$$= \int_{(S_{n-1})} \Big\{ \nu_1 \int_0^\pi (\sin\theta_1)^{n-3} \cos^2\theta_1\, d\theta_1 \int_0^\pi (\sin\theta_2)^{n-4} d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin\theta_{n-3}\, d\theta_{n-3} \int_0^\pi d\theta_{n-2}$$

$$+ \nu_2 \int_0^\pi (\sin\theta_1)^{n-1} d\theta_1 \int_0^\pi (\sin\theta_2)^{n-4} \cos^2\theta_2\, d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin\theta_{n-3}\, d\theta_{n-3} \int_0^\pi d\theta_{n-2}$$

- -

$$+ \nu_{n-2} \int_0^{\pi} (\sin\theta_1)^{n-1} d\theta_1 \int_0^{\pi} (\sin\theta_2)^{n-2} d\theta_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^3\theta_{n-3}\, d\theta_{n-3} \int_0^{\pi} \cos^2\theta_{n-2} d\theta_{n-2}$$

$$+ \nu_{n-1} \int_0^{\pi} (\sin\theta_1)^{n-1} d\theta_1 \int_0^{\pi} (\sin\theta_2)^{n-2} d\theta_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^3\theta_{n-3}\, d\theta_{n-3} \int_0^{\pi} \sin^2\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \Big\} dS_{n-1}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{(S_{n-1})} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha\Big) dS_{n-1} .$$

Интегрална кривина от ред r на хиперповърхнината S_{n-1} се нарича израза [29]

$$(4.11) \qquad M_r^{n-1} = (C_{n-1}^{r})^{-1} \int_{(S_{n-1})} \Sigma_r \, dS_{n-1} ,$$

където Σ_r е симетричният полином от степен r на главните кривини ν_α ($\alpha = 1,\dots,n-1$) на S_{n-1}. От (2.17), (4.10) и (4.11) получаваме

$$(4.12) \qquad \mu_1 = \frac{1}{2} O_{n-2} M_1^{n-1} ,$$

с което теоремата е доказана.

Нека $n = 3$. Ще разгледаме случаите, когато повърхнината S_2 се състои от параболични или елиптични точки.

а. Ако повърхнината S_2 се състои от параболични точки, можем да приемем, че $\nu_1 = 0$, $\nu_2 > 0$. Тогава

$$(4.13) \qquad \mu_1 = \frac{\pi}{2} \int_{(S_2)} \nu_2 \, dS_2 .$$

б. Ако повърхнината S_2 се състои от хиперболични точки, главните кривини ν_1 и ν_2 имат различни знаци. Нека $\nu_1 > 0$, $\nu_2 < 0$. От

$$(4.14) \qquad dG_\tau = |\nu_1 \cos^2\theta_1 + \nu_2 \sin^2\theta_1| d\theta_1 \wedge dS_2 ,$$

като имаме предвид

$$\int_0^{\pi} |\nu_1\cos^2\theta_1 + \nu_2\sin^2\theta_1| d\theta_1 = \int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}} (\nu_1\cos^2\theta_1 + \nu_2\sin^2\theta_1)\, d\theta_1$$

$$- \int_{\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}}^{\frac{\pi}{2}} (\nu_1\cos^2\theta_1 + \nu_2\sin^2\theta_1) d\theta_1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}\right)} (\nu_1\cos^2\theta_1 + \nu_2\sin^2\theta_1)\, d\theta_1$$

$$+ \int_{\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}\right)}^{\pi} (\nu_1\cos^2\theta_1 + \nu_2\sin^2\theta_1)\, d\theta_1 = \pi H - 2\sqrt{-K} + 2H\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}} - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}\right)\right],$$

за мярката μ_1 , получаваме

$$(4.15) \quad \mu_1 = \int_{(S_2)} \left\{\pi H - 2\sqrt{-K} + 2H\left[\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}} - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{-\frac{\nu_1}{\nu_2}}\right)\right]\right\} dS_2 .$$

Тук H и K са съответно средната и гаусовата кривина на S_2 .

2. Нека $m = n-2$. Когато тангентата G_τ на S_{n-1} описва множеството K^1_{2n-3} , нейното ортогонално допълнение в тангенциалната хиперравнина τ_{n-1} ще опише множеството K^{n-2}_{2n-3} на допирателните $(n-2)$-мерни равнини τ_{n-2}. Очевидно множеството K^{n-2}_{2n-3} зависи също от $2n-3$ параметъра.

С всяка равнина $\tau_{n-2} \in K^{n-2}_{2n-3}$ свързваме ортонормиран репер $y e_1 \dots e_n$, за който началото y съвпада с допирната точка $x \in S_{n-1}$, векторите $e_2 , \dots , e_{n-1}$ са компланарни с τ_{n-2} , а $e_n = f_n$. Нека деривационните уравнения на избрания репер са (1.3), като относителните компоненти ω^i , ω_j^k (i , j , $k = 1,\ldots,n$) удовлетворяват структурните уравнения на пространството E_n и равенствата (1.5).

Съгласно разглежданията в §3, равнините τ_{n-2} притежават гъстота, която се задава с диференциалната ($2n-3$)-форма

$$d\tau_{n-2} = \omega^1 \wedge \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega_1^s \wedge \bigwedge_{t=2}^{n-2} \omega_n^t . \tag{4.16}$$

В тангенциалната хиперравнина τ_{n-1} в точката $y = x \in S_{n-1}$ построихме два ортонормирани репера: $x f_1 \ldots f_{n-1}$ и $y e_1 \ldots e_{n-1}$. Нека

$$\begin{gathered} e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_\alpha^\beta f_\beta , \\ f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_\beta^\alpha e_\beta \\ (\alpha = 1,\ldots, n-1), \end{gathered} \tag{4.17}$$

са трансформационните формули. Както постъпихме в §3, пресмятаме

$$\omega^1 = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_1^\beta \psi^\beta ,$$

$$\begin{gathered} \omega_1^s = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big(da_1^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-1} a_1^\beta \psi_\beta^\alpha\Big) a_s^\alpha , \\ \omega_n^t = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_t^\alpha \psi_n^\alpha \\ (s, t = 2,\ldots, n-1). \end{gathered} \tag{4.18}$$

Но

$$\psi_n^\alpha = -\psi_\alpha^n = -\lambda_{\alpha\alpha}^n \psi^\alpha = \nu_\alpha \psi^\alpha$$

и следователно

$$\omega_n^t = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_t^\alpha \nu_\alpha \psi^\alpha \qquad (t=2,\dots,n-1).$$

Тогава

$$(4.19) \qquad \omega^1 \wedge \bigwedge_{t=2}^{n-1} \omega_n^t = \sum_{\alpha=1}^{n-1} [(a_1^\alpha)^2 \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta]\, dS_{n-1}.$$

В т.1 на този параграф пресметнахме

$$(4.20) \qquad \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega_1^s = \frac{(-1)^n}{a_1^{n-1}} \bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u + \dots$$

Като заместим (4.19) и (4.20) в (4.16), намираме

$$(4.21) \qquad d\tau_{n-2} = \left|\frac{1}{a_1^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^{n-1} [(a_1^\alpha)^2 \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta] \bigwedge_{u=1}^{n-2} da_1^u\right| \wedge dS_{n-1},$$

откъдето, като използуваме сферичните координати (4.7), получаваме

$$(4.22) \qquad d\tau_{n-2} = \Big|\sum_{u=1}^{n-2} [\frac{\cos^2\theta_u}{\sin^2\theta_u} \prod_{l=1}^{u} (\sin\theta_l)^{n-l} \prod_{\xi=u+1}^{n-2} (\sin\theta_\xi)^{n-\xi-2} \prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq u}}^{n-1} \nu_\alpha]$$

$$+ \prod_{u=1}^{n-2} (\sin\theta_u)^{n-u} \nu_u \Big| \bigwedge_{u=1}^{n-2} d\theta_u \wedge dS_{n-1}.$$

Да допуснем, че хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки. Тогава за интегралната мярка

$$M_{n-2} = \int_{(K_{2n-3}^{n-2})} N(\tau_{n-2})\, d\tau_{n-2}$$

на множеството K_{2n-3}^{n-2} получаваме

$$(4.23) \qquad \mu_{n-2} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int\limits_{(S_{n-1})} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big(\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta \Big)\, dS_{n-1} .$$

Пресмятането на интеграла от дясната страна на равенството (4.22) се извършва, както в (4.10). Като вземем предвид (2.17) и (4.11), за (4.23) намираме

$$(4.24) \qquad \mu_{n-2} = \frac{1}{2}\, O_{n-2}\, M_{n-2}^{n-1} .$$

Така доказахме следната теорема:

Теорема 4.2. Ако хиперповърхнината S_{n-1} се състои от елиптични точки, мярката μ_{n-2} на множеството K_{2n-3}^{n-2} от $(n-2)$-мерни допирателни равнини τ_{n-2} на S_{n-1} е равна на полупроизведението от интегралната кривина от ред $n-2$ на хиперповърхнината и лицето на $(n-2)$-мерната единична сфера в E_n .

3. Да означим с ${}^{\perp}K_{n-1}^{1}$ множеството от нормалите G_n на хиперповърхнината S_{n-1} . То зависи от $n-1$ параметъра. С всяка права $G_n \in {}^{\perp}K_{n-1}^{1}$ свързваме семейство от ортонормирани репери $y e_1 \ldots e_n$, за които началото y съвпада с пресечната точка x на G_n и S_{n-1}, а векторът e_n е колинеарен с G_n и съвпада с f_n . Нека относителните компоненти на разглеждания репер са ω^i , ω_j^k $(i, j, k = 1,\ldots,n)$.

Диференциалната $(n-1)$-форма

$$(4.25) \qquad dG_n = \bigwedge_{\alpha=1}^{n-1} \omega_n^\alpha$$

е инвариантна относно движенията в E_n . С непосредствена проверка, така както постъпвахме досега, се установява, че тя не зависи и от избора на придружаващия репер. Следователно, (4.25) може да се вземе за гъстота на нормалите G_n. Мярката на множеството ${}^{\perp}K^{1}_{n-1}$ от нормали G_n на S_{n-1} се задава с интеграла

$$(4.26)\qquad \mu = \int_{({}^{\perp}K^{1}_{n-1})} N(G_n)\, dG_n .$$

Торема 4.3. Мярката μ на множеството ${}^{\perp}K^{1}_{n-1}$ от нормали G_n на хиперповърхнината S_{n-1} се изразява с формулата

$$(4.27)\qquad \mu = \int_{(S_{n-1})} |K|\, dS_{n-1} ,$$

където K е пълната кривина на S_{n-1}.

Доказателство. Нека

$$(4.28)\qquad e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-1} a_\alpha^\beta f_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots , n-1),$$

където (a_α^β) е $((n-1)\times(n-1))$-ортогонална матрица. Като диференцираме двете страни на равенството $e_n = f_n$ и използваме (4.28), получаваме

$$\omega_n^\alpha = -\sum_{\beta=1}^{n-1} a_\alpha^\beta \psi_\beta^n .$$

Тогава

$$\bigwedge_{\alpha=1}^{n-1} \omega_n^\alpha = (-1)^{n-1} \bigwedge_{\beta=1}^{n-1} \psi_\beta^n .$$

Но

$$\psi_\beta^n = -\nu_\beta \psi^\beta$$

и следователно

$$dG_n = \left| \prod_{\beta=1}^{n-1} \nu_\beta \right| dS_{n-1}. \tag{4.29}$$

От (4.29) и (3.15) получаваме равенството

$$dG_n = |K|\, dS_{n-1}, \tag{4.30}$$

от което (с интегриране на двете му страни) следва (4.26).

Част от резултатите, които изложихме в този параграф са публикувани в [35] (при n = 4 в [34]).

§5. Приложение за изпъкнали тела

В този параграф намираме нови изрази за дефинираните в §4 гъстоти, които използуваме при получаването на интегрални формули, свързани с граничната хиперповърхнина на n -мерно изпъкнало тяло.

Ще приведем някои основни сведения за изпъкналите тела и техните граници. Те могат да се намерят в [12] .

Едно пространствено точково множество образува изпъкнало тяло, ако е ограничено и затворено и заедно с всеки две свои точки съдържа и цялата отсечка, определена от тях.

Една точка се нарича вътрешна за изпъкналото тяло, ако съществува кълбо с ненулев радиус и с център в дадената точка, което изцяло се съдържа в тялото.

Точките на изпъкналото тяло, които не са вътрешни, се наричат гранични. Множеството от граничните точки се нарича изпъкнала граница или гранична повърхнина на изпъкналото тяло.

Ние ще разглеждаме само n -мерни изпъкнали тела, които притежават гладка гранична хиперповърхнина. Тя се състои само от елиптични точки и следователно главните ѝ кривини $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ имат постоянен знак (вж. напр. [29]). Без да ограничаваме общността на разглежданията, ще предполагаме, че нормалата на граничната хиперповърхнина е ориентирана така, че главните кривини са положителни.

Нека S_n е изпъкнало n -мерно тяло с гладка гранична хиперповърхнина S_{n-1} . От §4 знаем, че гъстотата на тангентите $G_\tau \in K^1_{2n-3}$ на S_{n-1} се задава с (4.1). С разместване на външните множители, формулата (4.1) може да се запише във вида

$$(5.1)\qquad dG_{\tau} = \omega_1^n \wedge \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega^s \wedge \bigwedge_{t=2}^{n-1} \omega_1^t .$$

Забележка. Понеже всички гъстоти ще вземаме по абсолютна стойност, при разместването на външните множители в различните външни произведения няма да уточняваме знаците.

От (4.3) имаме

$$(5.2)\qquad \omega_1^n \wedge \bigwedge_{s=2}^{n-1} \omega^s = -\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[(a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha \right] dS_{n-1} = \left(-\sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2\varphi_\alpha\right) . dS_{n-1}$$

където φ_α са ъглите, които сключва тангентата G_τ с главните тангенти на S_{n-1} .

От друга страна е известно [10] , че с диференциалната ($n-2$)-форма

$$(5.3)\qquad d\sigma_{n-2} = \bigwedge_{t=2}^{n-1} \omega_1^t$$

се задава лицевият елемент $d\sigma_{n-2}$ на ($n-2$)-мерната единична сфера σ_{n-2} в τ_{n-1} , съответна на втория край на вектора e_1 . Така получаваме

$$(5.4)\qquad dG_\tau = \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2\varphi_\alpha \right) . d\sigma_{n-2} \wedge dS_{n-1} .$$

Но съгласно (3.14)

$$(5.5)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2\varphi_\alpha = \nu\,(G_\tau)$$

и следователно

$$(5.6) \qquad dG_\tau = \nu(G_\tau) . d\sigma_{n-2} \wedge dS_{n-1} .$$

По същия начин, като използваме (4.19) и (5.3), за израза (4.16) на гъстотата на ($n-2$)-мерните допирателни равнини намираме

$$(5.7) \qquad d\tau_{n-2} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big[\cos^2\varphi_\alpha \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta \Big] d\sigma_{n-2} \wedge dS_{n-1} .$$

От (5.4) и (5.7) следва формулата

$$(5.8) \qquad \frac{dG_\tau}{\sum_{\alpha=1}^{n-1} \nu_\alpha \cos^2\varphi_\alpha} = \frac{d\tau_{n-2}}{\sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n-1} \nu_\beta \cos^2\varphi_\alpha \Big]}$$

която показва връзката между разглежданите гъстоти dG_τ и $d\tau_{n-2}$.

Горното равенство (5.8) ни навежда на мисълта, че знаменателят в дясната му страна, който е свързан с τ_{n-2} , е в известен смисъл аналог на нормалната кривина $\nu(G_\tau)$ на тангентата G_τ . Означаваме го с $\nu(\tau_{n-2})$ и ще го наричаме нормална кривина на ($n-2$)-мерната допирателна равнина τ_{n-2} в точката $x \in S_{n-1}$.

Записваме (5.6) във вида

$$(5.9) \qquad \frac{1}{\nu(G_\tau)} dG_\tau = d\sigma_{n-2} \wedge dS_{n-1}$$

и интегрираме над множеството K^1_{2n-3} от всички тангенти G_τ на S_{n-1} . Имаме

$$(5.10) \qquad \int_{(K^1_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)} dG_\tau = \int_{(\frac{1}{2}\sigma_{n-2})} d\sigma_{n-2} \int_{(S_{n-1})} dS_{n-1} .$$

Интеграционната област на първия интеграл в дясната страна на (5.10) е $\frac{1}{2}\sigma_{n-2}$ понеже правите G_τ са неориентирани. Поради това, когато в τ_{n-1} тангентата G_τ описва снопа прави с център $y=x$, вторият край на вектора e_1 ще опише $\frac{1}{2}\sigma_{n-2}$. Тогава

$$(5.11) \qquad \int\limits_{(K^1_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)} dG_\tau = \frac{1}{2} O_{n-2} A ,$$

където с A сме означили лицето на S_{n-1}.

От (5.7) следва

$$(5.7') \qquad \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})} d\tau_{n-2} = d\sigma_{n-2} \wedge dS_{n-1} .$$

Интегрираме двете страни на (5.7') над множеството K^{n-2}_{2n-3} от всички допирателни равнини, като помним, че те са неориентирани. Получаваме

$$(5.12) \qquad \int\limits_{(K^{n-2}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})} d\tau_{n-2} = \frac{1}{2} O_{n-2} A .$$

Като съпоставим (5.11) и (5.12), намираме

$$(5.13) \qquad \int\limits_{(K^1_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)} dG_\tau = \int\limits_{(K^{n-2}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})} d\tau_{n-2} .$$

Да разгледаме множеството ${}^\perp K^1_{n-1}$ от нормалите G_n на S_{n-1}. Гъстотата на G_n се изразява с формулата

$$(5.14) \qquad dG_n = K\, dS_{n-1} .$$

Да интегрираме (5.14) над множеството ${}^\perp K^1_{n-1}$. Понеже S_{n-1} е граница на изпъкнало тяло, то $N(G_n)=2$ и следователно

$$\int_{(^{\perp}K^{1}_{n-1})} dG_n = \frac{1}{2}\int_{(S_{n-1})} K\,dS_{n-1}. \tag{5.15}$$

От друга страна [29]

$$\int_{(S_{n-1})} K\,dS_{n-1} = \int_{(\sigma_{n-1})} d\sigma_{n-1} = O_{n-1}$$

и следва, че

$$\int_{(^{\perp}K^{1}_{n-1})} dG_n = \frac{1}{2} O_{n-1}. \tag{5.16}$$

Като запишем (5.14) във вида

$$\frac{1}{K}\,dG_n = dS_{n-1} \tag{5.14'}$$

и интегрираме, намираме

$$\int_{(^{\perp}K^{1}_{n-1})} \frac{1}{K}\,dG_n = \frac{1}{2} A. \tag{5.17}$$

От (5.11), (5.12) и (5.17) получаваме интегралните формули

$$\begin{aligned} &\int_{(K^{1}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)}\,dG_\tau = O_{n-2}\int_{(^{\perp}K^{1}_{n-1})} \frac{1}{K}\,dG_n, \\ &\int_{(K^{n-2}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})}\,d\tau_{n-2} = O_{n-2}\int_{(^{\perp}K^{1}_{n-1})} \frac{1}{K}\,dG_n. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Нека M_q е q -мерно компактно многообразие в E_n, а $G(n,k)$ е Грасмановото многообразие на k -равнините L_k.

Ако

$$\kappa + q - n \geqq 0,$$

известна е интегралната формула [17] :

$$(5.19) \quad \int\limits_{(G(n,\kappa))} V_{\kappa+q-n}(L_\kappa \cap M_q)\, \mathcal{G}(n,\kappa) = \frac{O_n \dots O_{n-\kappa}\, O_{\kappa+q-n}}{O_0 O_1 \dots O_\kappa O_q} V_q(M_q),$$

където $\mathcal{G}(n,\kappa)$ е гъстотата на κ -равнините L_κ в E_n , а $V_{\kappa+q-n}(L_\kappa \cap M_q)$ и $V_q(M_q)$ са обемите съответно на $(\kappa+q-n)$-мерното сечение $L_\kappa \cap M_q$ и многообразието M_q . Когато

$$\kappa + q - n = 0,$$

величината $V_{\kappa+q-n}(L_\kappa \cap M_q)$ е равна на броя на общите точки на L_κ и M_q .

Нека M_q е границата S_{n-1} на n -мерното изпъкнало гладко тяло S_n . Когато κ = 1, от (5.19) се получава мярката на множеството $G(n,1)$ от прави $L_1 = G_S$, които пробождат S_{n-1} . В този случай

$$V_0(G_S \cap S_{n-1}) = 2$$

и от (5.19) следва

$$(5{,}19') \quad \int\limits_{(G_S \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} dG_S = \frac{1}{2} \frac{O_n}{O_1} A .$$

От (5.11), (5.17) и (5.19') следват интегралните формули

$$(5.20) \quad \int\limits_{(G_S \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} dG_S = \frac{O_n}{O_1 O_{n-2}} \int\limits_{(K^1_{2n-3})} \frac{1}{\nu(G_\tau)} dG_\tau ,$$

$$(5.21) \qquad \int\limits_{(G_5 \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} dG_5 = \frac{O_n}{O_1} \int\limits_{({}^{\perp}K^1_{n-1})} \frac{1}{k}\, dG_n$$

които изразяват мярката на множеството от секанти G_5 на S_{n-1} чрез интеграли върху множествата K^1_{2n-3} и ${}^{\perp}K^1_{n-1}$ от тангенти G_τ и нормали G_n на S_{n-1}.

Аналогично, при $k = n-2$ следва формулата

$$(5.19'') \qquad \int\limits_{(L_{n-2} \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} V_{n-3}(L_{n-2} \cap S_{n-1})\, \mathcal{G}(n, n-2) = \frac{O_n O_{n-3}}{O_0\, O_1} A,$$

от която, като вземем предвид (5.12), получаваме

$$(5.22) \qquad \int\limits_{(L_{n-2} \cap S_{n-1} \neq \emptyset)} V_{n-3}(L_{n-2} \cap S_{n-1})\, \mathcal{G}(n, n-2) = \frac{O_n O_{n-3}}{O_1\, O_{n-2}} \int\limits_{(K^{n-2}_{2n-3})} \frac{1}{\nu(\tau_{n-2})} d\tau_{n-2}$$

Да разгледаме в E_3 овалоид S_3, за който началото O на координатната система е вътрешна точка. Нека

$$x \cos\varphi \sin\theta + y \sin\varphi \sin\theta + z \cos\theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

е нормалното уравнение на тангенциалната равнина на границата S_2 в някаква точка $Q(\theta, \varphi)$. Функцията $p = p(\theta, \varphi)$ се нарича опорна функция на овалоида [24] (или [12], [31]).

В [24] Х. Минковски доказва, че ако H е средната кривина на границата S_2, то

$$(5.23) \qquad \int\limits_{(\sigma_2)} p\, d\sigma_2 = \int\limits_{(S_2)} H\, dS_2,$$

където σ_2 е единичната сфера с център O.

От (4.12) следва, че мярката μ_1 на множеството K^1_3 от тангенти G_τ на S_2 се изразява с формулата

$$\int_{(K_3^1)} dG_\tau = \pi \int_{(S_2)} H\, dS_2, \tag{5.24}$$

от която и (5.23), получаваме

$$\int_{(K_3^1)} dG_\tau = \pi \int_{(\sigma_2)} p\, d\sigma_2. \tag{5.25}$$

От друга страна, за мярката на множеството от равнини E, които секат овалоида S_3 е известно представянето [28], [31]

$$\int_{(E \cap S_3 \neq \emptyset)} dE = \int_{(\sigma_2)} p\, d\sigma_2. \tag{5.26}$$

Тогава

$$\int_{(K_3^1)} dG_\tau = \pi \int_{(E \cap S_3 \neq \emptyset)} dE . \tag{5.27}$$

Така получихме следния резултат:

Мярката на множеството от тангенти G_τ на един овалоид S_3 е равна на умножената с π мярка на множеството от равнините E, които го пресичат.

Получената интегрална формула (5.27) е показателна. Тя изразява въведена от нас мярка, за която не сме доказали свойството единственост, посредством мярка на множество от геометрични обекти, която го притежава.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Обрешков, Н. Хиперболична интегрална геометрия. Сб. БАН, 40, 1949, 1 - 46.

2. Обрешков, Н. Интегральная геометрия гиперболического пространства. Докл. БАН, Мат. С., № 2/3, 1949, 1 - 4.

3. Петканчин, Б. Диференциална геометрия. София, 1964.

4. Роговой, М. Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n -мерном пространстве. Укр. геом. сб., 5 - 6, 1968, 126 - 138.

5. Розенфельд, Б. А. Многомерные пространства. Москва, 1966.

6. Станилова, Л. Р. Изразяване на някои интегрални инварианти на крива чрез двойни итеграли върху сфера. Год. на ВТУЗ, Мат., 5, № 3, 1968/69, 93 - 99.

7. Станилов, Гр. Върху интегралната геометрия на обобщени двуосни пространства. Изв. на Мат. инст. на БАН, XI, 1970, 39 - 53.

8. Станилов, Гр. Интегральные инварианты множеств пар прямых в биаксиальном пространстве. An. st. Univ. Iași, a. Matematică, XIII, 89 - 94.

9. Станилов, Гр. Основни формули на интегралната геометрия на двуосното пространство. Изв. на Мат. инст. на БАН, X, 1969, 85 - 111.

10. Станилов, Гр., Р. Зуланке. Интегральные формулы типа Крофтона в теории конгруэнции прямых евклидова пространства. Изв. на Мат. на БАН, XI, 1970, 27 - 37.

11. Blaschke, W. Integralgeometrie 1. Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n . Paris, 1935.

12. Blaschke, W. Kreis und Kugel. Leipzig, 1916.

13. Blaschke, W. Vorlesungen über Integralgeometrie. 1. Heft,

2. Aufl. Berlin, 1936.

14. Cartan, E. Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace reglé. Bull. Soc. Math. Frace, 24, 1896, 140 - 177.

15. Cartan, E. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, 1951.

16. Chern, S.S. On integral geometry in Klein spaces. Ann. of Math., 43, 1942, 178 - 189.

17. Chern, S.S. Lectures on integral geometry. Sum. Sc. sem., Nat. Tsing Univ., 1965.

18. Chern, S.S. On the kinematic formula in the Euclidian space of n dimensions. Amer. J. Math., 74, 1952, 227 - 236.

19. Crofton, M.W. On the theory of local probability. Trans. Roy. Soc. London, 158, 1868, 181 - 199.

20. Crofton, M.W. Probability, Encyclopaedia Britanica, 9th ed., 19, 1885, 784 - 788.

21. Deltheil, R. Probabilités géométriques. Paris, 1926.

22. Herglotz, G. Geometrische Wahrscheinlichkeiten. Лекции в Göttingen, летен семестър 1933 (не публикувани).

23. Jordan, C. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. Oeuvres, 4, Paris, Gauthier - Villar et Blanchard, 1964, 337 - 339.

24. Minkowski, H. Volumen und Oberfläche. Math. Ann., 59, 1903, 447 - 495.

25. Petkantschin, B. Integralgeometrie 6. Zusammenänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raum. Hamburger Abhandlungen, 11, 1936, 249-310.

26. Poincaré, H. Calcul des probabilités. ed 2, Carré, Paris, 1912.

27. Santalo, L.A. Introduction to integral geometry. Act. Sci.

et Ind., nr. 1198, Hermann, Paris, 1953.

28. Santalo, L.A. Integral geometry. Stud. in Math., 4, 1967, 147 - 193.

29. Santalo, L.A. On the mean curvatures of a flattened convex body. Istambul ünіv., fac. mecm., A21, 3-4, 1956, 189 - 194.

30. Stanilow, Gr. Zur Integralgeometrie im euklidischen Raum E_3. Math. Nachr., 43, 1970, 181 - 183.

31. Stoka, M. Geometrie integrală. Ed. Acad. RSR, 1967.

32. Weil, A. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Act. Sci. Ind., nr.869, Paris, Hermann, 1940.

33. Weil, A. Review of the paper 7 of Chern. Math. Rev., 3, 1942, 253.

34. Борисов, А.В. Формули на Крофтон за хиперкомплекси от тангенти и двумерни допирателни равнини към хиперповърхнина в E_4. Год. на Соф. унив., Мат.фак., 66, 1971/1972, 241 - 247.

35. Борисов, А.В. Формули на Крофтон за хиперповърхнина в E_n. Год. на Соф. унив., Фак. по мат. и мех., 67, 1972/1973, 205 - 215.

36. Борисов, А.В. Интегрални формули от Крофтонов тип за крива и съвкупности от прави, пресичащи кривата I. Год. на Соф. унив., Фак. по мат. и мех., 68, 1973/1974 (под печат).

37. Борисов, А.В. Интегрални формули от Крофтонов тип за крива и съвкупности от прави, пресичащи кривата II. Год. на Соф. унив., Фак. по мат. и мех., 69, 1974/1975 (под печат).

38. Борисов, А.В. Формули на Крофтон за крива и придружаващи съвкупности от прави, пресичащи кривата. V прол. конф. на БМД, Габрово, 1976 (под печат).

39. Борисов, А.В. Интегрални формули за криви линии върху повърхнина и придружаващи конгруенции. VI прол. конф. на БМД, Варна, 1977 (под печат).