52

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Сектор "Комплексен анализ"

ДОНКА ЖЕЛЕВА ПАШКУЛЕВА

ФУНКЦИИ С ПОЛОЖИТЕЛНА РЕАЛНА ЧАСТ И ПРИЛОЖЕНИЕТО ИМ В ТЕОРИЯТА НА ЕДНОЛИСТНИТЕ ФУНКЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на степен
"кандидат на математическите науки"

Научен ръководител
акад. Л.Илиев

София, 1978 год.

Функцията $f(z)$, регулярна в $E=\{z;\ |z|<1\}$, се нарича еднолистна в E, ако за всяко $z_1, z_2 \in E, z_1 \neq z_2$ имаме $f(z_1) \neq f(z_2)$. Да означим с S класа от функциите $f(z)$, регулярни и еднолистни в E и нормирани $f(0)=0$ $f'(0)=1$.

Първите резултати в теорията на еднолистните функции принадлежат на Хурвиц, Кьобе, Гронуол, Бибербах и други автори. В последствие започва усилено развитие на тази теория. Особено в последните десетина години се появиха голям брой публикации най-вече на съветски, американски, индийски, полски и други автори. Изследванията продължават в две направления - от една страна се търсят нови методи, с приложението на които да се разшири броя на решените задачи за класа S, а от друга страна се изследват различни подкласове на S.

В предлаганата дисертация се получават теореми за функциите с положителна реална част и с тяхна помощ се решават някои задачи за различни подкласове на S.

Да означим с $\mathcal{P}$ класа, състоящ се от регулярни функции $p(z)$, имащи вида

$$p(z)=1+p_1 z+p_2 z^2+\dots$$

за които $\mathrm{Re}\, p(z)>0$ за всяко $z \in E$.

Този клас е въведен от Каратеодори. Освен класа $\mathcal{P}$, различни автори са разглеждали и неговите подкласове $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{P}^{(\beta)}$ и $\mathcal{P}_{(\beta)}$, състоящи се от функции $p(z)$, удовлетворяващи съответно условията

$\operatorname{Re} p(z) > \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad ; \quad |p(z) - M| < M \quad M > \frac{1}{2}$

$\left|\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right| < \beta \qquad |p(z) - 1| < \beta \qquad 0 < \beta \leq 1$

В 1973 год. Яновски [1] въведе класа $\mathcal{P}(A,B)$ $-1 < A \leq 1, -1 \leq B < A$ по следния начин:

Функцията $p(z)$ принадлежи на $\mathcal{P}(A,B)$ тогава и само тогава, когато:

$$p(z) = \frac{1 + A\theta(z)}{1 + B\theta(z)}$$

където $|\theta(z)| < 1$ и $\theta(0) = 0$

Да отбележим, че $\mathcal{P}(1,-1) \equiv \mathcal{P}$. Също при подходящ избор на A и B се получават въведените по-горе класове $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{P}^{(\beta)}$ и $\mathcal{P}_{(\beta)}$.

В § 1.2. е получена следната теорема

<u>Теорема 1</u>

Нека $p(z) \in \mathcal{P}, -\pi/2 < \alpha < \pi/2, |z| = r, 0 < r < 1$. Тогава

$$\frac{\sqrt{1+r^4+2r^2\cos 2\alpha} - 2r\cos\alpha}{1-r^2} \leq |p(z)\cos\alpha + i\sin\alpha| \leq \frac{\sqrt{1+r^4+2r^2\cos 2\alpha} + 2r\cos\alpha}{1-r^2}$$

Оценката е точна и за всяко α се достига от функцията $p_0(z) = \frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}$, $|\varepsilon| = 1$.

Неточна оценка на $|p(z)\cos\alpha + i\sin\alpha|$ е дадена от Ройстер и Зайглер [2].

В § 1.3. се продължава изследването на класа $\mathcal{P}(A,B)$, започнато от Яновски [1]. Яновски е получил точни оценки отдолу и отгоре на $Re\left\{P(z)+\frac{zP'(z)}{P(z)}\right\}$ и на $Re\frac{zP'(z)}{P(z)}$ за $P(z)\in\mathcal{P}(A,B)$.

В § 1.3. се получава точна оценка отдолу и отгоре на $Re\left\{aP(z)+\frac{zP(z)}{P(z)}\right\}$ за $P(z)\in\mathcal{P}(A,B)$ и $a>0$

Резултатът е следния:

<u>Теорема 2.</u>

Нека $p(z)\in\mathcal{P}(A,B)$, $-1<A\le 1$, $-1\le B<A$, $|z|=r$, $0<r<1$, $a>0$. Тогава

$$Re\left\{aP(z)+\frac{zP'(z)}{P(z)}\right\}\geqslant\begin{cases}X_{a,1}(r;A,B) & a\,r\le r_a^*\\ X_{a,2}(r;A,B) & r_a^*<r<1\end{cases}$$

където

$$X_{a,1}(r;A,B)=\frac{aA^2r^2-[(2a+1)A-B]r+a}{(1-Ar)(1-Br)}$$

$$X_{a,2}(r;A,B)=2\frac{\sqrt{U_a\mathcal{B}}-(1-ABr^2)}{(A-B)(1-r^2)}+\frac{A+B}{A-B}$$

където

$$U_a=aA-(a+1)B+1-[aA-(a+1)B+B^2]r^2$$

$$\mathcal{B}=(1-A)(1+Ar^2)$$

$r_a^*=r_a^*(A,B)$ е единствения корен на полинома

$$g_a(r;A,B)=A(aA-B)r^4-2A(a-B)r^3-[aA^2-AB+2B+2A-a-1]r^2+2(aA+1)r-a-1$$

в интервала $[0,1]$

Оценката е точна. Посочени са функциите, за които се достигат оценките.

За $a = 1$ получаваме резултата на Яновски. Методът на доказателството е същия, който е използувал Яновски за случая $a = 1$. Също е формулирана теоремата, която дава точната оценка отгоре на $Re\left\{aP(z) + \frac{zP'(z)}{P(z)}\right\}$. Тази теорема се доказва аналогично на теорема 2.

В § 1.4. са получени точни оценки на

$Re\left\{P(z) + \frac{zP'(z)}{P(z)+a}\right\}$ и на $Re\left\{\frac{zP'(z)}{P(z)+a}\right\}$ за

$P(z) \in \mathcal{P}(A,B), a>0$.

Да дадем сега дефиниция на някои по-важни подкласове на S. Нека $f(z) \in S$ и да означим с $f(E)$, образа на кръга $E = \{z: |z|<1\}$ посредством функцията $f(z)$. Да разгледаме следните класове от функции

$S^0 = \{f(z) \in S : f(E)$ е изпъкнала$\}$

$S^* = \{f(z) \in S : f(E)$ е звездна относно началото$\}$

$\mathcal{F} = \{f(z) \in S : f(E)$ е изпъкнала по посока на имагинерната ос$\}$

$S^\lambda = \{f(z) \in S : f(E)$ е λ-спирална относно началото, $-\pi/2 < \lambda < \pi/2\}$

Функциите от класовете $S^0, S^*, \mathcal{F}$ и S^λ се наричат съответно изпъкнали, звездни относно началото, изпъкнали по посока на имагинерната ос и λ-спирални относно началото и са въведени съответно от Студи, Александер, Файер и Шпасек. В последствие бяха въведени много подкласове на горните подкласове на S. Също бяха намерени различни необходими и достатъчни условия, за да принадлежи една функция $f(z)$ към даден подклас на S. Много от тези необходими и достатъчни условия се записват с помощта на функциите от класа $\mathcal{P}$. Например необходимите и достатъчни условия една функция $f(z)$ да принадлежи към $S^{o}, S^{*}, \mathcal{F}$ и S^{1} са съответно

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=P(z)\quad;\quad\frac{zf'(z)}{f(z)}=P(z)$$

$$zf'(z)=h_{\nu}(e^{-i\mu}z)\left[\cos\mu+i\sin\mu.P(z)\right]\quad;\quad e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}=P(z)$$

където $p(z)\in\mathcal{P}$ и $h_{\nu}(z)=\dfrac{z}{1-2\cos\nu z+z^{2}}$.

Да означим с $S^{*}(A,B)$ класа от функции

$$f(z)=z+a_{2}z^{2}+\dots$$

регулярни в E и такива, че $f(z)\in S^{*}(A,B)$ тогава и само тогава, когато

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=P(z)\quad\text{където}\quad P(z)\in\mathcal{P}(A,B)$$

Класът $S^{*}(A,B)$ е въведен от Яновски [1].

Въвеждаме класа $V(A,B)$, съставен от функции $g(z)$ от вида

$$g(z)=\frac{1}{2}\left[f(z)+zf'(z)\right]$$

където $f(z)\in S^{*}(A,B)$.

Функциите от класа $V(A,B)$ са еднолистни.

В § 1.5 е намерен радиусът на най-големия кръг, в който всяка функция от класа $V(A,B)$ е звездна, т.е. определен е радиуса на звездност за класа $V(A,B)$.

Резултатът е следния:

Нека τ_1 е по-малкия корен на уравнението

$$A(A+B)\tau^2-4A\tau+2=0$$

лежащ в интервала (0,1).

Нека τ_2 е най-малкия корен на уравнението

$$A(A+B-2)\tau^4+(1-A)(A+B-2)\tau^2+2(1-A)=0$$

лежащ в интервала (0,1).

Тогава радиусът на звездност за класа $V(A,B)$ е равен на τ_1 или на τ_2 в зависимост от A и B.

В § 1.5 е дадено условието за A и B, от което се определя кое точно τ_1 или τ_2 трябва да се вземе при дадени A и B.

Да отбележим, че радиуса на звездност за класа $V(1,-1)$ е определен от Рахманов, а радиуса на звездност за класа $V(1-2\beta,-1)$ е определен от Сингх и Гоел [4]. Теоремата в § 1.5 съдържа тези случаи.

Нека $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ е регулярна в E, $\frac{f(z)\cdot f'(z)}{z}\neq 0$. Казваме, че $f(z)$ е β-изпъкнала, $\beta\geq 0$ ако

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\}>0 \qquad z\in E$$

Класът на β-изпъкналите функции е въведен от Мокану [5] най-напред за $0\leq\beta\leq 1$, а после за всяко $\beta\geq 0$.

Радиус на β-изпъкналост за класа $S^*(A,B)$ наричаме радиуса на най-големия кръг, в който всяка функция принадлежаща на $S^*(A,B)$ е β-изпъкнала. В § 1.5 е определен радиусът на β-изпъкналост за класа $S^*(A,B)$.

Нека τ_1 е по-малкия корен на уравнението

$$A^2\tau^2 - [(2+\beta)A - \beta B]\tau + 1 = 0$$

лежащ в интервала (0,1). Нека τ_2 е най-малкия корен на

$$(4A^2 - 4A + \beta B - \beta A)\tau^4 - 2[2A^2 + (\beta - 4)A + 2 - \beta B]\tau^2 + 4 - (4+\beta)A + \beta B = 0$$

лежащ в интервала (0,1).

Тогава радиусът на β -изпъкналост за $S^*(A,B)$ е равен на τ_1 или на τ_2 в зависимост от A и B. Определено е условието, от което при дадени A и B се вижда кое от двете τ_1 или τ_2 дава радиуса на β -изпъкналост за $S^*(A,B)$.

Да отбележим, че радиуса на β -изпъкналост за $S^*(1-2\alpha, -1)$ е опре елен от Ал-Амири [6]. Ако в теоремата от § 1.5 поставим $A = 1-2\alpha$, $B = -1$, получаваме този резултат.

Да означим с $\Gamma(\nu, \mu)$ подкласа на $\tilde{F}$, съставен от функции $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, удовлетворяващи при дадени μ и ν,

$$z f'(z) = h_\nu(e^{-i\mu} z)[\cos\mu + i\sin\mu \cdot P(z)]$$

където

$$h_\nu(z) = \frac{z}{1 - 2\cos\nu \cdot z + z^2} \quad \text{и} \quad P(z) \in \mathcal{P}$$

Класът $\Gamma(\nu, \mu)$ е въведен от Ройстер и Зайглер [2].

В § 2.2 е получена точна оценка на $|f'(z)|$, когато $f(z) \in \Gamma(\nu, \mu)$. Също е получена оценка на $|f(z)|$ и на $\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\}$.

<u>Теорема 3</u>

Ако $f(z) \in \Gamma(\nu, \mu)$ и $|z| = r$, то

$$\frac{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\mu - 2r\sin\mu}}{(1-r^2)(1+2|\cos\nu| r + r^2)} \leq |f'(z)| \leq \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\mu + 2r\sin\mu}}{(1-r^2)(1-2|\cos\nu| r + r^2)} & r < \dfrac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \\ \dfrac{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos 2\mu + 2r\sin\mu}}{(1-r^2)^2 \sin\nu} & \dfrac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} < r \end{cases}$$

С условието, че ако $\nu = 0$ или π се използува горното неравенство в дясно за всички r и за $\nu = \pi/2$ се използува долното неравенство в дясно за всички r.

Този резултат се получава като приложим теорема 1.

Да въведем класа $S_\alpha^\lambda(A, B)$ по следния начин:

Нека $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ е регулярна в E и $\frac{f(z) \cdot f'(z)}{z} \neq 0$, $z \in E$. Казваме, че $f(z)$ принадлежи на класа $S_\alpha^\lambda(A, B)$ тогава и само тогава, когато

$$(e^{i\lambda} - \alpha) \frac{z f'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) = p(z)\cos\lambda + i\sin\lambda$$

където $p(z) \in \mathcal{P}(A, B)$.

Да отбележим, че $S_0^\lambda(1, -1) \equiv S^\lambda$, $S_\alpha^0(A,B) \equiv M_\alpha(A,B)$ където $M_\alpha(A, B)$ е класът въведен от Якубовски и Камински [7]. Също $S_\alpha^\lambda(1-2\beta, -1) \equiv S_\alpha^\lambda(\beta)$, където $S_\alpha^\lambda(\beta)$ е класът, въведен в [8].

В § 2.3 е доказана

<u>Теорема 4</u>

Нека $-1 < A \leq 1$, $-1 \leq B < A$, $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$. За фиксирани A, B, λ и всяко $\alpha > 0$ имаме

$$S_\alpha^\lambda(A,B) \subset S_0^\lambda(A,B)$$

Също е доказано, че ако $0 \le \beta \le \alpha$, то $S_\alpha^\lambda(A,B) \subset S_\beta^\lambda(A,B)$.

В § 2.4 е дадено интегрално представяне на класа $S_\alpha^\lambda(A,B)$. Резултатът е

Теорема 5

Необходимото и достатъчно условие $f(z)$ да принадлежи на $S_\alpha^\lambda(A,B)$ е $f(z)$ да има представянето

$$f(z) = \left[\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}\int_0^z [F(\zeta)]^{e^{i\lambda}/\alpha}\, \zeta^{-1}\, d\zeta\right]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

където $F(\zeta) \in S_0^\lambda(A,B)$.

Да наречем спирално изпъкнали функциите от класа $S_\alpha^\lambda(1-2\beta,-1)$. В § 2.5 е намерен радиуса на спирална изпъкналост за класа S^λ. Използуваме теорема 1. Резултатът е следния

Теорема 6

Радиусът на спирална изпъкналост за $S^\lambda(1,-1)$ е

$$R_\alpha(\lambda) = \sqrt{(\alpha+\cos\lambda)^2+\sin^2\lambda} - \sqrt{\alpha(2\cos\lambda+\alpha)}$$

За $\alpha = \cos\lambda$ този радиус беше определен наскоро [9], по друг, доста по-дълъг начин. Ако в теорема 6 поставим $\alpha = \cos\lambda$, получаваме резултата, получен в [9].

Добре известно е, че всички изпъкнали функции са 1/2 звездни, т.е., ако за една функция

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad \text{за всяко} \quad z \in E$$

то

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2} \quad \text{за всяко} \quad z \in E$$

В § 2.6 е получен следния резултат:

<u>Теорема 7</u>

Всички α -изпъкнали функции са звездни от ред

$$\beta(\alpha) = \frac{\Gamma(1/2 + 1/\alpha)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1 + 1/\alpha)}$$

Резултатът е получен в сътрудничество с Г.Димков.

1.W.Janowski.Some extremal problems for certain familes of analytic functions.I.Ann.Polon.Math.28,1973,297-326.

2.W.Royter,M.Ziegler.Univalent functions convex in one direction.Publ.Math.Debrecen,23,1976,339-345.

3.Б. Рахманов.К теории однолистних функций.Докл.АН СССР,78 №2,1951,209-211.

4.V.Singh,K.M.Goel.On radio of convexity and starlikense of some classes of functions.J.Math.Soc.Japan 23(1971),323-339

5.P.T.Mocanu.Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representation conforme.Mathematica(Cluj) 11(34),1969,127-133.

6.H.S.Al-Amiri.On the radius of-convexity of starlike functions of order.Proc.Amer.Math.Soc.39,1,1973,101-109.

7.Z.Jakubowski,J.Kaminski.On some propritties of Mocanu-Janowski functions.Revue Roum.Pures et Appl.(to appear).

8.E.Silvia.On subclas of spiral-like functinns.Proc.Amer. Soc.1974,44,2,411-420.

9.P.J.Eenigenburg,H.Yosnikawa.An application of the method of Zmorovic in Geometric Functions Theory.J.of Math.Annal. and appl.56,3,1976,683-688.

94

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ
ПО ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

Павел Христов Бойчев

ЕЗИК И СИСТЕМА, БАЗИРАНИ НА LOGO

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на

ДИСЕРТАЦИЯ
за присъждане на образователната и научна степен
"Доктор"
по научна специалност: 01.01.12 "Информатика"

Научен ръководител:
доцент д-р Божидар Сендов

София, 2001

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от разширено заседание на катедра "Информационни технологии" при Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Кл. Охридски".

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 25.06.2001 от 13:30 часа в Заседателната зала на ИМИ-БАН на открито заседание на Специализирания научен съвет по информатика и приложна математика при ВАК.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ-БАН.

Пълният обем на дисертацията е 189 страници. Съдържанието и списъкът на примерите, таблиците и фигурите е 8 страници. Заглавните страници, списъкът на използваната литература, допълнителни WEB връзки, публикации, авторска справка и автобиография на автора са разположени на 9 страници.

Използваната литература включва 28 заглавия (5 на български език и 23 на английски). Представени са и 55 адреса на WWW сайтове с допълнителна информация. Списъкът от публикации на дисертанта, отразяващи пряко резултати от дисертацията, съдържа 9 заглавия. Работата съдържа 12 таблици, 72 фигури и 54 примера.

Тираж: 50 броя