ПУ „П.Хилендарски"

Иванка Терзийска

ДИСЕРТАЦИЯ

1977

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"
МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА "КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ"

= =

Иванка Михайлова Касандрова-Терзийска

РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ И АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА НУЛИТЕ НА КЛАСИ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ВИД

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на научна степен
"кандидат на математическите науки"

Научен ръководител
ст.н.с. кфмн П.Русев

Пловдив, 1977

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ВЪВЕДЕНИЕ

Проблемът за разпределение на нулите на целите функции от вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{itz}dt \tag{1}$$

е поставен от Йензен [1] . Повод за разглежданията в работата на Йензен е обстоятелството, както това е забелязано от Риман [2], че разпределението, респективно асимптотичното поведение на нулите на целите функции от вида (1) е тясно свързано с важни проблеми от аналитичната теория на числата.

Частен случай на целите функции от вида (1) са функциите

$$\int_{-a}^{a} f(t)e^{itz}dt \quad (0 < a < \infty). \tag{2}$$

Както показват още първите изследвания на Пойа, задачите за разпределение на нулите на целите функции (1), респективно (2) съществено се различават. Това различие се дължи преди всичко на факта, че интегралът (1) представя изобщо цяла функция, чийто ред е по-голям от единица, докато (2) представя винаги цяла функция от експоненциален вид, т.е. цяла функция от ред единица и нормален тип. В съответствие с това и методите за изследване на целите функции (1) и (2) са различни.

В работата [3] на Пойа, която е посветена главно на целите функции от вида

$$U_a(f;z) = \int_{0}^{a} f(t)\cos tz\,dt \tag{3}$$

и

$$(4) \qquad V_a(f;z) = \int_0^a f(t) \sin tz \, dt,$$

които са частни случаи от (2), е предложен метод за изследване разпределението на нулите им, който може да бъде наречен метод на интегралните суми. Този метод се основава най-вече върху връзката, която съществува между разпределението на нулите на целите функции (3) и (4) и разпределението на нулите на полиномите

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}a\right) z^k.$$

В частност, ако за всички достатъчно големи n нулите на полиномите (5) са в единичния кръг, както установява Пойа, целите функции (3) и (4) имат само реални нули.

В [3] Пойа получава твърдения и за взаимното разпределение на нулите на целите функции (3), респективно (4) и целите функции $\sin az$ и $\cos az$, като се опира на един резултат на Хурвиц. Идеята на Хурвиц се състои в това, щото вместо целите функции (3) и (4) да се разглеждат мероморфните функции

$$\frac{U_a(f;z)}{\cos az}, \quad \frac{U_a(f;z)}{\sin az}, \qquad \text{респективно} \quad \frac{V_a(f;z)}{\cos az}, \quad \frac{V_a(f;z)}{\sin az}.$$

По-точно се има предвид разлагането на тези мероморфни функции в сбор от съответните елементарни дроби.

Работата на Пойа даде импулс за многочислени изследвания и публикации в това направление главно от наши автори. Съществени приноси бяха дадени от академиците Л.Чакалов и Н.Обрешков. Посочиха се класи от функции $f(t)$, за които целите функции (3) и (4) имат само реални нули, като за целта бяха използувани методите, предложени от Пойа.

Още в работата на Йензен се обръща внимание, че "трансцедентният" проблем за разпределението на нулите на целите функции от вида (1) се редуцира, по думите на самия автор, към алгебричен проблем за разпределението на нулите на полиноми, подходящо свързани с функциите (1).

Тази идея, но в значително разширен вид, е предложена в работите на Л.Илиев. По-конкретно той разглежда вместо целите функции (2) полиномите

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, p(z+t)\, dt\,, \tag{6}$$

където $p(z)$ е полином. От резултатите на Илиев при специален избор на полинома $p(z)$, след граничен преход могат да бъдат получени резултатите на Пойа.

Изследванията на Л.Чакалов, Н.Обрешков и Л.Илиев намират продължение в работите на техните ученици Е.Божоров, К.Дочев, П.Русев, Д.Димитров и други. Божоров [4] използува и доразвива подхода, предложен от Л.Илиев. В работите на другите автори се изследва както разпределението, така и асимптотичното поведение на нулите на целите функции (3) и (4) като се използуват методите, предложени от Пойа и подхода на Илиев. Предложени са и някои модификации на тези методи.

Предмет на предлаганата дисертационна работа са някои проблеми, свързани с разпределението на нулите на целите функции от вида (3) и (4). В нашите разглеждания сме приели $a=1$ и разглежданите функции означаваме съответно с $\mathcal{U}(f;z)$ и $V(f;z)$.

Дисертацията се състои от въведение, две глави, разделени на шест параграфа и списък на цитираната литература.

Ще изложим накратко съдържанието на отделните параграфи.

В § 1 си поставяме задача да изследваме асимптотичното поведение на нулите на полиномите (5) и връзката му с разпределението на нулите на целите функции (3) и (4). Показваме, че ако реалната функция $f(t)$ е с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в точката 1 и $f(1)\neq 0$, то за всички достатъчно големи n нулите на полиномите (5) лежат в кръга $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n}$, където $\lambda>0$. От тук, с метода на интегралните суми, получаваме, че ако $f(t)$ удовлетворява изброените по-горе условия, то нулите на цялата функция

$$F(f;z)=\int_0^1 f(t)e^{itz}dt \tag{7}$$

се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$.

Разпределението на нулите на целите функции (3) и (4) може да се свърже и с разпределението на нулите на полиномите

$$Q_{n,\varepsilon}(z)=\sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{k}{n}\right)z^k+\varepsilon z^n\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)z^k, \quad \varepsilon=\pm 1. \tag{8}$$

С метода, с който изследваме полиномите (5) установяваме, че ако $f(t)$ е с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в крайщата на интервала и $f(1)\neq 0$, то може да се намери такова положително число λ, че за всички достатъчно големи n

нулите на полиномите (8) да лежат във венеца

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-1} \leq |z| \leq 1+\frac{\lambda}{n}.$$

От това твърдение следва, че при горните предположения за $f(t)$ нулите на целите функции (3) и (4) се намират в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \leq \lambda.$$

В края на § 1 изследваме възможността да се направят някакви изводи за нулите на полиномите (5), ако е известно разположението на нулите на цялата функция (7).

В своята работа [5] Обрешков посочва достатъчни условия, при които нулите на цялата функция (2) са разположени в ивица, успоредна на реалната ос. В § 2 прецизираме в известен смисъл теоремата на Обрешков. Като използуваме идеята на доказателството на Обрешков показваме, че ако $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[-a,a]$, непрекъсната в крайщата на интервала и $f(a)f(-a) \neq 0$, съществува ивица, успоредна на реалната ос, която съдържа всичките нули на цялата функция (2).

И в двата параграфа пренасяме, където това е възможно, някои от получените резултати върху целите функции от вида (1) и посочваме примери, които потвърждават съществените различия между целите функции от вида (1) и вида (2).

За целите функции от експоненциален вид, каквито главно разглеждаме ние, е валидна обобщената теорема на Билер-Ермит. Според тази теорема ако $F(z)=U(z)+iV(z)$ е цяла функция от експоненциален вид с нули в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq 0$ и с положителен дефект, реалните цели функции $U(z)$ и $V(z)$ имат само реални нули. В § 3 доказваме теорема от типа на Билер-Ермит в случая, когато нулите на цялата функция $F(z)$ се намират в полуравнината

$\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda, \lambda > 0$. Установяваме, че в този случай нулите на $U(z)$ и $V(z)$ се намират в ивица, успоредна на реалната ос. От това твърдение при $\lambda = 0$ се получава споменатият по-горе резултат. Разглеждаме някои приложения на получените резултати.

Втората глава на дисертацията е посветена на изучаването на асимптотичните свойства и взаимното разпределение на нулите на целите функции (3) и (4). Тъй като в тази глава съществено се използува метода на Хурвиц, то в § 4 излагаме този метод. С оглед на бъдещите нужди разглеждаме още две теореми на Обрешков за нулите на някои класи мероморфни функции.

Според една теорема на Палей, Титчмарш и Винер нулите на целите функции (3) и (4), с евентуално изключение на краен брой, се намират в секторите $|\arg z| \leq \delta$ и $|\pi - \arg z| \leq \delta$, каквото и да е положителното число δ. В § 5, като използуваме метода на Хурвиц и теоремите на Обрешков, получаваме някои резултати за асимптотичното поведение на нулите на (3) и (4), които в известен смисъл прецизират споменатата теорема. По-точно установяваме, че при някои допълнителни предположения за функцията $f(t)$ нулите на целите функции (3) и (4) се намират съответно в ивица, успоредна на реалната ос, във вътрешността на две параболи и в област, ограничена от две логаритмични криви.

В последния параграф изследваме взаимното разпределение на нулите на целите функции (3), (4), $\sin z$ и $\cos z$. Този въпрос е дискутиран още от Пойа. Той посочва условия за $f(t)$, при които цялата функция (3), респективно (4) има само реални нули и те се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$. Разглеждането на отделните примери показва, че обикновено когато (3) или (4) иматсамо реални и прости нули, то те се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$.

Такова разделяне в известен смисъл се среща дори и в случай на многократни реални нули. В § 6 даваме отговор на следния въпрос: ако нулите на цялата функция (3), съответно (4), са реални, дали те се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$. Установяваме, че това е така, ако са удовлетворени и някои допълнителни условия, които се налагат от самия метод на доказателство. Така например за цялата функция $U(f;z)$ доказваме, че ако тя има само реални нули, разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π, $U(f;0)\neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ такава, че $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n = 1$ и

$$|n\,U(f;n\pi)| < \mu_n\,|U(f;0)|$$

нулите ѝ се разделят от нулите на $\sin z$.

Основните резултати на дисертацията са разглеждани в катедрата по комплексен анализ на Пловдивския университет, а също така са докладвани на прегледа на ТНТМ през май 1975 г. и XII научна сесия на Пловдивския университет (1976 г.). Голяма част от тях се съдържат в работите [35] - [40].

Приятен дълг ми е да изразя благодарност на моя научен ръководител ст.н.с.П.Русев за постоянното внимание и ръководство на работата.

ГЛАВА I

ТЕОРЕМИ ОТ ТИПА НА ПОЙА, ОБРЕШКОВ И БИЛЕР-ЕРМИТ

§ 1. Метод на интегралните суми

Разпределението на нулите на целите функции от вида

$$F(f;z)=\int_0^1 f(t)\,e^{itz}\,dt \tag{1.01}$$

и на свързаните с тях реални цели функции[ж)]

$$U(f;z)=\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \quad \text{и} \quad V(f;z)=\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt \tag{1.02}$$

е изследвано систематично може би за пръв път от Пойа [3] . За функцията $f(t)$ се предполага, че е реална и интегруема в римановсмисъл в интервала [0,1] . Основният резултат на Пойа гласи: ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала [0,1] , нулите на цялата функция (1.01) лежат в горната полуравнина, а целите функции (1.02) имат само реални нули. Пойа доказва това твърдение с два различни метода. В този параграф ще изложим същността на един от тези методи, наречен метод на интегралните суми, и с него ще получим още някои резултати за нулите на целите функции (1.01) и (1.02).

ж) Една цяла функция $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ се нарича реална, ако всички коефициенти в нейното степенно развитие са реални или с други думи, ако върху реалната ос тя приема реални значения.

Методът на Пойа се основава на теоремата на Хурвиц [6] и на една теорема [3] за нулите на тригонометричните полиноми, според което ако нулите на полинома $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с реални коефициенти са в единичния кръг, тригонометричните полиноми $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kz$ и $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kz$ имат само реални нули.

Да означим с $P_n(f;z)$ следния полином

$$P_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k . \tag{1.03}$$

Да допуснем, че нулите на полиномите (1.03) за всички достатъчно големи n са в единичния кръг. Тогава нулите на целите функции

$$F_n(f;z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{k}{n}z} \tag{1.04}$$

за всички такива n ще лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq 0$. Според споменатата по-горе теорема тригонометричните полиноми

$$U_n(f;z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z \quad \text{и} \quad V_n(f;z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{k}{n} z \tag{1.05}$$

ще имат само реални нули. Тъй като

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f;z) = \int_0^1 f(t) e^{itz} dt ,$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;z) = \int_0^1 f(t) \cos tz \, dt$$

и

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f;z) = \int_0^1 f(t) \sin tz \, dt$$

равномерно върху всяко ограничено множество от комплексната равнина, то от теоремата на Хурвиц следва, че нулите на цялата функция (1.01) лежат в горната полуравнина ($\operatorname{Im} z \geq 0$) и нулите на целите функции (1.02) са реални.

От казаното до тук става ясно, че методът на Пойа свързва разпределението на нулите на целите функции (1.01) и (1.02) с разпределението на нулите на полиномите (1.03). Да означим с E множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегруеми в риманов смисъл в интервала $[0,1]$, за които нулите на полиномите (1.03) за достатъчно големи n лежат в единичния кръг. Методът на интегралните суми води до следния резултат:

<u>Теорема I.1</u>[3] Ако $f(t) \in E$, нулите на цялата функция (1.01) се намират в горната полуравнина, а целите функции (1.02) имат само реални нули.

Методът на интегралните суми е използуван и доразвит от Л.Чакалов [7], Н.Обрешков [5], Л.Илиев ([9] и [12]), Е.Божоров [4], П.Русев [8] и други. Предложени са и някои модификации на този метод.

Да разгледаме полинома

$$Q_{n,\varepsilon}(u) = \sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{k}{n}\right)u^k + \varepsilon u^n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)u^k. \tag{1.06}$$

Налице са следните равенства

$$U_n(f;z) = \frac{e^{-iz}}{2n} Q_{n,1}(f; e^{i\frac{z}{n}})$$

и

$$V_n(f;z) = \frac{e^{iz}}{2in} Q_{n,1}(f; e^{-i\frac{z}{n}}).$$

Следователно разпределението на нулите на целите функции (1.05) или все едно на целите функции (1.02) може да се свърже и с разпределението на нулите на полиномите (1.06). Ако за всички достатъчно големи стойности на n нулите на полиномите (1.06) са върху окръжността $|u|=1$, целите функции (1.02) ще имат само реални нули. В [9] Л.Илиев доказва твърдение, което представлява обобщение на теоремата на Шур [10] и което показва връзката между разпределението на нулите на полиномите (1.03) и полиномите (1.06). По-точно той установява, че ако нулите на полинома $P_1(u)$ са по абсолютна стойност $\geqslant 1$ и ако положим $P_1^*(u)=u^n\overline{P}_1\left(\frac{1}{u}\right)$, нулите на полинома $P_1(u)+\varepsilon u^k P_1^*(u)$, където $|\varepsilon|=1$ и $k\geqslant 0$ означава произволно цяло число, са по единичната окръжност. Очевидно, ако означим с $P_1(f;u)$ полинома

$$P_1(f;u)=\sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{k}{n}\right)u^k,$$

то $P_1(f;u)=p^*(f;u)$ и

$$Q_{n,\varepsilon}(f;u)=P_1(f;u)+\varepsilon u^n P_1^*(f;u)=p^*(f;u)+\varepsilon u^n P(f;u).$$

Следователно, ако нулите на полиномите (1.03) за достатъчно големи n са в единичния кръг, нулите на полиномите (1.06) за такива n са по единичната окръжност. С метода на интегралните суми, използувайки обобщението на теоремата на Шур и една теорема на Н.Обрешков [11], Л.Илиев доказва, че ако $f(t)$ е реална, неотрицателна, интегруема, монотонно растяща в интервала $(0,a)$ функция, четна в интервала $(-a,a)$ и $p(z)$ е полином с нули в ивицата $\alpha\leq \operatorname{Re} z\leq\beta$ или цяла функция, граница на такива полиноми, нулите на функцията

$$\int_0^a f(t)\left[p(z+t)\pm p(z-t)\right]dt$$

лежат пак в ивицата $\alpha \leq \Re e\, z \leq \beta$ (вж. [12], стр.158 и [9]). От тази теорема при $p(z) = z^n$ с граничен преход се получава резултатът на Пойа.

П.Русев в [8] предлага една модификация на метода на интегралните суми, което позволява той да се приложи при изследване разпределението на нулите на по-общи класи от цели функции, от които (1.01) и (1.02) са частни случаи. Става въпрос за целите функции от вида

$$(1.07) \qquad \int_0^1 f(t)\, e^{itz}\, d\,\psi(t)$$

и съответно

$$(1.08) \qquad \int_0^1 f(t) \cos tz\, d\,\psi(t) \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(t) \sin tz\, d\,\psi(t),$$

където интегралите се разбират в смисъл на Риман-Стилтес, $f(t)$ и $\psi(t)$ са реални функции такива, че интегралът

$$\int_0^1 f(t)\, d\,\psi(t)$$

съществува. В този случай разпределението на нулите на целите функции (1.07) и (1.08) се свързва с разпределението на нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}\, z^k,$$

където

$$a_{k,n} = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, d\psi(t) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

В цитираната по-горе работа П. Русев установява, че ако функцията

$$F(t) = \int_0^t f(u)\, d\psi(u)$$

е монотонно растяща и изпъкнала в интервала $[0,1]$, нулите на цялата функция (1.07) са в горната полуравнина, а целите функции (1.08) имат само реални нули. От тук като частен случай се получава резултатът на Пойа за функциите (1.01) и (1.02).

С метода на интегралните суми могат да се получат резултати и за разпределението на нулите на целите функции от вида (1.01) и (1.02), но представими с кратни интеграли (вж. [13]).

Да означим с $E(\lambda,\delta)$ $(\lambda>0, \delta>0)$ множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегруеми в риманов смисъл в интервала $[0,1]$, за които нулите на полиномите (1.03) за всички достатъчно големи стойности на n лежат в кръга $|z| \le 1 + \frac{\lambda}{n^\delta}$. Нека $f(t) \in E(\lambda,\delta)$. Тогава нулите на функциите (1.04) за достатъчно големи n ще лежат в полуравнината

$$\operatorname{Im} z \geq -n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right).$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n^\delta}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \delta > 1 \\ \lambda, & \text{ако } \delta = 1. \end{cases}$$

Като приложим теоремата на Хурвиц, получаваме, че ако $f(t)\in E(\lambda,\delta)$ с $\delta>1$, нулите на цялата функция (1.01) лежат в затворената горна полуравнина и ако $f(t)\in E(\lambda,1)$, нулите на (1.01) са в полуравнината $\operatorname{Im} z\geqslant-\lambda$. В [14] П.Русев, като използува една зависимост между разпределението на нулите на полиномите (1.03) и на полиномите (1.06), установява, че ако $f(t)\in E(\lambda,2)$ $(\lambda\geqslant 0)$ и $f(0)f(1)\neq 0$, нулите на целите функции (1.02) лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z|\leq\sqrt{2\lambda}$. По-късно К.Дочев [15] и П.Русев [16] показват, че ако $f(t)\in E(\lambda,\delta)$ за някое $\lambda\geqslant 0$ и $\delta>1$, целите функции (1.02) имат само реални нули. Въпросът за разпределението на нулите на функциите (1.02) в случая, когато $f(t)\in E(\lambda,1)$ ще бъде дискутиран в § 3.

Във връзка с горните разглеждания естествено възниква въпросът за условията, които трябва да удовлетворява функцията $f(t)$, за да принадлежи на класа E или $E(\lambda,\delta)$. От теоремата на Какеа [17] следва, че ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0,1]$ функция, то $f(t)\in E$. По-нататък въпросът за принадлежност на една функция $f(t)$ към класа E е разглеждан в работите на Л.Чакалов [7], Н.Обрешков [5], Е.Божоров [18], М.Костова [19] и др. Засега не са ни известни работи, посветени на изследването на функциите от класа $E(\lambda,\delta)$ с $\delta>1$. В работата си [15] К.Дочев посочва някои достатъчни условия, при които $f(t)\in E(\lambda,1)$. По-точно той доказва следното твърдение: ако $f(t)$ удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[0,1]$ и $f(1)\neq 0$, то $f(t)\in E(\lambda,1)$. Посочена е стойността на λ. Сега ще докажем една друга теорема за принадлежност на функцията $f(t)$ към класа $E(\lambda,1)$, от която теоремата на Дочев се явява в известен смисъл като частен случай.

Теорема I.2. Ако $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в точката 1 и $f(1)\neq 0$, то $f(t)\in E(\lambda,1)$ за подходящо $\lambda>0$.

Доказателство. Да разгледаме полинома $(1-z)P_n(f;z)$, където $P_n(f;z)$ е полинома (1.03). Имаме

$$
\begin{aligned}
(1-z)P_n(f;z) &= f(0)-f(1)z^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f\left(\tfrac{k-1}{n}\right)\right]z^{k} \\
&= -f(1)z^{n+1}\left[1+\eta_n(f;z)\right], \qquad (1.09)
\end{aligned}
$$

където

$$
\eta_n(f;z)=-\frac{f(0)}{f(1)}z^{-n-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{f(1)}z^{-n-1+k}.
$$

Ще оценим отгоре $\eta_n(f;z)$. Нека μ е положително число, по-малко от 1 и нека $|z|>1+\frac{\lambda}{n}$, където λ е положително число, засега произволно. Тъй като

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n+1}=e^{\lambda},
$$

то положителното число λ може да се избере така, че за всички достатъчно големи n да е изпълнено

$$
\left|\frac{f(0)}{f(1)}z^{-n-1}\right| < \left|\frac{f(0)}{f(1)}\right|\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-n-1} < \frac{\mu}{3}. \qquad (1.10)
$$

Да означим с $V(f;x,1)$ пълната вариация на функцията $f(t)$ върху интервала $[x,1]$, $0\le x\le 1$. От непрекъснатостта на $f(t)$

в точката 1 следва непрекъснатостта на $V(f;x,1)$ в тази точка и $V(f;x,1)\to 0$ при $x\to 1$. Следователно може да се намери такова число δ, $0<\delta<1$, че

$$V(f;x,1)<\frac{\mu}{3}\,|f(1)| \qquad \text{за} \quad 1-\delta\le x\le 1.$$

Тогава

$$\sum_{\frac{k-1}{n}\geq 1-\delta}\frac{\left|f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right|}{|f(1)|}\,|z|^{-n-1+k}\le\frac{1}{|f(1)|}\sum_{\frac{k-1}{n}\geq 1-\delta}\left|f(\tfrac{k}{n})-f(\tfrac{k-1}{n})\right|\le \tag{1.11}$$

$$\le\frac{1}{|f(1)|}\,V(f;1-\delta,1)<\frac{\mu}{3}.$$

Освен това

$$\sum_{\frac{k-1}{n}<1-\delta}\frac{\left|f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right|}{|f(1)|}\,|z|^{-n-1+k}<\frac{\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-n\delta}}{|f(1)|}\sum_{k=1}^{n}\left|f(\tfrac{k}{n})-f(\tfrac{k-1}{n})\right|<$$

$$<\frac{\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-n\delta}}{|f(1)|}\,V(f;0,1)<\frac{\mu}{3} \tag{1.12}$$

за всички достатъчно големи n при подходящо λ.

Нека сега λ е положително число, за което са изпълнени неравенствата (1.10) и (1.12) за всички достатъчно големи n. Тогава за $|z|>1+\frac{\lambda}{n}$ е изпълнено $|\eta_n(f;z)|<\mu$. От полученото неравенство и представянето (1.09) следва, че за достатъчно големи n полиномите $p_n(f;z)$ нямат нули в областта $|z|>1+\frac{\lambda}{n}$ при така избраното λ, т.е. $f(t)\in E(\lambda,1)$.

С помощта на доказаната теорема и на метода на интегралните суми получаваме следната

<u>Теорема I.3.</u> Ако $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в точката 1 и $f(1)\neq 0$, то съществува положително число λ такова, че нулите на цялата функция (1.01) лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\lambda$.

Сега ще установим теорема, която ни дава възможност от дадена функция от класа $E(\lambda,1)$ да получим други функции от същия клас.

<u>Теорема I.4.</u> Ако $f(t)\in E(\lambda,1)$ за някое $\lambda \geq 0$, $f(1)\neq 0$ и $\delta \geq 2$, то $f(t)(1-\delta t)\in E(\lambda,1)$.

Доказателство. Ще следваме пътя на доказателство, използуван от П.Русев в работата му [20]. Щом като $f(t)\in E(\lambda,1)$, то за всички достатъчно големи n нулите на полиномите

$$P_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k \tag{1.03}$$

ще лежат в кръга $|z| \leq 1+\frac{\lambda}{n}$. Нека ε е произволно положително число. Ще покажем, че върху окръжността $|z| = 1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n}$ е изпълнено

$$\left|\frac{P_n'(f;z)}{P_n(f;z)}\right| \geq \frac{n}{2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}}$$

Нека z_k ($k=1,2,3,\dots n$) са нулите на $P_n(f;z)$ и $|z_0| = 1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n}$. Тогава, ако $\theta_0 = \arg z_0$, то

$$-\frac{P_n'(f;z_0)}{e^{i(\pi-\theta_0)}P_n(f;z_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{i(\pi-\theta_0)}(z_k-z_0)} .$$

Но $\left| e^{i(\pi-\theta_0)}(z_k-z_0) - \left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n}\right)\right| \leq 1+\frac{\lambda}{n}$. По-такъв начин точките $\left\{e^{i(\pi-\theta_0)}(z_k-z_0)\right\}^{-1}$ ($k=1,2,3,\dots,n$) ще лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z \geqslant \dfrac{1}{2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}}$. От тук получаваме, че

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{P_n'(f;z_0)}{e^{i(\pi-\theta_0)}P_n(f;z_0)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{e^{i(\pi-\theta_0)}(z_k-z_0)}\right\}\geqslant\frac{n}{2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}}.$$

И така, за $|z|=1+\dfrac{\lambda+\varepsilon}{n}$ имаме

$$\left|\frac{P_n'(f;z)}{P_n(f;z)}\right|\geqslant\frac{n}{2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}}.$$

Нека $\delta\geqslant 2$. Тогава върху окръжността $|z|=1+\dfrac{\lambda+\varepsilon}{n}$ е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{\frac{\delta}{n}z P_n'(f;z)}{P_n(f;z)}\right|\geqslant\frac{\delta\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n}\right)n}{n\left(2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}\right)}\geqslant\frac{2\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon}{n}\right)}{2+\frac{2\lambda+\varepsilon}{n}}>1.$$

От теоремата на Руше ([21] - стр.137) следва, че полиномите $\frac{\delta}{n}z P_n'(f;z)$ и $P_n(f;z)-\frac{\delta}{n}z P_n'(f;z)$ имат еднакъв брой нули в кръга $|z|<1+\dfrac{\lambda+\varepsilon}{n}$. Но съгласно теоремата на Гаус ([22] - стр.111) всичките n нули на полинома $\frac{\delta}{n}z P_n'(f;z)$ са в кръга $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n}$. Следователно за всички достатъчно големи n нулите на полинома

$$P_n(f;z)-\frac{\delta}{n}z\,P_n'(f;z)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\tfrac{k}{n}\right)\left(1-\delta\tfrac{k}{n}\right)z^k$$

ще лежат в кръга $|z| < 1 + \frac{\lambda + \varepsilon}{n}$. Тъй като ε е произволно, то от тук следва, че $f(t)(1 - \delta t) \in E(\lambda, 1)$.

В началото на този параграф отбелязахме, че разпределението на нулите на целите функции

$$(1.02) \quad U(f;z) = \int_0^1 f(t) \cos tz \, dt \quad \text{и} \quad V(f;z) = \int_0^1 f(t) \sin tz \, dt$$

може да се свърже с разпределението на нулите на полиномите

$$(1.06) \quad Q_{n,\varepsilon}(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{k}{n}\right) z^k + \varepsilon z^n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k.$$

За полиномите $Q_{n,\varepsilon}(f;z)$ е валидна теорема, аналогична на теорема I.2.

Теорема I.5. Ако функцията $f(t)$ е с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в крайщата и $f(1) \neq 0$, може да се намери такова положително число λ, че нулите на полиномите (1.06) за всички достатъчно големи n да лежат във венеца

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{-1} \leq |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}.$$

Доказателство. Тъй като методът и техниката на доказване са вече демонстрирани, ще изложим доказателството съвсем накратко. Разглеждаме полинома

$$(1 - z) Q_{n,\varepsilon}(f;z) = -\varepsilon f(1) z^{2n+1} \left[1 + \eta_n(f;z)\right],$$

където

$$\eta_n(f;z) = -\varepsilon z^{-2n-1} + \varepsilon \frac{f(0)}{f(1)} z^{-n} - \frac{f(0)}{f(1)} z^{-n-1} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{f(1)} z^{-n-(k+1)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{f(1)} z^{-n+(k-1)}.$$

Нека μ е положително число, по-малко от 1 и $|z| > 1 + \frac{\lambda}{n}$, където $\lambda > 0$. Очевидно положителното число λ може да се избере така, че за всички достатъчно големи n да са изпълнени неравенствата

$$(1.13) \qquad |z|^{-2n-1} < \frac{\mu}{7} \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{f(0)}{f(1)}\right| |z|^{-n} < \frac{\mu}{7}.$$

Освен това

$$(1.14) \qquad \sum_{\frac{k+1}{n} \leq \delta} \frac{\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}{|f(1)|} |z|^{-n-(k+1)} < \frac{1}{|f(1)|} V(f; 0, \delta) < \frac{\mu}{7}$$

и

$$(1.15) \qquad \sum_{\frac{k-1}{n} \geq 1-\delta} \frac{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|}{|f(1)|} |z|^{-n+(k-1)} \leq \frac{1}{|f(1)|} V(f; 1-\delta, 1) < \frac{\mu}{7},$$

стига $0 < \delta < 1$ да е достатъчно малко, тъй като $V(f; 0, x)$ е непрекъсната в точката 0 и клони към нула при $x \to 0$ и съответно $V(f; x, 1)$ е непрекъсната в точката 1 и $V(f; x, 1) \to 0$ при $x \to 1$.

При подходящо λ и достатъчно големи n са изпълнени още следните неравенства:

$$(1.16) \qquad \sum_{\frac{k+1}{n} > \delta} \frac{\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}{|f(1)|} |z|^{-n-(k+1)} \leq \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{-n(1+\delta)}}{|f(1)|} V(f; 0, 1) < \frac{\mu}{7},$$

$$(1.17)\quad \sum_{\frac{k-1}{n}<1-\delta} \frac{\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|}{|f(1)|}|z|^{-n+(k-1)} \leq \frac{\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-n\delta}}{|f(1)|} V(f;0,1) < \frac{\mu}{7}.$$

Нека λ е положително число, за което са удовлетворени неравенствата (1.13), (1.16) и (1.17). Ако $|z| > 1+\frac{\lambda}{n}$ и n е достатъчно голямо, то от тези неравенства и (1.14), (1.15) получаваме, че $|\eta_n(f;z)| < \mu$. Следователно $Q_{n,\varepsilon}(f;z)$ не се анулира в областта $|z| > 1+\frac{\lambda}{n}$ при така избраното λ . Но $Q_{n,\varepsilon}(f;z) = \varepsilon z^{2n} Q_{n,\varepsilon}(f;\frac{1}{z})$. Ако допуснем, че за някое $z_0 \neq 0$ с $|z_0| < \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}$ се анулира $Q_{n,\varepsilon}(f;z)$, то и $Q_{n,\varepsilon}(f;\frac{1}{z_0}) = 0$. Но $\left|\frac{1}{z_0}\right| > 1+\frac{\lambda}{n}$, което е невъзможно. Следователно полиномът $Q_{n,\varepsilon}(f;z)$ няма нули в кръга $|z| < \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}$.

От получения резултат за нулите на полиномите (1.06) следва следната

<u>Теорема I.6.</u> Ако функцията $f(t)$ е с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в краищата и $f(1) \neq 0$ може да се намери такова положително число λ , че всички нули на целите функции (1.02) да лежат в ивицата $|\mathrm{Im}\, z| \leq \lambda$.

Доказателство. При направените предположения от теорема I.5 следва, че за всички достатъчно големи n нулите на полиномите (1.06) са във венеца $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{-1} \leq |z| \leq \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)$. Тогава нулите на целите функции

$$\frac{e^{-iz}}{2n} Q_{n,1}(f; e^{i\frac{z}{n}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{k}{n}z$$

и

$$\frac{e^{-iz}}{2in} Q_{n,-1}(f; e^{i\frac{z}{n}}) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \sin \tfrac{k}{n} z$$

ще лежат в ивицата

$$-n \ln (1+\frac{\lambda}{n}) \leq \Im m\, z \leq n \ln (1+\frac{\lambda}{n}).$$

Като направим граничен преход и приложим теоремата на Хурвиц получаваме, че нулите на целите функции (1.02) се намират в ивицата $|\Im m\, z| \leq \lambda$.

Е.Божоров в [4] и Д.Димитров в [23] изучават разпределението на нулите на целите функции от вида

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^a [F(t) e^{itz} + \Phi(t) e^{-itz}]\, dt,$$

където

$$F(t) = \int_0^{a-t} [f(t+v)\varphi(v) + \varepsilon \varphi(t+v) f(v)]\, dv \qquad |t| \leq 1,$$

$$\Phi(t) = \int_0^{a-t} [f(v)\varphi(t+v) + \varepsilon f(t+v)\varphi(v)]\, dv \qquad |t| \leq 1,$$

а $f(t)$ и $\varphi(t)$ са реални функции. Д.Димитров показва, че ако $f(t)$ и $\varphi(t)$ са положителни функции, от които $f(t)$ монотонно расте, а $\varphi(t)$ - монотонно намалява, разглежданата цяла функция има нулите си в полуравнината $\Im m\, z \geq 0$.

В духа на разглежданията в този параграф може да се постави следната задача: нека $f(t)$ и $\varphi(t)$ са реални функции такива, че за всички достатъчно големи n нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}a\right) z^k$$

са в областта $|z| \geqslant \dfrac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}$, а нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{n-k}{n}a\right) z^k$$

са в кръга $|z| \leq 1+\frac{\lambda}{n}$ за някое $\lambda \geqslant 0$. Къде са разположени нулите на цялата функция $\mathcal{F}(z)$? За сега отговорът на този въпрос остава открит. По всяка вероятност нулите на $\mathcal{F}(z)$ ще са в подходяща ивица, успоредна на реалната ос. Решението на поставената задача е свързано с решението на следната задача: ако нулите на полинома $P(z)$ се намират в кръга $|z| \leq 1+\frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$, то къде се намират нулите на полинома

$$Q(z) = P(z) + \varepsilon P^*(z).$$

В нашите разглеждания сме приели за простота горната граница на интегралите (1.01) и (1.02) единица, но резултатите се пренасят без затруднение и за целите функции от вида

$$\int_0^a f(t) e^{itz} dt \qquad (0 < a < \infty).$$

Функциите от вида

$$\int_0^\infty f(t) e^{itz} dt \tag{1.18}$$

където $f(t)$ е реална функция, дефинирана за $t \geqslant 0$ и интегруема във всеки краен интервал, съществено се отличават от функциите (1.01) и (1.02). Последните при доста общи предположения за $f(t)$ са цели, докато за функциите (1.18) това не е така. Освен това функциите (1.01) и (1.02) са от експоненциален вид, т.е. от ред, не надминаващ единица и от нормален тип, а функциите (1.18) изобщо не са от експоненциален вид, когато са цели. Всичко това внася усложнение при използването на методите и резултатите, свързани с функциите (1.01) и (1.02) за изследване нулите на (1.18). В [3] Пойа показва, че нулите на цялата функция

$$\int_0^\infty e^{-e^t + zt}\, dt$$

се намират в полуравнината $\operatorname{Re} z > 1$. Сега ще посочим някои достатъчни условия, при които нулите на целите функции от вида

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-\varphi(t)} e^{itz}\, dt \tag{1.19}$$

се намират в полуравнина, а в следващия параграф ще разгледаме същия въпрос за функциите (1.18).

<u>Теорема I.7.</u> Нека $\varphi(t)$ е монотонно растяща функция за $t \geq 0$ такава, че

$$\int_0^\infty e^{-\varphi(t) + t|y|}\, dt < +\infty \tag{1.20}$$

при всяко реално y. Тогава нулите на функцията (1.19) се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \leq 0$.

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че от условието (1.20) следва, че функцията (1.19) е цяла. Нека $0 < a < \infty$ и

$$F_a(z) = \int_0^a e^{-\varphi(t)} e^{itz} dt.$$

Тъй като $e^{-\varphi(t)}$ е положителна и монотонно намаляваща функция, то съгласно теоремата на Какеа нулите на полиномите

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-\varphi(a\frac{k}{n})} z^k \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ще лежат в областта $|z| \geq 1$. Тогава нулите на целите функции

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-\varphi(a\frac{k}{n})} e^{i\frac{k}{n}az}$$

ще се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \leq 0$ и по теоремата на Хурвиц нулите на $F_a(z)$ ще са също в долната полуравнина. Но $\lim\limits_{a\to\infty} F_a(z) = F(z)$ равномерно в горната полуравнина. Прилагайки отново теоремата на Хурвиц получаваме, че цялата функция (1.19) няма нули в горната полуравнина.

<u>Забележка.</u> Условието (1.20) сигурно е изпълнено, ако $\varphi(t) \sim t^{\alpha}$ при $t \to \infty$, където $\alpha > 1$.

Нека $\varphi(t)$ удовлетворява условията на теорема I.7. Тогава нулите на цялата функция

$$(1.21) \qquad \int_0^\infty e^{-\varphi(t)} e^{-itz} dt$$

ще лежат в горната полуравнина. За разлика от целите функции от вида (1.01) от това не следва, че нулите на съответните реални цели функции

$$(1.22) \qquad \int_0^\infty e^{-\varphi(t)} \cos tz \, dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-\varphi(t)} \sin tz \, dt$$

са реални. Ще разгледаме някои примери.

Пример. Съгласно теорема I.7 нулите на цялата функция

$$\int_0^{\infty} e^{-ach\,t-itz}\,dt\,,\quad a>0$$

са в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq 0$. Пойа установява, че цялата функция

$$\int_0^{\infty} e^{-ach\,t}\cos tz\,dt$$

притежава само реални нули (вж.стр.194 от работата на Л.Илиев [24]). Същият резултат се получава и от една теорема на Л.Илиев [24] . Тъй като функцията $e^{-ach\,t}$ е положителна и намаляваща, то както показва Л.Чакалов ([7] , стр.82) функцията

$$\int_0^{\infty} e^{-ach\,t}\sin tz\,dt$$

има само една реална нула ($z=0$) и безбройно много имагинерни. Същият резултат е налице и при цялата функция

$$\int_0^{\infty} e^{-t^{2q}-itz}\,dt,$$

където $q>1$ е цяло.

В следващия пример и двете реални функции (1.22) нямат реални нули, въпреки че нулите на (1.21) са в горната полуравнина.

Пример. Цялата функция

$e^{-\lambda e^{\mu t}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda e^{\mu t}-itz}\,dt,$$

където $\mu>0$, $\lambda\geq 1$ съгласно теорема I.7 няма нули в полуравнината $\Im z<0$. Тъй като функцията $e^{-\lambda e^{\mu t}}$ е положителна и монотонно намаляваща, то цялата функция

$$\int_0^\infty e^{-\lambda e^{\mu t}} \sin tz\, dt$$

няма реални нули, освен $z=0$. За цялата функция

$$\int_0^\infty e^{-\lambda e^{\mu t}} \cos tz\, dt$$

Е.Божоров [25] показва, че при $\mu>0$ и $\lambda\geqslant 1$ също няма реални нули.

Във връзка с изложения метод на интегралните суми в редица изследвания на наши математици усилията са били насочени към изследване разпределението на нулите на полиномите (1.03) и (1.06), от което пък могат да се направят заключения за нулите на целите функции (1.01) и (1.02). Естествено възниква въпросът за обратната връзка, т.е. акоеизвестно разположението на нулите на цялата функция (1.01), може ли да се извадят заключения за нулите на полиномите (1.03). По-точно, какво може да се твърди за нулите на полиномите (1.03), ако допуснем, че нулите на цялата функция (1.01) са в горната полуравнина или в полуравнината $\Im z \geqslant -\lambda$ за някое $\lambda>0$. Изследвания по този въпрос не сме срещали в литературата. Разглеждането на конкретни примери дава основание да се очаква в първия случай нулите на полиномите (1.03) за достатъчно големи n да са в кръга $|z|\leq 1$ а във втория случай - в кръга $|z|\leq 1+\frac{\lambda}{n}$ или $|z|\leq e^{\frac{\lambda}{n}}$.

<u>Пример</u>. Нека

$$F(z)=\int_0^1 e^{-\lambda t} e^{itz}\, dt,$$

където λ е положителна константа. Нулите на тази цяла функция са $z_k = -i\lambda + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, т.е. те са в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$. Съответният полином е

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda\frac{k}{n}} z^k.$$

С прости пресмятания се получава, че неговите нули лежат върху окръжността $|z| = e^{\frac{\lambda}{n}}$.

Ще разгледаме още следния

Пример. Нека

$$F(z) = \int_0^1 (1-t)e^{itz}\,dt.$$

Съответният полином е

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) z^k.$$

С непосредствено пресмятане получаваме, че

$$F(z) = \frac{e^{iz} - 1 - iz}{(iz)^2}$$

и

$$P_n(z) = \frac{z^{n+1} - (n+1)z + n}{n\,(z-1)^2}.$$

Нулите на цялата функция $F(z)$ се дават с формулата ([7] - стр.67)

$$z = \pm\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_k\right) - i\log(2k\pi) - i\eta_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

където ε_k и η_k клонят към нула заедно с $1/k$. Следователно не съществува полуравнина от вида $\mathrm{Im}\, z \geq -\lambda$, където $\lambda \geq 0$, която да съдържа всички нули на $F(z)$.

Нека $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ са нулите на полинома $P_n(z)$. Тъй като функцията $1-t$ е положителна и монотонно намаляваща в интервала $[0,1]$, то по теоремата на Какеа $|z_k| \geq 1$. Да допуснем, че всички z_k удовлетворяват неравенството $|z_k| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}$ за някое $\lambda > 0$. Тогава от равенството

$$|z_1 . z_2 . z_3 \ldots z_{n-1}| = n$$

ще следва, че

$$n \leq \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}.$$

Тъй като $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \sim e^{\lambda}$, то последното неравенство няма да бъде изпълнено за достатъчно големи n. Така получихме, че не може да се намери положително число λ такова, че всички нули на полинома $P_n(z)$ да се намират във венеца $1 \leq |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}$.

Това беше естествено да се очаква като се има предвид разположението на нулите на $F(z)$. За нулите на полинома $P_n(z)$ може да се докаже дори нещо повече, а именно: каквото и да е положителното число λ, полиномът $P_n(z)$ има нули в областта $|z| > 1 + \frac{\lambda d_n}{n}$, където $d_n = O[(\ln n)^{\delta}]$ с $\delta < 1$.

Засега не разполагаме с отговор на поставения по-горе въпрос. В състояние сме да докажем следното твърдение, което е доста по-слабо от очакваното.

<u>Теорема I.8.</u> Нека нулите на цялата функция (1.01) се намират в полуравнината $\mathrm{Im}\, z > 0$. Ако $|f(1)| > |f(0)|$ и

$f(t)$ притежава в интервала $[0,1]$ непрекъснати първа и втора производна, то за достатъчно големи n полиномите (1.03) нямат нули вън от кръга $|z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}$ и в областта

$$(1.23) \qquad \begin{cases} 1 \leq |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n} \\ |\arg z| \leq M n^{-\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

където λ и M са подходящи положителни числа.

В доказателството ще използуваме формулата за сумиране на Ойлер-Маклорен ([26] - стр. 283), която установява връзка между сумата от значения на дадена функция в равноотстоящи точки и интеграла от тази функция. Нека $\varphi(t)$ е функция, дефинирана за $t \geqslant 0$ и притежаваща производни до $(2m+3)^{\text{ти}}$ ред включително. Тогава формулата на Ойлер-Маклорен ни дава

$$(1.24) \quad \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = \int_0^n \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}[\varphi(0)+\varphi(n)] + \frac{B_1}{2!}[\varphi'(n)-\varphi'(0)] - \frac{B_2}{4!}[\varphi'''(n)-\varphi'''(0)] +$$

$$+ \dots + (-1)^m \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}\left[\varphi^{(2m+1)}(n) - \varphi^{(2m+1)}(0)\right] + (-1)^m \int_0^n P_{2m+3}(t)\,\varphi^{(2m+3)}(t)\,dt,$$

където B_k са числата на Бернули, а $P_k(t)$ са периодични функции с период 1, интеграл от $P_k(t)$, взет по кой да е интервал с дължина единица е нула и

$$P'_{2m}(t) = -P_{2m-1}(t) \quad ; \quad P'_{2m+1}(t) = P_{2m}(t).$$

При това $\quad P_1(t) = -t + \frac{1}{2} \quad$ за $\quad 0 \leq t \leq 1$.

Ще ни бъде необходима една оценка отдолу на $|F(f;z)|$ за значения на z от долната полуравнина. Да разгледаме функцията $\frac{iz F(f;z)}{e^{iz}}$ в тази полуравнина. След интегриране по части получаваме

$$\frac{iz\,F(f;z)}{e^{iz}} = f(1) - f(0)e^{-iz} - \frac{f'(1)}{iz} + \frac{f'(0)e^{-iz}}{iz} + \frac{e^{-iz}}{iz}\int_0^1 f''(t)\,e^{itz}\,dt.$$

Оттук, ако $z = x+iy$, то

$$\left|\frac{iz\,F(f;z)}{e^{iz}}\right| \geqslant |f(1)| - |f(0)|e^{y} - \frac{f'(1)}{|z|} - \frac{|f'(0)|e^{y}}{|z|} - \frac{e^{y}}{|z|}\int_0^1 |f''(t)|\,e^{-ty}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant |f(1)| - |f(0)| - \frac{1}{|z|}\left[\,|f'(1)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt\right].$$

Следователно могат да се намерят положителни числа R и A такива, че за $|z| \geqslant R$, $\operatorname{Im} z < 0$ да е изпълнено

$$\left|\frac{iz\,F(f;z)}{e^{iz}}\right| \geqslant A. \tag{1.25}$$

Доказателство на теорема I.8. От направените предположения следва, че $f(t)$ е с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната е в точката 1 и $f(1) \neq 0$, т.е. $f(t)$ удовлетворява условията на теорема I.2. Следователно може да се намери положително число λ такова, че за всички достатъчно големи n нулите на полиномите (1.03) да лежат в кръга $|z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}$. Сега ще покажем, че полиномите (1.03) нямат нули в частта (1.23) на този кръг. Да разгледаме целите функции

$$F_n(f;z) = \frac{1}{n}\,P_n(f;z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\!\left(\frac{k}{n}\right) e^{i\frac{k}{n}z}. \tag{1.26}$$

Нулите на функциите (1.26) за достатъчно големи n ще лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)$. Но те не могат да имат нули в областта

$$\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \leq R \\ -n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) \leq \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

където R е произволно положително число. Наистина, да допуснем противното. Тогава поради $\lim_{n\to\infty} F_n(z) = F(f;z)$ равномерно върху всяко ограничено множество от комплексната равнина ще следва от теоремата на Хурвиц, че цялата функция (1.01) има нули в областта

$$\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le R \\ -\lambda \le \operatorname{Im} z \le 0, \end{cases}$$

което противоречи на предположението за нулите на тази функция.

Като приложим формула (1.24) към функцията ?

получаваме

$$F_n(f;z) = F(f;z) + \frac{1}{2n}\left[f(1)e^{iz} + f(0)\right] + \frac{1}{12n^2}\left[f'(1)e^{iz} + iz f(1)e^{iz} - f'(0) - iz f(0)\right] -$$

$$(1.28)\qquad - \frac{1}{n^3}\int_0^n P_2(t)\left[f''\left(\tfrac{t}{n}\right) + 2iz f'\left(\tfrac{t}{n}\right) + (iz)^2 f\left(\tfrac{t}{n}\right)\right] e^{i\frac{t}{n}z}\,dt,$$

където $P_2(t)$ е непрекъсната периодична функция с период 1 и

$$P_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \quad \text{за} \quad 0 \le t < 1.$$

Ако представим дясната част на (1.28) като $F(f;z) + \eta_n(f;z)$, то поради $F(f;z) \ne 0$ за $\operatorname{Im} z \le 0$ можем да запишем за такива z

$$(1.29)\qquad F_n(f;z) = F(f;z)\left[1 + \frac{\eta_n(f;z)}{F(f;z)}\right].$$

Нека R е положително число, за което в долната полуравнина е изпълнено неравенството (1.25), ако $|z| \ge R$. Като се използува оценката (1.25), може да се намери положителна константа M, зависеща от A и $m = \max_{0\le t\le 1}|f(t)|$ такава, че за значения на z от областта

$$(1.30)\qquad \begin{cases} R \le |\operatorname{Re} z| \le M n^{2/3} \\ -n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \le \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$$

да е изпълнено неравенството

$$\left| \frac{\eta_n(f;z)}{F(f;z)} \right| < 1$$

за всички достатъчно големи n . От това неравенство и представянето (1.29) следва, че за всички такива n функциите (1.26) нямат нули в областта (1.30). Но те нямат нули и в областта (1.27) при така избраното R . И така, за достатъчно големи n целите функции (1.26) нямат нули в областта

$$\begin{cases} |\mathrm{Re}\, z| \leq M n^{2/3} \\ -n \ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) \leq \mathrm{Im}\, z \leq 0 \,. \end{cases}$$

Оттук поради равенството $F_n(f;z) = \frac{1}{n} P_n(f; e^{i\frac{z}{n}})$ следва, че полиномите (1.03) за всички такива n нямат нули в областта (1.23).

<u>Забележка.</u> Ако $f(t)$ има непрекъснати производни до k ти ред включително, може да се покаже, че за достатъчно големи n полиномите (1.03) нямат нули в областта

$$\begin{cases} 1 \leq |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n} \\ |\arg z| \leq M n^{-\frac{1}{k+1}} \,. \end{cases}$$

§ 2. Прецизиране на един резултат на Обрешков

В този параграф се занимаваме с разпределението на нулите на целите функции от вида

$$E(f;z) = \int_{-a}^{a} f(t) e^{itz} dt \qquad (0 < a < \infty), \tag{2.01}$$

където $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в риманов смисъл в интервала $[-a,a]$.

В [27] Пойа, както отбелязва Обрешков в [5] на стр.23, разглежда цели функции от вида

$$(2.02) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k z},$$

където $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са различни комплексни числа. Нека $\bar{A}$ е най-малкия изпъкнал многоъгълник, който съдържа всички точки $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ и ε е произволно малко положително число. Пойа доказва, че с изключение на краен брой нулите на функцията (2.02) се намират в ъгли с раствор ε, имащи за ъглополовящи лъчите, изхождащи от началото и перпендикулярни на страните на $\bar{A}$. Ако $N(r)$ е броя на нулите в един такъв ъгъл, чиито модул не надминава r, то

$$N(r) = \frac{\ell}{2\pi} r + O(\log r),$$

където ℓ е дължината на съответната страна на $\bar{A}$. Аналогичен резултат е валиден и за функциите

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(z) e^{a_k z},$$

където $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ са дадени полиноми. Пойа показва още, че ъглите могат да се заменят с пространство между две логаритмични криви.

В един граничен случай на частния случай при a_n реални от Палей, Титчмарш и Винер е установено следното: ако функцията $f(t)$ е интегруема по Лебег в интервала $[-a,a]$, то каквото и да е $\varepsilon > 0$, нулите на цялата функция (2.01) с изключение евентуално на краен брой, лежат в секторите $|\arg z| \le \varepsilon$ и $|\arg z - \pi| \le \varepsilon$ (стр.24 от работата на Обрешков [5]). Н.Обрешков [5] доказва теорема, в която значително се прецизира областта, съдържаща нулите на функцията (2.02). Неговият резултат гласи: нека $L_1, L_2, \ldots, L_m$ са всички полулъчи, изхождащи от началото и перпендикулярни на страните на $\bar{A}$. Тогава могат да се прекарат по две успоредни прави на полулъчите L_k, заграждащи една област $\mathcal{D}$, в която лежат всичките нули на (2.02). В същата работа Н.Обрешков изследва и разположението на нулите на целите функции (2.01). Той установява, че ако $f(t)$ е функция, непрекъсната в интервала $(-a,a)$, която допуска абсолютно интегруема производна и $f(a)f(-a) \neq 0$, то има ивица, съдържаща реалната ос, в която се намират всички нули на цялата функция (2.01). Ще покажем, че нулите на (2.01) остават в ивица, успоредна на реалната ос и при по-общи предположения за функцията $f(t)$.

<u>Теорема I.9.</u> Нека $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[-a,a]$, непрекъсната в краищата на интервала и $f(a)f(-a) \neq 0$. Тогава съществува ивица, успоредна на реалната ос, която съдържа всичките нули на цялата функция (2.01).

Доказателство. Ще използуваме метода на доказателство на теоремата на Обрешков. Да разгледаме функцията $\Phi(z) = iz e^{iaz} E(f;z)$. След интегриране по части получаваме

$$\Phi(z) = f(a) e^{2iaz} - f(-a) - \int_{-a}^{a} e^{i(t+a)z} \, d f(t).$$

Нека

$$\eta(z) = -\frac{f(a)}{f(-a)} e^{2iaz} + \frac{1}{f(-a)} \int_{-a}^{a} e^{i(t+a)z} \, d f(t).$$

Ако $z = x+iy$, то за $\eta(z)$ е изпълнено

$$|\eta(z)| \leq \left|\frac{f(a)}{f(-a)}\right| e^{-2ay} + \left|\frac{1}{f(-a)} \int_{-a}^{a} e^{i(t+a)z} \, d f(t)\right|.$$

Нека μ е положително число, по-малко от 1. Тогава

$$(2.03)\qquad \left|\frac{f(a)}{f(-a)}\right| e^{-2ay} < \frac{\mu}{3} \qquad \text{за } y > \frac{1}{2a} \ln \frac{3|f(a)|}{\mu|f(-a)|}.$$

От непрекъснатостта на функцията $f(t)$ в точките a и $-a$ следва непрекъснатостта на $V(f;-a,x)$ в точката $-a$ и $V(f;-a,x)\to 0$ при $x\to -a$, съответно непрекъснатостта на $V(f;x,a)$ в точката a и $V(f;x,a)\to 0$ при $x\to a$. В такъв случай може да се намери положително число δ такова, че

$$(2.04)\qquad V(f;-a,x) < \frac{\mu}{3}|f(-a)| \qquad \text{за } -a \le x \le -a+\delta$$

и

$$(2.05)\qquad V(f;x,a) < \frac{\mu}{3}|f(a)| \qquad \text{за } a-\delta \le x \le a.$$

От (2.04), като се имат предвид свойствата на Стилтесовия интеграл се получава

$$(2.06)\qquad \left|\frac{1}{f(-a)}\int_{-a}^{-a+\delta} e^{i(t+a)z}\,df(t)\right| \le \frac{V(f;-a,-a+\delta)}{|f(-a)|}\sup_{-a\le t\le -a+\delta}\left|e^{i(t+a)z}\right| <$$

$$< \frac{\mu}{3}\sup_{-a\le t\le -a+\delta} e^{-y(t+a)} \le \frac{\mu}{3} \qquad \text{за } y>0.$$

Освен това

$$(2.07)\qquad \left|\frac{1}{f(-a)}\int_{-a+\delta}^{a} e^{i(t+a)z}\,df(t)\right| \le \frac{V(f;-a+\delta,a)}{|f(-a)|}\sup_{-a+\delta\le t\le a}\left|e^{i(t+a)z}\right| \le \frac{V(f;-a,a)}{|f(-a)|}\sup_{-a+\delta\le t\le a} e^{-y(t+a)}$$

$$\le e^{-\delta y}\frac{V(f;-a,a)}{|f(-a)|} < \frac{\mu}{3} \qquad \text{за } y>\max\left[0, \frac{1}{\delta}\ln\frac{3V(f;-a,a)}{\mu|f(-a)|}\right].$$

Нека

$$\lambda = \max\left[0, \frac{1}{2a}\ln\frac{3|f(a)|}{\mu|f(-a)|}, \frac{1}{\delta}\ln\frac{3V(f;-a,a)}{\mu|f(-a)|}\right].$$

От (2.03), (2.06) и (2.07) получаваме, че за $y>\lambda$ е изпълнена

$$iz e^{iaz}F(f;z) = f(-a)\left[1+\eta(z)\right],$$

където $|\eta(z)| < \mu$. Следователно цялата функция $E(f;z)$ няма нули в полуравнината $\operatorname{Im} z > \lambda$.

Да разгледаме сега функцията $\Phi_1(z) = ize^{-iaz} E(f;z)$. Имаме $\Phi_1(z) = f(a)\,[1 + \eta_1(z)]$, където

$$\eta_1(z) = -\frac{f(-a)}{f(a)} e^{-2iaz} - \frac{1}{f(a)} \int_{-a}^{a} e^{i(t-a)z}\, df(t).$$

Но

$$(2.08) \quad \left|\frac{f(-a)}{f(a)} e^{-2iaz}\right| = \left|\frac{f(-a)}{f(a)}\right| e^{2ay} < \frac{\mu}{3} \quad \text{за} \quad y < -\frac{1}{2a} \ln \frac{3\,|f(-a)|}{\mu\,|f(a)|}.$$

Като се използува неравенството (2.05) се получава

$$(2.09) \quad \left|\frac{1}{f(a)} \int_{a-\delta}^{a} e^{i(t-a)z}\, df(t)\right| \le \frac{V(f;a-\delta,a)}{|f(a)|} \sup_{a-\delta \le t \le a} e^{-y(t-a)} < \frac{\mu}{3} \quad \text{за} \quad y < 0 .$$

Освен това

$$(2.10) \quad \left|\frac{1}{f(a)} \int_{-a}^{a-\delta} e^{i(t-a)z}\, df(t)\right| \le \frac{V(f;-a,a-\delta)}{|f(a)|} \sup e^{-y(t-a)} \le e^{\delta y} \frac{V(f;-a,a)}{|f(a)|} < \frac{\mu}{3}$$

за $\quad y < \min\left[0, -\frac{1}{\delta} \ln \frac{3\,V(f;-a,a)}{\mu\,|f(a)|}\right].$

Нека $\quad \lambda_1 = \min\left[0, -\frac{1}{2a} \ln \frac{3\,|f(-a)|}{\mu\,|f(a)|}, -\frac{1}{\delta} \ln \frac{3\,V(f;-a,a)}{\mu\,|f(a)|}\right]$.

Тогава за $y < \lambda_1$ е изпълнено

$$|\eta_1(z)| < \mu .$$

Следователно функцията $E(f;z)$ няма нули в полуравнината $\operatorname{Im} z < \lambda_1$.

И така, при направените предположения нулите на цялата функция $E(f;z)$ се намират в ивицата

$$\lambda_1 \le \operatorname{Im} z \le \lambda .$$

<u>Пример</u>. Нека

$$(2.11) \qquad E(f;z) = \int_{-1}^{1} (1+t)\, e^{itz}\, dt .$$

Функцията $f(t) = 1 + t$ удовлетворява както условията на теоремата на Обрешков, така и условията на теорема I.9 в интервала $[-1, 1]$

с изключение на условието за неанулиране в краищата ($f(-1)=0$). Чрез непосредствено пресмятане получаваме

$$E(f;z)=\int_{-1}^{1}(1+t)e^{itz}dt=-\frac{e^{iz}}{z^2}\left[e^{-2iz}-1+2iz\right].$$

Нулите на тази цяла функция, както посочва Чакалов в работата си [7] на стр.67 се дават с формулата

$$z=\pm\left(k\pi+\frac{\pi}{4}-\varepsilon_k\right)+\frac{i}{2}\log(2k\pi)+i\eta_k \quad (k=1,2,3,\ldots),$$

където ε_k и η_k са положителни числа, които клонят към нула заедно с $\frac{1}{k}$. Следователно не може да се намери ивица, успоредна на реалната ос, която да съдържа всичките нули на функцията (2.11). Този пример показва, че в теорема I.9 не можем да се откажем от условието $f(a)f(-a)\neq 0$.

Теорема I.9, приложена към целите функции (1.01) ни дава теорема I.3.

Нека

$$\mathcal{F}(z)=\int_{0}^{1}\left[f(t)e^{itz}+\varphi(t)e^{-itz}\right]dt, \tag{2.12}$$

където $f(t)$ и $\varphi(t)$ са реални функции, дефинирани и интегруеми в Риманов смисъл в интервала $[0,1]$. С помощта на теоремата на Какеа и метода на интегралните суми може да се покаже, че ако $f(t)$ и $\varphi(t)$ са положителни функции, от които $f(t)$ расте, а $\varphi(t)$ намалява в интервала $[0,1]$ и $f(0)=\varphi(0)$, то нулите на (2.12) лежат в горната полуравнина. Като приложим теорема I.9 към целите функции (2.12) получаваме следната

<u>Теорема I.10.</u> Нека $f(t)$ и $\varphi(t)$ са функции с ограничена вариация в интервала $[0,1]$. Ако $f(t)$ е непрекъсната в точката 1 и $f(1)\neq 0$, нулите на цялата функция (2.12) се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$ за някое $\lambda\geqslant 0$.

Ако $\varphi(t)$ е непрекъсната в точката 1 и $\varphi(1)\neq 0$, нулите на (2.12) са в полуравнината $\operatorname{Im} z \leq \lambda_1$ при подходящо $\lambda_1 \geq 0$.

При $\varphi(t) = \varepsilon f(t)$, където $\varepsilon = \pm 1$ от теорема I.10 получаваме теорема I.6.

Във връзка със споменатия в § 1 резултат на П.Русев за нулите на целите функции от вида (1.07) интерес представлява намирането на условия, при които целите функции

$$\int_{-a}^{a} f(t) e^{itz} d\psi(t)$$

имат нулите си в полуравнина от вида $\operatorname{Im} z \geq -\lambda$, $\lambda > 0$ или в ивица, успоредна на реалната ос. Засега не са ни известни такива условия. Методът, който използваме тук, не дава резултат в този случай. Той може обаче да се използва за изследване разпределението на нулите на целите функции от вида (1.18). Ще посочим някои достатъчни условия, при които нулите на (1.18) се намират в полуравнина.

<u>Теорема I.11.</u> Ако $f(t)$ е реална функция, дефинирана за $t \geq 0$, $f(0)\neq 0$, $f(t) = O(e^{-t^{\alpha}})$, където $\alpha > 1$ и

$$\int_{0}^{\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty,$$

то всички нули на функцията (1.18) се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \leq \lambda$ за някое неотрицателно λ.

Доказателство. При направените предположения функцията (1.18) е цяла. Да разгледаме функцията $izF(z)$ в горната полуравнина. Имаме

$$izF(z) = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{itz} - f(0) - \int_{0}^{\infty} f'(t)e^{itz}dt = -f(0)\left[1 + \frac{1}{f(0)}\int_{0}^{\infty} f'(t)e^{itz}dt\right],$$

тъй като

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{itz} = 0 \quad , \text{ако} \quad \mathrm{Im}\, z > 0.$$

Нека μ е положително число, по-малко от 1 . Тогава ако $z = x+iy$, то

$$(2.13) \quad \left| \frac{1}{f(0)} \int_0^{\varepsilon} f'(t) e^{itz} dt \right| \le \frac{1}{|f(0)|} \int_0^{\varepsilon} |f'(t)| e^{-ty} dt \le \frac{1}{|f(0)|} \int_0^{\varepsilon} |f'(t)| dt < \frac{\mu}{2}$$

за $y > 0$ и ε - достатъчно малко положително число.

Освен това

$$(2.14) \quad \left| \frac{1}{f(0)} \int_{\varepsilon}^{\infty} f'(t) e^{itz} dt \right| \le \frac{1}{|f(0)|} \int_{\varepsilon}^{\infty} |f'(t)| e^{-ty} dt \le \frac{e^{-\varepsilon y}}{|f(0)|} \int_0^{\infty} |f'(t)| dt < \frac{\mu}{2}$$

за

$$y > \max\left[0, \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{2\int_0^{\infty} |f'(t)| dt}{\mu |f(0)|}\right].$$

От (2.13) и (2.14) следва, че ако ε е положително число, за което е изпълнено (2.13) и

$$\lambda = \max\left[0, \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{2\int_0^{\infty} |f'(t)| dt}{\mu |f(0)|}\right],$$

то за $y > \lambda$

$$iz F(z) = -f(0)\left[1 + \eta(z)\right],$$

където $|\eta(z)| < \mu$. Следователно цялата функция (1.18) не може да се анулира в полуравнината $\mathrm{Im}\, z > \lambda$ при така избраното λ .

§ 3. Теорема от типа на Билер-Ермит за един клас цели функции от експоненциален вид

Добре известна е следната теорема на Билер-Ермит за полиноми (вж. [28] - стр. 394): необходимо и достатъчно условие полиномът

$$(3.01) \qquad F(z) = U(z) + i\, V(z)$$

където $U(z)$ и $V(z)$ са реални полиноми[ж)], да няма нули в затворената долна полуравнина е да бъде изпълнено следното:

а) полиномите $U(z)$ и $V(z)$ да имат само реални и прости нули, които взаимно се разделят;

б) в някоя точка x_0 от реалната ос

$$V'(x_0)\,U(x_0) - U'(x_0)\,V(x_0) > 0$$

В тази си форма критерият на Билер-Ермит не се пренася за произволни цели функции. Може да се покаже с прости примери, че за цялата функция $F(z) = U(z) + i\,V(z)$ реалността и редуването на нулите на $U(z)$ и $V(z)$ не се явява нито необходимо, нито достатъчно условие за това, щото $F(z)$ да няма нули в долната или горната полуравнина.

При пренасяне на критерия на Билер-Ермит за цели функции съществена роля играят следните класове цели функции.

<u>Определение I.1.</u> ([28] - стр.405). Цялата функция $F(z)$ се нарича функция от класа $\overline{HB}$, ако тя няма нули в отворената полуравнина $\operatorname{Im} z < 0$ и

(3.02) $$\left|\frac{F(z)}{\bar{F}(z)}\right| \leq 1 \qquad \text{за } \operatorname{Im} z > 0$$ [жж)].

ж) Очевидно, всяка цяла функция може да се представи във вида (3.01), където $U(z)$ и $V(z)$ са реални цели функции.

жж) Тук, както обикновено, под $\bar{F}(z)$ се разбира цяла функция, която се получава от функцията $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ чрез замяна в степенното и развитие на всички коефициенти със спрегнатите.

<u>Определение I.2.</u> ([28] - стр. 412). Цялата функция $F(z)$ от експоненциален вид се нарича функция от класа P, ако:

а) $F(z)$ няма нули в отворената долна полуравнина;

б) дефектът на функцията $F(z)$ е неотрицателен.

Да припомним, че дефектът на цялата функция $F(z)$ от експоненциален вид се определя с равенството

$$2d_F = h_F\left(-\frac{\pi}{2}\right) - h_F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

където $h_F(\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$, е индикаторната функция на $F(z)$, т.е.

$$h_F(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r}.$$

Обобщение на критерия на Билер-Ермит за целите функции от класа $\overline{HB}$ е предложено от Мейман. Това всъщност е един критерий за принадлежност на една цяла функция към класа $\overline{HB}$ и той гласи ([28] - стр. 405): за да принадлежи функцията

$$F(z) = U(z) + i\,V(z)$$

на класа $\overline{HB}$, необходимо и достатъчно е да са изпълнени следните условия:

а) функциите $U(z)$ и $V(z)$ да се представят във вида

$$U(z) = R(z)\,U_1(z) \quad \text{и} \quad V(z) = R(z)\,V_1(z),$$

при това нулите на целите функции $R(z)$, $U_1(z)$ и $V_1(z)$ да са реални и нулите на $U_1(z)$ и $V_1(z)$ да се разделят;

б) ако

$$U_1(z) = A e^{\alpha(z)} (z-a_0) \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)} \qquad (\alpha(0)=0),$$

$$V_1(z) = B e^{\beta(z)} (z-b_0) \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{b_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)} \qquad (\beta(0)=0),$$

то

$$(3.03) \qquad \alpha(z) - \beta(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[P_k\left(\frac{z}{a_k}\right) - P_k\left(\frac{z}{b_k}\right) \right] = 0 \quad ;$$

в) в някоя точка x_0 от реалната ос

$$V'(x_0)\,U(x_0) - U'(x_0)\,V(x_0) \geqslant 0 \quad .$$

Забележка. Н.Н.Мейман [29] показва, че теоремата на Билер-Ермит не може да се обобщи за по-широк клас цели функции.

В тази си форма горният критерий едва ли има практическо значение, понеже в него преди всичко явно участвуват нулите на функциите $U(z)$ и $V(z)$. Обаче в случай на цели функции от експоненциален вид трудно проверяемите условия (3.02) и (3.03) могат да се заменят с условия, свързани с индикаторните диаграми на функциите $F(z)$, $U(z)$ и $V(z)$, които в много случаи лесно се проверяват. Обобщеният критерий на Билер-Ермит за цели функции от експоненциален вид е установен от Левин ([28] - стр. 415) и той може да се формулира по следния начин: за да принадлежи функцията

$$F(z) = U(z) + i\,V(z)$$

на класа P, необходимо и достатъчно е да са изпълнени следните условия:

а) функциите $U(z)$ и $V(z)$ да се представят във вида

$$U(z) = R(z)\,U_1(z) \qquad \text{и} \qquad V(z) = R(z)\,V_1(z) \quad ,$$

където нулите на целите функции $R(z)$, $U_1(z)$ и $V_1(z)$ са реални и нулите на $U_1(z)$ и $V_1(z)$ се редуват;

б) функциите $U(z)$ и $V(z)$ да са от експоненциален вид и индикаторните им диаграми да съвпадат;

в) в някоя реална точка x_0

$$V'(x_0)\,U(x_0) - U'(x_0)\,V(x_0) \geqslant 0 \quad .$$

Ако дефектът d_F на цялата функция $F(z)$ от експоненциален вид е положителен, то условието а) се явява необходимо и достатъчно за принадлежност на функцията $F(z)$ към класа P.

По такъв начин, от обобщения критерий на Билер-Ермит следва, че ако $F(z)=U(z)+iV(z)$ е цяла функция от експоненциален вид с положителен дефект и с нули в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, всички нули на $U(z)$ и $V(z)$ са реални. В този параграф ще изследваме разположението на нулите на целите функции $U(z)$ и $V(z)$ в случая, когато нулите на $F(z)$ са в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$, където $\lambda > 0$. Ще отбележим, че при направените предположения за функцията $F(z-i\lambda)$ е приложим обобщеният критерий на Билер-Ермит, но от прилагането му не може да се заключи нищо за нулите на $U(z)$ и $V(z)$. С други думи, критерият на Билер-Ермит не е инвариантен относно трансформации от вида $z=z'-i\lambda$.

Например, нека

$$F(z)=F(f;z)=\int_0^1 f(t)e^{itz}dt$$

има нулите си в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$ ($\lambda>0$). Тогава цялата функция $F(z-i\lambda)$ ще има нулите си в $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. От обобщения критерий на Билер-Ермит следва, че нулите на целите функции

$$\int_0^1 f(t)e^{\lambda t}\cos tz\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(t)e^{\lambda t}\sin tz\,dt$$

са реални. Но от този факт засега не можем да направим никакви изводи за нулите на функциите

$$\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt.$$

След тези предварителни бележки ще формулираме основната теорема на този параграф.

Теорема I.12. Нека $F(z)=U(z)+iV(z)$ е цяла функция от експоненциален вид, която удовлетворява условията:

а) дефектът на $F(z)$ е положителен;

б) нулите на $F(z)$ се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\lambda$, $\lambda \geq 0$;

в) функцията $F(z)$ е ограничена върху реалната ос;

г) съществуват числа $\alpha > \lambda$, за които

$$M_F(\alpha,\lambda) = \sup_{-\infty < t < +\infty} \left| \frac{F(t+i\alpha)}{\overline{F}(t+i\alpha)} \right| < +\infty .$$

Тогава каквото и да е $\alpha > \lambda$, за което е изпълнено условието г), нулите на реалните цели функции $U(z)$ и $V(z)$ се намират в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \leq \alpha + \frac{1}{2d_F} \ln^+ M_F(\alpha,\lambda).$$

Ще докажем най-напред следната

Лема I.1. Ако $F(z)$ удовлетворява условията на теорема I.12, то

$$\left| \frac{F(z)}{\overline{F}(z)} \right| < 1 \qquad \text{за} \quad \operatorname{Im} z > \alpha + \frac{1}{2d_F} \ln^+ M_F(\alpha,\lambda) ,$$

каквото и да е $\alpha > \lambda$, за което е изпълнено условието г).

За доказателството на лема I.1 ще ни бъде необходимо следното твърдение ([28] - стр. 311), даващо представяне на функции, холоморфни в полуравнина чрез интеграл на Поасон: ако функцията $F(z)$ е холоморфна и от експоненциален вид в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq 0$ и съществува интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(t)|}{1+t^2} dt \qquad (3.04)$$

то

$$\ln|F(z)| = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|F(t)| \frac{dt}{(t-x)^2+y^2} + ky + \ln|\chi(z)|,$$

където $\kappa = h_F(\frac{\pi}{2})$ и

$$X(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/a_k)(1 - z/\bar{a}_k)^{-1},$$

при това a_k са нулите на $F(z)$ в полуравнината $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказателство на лема I.1. Тъй като $F(z)$ е цяла функция от експоненциален вид, ограничена върху реалната ос, то тя ще е ограничена и върху всяка права, успоредна на реалната ос ([30] - стр.82). Тогава, каквото и да е реалното число α, ще съществува интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(t+i\alpha)|}{1+t^2}\,dt. \tag{3.05}$$

Нека $\alpha > \lambda$ е число, за което е удовлетворено условието г). Съгласно споменатото по-горе твърдение в полуравнината $\operatorname{Im} z > \alpha$ ще имаме представянето

$$\ln|F(z)| = \frac{y-\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|F(t+i\alpha)|\frac{dt}{(t-x)^2+(y-\alpha)^2} + (y-\alpha)h_F(\tfrac{\pi}{2}) + \ln|X(z-i\alpha)|, \tag{3.06}$$

където произведението $X(z)$ е съставено по нулите a_k на функцията $F(z+i\alpha)$, намиращи се в горната полуравнина.

Функцията $\bar{F}(z)$ е също цяла от експоненциален вид и от равенството $\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$ следва, че тя е ограничена върху реалната ос и следователно върху всяка права, успоредна на реалната ос. Освен това $\bar{F}(z)$ няма нули в полуравнината $\operatorname{Im} z > \alpha$. Тогава в тази полуравнина ще имаме

$$\ln|\bar{F}(z)| = \frac{y-\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\bar{F}(t+i\alpha)|\frac{dt}{(t-x)^2+(y-\alpha)^2} + (y-\alpha)h_{\bar{F}}(\tfrac{\pi}{2}). \tag{3.07}$$

От равенството $|F(z)| = |\bar{F}(\bar{z})|$ следва, че

$$h_{\bar{F}}(\tfrac{\pi}{2}) = \overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|\bar{F}(iy)|}{y} = \overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|F(-iy)|}{y} = h_F(-\tfrac{\pi}{2}).$$

По такъв начин от (3.06) и (3.07) получаваме, че в полуравнината $\operatorname{Im} z > d$ е валидно представянето

$$(3.08)\quad \ln\left|\frac{F(z)}{\bar F(z)}\right| = \frac{y-d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{F(t+id)}{\bar F(t+id)}\right|\frac{dt}{(t-x)^2+(y-d)^2} - 2d_F(y-d) + \ln|X(z-id)|.$$

Тъй като $\operatorname{Im} a_k > 0$, то $|X(z-id)| < 1$ в полуравнината $\operatorname{Im} z > d$ и оттук $\ln|X(z-id)| < 0$. Освен това, като вземем предвид, че за всички реални t

$$\ln\left|\frac{F(t+id)}{\bar F(t+id)}\right| \leq \ln^+ M_F(d,\lambda)$$

получаваме

$$\frac{y-d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{F(t+id)}{\bar F(t+id)}\right|\frac{dt}{(t-x)^2+(y-d)^2} - 2d_F(y-d) \leq \ln^+ M_F(d,\lambda) - 2d_F(y-d) < 0$$

за

$$\operatorname{Im} z > d + \frac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(d,\lambda).$$

От получените неравенства и представянето (3.08) следва, че

$$\ln\left|\frac{F(z)}{\bar F(z)}\right| < 0 \qquad \text{или все едно} \qquad \left|\frac{F(z)}{\bar F(z)}\right| < 1 \qquad \text{в}$$

полуравнината $\operatorname{Im} z > d + \frac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(d,\lambda)$.

Доказателство на теорема I.12. Тъй като

$$U(z) = \frac{1}{2}\left[F(z) + \bar F(z)\right] \qquad \text{и} \qquad V(z) = \frac{1}{2i}\left[F(z) - \bar F(z)\right]$$

и $\bar F(z) \neq 0$ за всяко z от полуравнината $\operatorname{Im} z > \lambda$, то за такива z горните равенства могат да се запишат във вида

$$U(z) = \frac{\bar F(z)}{2}\left[\frac{F(z)}{\bar F(z)} + 1\right] \quad \text{и} \quad V(z) = \frac{\bar F(z)}{2i}\left[\frac{F(z)}{\bar F(z)} - 1\right].$$

Според лема I.1 $|F(z)/\bar F(z)| < 1$ за $\operatorname{Im} z > d + \frac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(d,\lambda)$, каквото и да е $d > \lambda$, удовлетворяващо условието г) на теоремата. Следователно $U(z)$ и $V(z)$ не се анулират в полуравнината $\operatorname{Im} z > d + \frac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(d,\lambda)$. Но тъй като $U(z)$ и $V(z)$ са реални цели функции, то те няма да се анулират и в полуравнината $\quad \operatorname{Im} z < -\alpha - \dfrac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(\alpha,\lambda)$.

<u>Забележка.</u> Условието в) на теорема I.12 може да се замени с по-малко ограничителното условие от същото естество, а именно със съществуването на интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|F(t)|}{1+t^2}\,dt. \tag{3.09}$$

За цели функции от експоненциален вид от сходимостта на този интеграл следва сходимостта на $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|F(t+i\alpha)|}{1+t^2}\,dt$

за всяко $\alpha > 0$ ([30] - стр.99), а от съществуването на последния следва съществуването на (3.05)([28] - стр.315).

Нека сега $F(z) = U(z) + iV(z)$ е цяла функция от класа P с положителен дефект, ограничена върху реалната ос. Тогава $F(z)$ ще принадлежи на класа $\overline{HB}$, тъй като съгласно една лема, доказана от Левин ([28] - стр.412), необходимо и достатъчно условие една цяла функция да принадлежи на класа P е тя да е от експоненциален вид и да принадлежи на класа $\overline{HB}$. От неравенството (3.02) ще имаме

$$\left|\frac{F(t+i\alpha)}{\overline{F}(t+i\alpha)}\right| \le 1 \qquad \text{за всяко } \alpha > 0 . \tag{3.10}$$

Следователно функцията $F(z)$ удовлетворява условията на теорема I.12 при $\lambda = 0$. При това от (3.10) получаваме, че $M_F(\alpha,0) \le 1$. Тогава нулите на целите функции $U(z)$ и $V(z)$ ще лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \le \alpha$, каквото и да е $\alpha > 0$. Предвид произволността на α може да се твърди, че нулите на $U(z)$ и $V(z)$ са реални. И така стигаме до следния резултат:

<u>Теорема I.13.</u> Ако $F(z)=U(z)+iV(z)$ е цяла функция от класа P с положителен дефект, ограничена върху реалната ос, то нулите на $U(z)$ и $V(z)$ са реални.

За целите функции от експоненциален вид с отрицателен дефект е валидна теорема, аналогична на теорема I.12.

<u>Теорема I.14.</u> Нека $F(z)=U(z)+iV(z)$ е цяла функция от експоненциален вид, удовлетворяваща условията:

а) дефектът на $F(z)$ е отрицателен;

б) нулите на $F(z)$ се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \le \lambda$, $\lambda \geqslant 0$;

в) функцията $F(z)$ е ограничена върху реалната ос;

г) съществуват числа $\alpha > \lambda$, за които

$$m_F(\alpha,\lambda) = \inf_{-\infty<t<+\infty} \left| \frac{F(t+i\alpha)}{\bar{F}(t+i\alpha)} \right| > 0.$$

Тогава нулите на целите функции $U(z)$ и $V(z)$ лежат в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \le \alpha - \frac{1}{2d_F} \ln^+ \frac{1}{m_F(\alpha,\lambda)},$$

каквото и да е $\alpha > \lambda$, удовлетворяващо условието г).

Доказателство. Да разгледаме цялата функция $\bar{F}(z)=U(z)-iV(z)$. Тя е цяла от експоненциален вид, ограничена върху реалната ос и с нули в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$. Освен това поради равенството $|\bar{F}(z)| = |F(\bar{z})|$ ще бъде изпълнено

$$2d_{\bar{F}} = h_{\bar{F}}(-\tfrac{\pi}{2}) - h_{\bar{F}}(\tfrac{\pi}{2}) = h_F(\tfrac{\pi}{2}) - h_F(-\tfrac{\pi}{2}) = -2d_F > 0.$$

От условието г) следва, че съществуват числа $\alpha > \lambda$, за които

$$M_{\bar{F}}(\alpha,\lambda) = \frac{1}{m_F(\alpha,\lambda)} < +\infty.$$

Като приложим теорема I.12 към цялата функция $\bar{F}(z)$ получаваме, че нулите на целите функции $U(z)$ и $V(z)$ лежат в ивицата

$$|\mathfrak{Im}\, z| \le \alpha + \frac{1}{2\alpha_F} \ln^+ M_F(\alpha,\lambda) = \alpha - \frac{1}{2\alpha_F} \ln^+ \frac{1}{m_F(\alpha,\lambda)},$$

каквото и да е $\alpha > \lambda$, удовлетворяващо условието г).

В частност, ако $F(z) = U(z) + i\,V(z)$ е цяла функция от експоненциален вид с отрицателен дефект, ограничена върху реалната ос и с нули в затворената долна полуравнина ($\mathfrak{Im}\, z \le 0$), то нулите на $U(z)$ и $V(z)$ са реални. Наистина, при направените предположения функцията $\bar{F}(z)$ е от класа P, ограничена върху реалната ос и следователно за нея е валидна теорема I.13.

Забележка. Методът, който използуваме тук не дава възможност да се получи теорема от типа на Билер-Ермит за цели функции от експоненциален вид с нулев дефект.

Ще направим някои приложения на получените в този параграф резултати. Преди това ще въведем още един твърде важен клас цели функции.

Определение I.3. ([28] - стр.289). Една цяла функция се нарича функция от класа A или класа на Карлеман, ако

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \mathfrak{Im} \frac{1}{a_k} \right| < \infty ,$$

където a_k са нулите на функцията.

Функциите от класа A представляват естествено обобщение на функциите, всички нули на които са реални. Интерес представляват функциите от класа A и от експоненциален вид. С оглед на бъдещите ни нужди ще формулираме две твърдения за тези функции. Преди всичко, ако цялата функция $F(z)$ от експоненциален вид е ограничена върху реалната ос, тя принадлежи на класа A ([28] - стр.293). Ако $F(z)$ е цяла функция от експоненциален вид и от класа A, то нейната индикаторна диаграма има хоризонтална ос на симетрия. С други думи, изпълнено е следното равенство

(3.11) $$h_F(\theta) - h_F(-\theta) = 2a\sin\theta \quad .$$

Доказателството на последното твърдение може да се намери в [28] - стр.325 или [30] - стр.128.

Нека $f(t)$ е реална функция, интегруема в риманов смисъл в интервала $[0,1]$ и

(1.01) $$F(f;z) = \int_0^1 f(t)e^{itz}dt.$$

Функцията $F(f;z)$ е цяла от експоненциален вид, ограничена върху реалната ос. Съгласно споменатите по-горе твърдения, тя ще принадлежи на класа A и индикаторната й диаграма ще има хоризонтална ос на симетрия, т.е. ще е изпълнено (3.11) за някое a . Но по теоремата на Палей и Винер ([28] - стр.499), ако интервалът $[0,1]$ не може да се замени с по-малък, то индикаторната диаграма на (1.01) съвпада с отсечката $[-i,0]$ от имагинерната ос. Следователно в този случай индикаторната диаграма е симетрична спрямо правата $y = -\frac{1}{2}$, т.е. в (3.11) $a = -\frac{1}{2}$. Тогава

$$2d_F = h_F(-\tfrac{\pi}{2}) - h_F(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \; .$$

И така за целите функции от вида (1.01) са изпълнени условията а) и в) на теорема I.12. В частност за тях получаваме следния резултат.

<u>Теорема I.15.</u> Ако нулите на цялата функция (1.01) лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\lambda$, $\lambda \geq 0$ и съществува $d > \lambda$, за което $M_F(d,\lambda) < +\infty$, то нулите на целите функции

(1.02) $$U(f;z) = \int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \quad \text{и} \quad V(f;z) = \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt$$

лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq d + \frac{1}{2d_F}\ln^+ M_F(d,\lambda)$. Ако в (1.01) интервалът $[0,1]$ не може да се замени с по-малък, то нулите на

(1.02) са в ивицата $|\mathrm{Im}\, z| \le \alpha + \ln^+ M_F(\alpha,\lambda)$.

Нека сега $\lambda = 0$. Тогава $F(f;z)\in P$, тъй като $d_F > 0$, от където $F(f;z)\in \overline{HB}$. Поради неравенството (3.02) ще бъде изпълнено

$$\left|\frac{F(f;t+i\alpha)}{\bar{F}(f;t+i\alpha)}\right| \le 1$$

за $-\infty < t < +\infty$ и всяко $\alpha > 0$. Следователно $M_F(\alpha,0) \le 1$. От това неравенство и теорема I.15 получаваме, че ако нулите на цялата функция (1.01) лежат в полуравнината $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$, целите функции (1.02) имат само реални нули, което може да се получи и от теоремата на Левин.

От теорема I.15 и съображения, изложени в началото на § 1 следва

<u>Теорема I.16.</u> Ако $f(t)\in E(\lambda,1)$ и съществува число $\alpha > \lambda$, за което $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$, нулите на целите функции (1.02) лежат в ивицата $|\mathrm{Im}\, z| \le \alpha + \ln^+ M_F(\alpha,\lambda)$.

Ще посочим някои класи от функции $f(t)$, за които $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$. Преди всичко това са функциите от класа E и класа $E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$. Наистина, ако $f(t)\in E$ или $f(t)\in E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$, нулите на цялата функция (1.01) лежат в полуравнината $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ и както показахме по-горе ще имаме $M_F(\alpha,0) \le 1$ за всяко $\alpha > 0$. Така стигаме до следното известно твърдение: ако $f(t)\in E$ или $f(t)\in E(\lambda,\delta)$, $\delta > 1$, целите функции (1.02) имат само реални нули.

Да допуснем, че $f(t)$ има в интервала $[0,1]$ непрекъснатата производна. Нека $\alpha > \lambda$ и да разгледаме частното $\left|\frac{F(f;x+i\alpha)}{\bar{F}(f;x+i\alpha)}\right|$. Тъй като функцията $\bar{F}(f;z+i\alpha)$ няма реални нули, това частно е ограничено в кой да е краен реален интервал. Остава да изследваме поведението му при $x \to \pm\infty$. Като интегрираме по части и приложим теоремата на Риман-Лебег ([21] - стр. 449) получаваме

$$\left|\frac{F(f;x+i\alpha)}{\overline{F}(f;x+i\alpha)}\right| = \left|\frac{f(1)e^{-\alpha}e^{ix} - f(0) - \int_0^1 [f(t)e^{-\alpha t}]' e^{itx}dt}{f(1)e^{\alpha}e^{-ix} - f(0) - \int_0^1 [f(t)e^{\alpha t}]' e^{-itx}dt}\right| =$$

$$= \frac{|f(1)e^{-\alpha}e^{ix} - f(0)|\,[1+o(1)]}{|f(1)e^{\alpha}e^{-ix} - f(0)|\,[1+o(1)]} = \left|\frac{f(1)e^{-\alpha}e^{ix} - f(0)}{f(1)e^{\alpha}e^{-ix} - f(0)}\right|[1+o(1)]$$

при $x \to \pm\infty$. Ако $|f(0)| \le |f(1)|$, то

$$\left|\frac{f(1)e^{-\alpha}e^{ix} - f(0)}{f(1)e^{\alpha}e^{-ix} - f(0)}\right| \le \frac{1}{e^{\alpha}}$$

за всяко x. Следователно $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$.

Твърдението остава в сила и при по-слабото изискване за абсолютна интегруемост на $f'(t)$.

<u>Пример</u>. Нека

$$F(z) = \int_0^1 e^{-\lambda t} e^{itz} dt \qquad (3.11)$$

където λ е положително число. Нулите на тази функция са

$$z_k = -i\lambda + 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Да разгледаме частното $\left|\dfrac{F(t+i\alpha)}{\overline{F}(t+i\alpha)}\right|$, където $\alpha > \lambda$. Чрез непосредствено пресмятане получаваме

$$\left|\frac{F(t+i\alpha)}{\overline{F}(t+i\alpha)}\right|^2 = \frac{(\alpha-\lambda)^2 + t^2}{(\alpha+\lambda)^2 + t^2} \cdot \frac{e^{-2(\alpha+\lambda)} - 2e^{-(\alpha+\lambda)}\cos t + 1}{e^{2(\alpha-\lambda)} - 2e^{\alpha-\lambda}\cos t + 1} \le \left(\frac{1 - e^{-(\alpha+\lambda)}}{e^{\alpha-\lambda} - 1}\right)^2$$

за всяко реално t. Следователно за разглежданата функция

$$M_F(\alpha,\lambda) \le \frac{1 - e^{-(\alpha+\lambda)}}{e^{\alpha-\lambda} - 1} < +\infty$$

за всяко $\alpha > \lambda$. Тъй като дефектът на разглежданата функция е $1/2$, то по теорема I.15 нулите на целите функции

$$U(z) = \int_0^1 e^{-\lambda t}\cos tz\,dt \quad \text{и} \quad V(z) = \int_0^1 e^{-\lambda t}\sin tz\,dt \qquad (3.12)$$

лежат в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \leq \alpha + \ln^{+} \frac{1 - e^{-(\alpha+\lambda)}}{e^{\alpha-\lambda} - 1},$$

каквото и да е $\alpha > \lambda$. Ако $\alpha \geqslant \lambda + \ln\left[1 + e^{-\lambda}\sqrt{e^{2\lambda}-1}\right]$, то

$$\frac{1 - e^{-(\alpha+\lambda)}}{e^{\alpha-\lambda} - 1} \leq 1$$

и в този случай нулите на функциите (3.12) ще се намират в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \alpha$.

При $\lambda \to 0$ целите функции (3.12) клонят равномерно върху всяко ограничено множество от комплексната равнина към функциите

$$(3.13) \qquad \int_0^1 \cos tz\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 \sin tz\,dt$$

и

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1 - e^{-(\alpha+\lambda)}}{e^{\alpha-\lambda} - 1} = e^{-\alpha}.$$

Следователно нулите на целите функции (3.13) ще лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \alpha$, каквото и да е $\alpha > 0$, от където следва, че нулите на (3.13) са реални, което се получава и чрез непосредствено пресмятане.

Теорема I.12 е приложима и за целите функции от вида

$$(1.07) \qquad F(f;\psi;z) = \int_0^1 f(t) e^{itz}\, d\psi(t),$$

където $\psi(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[0,1]$. Функциите от вида (1.07) са от експоненциален вид, ограничени върху реалната ос и следователно са от класа A. Ако в произволни околности на точките 0 и 1 $\psi(t)$ не е константа, то индикаторната диаграма на (1.07) съвпада с отсечката $[-i,0]$ и от тук се получава, че дефектът на (1.07) е положителен. Следователно функцията (1.07) удовлетворява условието а) и в) на теорема I.12 и ако нулите ѝ се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$, $\lambda > 0$

и за някое $d > \lambda$ имаме $M_F(d,\lambda) < +\infty$, то нулите на функциите

$$\int_0^1 f(t)\cos tz\, d\psi(t) \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(t)\sin tz\, d\psi(t)$$

ще са разположени в ивицата $|\operatorname{Im} z| \le d + \ln^+ M_F(d,\lambda)$.

Нека

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^1 [f(t)e^{itz} + \varphi(t)e^{-itz}]\,dt. \tag{2.12}$$

Функцията (2.12) е цяла от експоненциален вид, ограничена върху реалната ос, следователно също е от класа A. Дефектът ѝ може да бъде положителен, отрицателен или нула в зависимост от поведението на функциите $f(t)$ и $\varphi(t)$ в околност на точката 1. Следователно за функциите от вида (2.12) е приложима теорема I.12 или теорема I.14 и съответният резултат може да се формулира по следния начин:

<u>Теорема I.17.</u> Ако цялата функция (2.12) има положителен дефект и нули в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$, $\lambda \geqslant 0$ и за някое $d > \lambda$ $M_{\mathcal{F}}(d,\lambda) < +\infty$, нулите на целите функции

$$\int_0^1 [f(t)+\varphi(t)]\cos tz\, dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 [f(t)-\varphi(t)]\sin tz\, dt \tag{3.14}$$

лежат в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \le d + \frac{1}{2d_{\mathcal{F}}} \ln^+ M_{\mathcal{F}}(d,\lambda).$$

Ако цялата функция (2.12) има отрицателен дефект и нули в полуравнината $\operatorname{Im} z \le \lambda$, $\lambda \geqslant 0$ и за някое $d > \lambda$ $m_{\mathcal{F}}(d,\lambda) > 0$, нулите на целите функции (3.14) лежат в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \le d - \frac{1}{2d_{\mathcal{F}}} \ln^+ \frac{1}{m_{\mathcal{F}}(d,\lambda)}.$$

В частност при $\lambda = 0$ целите функции (3.14) ще имат само реални нули.

Ще покажем, че съществуват реални функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, за които $M_{\mathcal{F}}(\alpha,\lambda) < +\infty$ и съответно $m_{\mathcal{F}}(\alpha,\lambda) > 0$. Нека $f(t)$ и $\varphi(t)$ имат непрекъснати производни в интервала $[0,1]$. Да разгледаме частното $\left|\dfrac{\mathcal{F}(x+i\alpha)}{\overline{\mathcal{F}}(x+i\alpha)}\right|$ при предположение, че нулите на (2.12) са в полуравнината $\mathrm{Im}\, z \geq -\lambda$ и $\alpha > \lambda$. Като интегрираме по части и приложим теоремата на Риман-Лебег получаваме при $x \to \pm\infty$

$$(3.15)\qquad \left|\frac{\mathcal{F}(x+i\alpha)}{\overline{\mathcal{F}}(x+i\alpha)}\right| = \left|\frac{f(1)e^{-\alpha}e^{ix} - \varphi(1)e^{\alpha}e^{-ix} + \varphi(0) - f(0)}{f(1)e^{\alpha}e^{-ix} - \varphi(1)e^{-\alpha}e^{ix} + \varphi(0) - f(0)}\right| [1+o(1)].$$

Ако $f(0) = \varphi(0)$ и $|f(1)| \geq |\varphi(1)|$, то първият множител в дясната част на (3.15) е ≤ 1. Следователно разглежданото частно остава ограничено за всички достатъчно големи x. Тъй като $\overline{\mathcal{F}}(x+i\alpha) \neq 0$, то $M_{\mathcal{F}}(\alpha,\lambda) < +\infty$.

Нека сега нулите на цялата функция (2.12) са в полуравнината $\mathrm{Im}\, z \leq \lambda$ и $\alpha > \lambda$. Тогава, ако $f(0) = \varphi(0)$ и $|f(1)| \leq |\varphi(1)|$, то първият множител от дясно на (3.15) е ≥ 1 и тъй като $\mathcal{F}(x+i\alpha) \neq 0$, то $m_{\mathcal{F}}(\alpha,\lambda) > 0$.

<u>Пример.</u> Нека λ е положително число и

$$(3.16)\qquad \mathcal{F}(z) = e^{2\lambda}\int_0^{1/2} e^{-\lambda t} e^{itz}\,dt - \int_{1/2}^{1} e^{\lambda t} e^{-itz}\,dt.$$

Дефектът на тази функция е отрицателен. Нулите ѝ се получават чрез непосредствено пресмятане и се дават с формулите

$$z_k = i\lambda + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{и} \quad z_m = -i\lambda + 4m\pi,\ m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Може да се покаже, че за всяко реално t

$$\left|\frac{\mathcal{F}(t+i\alpha)}{\overline{\mathcal{F}}(t+i\alpha)}\right| \geq e^{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\alpha-\lambda}{\alpha+\lambda}\cdot\frac{e^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} - e^{-\frac{\alpha-\lambda}{2}}}{e^{\frac{\alpha+\lambda}{2}} - e^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}}}.$$

Като приложим теорема I.17 получаваме, че нулите на функциите

$$e^{2\lambda}\int_0^{1/2} e^{-\lambda t}\cos tz\,dt - \int_{1/2}^1 e^{\lambda t}\cos tz\,dt$$

и

$$e^{2\lambda}\int_0^{1/2} e^{-\lambda t}\sin tz\,dt + \int_{1/2}^1 e^{\lambda t}\sin tz\,dt$$

лежат в ивицата

$$|\Im z| \le \alpha - \frac{1}{2d_F}\ln^+ e^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha+\lambda}{\alpha-\lambda}\cdot\frac{e^{\frac{\alpha+\lambda}{2}} - e^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}}}{e^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} - e^{-\frac{\alpha-\lambda}{2}}}.$$

Нека $\lambda \to 0$. От горния резултат и теоремата на Хурвиц следва, че нулите на целите функции

$$\int_0^{1/2}\cos tz\,dt - \int_{1/2}^1 \cos tz\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 \sin tz\,dt$$

са в ивицата $|\Im z| \le \alpha - \frac{1}{2d_F}\ln^+ e^{-\frac{\alpha}{2}} = \alpha$ за всяко $\alpha > 0$, откъдето може да се заключи, че те са реални. Последното може да се установи и чрез непосредствено пресмятане.

Във връзка с разглежданията в този параграф може да се постави въпросът за валидността на теорема, обратна на теорема I.12, т.е. ако $F(z) = U(z) + i\,V(z)$ е цяла функция от експоненциален вид и нулите на $U(z)$ и $V(z)$ лежат в ивица, успоредна на реалната ос, където са разположени нулите на $F(z)$. Засега отговорът на този въпрос остава открит. Разрешаването му дори в частния случай на функции от вида (1.01) ще представлява интерес.

ГЛАВА II

АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА И ВЗАИМНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА НУЛИТЕ НА ЦЕЛИТЕ ФУНКЦИИ $U(f;z)$ и $V(f;z)$

§ 4. Метод на Хурвиц и теореми на Обрешков

С оглед на бъдещите нужди в този параграф излагаме един друг метод за изследване разпределението на нулите на целите функции от вида (1.02), за които тук ще въведем нова номерация, както следва:

$$U(f;z) = \int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \tag{4.01}$$

и

$$V(f;z) = \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt . \tag{4.02}$$

Този метод, наречен метод на Хурвиц, идва от една теорема на Хурвиц, която гласи: нека функцията $f(t)$ е дефинирана в интервала $[-1,1]$, четна и нейните коефициенти на Фурие са с алтернативно сменящи се знаци, т.е. ако

$$f(t) \sim 1/2\, a_0 + a_1\cos\pi t + a_2\cos 2\pi t + \dots ,$$

то

$$a_0 > 0,\ a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ \dots$$

Тогава цялата функция (4.01) има само реални и прости нули, които са така разпределени, че всеки от интервалите

$$\dots\ (-2\pi, -\pi), (-\pi, 0), (0\ \pi), (\pi, 2\pi)\ \dots \tag{4.03}$$

съдържа точно по една нула и то във вътрешността си (вж. [3]).

Идеята на метода на Хурвиц се състои в следното: цялата функция (4.01) се сравнява с добре познатите тригонометрични функции $\sin z$ или $\cos z$, като по-точно мероморфната функция $\frac{U(f;z)}{\sin z}$ или $\frac{U(f;z)}{\cos z}$ се разлага в сбор от елементарни дроби и към нея се прилагат някои резултати за разпределението на нулите на такива функции. Обикновено чрез вземане под внимание смяната на знака на функцията между два последователни полюса и преброяване на нулите могат да се установят твърдения за нулите на рационални функции, които с граничен преход се пренасят върху някои мероморфни функции. Така например по този начин лесно се получава следното: нека A_k ($k=1,2,3,\ldots,n$) и $a_1<a_2<\cdots<a_n$ са произволни реални числа. Ако за някое k, $k=1,2,3,\ldots,n-1$ е изпълнено $\operatorname{sgn} A_k=\operatorname{sgn} A_{k+1}$, рационалната функция

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k} \tag{4.04}$$

има нечетен брой нули в интервала (a_k,a_{k+1}). Ако всички A_k ($k=1,2,3,\ldots,n$) имат еднакви знаци, функцията (4.04) има само реални нули и във всеки от интервалите (a_k,a_{k+1}), $k=1,2,3,\ldots,n-1$ тя има точно по една нула.

Ако $f(t)$ е реална функция, дефинирана в интервала $[0,1]$ и съществува римановият (евентуално несобствен) интеграл

$$\int_0^1|f(t)|\,dt,$$

то за цялата функция (4.01) е валидно следното разложение

$$\frac{U(f;z)}{\sin z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{U(f;n\pi)}{z-n\pi}, \tag{4.05}$$

където редът от дясната страна на (4.05) е равномерно сходящ във всяка ограничена област, която не съдържа точки от вида $n\pi$ ($n=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

Нека сега $f(t)$ удовлетворява условията на теоремата на Хурвиц. Предположението за алтернативност на знаците на Фуриеровите коефициенти на $f(t)$ всъщност означава, че

(4.06) $\mathcal{U}(f;0)>0,\ \mathcal{U}(f;\pi)<0,\ \mathcal{U}(f;2\pi)>0, \dots$

Следователно във всеки от интервалите (4.03) се намира поне една нула на (4.01). Като приложим споменатото по-горе твърдение към рационалната функция

$$\mathcal{R}_n(z)=\sum_{\nu=-n}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\mathcal{U}(f;\nu\pi)}{z-\nu\pi}$$

получаваме, че във всеки от интервалите $[\nu\pi,(\nu+1)\pi]$, $\nu=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n-1$ тя има по една нула и освен тези $2n$ прости нули други нули няма. Тъй като

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}_n(z)=\frac{\mathcal{U}(f;z)}{\sin z}$$

равномерно във всяка ограничена област, не съдържаща точки от вида $n\pi$, то и $\mathcal{U}(f;z)$ ще има по една нула във всеки интервал $[\nu\pi,(\nu+1)\pi]$, която е и проста и поради (4.06) лежи във вътрешността на интервала.

Подобен резултат може да се получи и за функцията (4.02) като се използува разложението

(4.07) $$\frac{V(f;z)}{\cos z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{V[f;(n+1/2)\pi]}{z-(n+1/2)\pi}.$$

За рационалните функции

(4.08) $$\frac{A_n}{z+a_n}+\dots+\frac{A_2}{z+a_2}+\frac{A_1}{z+a_1}+\frac{B}{z}+\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\dots+\frac{A_n}{z-a_n},$$

където $0<a_1<a_2<\dots<a_n$ и $A_1>0,\ A_2>0,\dots,A_n>0$, е в сила следното твърдение (вж. [22] - стр.258): каквото и да е реалното число B рационалната функция (4.08) има по една нула във всеки от интервалите

$$(-a_n,-a_{n-1}),\dots,(-a_2,-a_1),(a_1,a_2),\dots,(a_{n-1},a_n).$$

Освен тези $2n-2$ нули тя има още две нули: α и $-\alpha$. При това, ако $B>0$, тези две нули са реални и положителната лежи в интервала $(0, a_1)$; ако $-2(A_1+A_2+\dots+A_n)<B<0$, двете нули са чисто имагинерни и ако $B<-2(A_1+A_2+\dots+A_n)$, тези нули са реални, като положителната лежи в интервала $(a_n,+\infty)$.

Като използува този резултат и разложенията

$$(4.09)\quad \frac{U(f;z)}{z\cos z}=\frac{U(f;0)}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi}\cdot\frac{1}{z-(n+1/2)\pi}$$

и

$$(4.10)\quad \frac{V(f;z)}{z\sin z}=\frac{V'(f;0)}{z}+\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{V(f;n\pi)}{n\pi}\cdot\frac{1}{z-n\pi},$$

Пойа [3] доказва, че ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0,1]$, цялата функция (4.01) има само реални и прости нули, които се разделят от нулите на $\cos z$. Ако освен това $f(t)$ не е стъпаловидна функция с краен брой точки на прекъсване, които да са рационални числа, то (4.02) има също само реални и прости нули, които се разделят от нулите на $\sin z$.

Методът на Хурвиц е използуван по-късно в работите на Л.Чакалов [7] , П.Русев [31] и др. С този метод в [7] Чакалов установява, че цялата функция

$$\int_{-1}^{1} f(t)\cos(tz+\alpha)\,dt$$

има безбройно много реални и само краен брой имагинерни нули, ако реалната функция $f(t)$ е непрекъсната и има непрекъсната производна в интервала $[-1,1]$ и поне едно от числата $[f(1)+f(-1)]\cos\alpha$ и $[f(1)+f(-1)]\sin\alpha$ е отлично от нула.

От казаното дотук става ясно, че методът на Хурвиц свежда изследването на разпределението на нулите на целите функции (4.01) и (4.02) към изследване разпределението на нулите на подходящи мероморфни функции. По такъв начин, за да можем да направим някакви заключения за нулите на (4.01) и (4.02), трябва да разполагаме със сведения за нулите на тези мероморфни функции. В [32] Н.Обрешков разглежда някои класи рационални функции и изучава разположението на нулите им. Получените резултати заедно с метода на Хурвиц дават възможност да се изследва асимптотичното поведение на нулите на функциите (4.01) и (4.02). Н.Обрешков формулира получените твърдения за рационални функции, но методът на доказателство дава възможност, както споменава и самият автор, те да се пренесят и за мероморфни функции. С оглед на бъдещите нужди ще цитираме съответните резултати за мероморфни функции.

<u>Теорема II.1 (Н.Обрешков).</u> Нека $\gamma \neq 0$, A_n и a_n $(n=1,2,3,\dots)$, $\lim\limits_{n} a_n = \infty$, са реални числа такива, че редът

$$-\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n} \tag{4.11}$$

е равномерно сходящ във всяка ограничена област, която не съдържа никоя от точките $a_n (n=1,2,3,\dots)$. Нека $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица от положителни числа, подчинена на единственото условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n = 1$. Да положим

$$a_n' = a_n + A_n/(\gamma \mu_n)$$

и да означим с C_n окръжността, която минава през точките a_n и a_n' и сече ортогонално реалната ос. Тогава мероморфната функция (4.11) няма нули вън от окръжностите C_n $(n=1,2,3,\dots)$.

<u>Теорема II.2 (Н.Обрешков).</u> Нека A_n и a_n $(n=1,2,3,\dots)$, $\lim\limits_{n} a_n = \infty$, са реални числа такива, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n} \tag{4.12}$$

е равномерно сходящ във всяка ограничена област, която не съдържа никоя от точките $a_n (n=1,2,3,\dots)$. Нека κ е произволно цяло положително число такова, че $A_k \neq 0$ и $\{\mu_n\}$ $(n=1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots)$ е произволна редица от положителни числа, подчинена на единственото условие

$$\sum_{n=1}^{k-1} \mu_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu_n = 1.$$

Да положим

$$a_n' = a_k + \mu_n A_k (a_n - a_k)(\mu_n A_k + A_n)^{-1} \quad (n \neq k)$$

и да означим с C_n окръжността, която минава през точките a_n, a_n' и сече ортогонално реалната ос. Да означим с K_n онази от кръговите области, определена от C_n, която не съдържа точката a_k. Тогава мероморфната функция (4.12) няма нули вън от множеството

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad (n \neq k).$$

§ 5. Прецизиране на една теорема на Палей, Титчмарш и Винер

В този параграф изследваме асимптотичното поведение на нулите на целите функции от вида (4.01) и (4.02). От теоремата на Палей, Титчмарш и Винер, която формулирахме в началото на параграф 2 следва, че каквото и да е $\delta > 0$, нулите на (4.01) и (4.02), с изключение евентуално на краен брой, лежат в секторите $|\arg z| \leq \delta$ и $|\arg z - \pi| \leq \delta$.

Ще покажем, че при някои допълнителни предположения за функцията $f(t)$ областта, в която се намират нулите на (4.01) и (4.02) може да се стесни. Тъй като функцията (4.01) е четна, а (4.02) - нечетна, достатъчно е да се изследват само нулите с положителна реална част. Доказателствата на всички твърдения в този параграф се извършват с метода на Хурвиц и се опират на теоремите на Обрешков от § 4.

Ще докажем най-напред, че при известни предположения нулите на (4.01) се намират в ивица, успоредна на реалната ос. Съответният резултат ще формулираме като

Теорема II.3. Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в риманов смисъл в интервала $[0,1]$. Ако са удовлетворени следните условия:

а) съществува положително число ε такова, че

(5.01) $$\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right);$$

б)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt \neq 0,$$

нулите на цялата функция (4.01) се намират в ивица, успоредна на реалната ос.

Доказателство. От разложението (4.05) лесно се получава следното разложение

(5.02) $$\frac{z\,\mathcal{U}(f;z)}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{n\pi\,\mathcal{U}(f;n\pi)}{z-n\pi}.$$

Ще приложим теорема II.1 на Обрешков към мероморфната функция (5.02). Да положим

(5.03) $$\gamma = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)$$

и

(5.04) $$\mu_n = \frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}\right)^{-1} \qquad (n\neq 0).$$

Преди всичко условието б) означава, че $\gamma\neq 0$. Нека C_n $(n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots)$ е окръжността, която минава през точките $a_n = n\pi$,

(5.05) $$a_n' = n\pi + \frac{(-1)^n n\pi\,\mathcal{U}(f;n\pi)}{\gamma\mu_n}$$

и сече ортогонално реалната ос. От теорема II.1 следва, че нулите на мероморфната функция (5.02) или все едно нулите на цялата функция $\mathcal{U}(f;z)$ лежат в окръжностите C_n ($n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Ще покажем, че има ивица, успоредна на реалната ос, която съдържа всички окръжности C_n . Условието (5.01) означава, че съществува константа M такава, че

$$|n^{2+\varepsilon}\mathcal{U}(f;n\pi)| \leq M \tag{5.06}$$

за всяко цяло n . От (5.04), (5.05) и (5.06) за диаметъра $|a_n-a_n'|$ на окръжността C_n получаваме

$$|a_n-a_n'| \leq \frac{\pi M}{|\varkappa|}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}.$$

Следователно всички окръжности C_n ($n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) лежат в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi M}{2|\varkappa|}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}.$$

Тъй като цялата функция $\mathcal{U}(f;z)$ няма нули вън от окръжностите C_n , то горната ивица ще съдържа всичките ѝ нули.

При предположенията на теорема II.3 може да се покаже още следното: каквото и да е $\lambda>0$, нулите на цялата функция (4.01), с изключение евентуално на краен брой, лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \lambda$.

Наистина, нека $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ и да положим

$$\mu_n=\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon_1}}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon_1}}\right)^{-1} \qquad (\ n\neq 0\ ).$$

Тогава за диаметъра $|a_n-a_n'|$ на окръжността C_n имаме

$$|a_n-a_n'| \to 0 \qquad \text{при } |n|\to\infty .$$

Следователно, каквото и да е положителното число λ , окръжностите C_n ще се намират в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \lambda$, стига n да е достатъчно голямо по модул.

Непосредствено се проверява, че ако функцията $f(t)$ е два пъти диференцируема, $f'(0)=f'(1)=0$ и $f''(t)$ удовлетворява условието на Липшиц с показател ε, то е изпълнено (5.01). При направените предположения

$$\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = -\frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^1 f''(t)\cos n\pi t\,dt$$

и

$$\int_0^1 f''(t)\cos n\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right).$$

Пример. (вж. [33]). Нека $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна монотонно намаляваща редица от положителни числа и

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\frac{\cos k\pi t}{k^{2+\varepsilon}},$$

където ε е произволно положително число. За функцията $f(t)$ е изпълнено

$$\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{a_n}{n^{2+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n^{2+\varepsilon}} \neq 0.$$

Следователно по теорема II.3 нулите на цялата функция

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\frac{\cos k\pi t}{k^{2+\varepsilon}}\cos tz\,dt$$

се намират в ивица, успоредна на реалната ос.

Теорема, аналогична на теорема II.3 е валидна и за целите функции от вида (4.02).

<u>Теорема II.4.</u> Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в риманов смисъл в интервала $[0,1]$ и нека са изпълнени условията:

а) съществува положително число ε такова, че

$$\int_0^1 f(t)\sin(n+1/2)\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right);$$

б)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 f(t)\sin(n+1/2)\pi t\,dt \neq 0.$$

Тогава нулите на цялата функция (4.02) лежат в ивица, успоредна на реалната ос.

Теорема II.4 се доказва напълно аналогично на теорема II.3 За целта се използува разложението

$$\frac{zV(f;z)}{\cos z} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V[f;(n+1/2)\pi] + \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1/2)\pi\, V[f;(n+1/2)\pi]}{z-(n+1/2)\pi}.$$

Полага се

$$\gamma = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V[f;(n+1/2)\pi],$$

$$\mu_n = \frac{1}{|n+1/2|^{1+\varepsilon}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n+1/2|^{1+\varepsilon}}\right)^{-1}$$

и се прилага теорема II.1.

В следващата теорема искаме порядъка на Фуриеровите коефициенти на $f(t)$ да е по-нисък. Нулите на (4.01) вече няма да бъдат в ивица, но все още ще са в област, която, грубо казано, е по-тясна от секторите $|\arg z| \leq \delta$ и $|\pi - \arg z| \leq \delta$, каквото и да е $\delta > 0$.

Теорема II.5. Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в интервала $[0,1]$ и нека са изпълнени условията:

а) съществува число $\varepsilon > 1/2$ такова, че

$$\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\quad; \tag{5.07}$$

б)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt \neq 0.$$

Тогава нулите на цялата функция (4.01), с изключение евентуално на краен брой, се намират във вътрешността на две параболи, симетрични една на друга относно имагинерната ос.

Доказателство. Прилагаме отново теорема II.1 към мероморфната функция (5.02). Полагаме

$$\mu_n = \frac{1}{|n|^{1/2+\varepsilon}} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1/2+\varepsilon}} \right)^{-1} \qquad (\quad n \neq 0 \quad)$$

и

$$\gamma = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, \mathcal{U}(f; n\pi).$$

Тогава, ако C_n е окръжността, която минава през точките $a_n = n\pi$, $a_n' = n\pi + (-1)^n n\pi\, \mathcal{U}(f; n\pi)/(\gamma \mu_n)$ и сече ортогонално реалната ос, функцията $\mathcal{U}(f; z)$ няма нули вън от окръжностите C_n. За диаметъра $|a_n - a_n'|$ на C_n е изпълнено

(5.08) $$|a_n - a_n'| \leq A\sqrt{|n|},$$

където

$$A = \frac{\pi M}{|\gamma|} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1/2+\varepsilon}},$$

а константата M се определя от условието (5.07). Нека $0 < C < \pi/A^2$ и $n \geq A^2(\pi - CA^2)^{-2}$. Ще покажем, че окръжността C_n лежи вътре в параболата $y^2 = \frac{1}{C}x$. Да вземем произволна точка $z = x + iy$ от окръжността C_n. Тогава $z = n\pi + w$, където ако $w = u + iv$, то поради (5.08) $|u| \leq A\sqrt{n}$ и $|v| \leq A\sqrt{n}$. Ще имаме

$$x = n\pi + u \geq n\pi - |u| \geq n\pi - A\sqrt{n} = n(\pi - A/\sqrt{n}) \geq n[\pi - (\pi - CA^2)] = nCA^2 \geq Cy^2$$

Следователно точката z лежи в параболата $y^2 = \frac{1}{c}x$ и тъй като тя беше произволна точка от C_n, то и цялата окръжност C_n ще лежи вътре в тази парабола. И така от известно място нататък

($n \geq A^2(\pi - CA^2)^{-2}$) окръжностите C_n се намират в параболата $y^2 = \frac{1}{C}x$, откъдето получаваме, че всички нули на (4.01) с положителна реална част, с изключение евентуално на краен брой, са разпределени в разглежданата парабола.

Условието (5.07) сигурно е изпълнено, ако функцията $f'(t)$ удовлетворява условието на Липшиц с показател, по-голям от $1/2$.

Ще формулираме съответния резултат за целите функции от вида (4.02).

<u>Теорема II.6.</u> Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в интервала $[0,1]$ и нека са удовлетворени условията:

а) $$\int_0^1 f(t)\sin(n+1/2)\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

за някое $\varepsilon > 1/2$;

б) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 f(t)\sin(n+1/2)\pi t\,dt \neq 0.$$

Тогава нулите на цялата функция (4.02), с изключение евентуално на краен брой, се намират във вътрешността на две параболи, симетрични една на друга относно имагинерната ос.

От направените разглеждания става ясно, че разпределението и асимптотичното поведение на нулите на целите функции от вида (4.01) и (4.02) зависи от порядъка на Фуриеровите коефициенти на $f(t)$. Предните теореми показват, че колкото е по-слабо изискването за този порядък, толкова по-широка става областта, в която се намират нулите на (4.01) и (4.02). Естествено възниква следният въпрос: може ли още да се намали изискването за порядъка, като при това областта, съдържаща нулите на разглежданите функции, да остава все още вътре в двата сектора. Да разгледаме следния

<u>Пример</u>. Нека

$$F(z)=\int_{-1}^{1}(1-t)e^{itz}dt.$$

Чрез непосредствено пресмятане получаваме

$$F(z)=\frac{e^{-iz}}{(iz)^2}\left(e^{2iz}-1-2iz\right).$$

Като се вземе предвид примера, който Л.Чакалов разглежда в своята работа [7] на стр.67, може да се заключи, че нулите на $F(z)$ се дават с формулата

$$z=\pm\left(k\pi+\frac{\pi}{4}-\varepsilon_k\right)-\frac{i}{2}\log(2k\pi)-i\eta_k\,,\quad k=1,2,3,\ldots,$$

където $\varepsilon_k\to0$ и $\eta_k\to0$ заедно с $1/k$. Следователно може да се намери такава константа $A>0$, че нулите на $F(z)$ с положителна реална част с изключение на краен брой да лежат в областта $|y|\le A\log x$. Тази област е все още по-тясна от сектора $|\arg z|\le\delta$, каквато и да е $\delta>0$. При това $F[(n+1/2)\pi]=O(\frac{1}{n})$.

След тези бележки ще формулираме следната теорема, която дава отговор на поставения по-горе въпрос.

<u>Теорема II.7.</u> Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в интервала $[0,1]$ и нека са удовлетворени условията:

а) $$\int_0^1 f(t)\,dt\neq0,\quad \int_0^1 f(t)\cos(n+1/2)\pi t\,dt=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

б) съществува положително число ε такова, че

$$\left|\frac{\int_0^1 f(t)\cos(n+1/2)\pi t\,dt}{(n+1/2)\pi}\right|<\frac{\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|}{|n+1/2|\,|\ln|n+1/2||^{1+\varepsilon}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n+1/2|\,|\ln|n+1/2||^{1+\varepsilon}}\right)^{-1}\tag{5.09}$$

за $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Тогава нулите на функцията (4.01) с положителна реална част, с изключение евентуално на краен брой, лежат в областта

$$\begin{cases} 0 < x < \infty \\ |y| \le A \ln^{1+\varepsilon}(x+1), \end{cases}$$

където A е подходяща константа.

Доказателство. Ще използуваме разложението (4.09) и теорема II.2 на Обрешков. Да положим

$$\mu_n = \frac{1}{|n+1/2|\,|\ln|n+1/2||^{1+\varepsilon}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n+1/2|\,|\ln|n+1/2||^{1+\varepsilon}} \right)^{-1},$$

$$a_n' = \frac{\mu_n U(f;0)(n+1/2)\pi}{\mu_n U(f;0) + (-1)^{n+1} U[f;(n+1/2)\pi]/(n+1/2)\pi}$$

и да означим с C_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ окръжността, която минава през точките $a_n = (n+1/2)\pi$, a_n' и сече ортогонално реалната ос. Нека K_n е онази от кръговите области, определена от C_n, която не съдържа точката 0. Според теорема II.2 мероморфната функция (4.09) няма нули вън от множеството $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} K_n$. Условието (5.09) означава, че

$$(5.10) \qquad \left| \frac{U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi} \right| < \mu_n |U(f;0)|.$$

Тогава

$$\frac{a_n'}{a_n} = \mu_n \frac{U(f;0)}{\mu_n U(f;0) + (-1)^{n+1} U[f;(n+1/2)\pi]/(n+1/2)\pi} > 0$$

поради (5.10), а от последното неравенство следва, че точката 0 е вън от всички окръжности C_n и областта K_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ съвпада с вътрешността на C_n. По такъв начин получихме, че цялата функция (4.01) няма нули вън от окръжностите C_n. За диаметъра $|a_n - a_n'|$ на C_n при $n \geq 1$ имаме

$$(5.11) \qquad |a_n - a_n'| = \ln^{1+\varepsilon}(n+1/2) \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1/2)\pi\, U[f;(n+1/2)\pi]}{S^{-1}(\varepsilon) U(f;0)\pi + (-1)^{n+1} U[f;(n+1/2)\pi] \ln^{1+\varepsilon}(n+1/2)} \right|,$$

където

$$S(\varepsilon)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n+1/2|\,|\ln|n+1/2||^{1+\varepsilon}}.$$

Поради условието а) вторият множител от дясната страна на (5.11) е ограничен. Следователно

(5.12) $$|a_n-a_n'|\leq A\ln^{1+\varepsilon}(n+1/2)$$

за $n=1,2,3,\ldots$. Нека $z=x+iy$ е произволна точка от C_n. Тогава $z=(n+1/2)\pi+w$, където ако $w=u+iv$, то $|u|\leq A\ln^{1+\varepsilon}(n+1/2)$ и $|v|\leq A\ln^{1+\varepsilon}(n+1/2)$ поради (5.12). В такъв случай ще бъде изпълнено

$$|y|=|v|\leq A\ln^{1+\varepsilon}(n+1/2)\leq A\ln^{1+\varepsilon}[(n+1/2)\pi+u+1]=A\ln^{1+\varepsilon}(x+1)$$

за достатъчно големи n. И така от известно положително n нататък окръжностите C_n лежат в областта

$$\begin{cases}0\leq x<\infty\\ |y|\leq A\ln^{1+\varepsilon}(x+1).\end{cases}$$

Следователно всички нули на (4.01) с положителна реална част, с изключение евентуално на краен брой, се намират в тази област.

Като се използува разложението (4.10) може да се докаже по аналогичен начин следната

Теорема II.8. Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в интервала $[0,1]$ и нека са изпълнени условията:

а) $$\int_0^1 t f(t)\,dt\neq 0,\quad \int_0^1 f(t)\sin n\pi t\,dt=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

б) съществува положително число ε такова, че

$$\left|\frac{\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\,dt}{n\pi}\right|<\frac{\left|\int_0^1 t f(t)\,dt\right|}{|n|\ln^{1+\varepsilon}(|n|+1)}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|\ln^{1+\varepsilon}(|n|+1)}\right)^{-1}$$

за $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Тогава нулите на цялата функция (4.02) с положителна реална част, с изключение евентуално на краен брой, се намират в областта

$$\begin{cases} 0 \le x < \infty \\ |y| \le A \ln^{1+\varepsilon}(x+1) \end{cases}$$

където A е подходяща константа.

Като се използуват разложенията (4.09) и (4.10) и теорема II.2 могат да се получат теореми от типа на теорема II.3 и теорема II.5, в които изискването за порядъка на Фуриеровите коефициенти вече ще е по-слабо, но се налага условие от вида (5.09), което е сравнително трудно за проверка и което всъщност идва от метода на доказателство. Ще формулираме само един такъв резултат.

<u>Теорема II.9.</u> Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в интервала $[0,1]$ и нека са изпълнени условията:

а) съществува $\varepsilon > 0$ такова, че

$$\int_0^1 f(t) \cos(n+1/2)\pi t \, dt = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right);$$

б) съществува положително число $\varepsilon_1 \le \varepsilon$ такова, че за всяко $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ да е изпълнено

$$(5.13) \quad \left| \frac{\int_0^1 f(t) \cos(n+1/2)\pi t \, dt}{(n+1/2)\pi} \right| < \frac{\left| \int_0^1 f(t) \, dt \right|}{|n+1/2|^{1+\varepsilon_1}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n+1/2|^{1+\varepsilon_1}} \right)^{-1}.$$

Тогава нулите на цялата функция (4.01) лежат в ивица, успоредна на реалната ос.

§ 6. Взаимно разпределение на нулите на целите функции $\mathcal{U}(f;z)$, $V(f;z)$, $\cos z$, $\sin z$

В този параграф се занимаваме с въпроса за взаимното разпределение на нулите на целите функции

$$\mathcal{U}(f;z) = \int_0^1 f(t)\cos tz\,dt, \tag{4.01}$$

$$V(f;z) = \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt \tag{4.02}$$

и нулите на тригонометричните функции $\sin z$ и $\cos z$. Този въпрос е дискутиран още от Г.Пойа [3]. Той установява, че ако $f(t)$ е положителна, ненамаляваща и не е в изключителния случай, т.е. не е стъпаловидна с краен брой точки на прекъсване, които да са рационални числа, целите функции (4.01) и (4.02) имат реални и прости нули, които взаимно се разделят. Обобщената теорема на Билер-Ермит също ни дава информация за взаимното разположение на нулите на (4.01) и (4.02). Според нея, ако нулите на цялата функция

$$F(f;z) = \int_0^1 f(t)e^{itz}\,dt$$

се намират в полуравнината $\Im m\, z > 0$, то целите функции (4.01) и (4.02) имат само реални и прости нули, които взаимно се разделят. Тези и някои други разглеждания показват, че обикновено когато целите функции (4.01) и (4.02) имат реални и прости нули, те взаимно се разделят. Нещо повече, от конкретни примери се вижда, че дори когато (4.01) и (4.02) имат само реални нули, някои от които са многократни, то те също могат да се разделят в известен смисъл, ако всяка нула се брои толкова пъти, колкото е кратността ѝ.

Пример ([16] - стр. 35). Нека $\eta(t)$ е функция, дефинирана върху интервала $[0,1]$ по следния начин:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2 \\ 0, & t = 1/2 \\ -1, & 1/2 < t \le 1 . \end{cases}$$

Чрез непосредствено пресмятане се получава, че

$$U(\eta;z) = \frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2},$$

$$V(\eta;z) = -\frac{2}{z}\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)\cos\frac{z}{2}.$$

Следователно целите функции $U(\eta;z)$ и $V(\eta;z)$ имат само реални нули и при това имат безбройно много общи нули. Освен това всяка обща нула е трикратна нула за $U(\eta;z)$ и двукратна за $V(\eta;z)$. Ако всяка нула броим толкова пъти, колкото е кратността ѝ и считаме, че между трите нули на $U(\eta;z)$, които отговарят на дадена трикратна нула са разположени двете нули на $V(\eta;z)$, отговарящи на същата многократна нула, то нулите на $U(\eta;z)$ и $V(\eta;z)$ също се разделят.

В цитираната в началото на параграфа работа [3] Пойа доказва следното твърдение: ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0,1]$, то цялата функция (4.01) има само реални и прости нули. Интервалът $(0,\frac{\pi}{2})$ не съдържа нула, но във всеки от интервалите

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right),\left(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right),\ \ldots$$

има по една нула, и то вътре в тях, т.е. нулите на (4.01) се разделят от нулите на $\cos z$. Ако освен това $f(t)$ не е в изключителния случай, функцията (4.02) има само реални и прости нули. Интервалът $(0,\pi)$ съдържа само нулата $z=0$ и всеки от интервалите $(\pi,2\pi),(2\pi,3\pi),(3\pi,4\pi),\ldots$ съдържа по една нула, и то вътре в тях, т.е. нулите на (4.02) се разделят от нулите на $\sin z$. В същата работа Пойа показва, че ако $f(t)$ е растяща, изпъкнала и $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$, цялата функция (4.02) има само реални и прости нули и положителните се съдържат в интервалите

$$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right),\left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right),\ \ldots,$$

като във всеки интервал има само по една нула и то във вътрешността. Ако $f(t)$ е растяща, изпъкнала и производната и $f'(t)$ не е в изключителния случай, положителните нули на (4.01) се намират в интервалите

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),\left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right),\ \ldots$$

и то по една вътре във всеки от тях. По такъв начин в разглежданите случаи нулите на (4.01) и (4.02) се разделят както от нулите на $\sin z$, така и от нулите на $\cos z$.

Във връзка с казаното до тук могат да се поставят следните въпроси: ако целите функции (4.01) и (4.02) имат само реални нули или само реални и прости нули, то какво е тяхното взаимно разположение. Освен това, ако цялата функция (4.01), респективно (4.02) има само реални и прости нули, дали те се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$. Ние ще покажем, че при някои допълнителни предположения отговорът на втория въпрос е положителен. Що се касае до първия въпрос естествено е да се очаква нулите на (4.01) и (4.02) да се разделят поне от известно място нататък. Отговорът на този въпрос засега остава открит.

Преди да преминем към излагане на основните резултати, ще разгледаме следния

<u>Пример.</u> Нека $f(t) = 1 - t^2$. Цялата функция

$$U(f;z) = \int_0^1 (1-t^2)\cos tz\,dt \tag{6.01}$$

има само реални и прости нули (вж. [12] - стр.151), докато функцията

$$V(f;z) = \int_0^1 (1-t^2)\sin tz\,dt$$

има само една реална нула ($z=0$) и безбройно много комплексни нули. За мероморфната функция $\frac{U(f;z)}{\sin z}$ е валидно разложението (4.05). Ще изследваме знаците на резидуумите. Преди всичко $U(f;0) > 0$. Чрез непосредствено пресмятане получаваме за $z \neq 0$

$$U(f;z) = \frac{2}{z^3}(\sin z - z\cos z),$$

откъдето

$$(-1)^n U(f;n\pi) = -\frac{2}{(n\pi)^2}.$$

Следователно в (4.05) резидуумът на точката 0 е положителен, а резидуумите на останалите полюси са отрицателни. С разсъждения, аналогични на тези от § 4 следва, че всеки от интервалите $(\pi,2\pi), (2\pi,3\pi), (3\pi,4\pi), \ldots$ съдържа по една нула на функцията (6.01). Остава възможността тя да има още две спрегнати чисто имагинерни нули, но тъй като $U(f;iy) > 0$, тази възможност отпада. Следователно нулите на цялата функция (6.01) се разделят от нулите на $\sin z$.

За функцията (6.01) да разгледаме разложението (4.09). За резидуумите имаме

$$U(f;0) > 0, \quad (-1)^{n+1}\frac{U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi} = -\frac{2}{(n+1/2)^4\pi^4} < 0.$$

Следователно нулите на (6.01) ще се разделят и от нулите на $\cos z$.

Могат да се построят и други примери на цели функции от разглеждания вид, в които функцията $f(t)$ не удовлетворява условията на твърдението на Пойа, но съответната цяла функция има реални и прости нули, които се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$.

След тези предварителни бележки можем да формулираме съответните резултати.

<u>Теорема II.10.</u> Нека цялата функция (4.01) има само реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π. Ако $\mathcal{U}(f;0) \neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) такава, че $\sum\limits_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \mu_n = 1$ и

(6.02) $$|n\,\mathcal{U}(f;n\pi)| < \mu_n |\mathcal{U}(f;0)| \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

нулите на цялата функция (4.01) се разделят от нулите на $\sin z$.

Доказателство. Ще използуваме разложението (4.05) на мероморфната функция $\dfrac{\mathcal{U}(f;z)}{\sin z}$ в сбор от елементарни дроби. Към мероморфната функция (4.05) прилагаме теорема II.2 при $k = 0$ ($a_k = a_0 = 0$, $A_k = A_0 = \mathcal{U}(f;0)$). Нека C_n ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) е окръжността, която минава през точките $a_n = n\pi$,

$$a_n' = \frac{\mu_n\,\mathcal{U}(f;0)\,n\pi}{\mu_n\,\mathcal{U}(f;0) + (-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)}$$

и сече ортогонално реалната ос. Ако $\mathcal{K}_n$ е онази от областите, определена от C_n, която не съдържа точката 0, то съгласно споменатата теорема мероморфната функция $\dfrac{\mathcal{U}(f;z)}{\sin z}$ няма нули вън от множеството $\bigcup\limits_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \mathcal{K}_n$. Но

$$\frac{a_n'}{a_n} = \frac{\mu_n\,\mathcal{U}(f;0)}{\mu_n\,\mathcal{U}(f;0) + (-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)} > 0$$

поради условието (6.02) и следователно точката O е вън от всички окръжности C_n, откъдето пък следва, че цялата функция (4.01) няма нули вън от окръжностите C_n ($n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).
От условието (6.02) следва още, че

(6.03) $$a_n' > a_{n-1} \qquad (n=2,3,4,\ldots).$$

Ще покажем, че вътре във всяка окръжност C_n ($n=1,2,3,\ldots$) има поне по една нула на (4.01) и освен това

(6.04) $$a_n' < a_n$$

за всяко $n \geq 1$. Преди всичко вътре в C_1 има поне една нула на (4.01), тъй като в противен случай от неравенствата $a_n' < 0$ за $n<0$ и $a_n' > a_1$ за $n \geq 2$ ще следва съществуването на съседни нули, разстоянието между които е по-голямо от π. Да допуснем, че $a_1' > a_1 = \pi$. Тогава окръжността C_1 ще бъде разположена изцяло надясно от π. Поради (6.03) окръжностите C_n за $n \geq 2$ ще бъдат също надясно от π. От друга страна окръжностите C_n за $n<0$ се намират наляво от точката O. Следователно ще има съседни нули, разстоянието между които е по-голямо от π, което противоречи на направеното предположение. И така $a_1' < a_1$. Вътре в окръжността C_2 има поне една нула на (4.01) и $a_2' < a_2$, тъй като допускането на противното заедно с неравенствата $a_n' < 0$ за $n<0$, $a_1' < a_1$ и $a_n' > a_2$ за $n=3,4,5,\ldots$ води до противоречие с условието за разстоянието между съседните нули на цялата функция (4.01). По аналогичен начин се разсъждава и за останалите окръжности C_n ($n=3,4,5,\ldots$).

Неравенството (6.04) означава, че

$$\frac{\mu_n\, U(f;0)\, n\pi}{\mu_n\, U(f;0) + (-1)^n U(f;n\pi)} < n\pi$$

за $n=1,2,3,\ldots$. От това неравенство и неравенството

$$\frac{(-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)}{\mathcal{U}(f;0)}+\mu_n>0,$$

което се получава непосредствено от (6.02) следва, че за всяко $n\geq 1$

$$\frac{(-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)}{\mathcal{U}(f;0)}>0. \tag{6.05}$$

Тъй като $\mathcal{U}(f;z)$ е четна функция, то горното неравенство ще бъде изпълнено и за $n\leq -1$. По такъв начин получихме, че числата $(-1)^n\,\mathcal{U}(f;n\pi)$ имат един и същи знак, съвпадащ със знака на $\mathcal{U}(f;0)$.

Нека $R_n(z)$ е следната рационална функция

$$R_n(z)=\sum_{\nu=-n}^{n}(-1)^\nu\,\frac{\mathcal{U}(f;\nu\pi)}{z-\nu\pi}\,.$$

Тъй като числата $(-1)^\nu\,\mathcal{U}(f;\nu\pi)$ имат еднакви знаци, то $R_n(z)$ ще има само реални нули, при това във всеки интервал $[\nu\pi,(\nu+1)\pi]$, $-n\leq\nu\leq n-1$ има само по една нула и тези нули са прости. Други нули рационалната функция $R_n(z)$ няма. Но

$$\lim_{n\to\infty}R_n(z)=\frac{\mathcal{U}(f;z)}{\sin z}$$

равномерно във всяка ограничена област, не съдържаща точки от вида $n\pi$ ($n=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Следователно цялата функция $\mathcal{U}(f;z)$ има само по една нула във всеки интервал $[\nu\pi,(\nu+1)\pi]$, където ν е произволно цяло число и то във вътрешността поради (6.05), т.е. нулите на цялата функция (4.01) се разделят от нулите на $\sin z$.

<u>Следствие.</u> Ако цялата функция (4.01) има само реални нули и удовлетворява останалите условия на теорема II.10, то нейните нули са прости.

Ще покажем, че съществуват функции от вида (4.01), които удовлетворяват условието (6.02). Нека функцията $f(t)$ е дефинирана в интервала $[0,1]$, три пъти диференцируема, $f'(0)=f'(1)=0$ и

$$(6.06)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^1 |f'''(t)|\,dt < 3\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|.$$

Тогава

$$U(f;n\pi)=\frac{1}{(n\pi)^3}\int_0^1 f'''(t)\sin tz\,dt.$$

Да положим

$$\mu_n=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3}{\pi^2}\qquad (n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots).$$

Имаме поради (6.06)

$$|n\,U(f;n\pi)|\le\frac{1}{n^2\pi^3}\int_0^1|f'''(t)|\,dt<\frac{3}{n^2\pi^2}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|=\mu_n|U(f;0)|.$$

за $n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$, т.е. изпълнено е (6.02).

<u>Пример.</u> Нека $f(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+1$. Тъй като $f(t)$ удовлетворява условията на задача 175, V раздел, глава 1 от сборника на Д.Пойа и Г.Сегьо [34], то цялата функция

$$(6.07)\qquad \int_0^1\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+1\right)\cos tz\,dt$$

ще има само реални нули. Непосредствено се проверява, че функцията $f(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+1$ удовлетворява неравенството (6.06). Освен това $f'(0)=f'(1)=0$. Следователно за цялата функция (6.07) е изпълнено условието (6.02).

<u>Теорема II.11.</u> Нека цялата функция (4.02) има само реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π. Ако $U(f;\frac{\pi}{2})\neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$ $(n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$ такава, че

$$\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \mu_n = 1 \qquad \text{и}$$

(6.08) $\quad \left| (n+1/2)\, V[f;(n+1/2)\pi] \right| < \mu_n \left| V(f;\pi/2) \right| \quad (n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$

то нулите на цялата функция (4.02) се разделят от нулите на $\cos z$.

Доказателство. Ще използуваме следното разложение

$$\frac{V(f;z)}{\cos z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{V[f;(n+1/2)\pi]}{z-(n+1/2)\pi} .$$

Към тази мероморфна функция прилагаме теорема II.1 на Обрешков. Нека C_n $(n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) е окръжността, която минава през точките $a_n = (n+1/2)\pi$,

$$a_n' = \frac{\pi}{2} + \frac{\mu_n V(f;\pi/2)\, n\pi}{\mu_n V(f;\pi/2) - (-1)^{n+1} V[f;(n+1/2)\pi]}$$

и сече ортогонално реалната ос. С помощта на неравенството (6.08) получаваме, че ако $n \geq 1$, то $a_n' > \pi/2$ и ако $n \leq -1$, то $a_n' < \pi/2$, т.е. точката $\pi/2$ лежи вън от всички окръжности C_n . Следователно мероморфната функция $\dfrac{V(f;z)}{\cos z}$ няма нули вън от окръжностите C_n $(n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. По-нататък доказателството завършва така, както доказателството на теорема II.10.

Непосредствено се проверява, че ако например $f(t) = 3t - t^3$ неравенството (6.08) е удовлетворено при

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1/2)^2} \cdot \frac{1}{\pi^2 - 4} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

<u>Теорема II.12.</u> Нека цялата функция (4.01) има само реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π . Ако $U(f;0) \neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ такава, че

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n = 1 \quad \text{и}$$

(6.09) $\quad |U[f;(n+1/2)\pi]| < \mu_n |U(f;0)| \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots),$

то вътре във всеки интервал $[(\nu-1/2)\pi, (\nu+1/2)\pi]$, където ν е произволно цяло положително число, се съдържа една нула на функцията (4.01).

Доказателство. Ще използуваме разложението (4.09) на мероморфната функция $\dfrac{U(f;z)}{z\cos z}$ в сбор от елементарни дроби. Към тази функция прилагаме теорема II.2 на Обрешков. Нека C_n $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ е окръжността, която минава през точките $a_n=(n+1/2)\pi$,

$$a_n'=\frac{\mu_n U(f;0)(n+1/2)\pi}{\mu_n U(f;0)+\dfrac{(-1)^{n+1}U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi}}=\frac{\mu_n (n+1/2)\pi}{\mu_n+\dfrac{(-1)^{n+1}U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi\, U(f;0)}}$$

и сече ортогонално реалната ос. От неравенството (6.09) следва, че

(6.10) $$\mu_n+\frac{(-1)^{n+1}U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi\, U(f;0)}>0.$$

Тъй като поради (6.10) a_n и a_n' имат еднакви знаци, то точката 0 ще бъде вън от всички окръжности C_n и цялата функция (4.01) няма да има нули вън от окръжностите C_n $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$. От (6.10) следва още, че $a_n'>a_{n-1}$ за $n=1,2,3,\dots$ и $a_{-n}'<a_{-n+1}$ за $n=1,2,3,\dots$. Ще покажем, че във всяка окръжност C_n има поне една нула на (4.01) и $a_n'<a_n$ за $n=0,1,2,\dots$. За

$$a_0'=\frac{\mu_0\pi/2}{\mu_0-\dfrac{U(f;\pi/2)}{U(f;0)\pi/2}}$$

имаме две възможности – $a_0'>a_0=\pi/2$ и $a_0'<a_0=\pi/2$. Нека приемем за определеност, че $U(f;0)>0$ и да допуснем, че $a_0'>\pi/2$. Последното неравенство заедно с (6.10) при $n=0$ ни дава

$U(f;\pi/2)/\pi/2 > 0$. Но тогава $U(f;-\pi/2)/(-\pi/2) < 0$. От това неравенство и (6.10) следва, че $a'_{-1} < a_{-1}$. От неравенствата $a'_0 > a_0$, $a'_{-1} < a_{-1}$, $a'_n > a_0$ за $n = 1,2,3,\ldots$ и $a'_{-n} < a_{-1}$ за $n = 2,3,4,\ldots$ може да се заключи, че окръжностите C_n за $n = 0,1,2,\ldots$ са изцяло надясно от $a_0 = \pi/2$, а окръжностите C_n за $n = -1,-2,-3,\ldots$ – наляво от точката $a_{-1} = -\pi/2$. В такъв случай ще има съседни нули, разстоянието между които е по-голямо от π, което противоречи на направеното предположение. Следователно трябва $a'_0 < a_0 = \pi/2$. Вътре в C_0 има поне една нула на (4.01), тъй като допускането на противното заедно с неравенствата $a'_n > a_0$ за $n = 1,2,3,\ldots$ и $a'_{-n} < a_{-1}$ за $n = 2,3,4,\ldots$ води до противоречия с условието за разстоянието между съседните нули на (4.01). По аналогичен начин получаваме, че и в останалите окръжности има поне по една нула на (4.01) и $a'_n < a_n$ за $n = 1,2,3,\ldots$. От получените неравенства, като се вземе предвид (6.10) се получава, че

$$(6.11) \qquad (-1)^{n+1} \frac{U[f;(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi \; U(f;0)} > 0$$

за $n = 0,1,2,\ldots$. Непосредствено се проверява, че (6.11) е валидно и за $n = -1,-2,-3,\ldots$. И така всички резидиуми в разложението (4.09) имат еднакъв знак, съвпадащ със знака на $U(f;0)$. С разсъждения, аналогични на тези от теорема II.10 заключаваме, че всеки от интервалите $[(\nu-1/2)\pi, (\nu+1/2)\pi]$, където ν е произволно цяло положително число, съдържа по една нула на (4.01) и то във вътрешността си.

Аналогична теорема е валидна и за цялата функция (4.02).

<u>Теорема II.13.</u> Нека цялата функция (4.02) има само

реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π. Ако $V'(f;0) \neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ такава, че $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \mu_n = 1$ и

$$|V(f;n\pi)| < \mu_n |V'(f;0)| \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

то вътре във всеки интервал $[\nu\pi, (\nu+1)\pi]$, където ν е произволно цяло положително число, се съдържа по една нула на (4.02).

Доказателството използува разложението (4.10) и се извършва както доказателството на теорема II.10.

Ще разгледаме един пример, който показва, че от условието за реалност на нулите на целите функции от вида (4.02) не следва, че разстоянието между кои да са две съседни нули не превишава π.

<u>Пример</u>. Нека $\delta > 0$ и

$$V_\delta(z) = \int_0^1 (\delta t + 1) \sin tz \, dt. \tag{6.12}$$

Тъй като функцията $f(t) = \delta t + 1$ е положителна и ненамаляваща, цялата функция (6.12) има само реални и прости нули. От друга страна

$$\lim_{\delta \to 0} V_\delta(z) = \int_0^1 \sin tz \, dt$$

равномерно върху всяко ограничено множество. Цялата функция

$$V(z) = \int_0^1 \sin tz \, dt$$

се анулира за $z = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, като всяка нула е двукратна. Като се вземе предвид теоремата на Хурвиц, може да се твърди, че ако δ е достатъчно малко, съществуват съседни нули на (6.12), разстоянието между които е по-голямо от π. Може да се заключи дори нещо повече, а именно: какъвто и краен интервал да вземем, за всички достатъчно малки δ разстоянието между съседните нули на (6.12), намиращи се в този интервал, е по-голямо от π .

Аналогичен пример може да се построи и за целите функции от вида (4.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jensen, J.L.W.V. Recherches sur la théorie des équations, Acta Mathematica, 36, 1913, 181-195.

2. Rieman, B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

3. Pólya, G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Z., 1918, 2, 352-383.

4. Божоров, Е. Върху разпределението на нулите на една класа полиноми и цели функции. Год.Соф.унив., Прир.мат.фак., 46, 1950, кн.1, 43-72.

5. Обрешков, Н. Върху нулите на полиномите и на някои цели функции. Год.Соф.унив., Физ.- мат.фак., 37, 1941, № 1, 1-115.

6. Hurwitz, A. Über die Nullstellen der Bessel'schen Funktionen, Math. Ann., 33, 1889, 246-266.

7. Чакалов, Л. Върху една класа цели функции. Сп.на БАН, 1927, 36, 51-89.

8. Русев, П. Разпределение на нулите на една класа цели функции. Физ.мат.сп., 4, (37), 1961, 130-135.

9. Илиев, Л. Върху нулите на някои класи от полиноми и цели функции. Дисертация, София, 1940.

10. Schur, I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. J.reine u. angew. Math., 147, 1917.

11. Obrechkoff, N. Sur les racines des equations algebriques. The Tohoku Math. Journal, 38, 1933, 93-100.

12. Илиев, Л. Върху разпределението на нулите на една класа цели функции. Год.Соф.унив., 44, 1947/48, кн.1, 143-164.

13. Russev, P. On a theorem of G. Polya. G.R. Acad.Bulg.Sci., 19,1966,No.8, 689 - 691.

14. Russev, P. Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen,G.R,Acad.Bulg.Sci.,14,1961,No.1,7-9.

15. Docev, K. Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen,G.R.Acad.Bulg.Sci.,15,1962,No.3,239-241.

16. Русев, П. Някои резултати за разпределението на нулите на целите функции от вида $\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt$ и $\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt$. Изв.Мат.инст., БАН, 15, 1974, 33, 33-62.

17. Kakeya, J. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients,Tohoku Math.J.,2,1912,No.3.

18. Божоров, Е. Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми. Год.Хим.-технол.инст., 2, 1955, № 2, 151-161.

19. Костова, М. За функциите от класа E . Н.тр.ПУ, 11, кн.3, 1973.

20. Russev, P. A class of entire functions with only real zeros. G.R.Acad.Bulg.Sci.,19,1966,No.7,569 - 570.

21. Титчмарш, Е. Теория функций, Москва, 1951.

22. Обрешков, Н. Нули на полиномите. София, 1963.

23. Димитров, Д. Върху разпределението на нулите на някои полиноми и цели функции, представими в интегрална форма, Н.тр. на ВЛТИ, 8, 1960.

24. Ilieff, L. Über trigonometrische Integrale, welche ganze Funktionen mit nur reellen Nullstellen darstellen, Acta Math., 6, 1955, 191 - 194.

25. Божоров, Е. Върху някои въпроси, свързани с полиноми и цели функции, Год.ХТИ, 8, 1961, кн.2, 251-262.

26. Смирнов, В.И. Курс высшей математики, т.3, ч.2, Москва, 1969.

27. Polya, G. Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. Sitz. Ber. Bayr. Acad. d. Wiss., 50, 1920, 285-290.

28. Левин, Б.Я. Распределение корней целых функций, Москва, 1956.

29. Чеботарев, Н.Г., Мейман, Н.Н. Проблема Рауса- Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Мат. и-та им. Стеклова, 24,1949.

30. Boas, R.P. Entire functions. New York, 1954.

31. Русев, П. Асимптотични свойства на нулите на един клас мероморфни функции, Год. Соф. унив., Мат. фак., 58, 1963/64 241-271.

32. Обрешков, Н. Върху някои класи полиноми и рационални функции. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 33, 1936/37, кн.1, 39-148.

33. Русев, П. Върху асимптотичното поведение на нулите на един клас цели функции. Изв. Мат. институт, 4, кн.2, 1960, 67-73.

34. Пойа, Д., Сегьо, Г. Задачи и теореми по анализ, т.2, София, 1974.

35. Касандрова, И. Върху една теорема на Обрешков. Н.тр. на ПУ, 12, кн.6, 1974, 271-274.

36. Касандрова, И. Върху разпределението на нулите на един клас цели функции.Сб.тр. на мл.н.раб.,№3,1975,271-279.

37. Касандрова, И. Теорема от типа на Билер-Ермит за един клас цели функции.Доклади на XII научна сесия на ПУ,1976.

38. Касандрова, И. Теорема Эрмита-Билера для одного класса целых функций. C.R. Acad. Bulg. Sci., 29, 1976, № 9, 1245-1248.

39. Касандрова, И. Разпределение на нулите на един клас цели функции от експоненциален тип. Н.тр.на ПУ, 13, кн.1, 1975, 339-345.

40. Касандрова, И. О некоторых результатах об одном классе целых функций с вещественными нулями. C.R. Acad. Bulg.Sci. , 30 , 1977, № 7.