ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА „КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ“

Иванка Михайлова Касандрова-Терзийска

РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ И АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА НУЛИТЕ НА КЛАСИ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ВИД

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация, представена за получаване
на научната степен „кандидат на математическите науки“

Научен ръководител
ст. н. с. кфмн П. Русев

ПЛОВДИВ, 1978

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"
МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА "КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ"

Иванка Михайлова Касандрова-Терзийска

РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ И АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА НУЛИТЕ НА КЛАСИ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ВИД

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация, представена за получаване на научната степен "кандидат на математическите науки"

Научен ръководител
ст.н.с.кфмн П.Русев

Пловдив, 1978

Проблемът за разпределение на нулите на целите функции от вида

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{itz}dt$$

е поставен от Йензен [1] . Повод за разглежданията в работата на Йензен е обстоятелството, както това е забелязано от Риман [2] , че разпределението, респективно асимптотичното поведение на нулите на целите функции от вида (1) е тясно свързано с важни проблеми от аналитичната теория на числата.

Частен случай на целите функции от вида (1) са функциите

$$(2) \qquad \int_{-a}^{a} f(t)e^{itz}dt \qquad (0 < a < \infty).$$

Както показват още първите изследвания на Пойа, задачите за разпределение на нулите на целите функции (1), респективно (2) съществено се различават. Това различие се дължи преди всичко на факта, че интегралът (1) представя изобщо цяла функция, чиито ред е по-голям от единица, докато (2) представя цяла функция от експоненциален вид, т.е. цяла функция от ред, ненадминаващ единица и нормален тип. В съответствие с това и методите за изследване на целите функции (1) и (2) са различни.

В работата [3] на Пойа, която е посветена главно на целите функции от вида

$$(3) \qquad U(f;z) = \int_0^1 f(t)\cos tz\,dt$$

и

$$(4) \qquad V(f;z) = \int_0^1 f(t)\sin tz\,dt$$

които са частни случаи на (2), е предложен метод за изследване разпределението на нулите им, който може да бъде наречен метод на интегралните суми. Този метод се основава най-вече на връзката, която съществува между разпределението на нулите на целите функции (3) и (4) и разпределението на нулите на полиномите

$$P_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k \;, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

В [3] Пойа получава твърдения и за взаимното разпределение на нулите на целите функции (3), респективно (4) и целите функции $\sin z$ и $\cos z$, като се опира на един резултат на Хурвиц. Идеята на Хурвиц се състои в това да се разглежда вместо цялата функция $U(f;z)$ мероморфната функция $\frac{U(f;z)}{\sin z}$ или $\frac{U(f;z)}{\cos z}$. По-точно се има предвид разлагането на тази мероморфна функция в сбор от съответните елементарни дроби.

Работата на Пойа даде импулс за многочислени изследвания и публикации в това направление главно от наши автори. Съществени приноси бяха дадени от академиците Л.Чакалов, Н.Обрешков, Л.Илиев. Тяхните изследвания намират продължение в работите на учениците им Е.Божоров, К.Дочев, П.Русев, Д.Димитров и други.

В представената дисертация се разглеждат някои въпроси, свързани с разпределението на нулите на целите функции от вида (3), (4) и

$$F(f;z) = \int_0^1 f(t) e^{itz} dt . \tag{6}$$

В § 1 изследваме асимптотичното поведение на нулите на полиномите (5) и връзката му с разпределението на нулите на целите функции от вида (6). Нека $E(\lambda,\delta)$ ($\lambda \geq 0,\ \delta > 0$) е множеството на реалните функции $f(t)$, дефинирани и интегруеми в риманов смисъл в интервала $[0,1]$, за които нулите на полиномите (5) за всички достатъчно големи n лежат в кръга $|z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n^\delta}$. При $\lambda = 0$ се получава единичния кръг и съответното множество обикновено се означава с E. Методът на интегралните суми води до следния резултат: ако $f(t) \in E$

или $f(t) \in E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$, нулите на цялата функция (6) се намират в горната полуравнина, а целите функции (3) и (4) имат само реални нули. Ако $f(t) \in E(\lambda,1)$, нулите на (6) са в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$.

Поради тази връзка между разпределението на нулите на полиномите (5) и целите функции от вида (3), (4) и (6) естествено възниква въпросът за условията, които трябва да удовлетворява функцията $f(t)$, за да принадлежи на класа E или $E(\lambda,\delta)$. Въпросът за принадлежност на $f(t)$ към класа E е разглеждан в работите на Л.Чакалов [4] , Н.Обрешков [5] , Е.Божоров [6] , М.Костова [7] и други. Не са ни известни работи, посветени на изследването на функциите от класа $E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$. В [8] К.Дочев показва, че ако $f(t)$ удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[0,1]$ и $f(1) \neq 0$, то $f(t) \in E(\lambda,1)$. Ние получаваме също резултат от такъв характер, който се съдържа в следната

<u>Теорема I.2.</u> Ако $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[0,1]$, непрекъсната в точката 1 и $f(1) \neq 0$, то $f(t) \in E(\lambda,1)$ за някое $\lambda > 0$.

От тази теорема с помощта на метода на интегралните суми получаваме, че ако $f(t)$ удовлетворява горните условия, нулите на цялата функция (6) лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z \geqslant -\lambda$.

Като следваме пътя на доказателство, използуван от П.Русев в [9] получаваме теорема, която дава възможност от дадена функция от класа $E(\lambda,1)$ да се получат други функции от същия клас.

<u>Теорема I.4.</u> Ако $f(t) \in E(\lambda,1)$ за някое $\lambda \geqslant 0$, $f(1) \neq 0$ и $\delta \geqslant 2$, то $f(t)(1-\delta t) \in E(\lambda,1)$.

Разпределението на нулите на целите функции (3) и (4) може да се свърже и с разпределението на нулите на полиномите

$$Q_{n,\varepsilon}(f;z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{k}{n}\right) z^k + \varepsilon z^n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Като използуваме тази връзка в теорема I.6 получаваме достатъчни условия, при които нулите на целите функции (3) и (4) лежат в ивица, успоредна на реалната ос.

Методът на интегралните суми дава възможност да се направят изводи за нулите на цялата функция (6), ако е известно разположението на нулите на полиномите (5) за достатъчно големи n. В края на § 1 разглеждаме въпроса за обратната връзка, т.е. ако е известно разположението на нулите на цялата функция (6), може ли да се извадят някакви заключения за нулите на полиномите (5). Полученият резултат е доста по-слаб от очаквания и той се съдържа в следната

Теорема I.8. Нека нулите на цялата функция (6) се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z > 0$. Ако $|f(1)| > |f(0)|$ и $f(t)$ притежава в интервала $[0,1]$ непрекъснати първа и втора производна, за достатъчно големи n полиномите (5) нямат нули вън от кръга $|z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n}$ и в областта

$$\begin{cases} 1 \leq |z| \leq 1 + \frac{\lambda}{n} \\ |\arg z| \leq M n^{-1/3}, \end{cases}$$

където λ и M са подходящи положителни числа.

В [5] Н. Обрешков доказва следното твърдение: ако $f(t)$ е функция, непрекъсната в интервала $[-a,a]$, която допуска абсолютно интегруема производна и $f(a)f(-a) \neq 0$, има ивица, съдържаща реалната ос, в която се намират всички нули на цялата функция (2). В § 2 прецизираме тази теорема, като показваме, че нулите на (2) остават в ивица, успоредна на реалната ос и при по-общи предположения за функцията $f(t)$.

Теорема I.9. Нека $f(t)$ е функция с ограничена вариация в интервала $[-a,a]$, непрекъсната в крайщата на интервала и $f(a)f(-a) \neq 0$. Тогава съществува ивица, успоредна на реалната ос, която съдържа нулите на цялата функция (2).

При доказателството следваме пътя на разсъжденията от работата на Н. Обрешков. Със същия метод доказваме и следната

Теорема I.11. Ако $f(t)$ е реална функция, дефинирана за $t \geq 0$, $f(t) = O(e^{-t^{\alpha}})$, където $\alpha > 1$ и

$$\int_0^{\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty,$$

нулите на цялата функция

$$\int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$$

се намират в полуравнината $\Im m\, z \leq \lambda$ за някое $\lambda \geq 0$.

От теорема I.9 получаваме достатъчни условия, при които нулите на целите функции от вида

$$\int_0^a [f(t)e^{itz} + \varphi(t)e^{-itz}]\,dt$$

се намират в полуравнината $\Im m\, z \geq -\lambda$ за някое $\lambda > 0$ или в ивица, успоредна на реалната ос.

В § 3 доказваме теорема от типа на Билер-Ермит за един клас цели функции от експоненциален вид. Обобщение на теоремата на Билер-Ермит за цели функции от експоненциален вид е предложено от Б.Я.Левин [10] . От теоремата на Левин следва, че ако $F(z) = U(z) + i\,V(z)$ е цяла функция от експоненциален вид с положителен дефект и с нули в полуравнината $\Im m\, z \geq 0$, реалните цели функции $U(z)$ и $V(z)$ имат само реални нули. Целите функции от вида (6) са от експоненциален вид и дефектът им е положителен. Следователно за тях е валидно следното твърдение: ако нулите на цялата функция (6) са в горната полуравнина, целите функции (3) и (4) имат само реални нули. Във връзка с разглежданията в § 1 и § 2 може да се постави въпроса за това, къде ще се намират нулите на целите функции (3) и (4), ако нулите на (6) са в полуравнината $\Im m\, z \geq -\lambda$, $\lambda > 0$, т.е. въпрос за съществуване на теорема от типа на Билер-Ермит в този случай. Ние доказваме теорема от типа на Билер-Ермит за по-общ клас цели функции, който включва в себе си функциите от вида (6).

Теорема I.12. Нека $F(z) = U(z) + i\,V(z)$ е цяла функция от експоненциален вид, която удовлетворява условията:

а) дефектът на $F(z)$ е положителен;

б) нулите на $F(z)$ се намират в полуравнината $\Im m\, z \geq -\lambda$, $\lambda \geq 0$;

в) функцията $F(z)$ е ограничена върху реалната ос;

г) съществуват числа $\alpha > \lambda$, за които

$$M_F(\alpha,\lambda) = \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{F(t+i\alpha)}{\bar{F}(t+i\alpha)} \right| < +\infty .$$

Тогава каквото и да е $\alpha > \lambda$, за което е изпълнено условието г), нулите на реалните цели функции $U(z)$ и $V(z)$ се намират в ивицата

$$|\operatorname{Im} z| \leq \alpha + \frac{1}{2d_F} \ln^+ M_F(\alpha,\lambda),$$

където d_F е дефекта на функцията $F(z)$.

Доказателството се опира на равенствата

$$U(z) = \frac{1}{2}\left[F(z) + \bar{F}(z)\right], \quad V(z) = \frac{1}{2i}\left[F(z) - \bar{F}(z)\right]$$

и на следната

Лема. Ако $F(z)$ удовлетворява условията на теорема I.12, то

$$\left|\frac{F(z)}{\bar{F}(z)}\right| < 1 \qquad \text{за} \quad \operatorname{Im} z > \alpha + \frac{1}{2d_F} \ln^+ M_F(\alpha,\lambda).$$

Аналогична теорема доказваме и за целите функции с отрицателен дефект (теорема I.14).

Теорема I.12, приложена към целите функции от вида (6), води до следния резултат:

Теорема I.15. Ако нулите на цялата функция (6) се намират в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\lambda$, $\lambda \geq 0$ и съществува $\alpha > \lambda$ за което $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$, нулите на целите функции (3) и (4) лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \alpha + \ln^+ M_F(\alpha,\lambda)$.
Може да се покаже, че ако $\lambda = 0$ $M_F(\alpha,0) \leq 1$ за всяко $\alpha > 0$ и от тази теорема получаваме споменатото по-горе твърдение за нулите на целите функции (3) и (4).

От теорема I.15 следва, че ако $f(t) \in E(\lambda,1)$ и съществува $\alpha > \lambda$, за което $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$, нулите на целите функции (3) и (4) лежат в ивица, успоредна на реалната ос.

Тук възниква въпросът за съществуването на функции $f(t)$, за които $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$. Преди всичко, ако $f(t) \in E$ или $f(t) \in E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$, $M_F(\alpha,0) \leq 1$ за всяко $\alpha > 0$. Последното неравенство заедно с теорема I.15 ни дава следното известно твърдение: ако $f(t) \in E$ или, $f(t) \in E(\lambda,\delta)$ с $\delta > 1$, целите функции (3) и (4) имат само реални нули. Като използваме лемата на Риман-Лебег [11] показваме, че $M_F(\alpha,\lambda) < +\infty$, ако $f(t)$ има абсолютно интегруема производна в интервала $[0,1]$.

Втората глава на дисертацията е посветена на асимптотичните свойства на нулите на целите функции (3) и (4) и взаимното им разпределение с нулите на тригонометричните функции. Тъй като в тази глава съществено се използува метода на Хурвиц, в § 4 излагаме накратко този метод. С оглед на бъдещите нужди разглеждаме още две теореми на Н. Обрешков [12] за разпределението на нулите на някои класи мероморфни функции.

Според една теорема на Палей, Титчмарш и Винер (стр. 24 от работата на Н. Обрешков [5]) нулите на целите функции (3) и (4), с евентуално изключение на краен брой, се намират в секторите $|\arg z| \leq \delta$ и $|\arg z - \pi| \leq \delta$, каквото и да е положителното число δ. Това е първия общ резултат за асимптотичното поведение на нулите на (3) и (4). По-късно изследвания от такъв характер са правени и от наши автори - Н. Обрешков [5], П. Русев [13] и други. В § 5, като прилагаме използуваните досега метод и техника при такъв род изследвания, получаваме някои други резултати за асимптотичното поведение на нулите на целите функции (3) и (4), които в известен смисъл прецизират споменатата погоре теорема. По-точно посочваме достатъчни условия, отнасящи се най-вече до порядъка на Фуриеровите коефициенти на функцията $f(t)$, при които нулите на (3) и (4) са в ивица, успоредна на реалната ос, във вътрешността на две параболи и в област, ограничена от две логаритмични криви.

Основните резултати от този параграф могат да се формулират по следния начин:

Теорема II.3. Нека са удовлетворени условията:

а) съществува положително число ε такова, че

$$\int_0^1 f(t) \cos n\pi t \, dt = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right);$$

б)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 f(t) \cos n\pi t \, dt \neq 0.$$

Тогава нулите на цялата функция (3) се намират в ивица, успоредна на реалната ос.

При условията на теорема II.3 може да се покаже, че нулите на (3), с евентуално изключение на краен брой, лежат в ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq \lambda$, каквото и да е $\lambda > 0$.

<u>Теорема II.5.</u> Ако са удовлетворени условията

а) съществува $\varepsilon > 1/2$ такова, че

$$\int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right);$$

б)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 f(t)\cos n\pi t\,dt \neq 0,$$

нулите на цялата функция (3), с изключение евентуално на краен брой, се намират във вътрешността на две параболи, симетрични една на друга относно имагинерната ос.

Теорема II.7 ни дава достатъчни условия, при които нулите на цялата функция (3) с положителна реална част, с изключение евентуално на краен брой, лежат в областта

$$\begin{cases} 0 < x < \infty \\ |y| \le A\ln^{1+\varepsilon}(x+1), \end{cases}$$

където A и ε са подходящи положителни константи.

Аналогични теореми доказваме и за целите функции от вида (4) (теорема II.4, теорема II.6, теорема II.8).

В § 6 се занимаваме с въпроса за взаимното разпределение на нулите на целите функции (3) и (4) и нулите на тригонометричните функции. В [3] Пойа установява, че ако $f(t)$ е положителна и ненамаляваща в интервала $[0,1]$, цялата функция (3) има само реални и прости нули и те се разделят от нулите на $\cos z$. Ако освен това $f(t)$ не е стъпаловидна с краен брой точки на прекъсване, които да са рационални числа, цялата функция (4) има само реални и прости нули и те се разделят от нулите на $\sin z$. Ние разглеждаме следната задача: нека цялата функция (3), съответно (4) има само реални нули. Дали те се разделят от нулите на $\sin z$ или $\cos z$. Да отбележим, че може да се случи едната от функциите (3) или (4) да има само реални нули, а другата да има най-много една реална нула. Разглеждания от такъв характер не са ни известни. Ние показваме, че при някои допълнителни условия такова разделяне е налице. По-важни резултати от този параграф са следните:

<u>Теорема II.10.</u> Нека цялата функция (3) има само реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надмина-

ва π . Ако $\mathcal{U}(f;0) \neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) такава, че $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n = 1$

и

$$|n\,\mathcal{U}(f;n\pi)| < \mu_n |\mathcal{U}(f;0)| \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

нулите на цялата функция (3) се разделят от нулите на $\sin z$.

Доказателството се извършва с метода на Хурвиц и използва една от теоремите на Обрешков.

Теорема II.12. Нека цялата функция (3) има само реални нули и разстоянието между кои да са две съседни нули не надминава π . Ако $\mathcal{U}(f;0) \neq 0$ и съществува редица от положителни числа $\{\mu_n\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) такава, че $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n = 1$

и

$$|\mathcal{U}[f;(n+1/2)\pi]| < \mu_n |\mathcal{U}(f;0)| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то вътре във всеки интервал $[(\nu-1/2)\pi, [\nu+1/2]\pi]$, където ν е произволно цяло положително число, се съдържа една нула на функцията (3).

Подобни резултати се съдържат в теорема II.11 и теорема II.13.

Дисертацията е изработена в ЕЦММ - София и ПУ "П.Хилендарски".

Основните резултати са разглеждани в катедрата по комплексен анализ на Пловдивския университет, в сектора по комплексен анализ на Института по математика и механика, а също така са докладвани на прегледа на ТНТМ през 1975 г. и XII научна сесия на Пловдивския университет. По-голяма част от тях се съдържат в работите [14] - [19] .

За насочването ми към проблемите, разглеждани в дисертацията, за постоянното внимание и ръководство на работата изказвам сърдечна благодарност на моя научен ръководител ст.н.с. П.Русев.

СПИСЪК НА ЦИТИРАНАТА В АВТОРЕФЕРАТА ЛИТЕРАТУРА

1. Jensen, J.L.W.V. Recherches sur la theórie des équations, Acta Mathematica, 36, 1913, 181-195.
2. Rieman, B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.
3. Pólya, G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Z., 1918, 2, 352-383.
4. Чакалов, Л. Върху една класа цели функции, Сп. на БАН, 1927, 36, 51-89.
5. Обрешков, Н. Върху нулите на полиномите и на някои цели функции, Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 37, 1941, № 1, 1-115.
6. Божоров, Е. Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми, Год. Хим.-технол. инст., 2, 1955, № 2.
7. Костова, М. За функциите от класа $\bar{E}$. Н.тр. ПУ, 11, кн.3, 1973, 33-36.
8. Dočev, K. Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen, G.R.Acad.Bulg.Sci., 15, 1962, No.3, 239-241.
9. Russev, P. A class of entire functions with only real zeros, G.R.Acad.Bulg.Sci., 19, 1966, No.7, 569-570.
10. Левин, Б.Я. Распределение корней целых функций, Москва, 1956.
11. Титчмарш, Е. Теория функций, Москва, 1951.
12. Обрешков, Н. Върху някои класи полиноми и рационални функции, Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 33, 1936/37, кн.1.
13. Русев, П. Асимптотични свойства на нулите на един клас мероморфни функции, Год. Соф. унив., Мат. фак., 58, 1963/64.
14. Касандрова, И. Върху една теорема на Н. Обрешков, Н.тр. на ПУ, 12, кн.6, 1974, 271-274.
15. Касандрова, И. Върху разпределението на нулите на един клас цели функции, Сб. тр. на мл.н.раб., № 3, 1975, 271-279.
16. Касандрова, И. Теореми от типа на Билер-Ермит за един клас цели функции, Доклади на XII научна сесия на ПУ, 1976.
17. Касандрова, И. Теорема Эрмита-Билера для одного класса целых функций, G.R.Acad.Bulg.Sci., 29, 1976, No.9, 1245-1248.
18. Касандрова, И. Разпределение на нулите на един клас цели

функции от експоненциален тип, Н.тр. на ПУ, 13, кн.1, 1975, 339-345.

19. Касандрова, И. О некоторых результатах об одном классе целых функций с вещественными нулями, G.R.Acad.Bulg.Sci., 30, 1977, N°7, 965-968.