D 81

ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ — София

Катедра МАТЕМАТИКА

ЙОРДАНКА АНТОНОВА АНГЕЛОВА

КАЧЕСТВЕНИ И ОПТИМИЗАЦИОННИ ИМПУЛСНИ МОДЕЛИ В ПОПУЛАЦИОННАТА ДИНАМИКА

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за получаване на образователната и научна степен
"Доктор "

Научен консултант :
доц. д-р А.Б.ДИШЛИЕВ

София, 1999

Съдържание

Означения

$\emptyset$	празното множество
$\mathbb{N}$	множеството на естествените числа, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	множеството на реалните числа
$\mathbb{R}_+$	множеството на неотрицателните реални числа
$\mathbb{R}_-$	множеството на неположителните реални числа
$[a, b]$	затворен интервал, $a < b$
(a, b)	отворен интервал, $a < b$
$[a, b)$	полуотворен интервал отдясно, $a < b$
$(a, b]$	полуотворен интервал отляво, $a < b$
$< a, b >$	един от интервалите : (a, b), ако $a < b$ или (b, a), ако $b < a$
$A \times B$	Декартово произведение на непразните множества A и B
$\mathbb{R}^n$	n-мерно Евклидово пространство
$\langle x, y \rangle$	скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$; $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\|x\|$	Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\rho(x, y)$	разстояние между точките x и y в $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$
$\overline{A}$	затворена обвивка на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
∂A	граница на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$IntA$	вътрешност на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathbb{B}(x_0, r)$	отворено кълбо с център $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$
$f : A \longrightarrow B$	функция f с дефиниционно множество A и множество от функционни стойности B
$f_t(t, x)$	частна производна на функцията f по t, $f_t(t, x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$
$f_x(t, x)$	частна производна на функцията f по x, $f_x(t, x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$
$\mathbf{C}(A, B)$	множество от всички непрекъснати функции с дефиниционно множество A и множество от функционни стойности B
$\text{sgn}x$	знака на x
$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$	пермутация на първите n естествени числа
ξ_I	I-оптимална крива (виж стр.104)
$\forall$	квантор за всеобщност
$\exists$	квантор за съществуване
$\Longrightarrow$	следва
$\rightarrow$	клони

Увод

Настояшата дисертация е посветена на разработването и приложението на качествени и оптимизационни математически модели, предназначени за оптимално управление на динамични процеси в популационната динамика. С помощта на получените резултати ще се създаде реална възможност теоретичните достижения в импулсните диференциални уравнения и теория на управлението да се приложат в производствените процеси за получаване на полезна биомаса. Резултатите лесно могат да се алгоритмизират във вид удобен за изготвяне на програмни продукти за крайния потребител.

Импулсните диференциални уравнения (ИДУ) са подходящ математически апарат за описание, изучаване и прогнозиране на реални процеси, които по време на своето развитие са подложени на кратковременни въздействия. Тези кратковременни пертурбации, чиято продължителност е пренебрежима в сравнение с продължителността на целият процес, могат да се разглеждат като "мигновени" импулси. С помощта на ИДУ може по подходящ начин да се моделират динамични процеси, които се наблюдават в експерименталната физика, химия, биология, техника, популационната динамика и др. Началото си теорията на ИДУ бележи с работите на Мильман и Мышкис [**MM60**], [**MM63**]. До сега на тази теория са посветени повече от 500 публикации в това число повече от 15 монографии, от които тук ще посочим : [**PD82**], [**СП87**], [**BS89**], [**LBS90**], [**BS92**], [**BC94**], [**BKM94**].

На изследвания по непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на система ИДУ от началните условия, импулсните хиперповърхнини и пертурбации са посветени работите [**BS89**], [**BD90**], [**DB88**], [**DB90**], [**DB92**], [**Liu92**] и др.

Най-общо, в зависимост от избора на импулсните моменти (ИМ) и импулсните въздействия (ИВ), системите ИДУ може да се класифицират на три типа :

— системи с фиксирани ИМ и ИВ (моментите и въздействията са предварително зададени) ;

— системи с динамични ИМ и ИВ (моментите се осъществяват, когато интегралната крива на динамичната система пресича предварително зададени множества в разширеното фазово пространство. Често тези множества са хиперповърхнини в разширеното фазово пространство) ;

— системи с оптимални ИМ и ИВ (моментите и пертурбациите се получават като решения на оптимизационни задачи).

В глава 1 са въведени две нови понятия : непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на системи обикновени диференциални уравнения с фиксирани импулсни моменти от импулсните моменти ([**AD97**]).

Основен обект на изследване в първата глава е следната начална задача за нелинейна система диференциални уравнения с импулси :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\dots\,; &(1)\\ \Delta x(t)|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i+0) - x(\tau_i) = I_i(\tau_i, x(\tau_i))\,; &(2)\\ x(t_0) &= x_0\,, &(3)\end{aligned}$$

където : $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\emptyset \neq \mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$; $\{\tau_i\}_1^\infty$ е редица от импулсни моменти, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$; $I_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $t_0 \in \mathbb{R}_+$; $x_0 \in \mathbb{D}$.

Заедно с тази начална задача е разгледана и асоциираната с нея смутена задача, а именно

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= f(t,x^*), \quad t \neq \tau_i^*, \quad i = 1,2,\dots\,; &(4)\\ \Delta x^*(t)|_{t=\tau_i^*} &= x^*(\tau_i^*+0) - x^*(\tau_i^*) = I_i(\tau_i^*, x^*(\tau_i^*))\,; &(5)\\ x^*(t_0^*) &= x_0^*, &(6)\end{aligned}$$

където : $t_0^* \in \mathbb{R}_+$; $x_0^* \in \mathbb{D}$; $\{\tau_i^*\}_1^\infty$ са импулсните моменти на началната задача (4), (5), (6), $t_0^* < \tau_1^* < \tau_2^* < \dots$. В общия случай е изпълнено $\tau_i \neq \tau_i^*$, $i = 1,2,\dots$.

Означаваме с $x(t;t_0,x_0)$ решението на задача (1), (3) без импулси, с $x(t)$ решението на задачата (1), (2), (3), а с $x^*(t)$ - решението на началната задача (4), (5), (6), $\|.\|$ е Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Решението $x(t)$ е непрекъсната отляво функция и може да се опише по следния начин :

$$x(t) = \begin{cases} x(t;t_0,x_0), & t \in [t_0,\tau_1]\,; \\ x(t;\tau_i, x_i + I_i(\tau_i,x_i)), & t \in (\tau_i,\tau_{i+1}]\,, i = 1,2,\dots\,. \end{cases}$$

В §1 са приведени някои основни твърдения и теореми за непрекъсната зависимост на решенията на импулсните диференциални уравнения от импулсните моменти.

Дефиниция 0.1. Ще казваме, че решението $x(t)$ на задачата (1), (2), (3) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти $\tau_1, \tau_2, \dots$, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall T > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon,T) > 0)$$
$$(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta,\ |\tau_i - \tau_i^*| < \delta,\ i = 1,2,\dots)$$
$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\bar{t}_0, T] \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} < \tau_i, \tau_i^* >,$$

където $\bar{t}_0 = \max\{t_0, t_0^*\}$,

$$< \tau_i, \tau_i^* >= \begin{cases} (\tau_i, \tau_i^*], & \tau_i \leq \tau_i^*\,; \\ (\tau_i^*, \tau_i], & \tau_i > \tau_i^*. \end{cases}$$

В този параграф са въведени следните условия **(H0.1)** :

H0.1.1 Функцията $f \in \boldsymbol{C}\{[0,T] \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$, $t_0 \in (0,T)$.

H0.1.2 Съществува константа $M > 0$ такава, че

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{D}.$$

H0.1.3 За всяка точка $(\tau,\chi) \in [0,T] \times \mathbb{D}$ решението на системата без импулси (1) с начално условие $x(\tau) = \chi$ е единствено и продължимо до T (за конкретни условия виж [**Yos66**], [**Хар70**]).

H0.1.4 $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \ \lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = \infty.$

H0.1.5 $I_i \in C\{[0,T] \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2, \dots$.

H0.1.6 $(I + I_i) : [0,T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1, 2, \dots$, където $I(t,x) = x$ за всяка точка $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Забележка 0.1. От условията **H0.1.1**, **H0.1.3**, **H0.1.4**, **H0.1.6** следва, че решението $x(t)$ на задачата (1), (2), (3) е единствено и продължимо до T (виж [**LBS90**]).

Следващата лема дава условия за непрекъсната зависимост на решението на началната задача (1), (2), (3) от един импулсен момент в интервала $[0,T]$.

Лема 0.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H0.1.1**, **H0.1.2**, **H0.1.3**, **H0.1.5**, **H0.1.6**.
2. $\tau_1 < T < \tau_2$.

Тогава решението на задача (1), (2), (3) непрекъснато зависи от импулсния момент τ_1 в интервала $[0,T]$.

Изискването импулсната сиситема (1), (2), (3) да притежава един импулсен момент в интервала $[t_0,T]$ отпада в следващата теорема.

Теорема 0.1. *Нека са изпълнени условията* (**H0.1**).

Тогава решението на задача (1), (2), (3) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти в интервала $[t_0,T]$.

В параграф 2 се дефинира равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти и са намерени достатъчни условия за такава устойчивост.

Дефиниция 0.2. Ще казваме, че решението $x(t)$ на задачата (1), (2), (3) е равномерно устойчиво относно импулснита моменти $\tau_1, \tau_2, \dots$, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$$
$$(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta,\ |\tau_i - \tau_i^*| < \delta,\ i = 1, 2, \dots)$$
$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon,\ \ t \in [\bar{t}_0, \infty) \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} < \tau_i, \tau_i^* > .$$

Забележка 0.2. За дефинираните по-горе понятия непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост не се изисква близост между решенията на задачите (1), (2), (3) и (4), (5), (6) в достатъчно малки околности на импулсните моменти. Това се дължи на факта, че в общия случай е възможно разглежданата задача и нейната пертурбирана да се изменят импулсно в различни моменти от времето.

Ще припомним следната добре известна дефиниция [**Yos66**], [**Хар70**] :

Дефиниция 0.3. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (1), (3) е равномерно устойчиво, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta)$$
$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - x^*(t; t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon,\ t \geq \bar{t}_0,$$

където $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ е решението на началната задача (4), (6).

Ясно е, че ако решението на задача (1), (3) е равномерно устойчиво, то за всяко ε има безбройно много $\delta > 0$, които удовлетворяват горната дефиниция. Нещо повече, всяка една от тези константи $\delta \leq \varepsilon$. Нека означим с $\delta(\varepsilon)$ горната граница на множеството на всички δ, удовлетворяващи Дефиниция 0.3.

За всяко ε образуваме редицата $\delta_1 = \delta(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta(\delta_1), \ldots, \delta_i = \delta(\delta_{i-1}), \ldots$. Изпълнени са неравенствата $\delta_i > 0$, $\delta_i \geq \delta_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$. Следователно редицата $\{\delta_i\}_1^\infty$ е сходяща. Означаваме нейната граница с $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) = \lim_{i\to\infty} \delta_i$.

Дефиниция 0.4. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (1), (3) е гранично-равномерно устойчиво ([**DB92**]), ако :
— то е равномерно устойчиво ;
— за всяко ε имаме $\delta^*(\varepsilon) > 0$.

Забележка 0.3. Ясно е, че равномерно устойчивите решения могат да се разделят на два непресичащи се класа : гранично-равномерно устойчиви и равномерно устойчиви, които не са гранично-равномерно устойчиви. Лесно може да се покаже, че тези два класа са непразни.

Ще припомним и следната дефиниция [**Yos66**], [**Хар70**] :

Дефиниция 0.5. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (1), (3) е равномерно асимптотично устойчиво, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\exists T = T(\varepsilon) > 0)$$

$$(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta)$$

$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - x^*(t; t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon,\ t \geq \bar{t}_0 + T,$$

където $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ е решението на началната задача (4), (6).

Забележка 0.4. Не е трудно да се покаже, че всяко равномерно асимптотично устойчиво решение е гранично-равномерно устойчиво. Следователно класът **A** на равномерно асимптотично устойчивите решения е подклас на класа на гранично-равномерно устойчивите решения **B**. Нещо повече **A** е същински подклас на **B**.

Следният пример ни убеждава в това.

Пример 0.1. Да разгледаме следната начална задача :

$$\frac{dx}{dt} = 0; \qquad x(t_0) = x_0$$

с решение $x(t; t_0, x_0) = x_0$, $t \geq t_0$. Очевидно решението на тази задача е равномерно устойчиво, но не е равномерно асимптотично устойчиво. От друга страна, за всяко $\varepsilon > 0$ имаме $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$. Следователно редицата $\delta_1, \delta_2, \ldots$, където $\delta_1 = \delta(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta(\delta_1), \ldots$, съвпада с редицата $\varepsilon, \varepsilon, \ldots$. И така имаме $\delta^*(\varepsilon) = \lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon = \varepsilon$. Това означава, че решението на разглежданата задача е гранично-равномерно устойчиво, т.е. $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Лема 0.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *За всяка точка $(\tau, \chi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ решението на системата (1) с начално условие $x(\tau) = \chi$ е единствено и продължимо до ∞ (виж* **[Yos66]**, **[Хар70]***).*
2. *Решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (1), (3) е гранично-равномерно устойчиво.*

Тогава:

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta^*(\varepsilon),\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta^*(\varepsilon))$$
$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - x^*(t; t_0^*, x_0^*)\| < \delta^*(\varepsilon),\ t \geq \bar{t}_0 = \max\{t_0, t_0^*\}.$$

Забележка 0.5. Тази лема показва, че ако задачата без импулси има гранично-равномерно устойчиво решение, то всяко друго решение на същата система с начално условие от $\mathbb{B}(x_0, \delta^*(\varepsilon))$ (околност на началното условие) за всяко $t \geq \bar{t}_0$ принадлежи на $\mathbb{B}(x(t; t_0, x_0), \delta^*(\varepsilon))$.

В параграф 2 са въведени следните условия **(H0.2)**:

H0.2.1 Функцията $f \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$.

H0.2.2 Съществува константа $M > 0$ такава, че

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}.$$

H0.2.3 За всяка точка $(\tau, \chi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ решението на системата (1) с начално условие $x(\tau) = \chi$ е единствено и продължимо до ∞.

H0.2.4 Съществува константа $d > 0$ такава, че $\tau_{i+1} - \tau_i \geq d$, $i = 1, 2, \ldots$.

H0.2.5 $I_i \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

H0.2.6 $(I + I_i) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1, 2, \ldots$.

H0.2.7 Съществува константа a, $0 < a < 1$, такава, че

за всеки две точки (t_1, y_1), $(t_2, y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ е изпълнено

$$\|y_2 - y_1 + I_i(t_2, y_2) - I_i(t_1, y_1)\| \leq a(\|y_2 - y_1\| + |t_2 - t_1|),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 0.2. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.2)***.*
2. *Решението на задачата без импулси (1), (3) е гранично-равномерно устойчиво.*

Тогава решението на задача (1), (2), (3) е равномерно устойчиво от импулсните моменти.

В Теорема 0.2 условието **H0.2.4** може да се замени с условието
H0.2.4′ Съществуват константи l_1 и l_2 такива, че $\lim\limits_{i\to\infty}(\tau_i - il_1) = l_2$.

Популационната динамика се занимава с процеси в популациите, които се развиват във времето, по-точно с процеси на изменение на числеността на популацията и нейната структура във времето.

Има два основни подхода при описание на динамичните процеси в популациите : детерминистичен и стохастичен. При детерминистичното описание всички елементарни актове се смятат за известни от по-рано, така че моделът като цяло приема вид на нелинейни диференциални уравнения или уравнения с разделени разлики. Стохастичното описание е свързано с допускането за вероятностната природа на един или няколко елементарни процеса, влияещи на поведението на популацията. Известни са различни математически модели [**ФГ80**], [**Fre80**], [**Пых83**], [**Мар83**], [**Ede88**], [**Gop92**] на съвместно съществуващи съобщества в популационната динамика (ПД). Множеството от всички обитаващи дадена екологична система растения, животни и микроорганизми се нарича “биота”. Под “популация” ще разбираме съвкупност от индивиди от даден вид, които обитават определена територия и са достатъчно изолирани от други подобни съобщества. По този начин популациите биват изолирани и неизолирани, в стационарна среда (средата е неизменна във времето) и в нестационарна среда в противен случай. При многовидовите популации, в зависимост от междувидовите взаимодействия, тяхните биотични отношения се класифицират като : неутрализъм $(0,0)$, аменсализъм $(-,0)$, комменсализъм $(+,0)$, конкуренция $(-,-)$, жертва - хищник (жертва - експлоататор) $(+,-)$, мутуализъм $(+,+)$. От един обобщен математически модел при различни предположения за околната среда и функцията на приспособеност се получават повечето модели от ПД. Тези модели са изследвани за : устойчивост, привличане, периодичност, осцилиране и неосцилиране на решенията им, ограниченост и т.н [**Пых83**], [**Ver90**], [**Rob95**]. В тези модели, обаче, не се отчита дискретната намеса на човека. Това влияние е възможно да се състои в отнемане или прибавяне на определени количества биомаса към отглеждания или управляван вид или видове от съобществото. Една от възможностите за оптимално управление на конкретен биотехнологичен процес се осъществява като в определени моменти от времето количеството биомаса на участващите в процеса видове се подложи на импулсно въздействие.

В §3 получените резултати са приложени в популационната динамика. По-точно разгледани са импулсни аналози на моделите на : Verhulst, Lotka-Volterra и двумерен модел с комменсализъм. За обобщения двумерен модел на Lotka-Volterra е показано, че решението е непрекъснато зависимо от импулсните моменти, а за другите два модела, че решенията са им равномерно устойчиви от импулсните моменти.

В глава 2 са поставени и решени няколко оптимизационни задачи от популационната динамика за един биологичен вид. Основните класически модели на динамиката на един вид се получават от следното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N), \tag{7}$$

където :

— $N = N(t) > 0$ е биомаса (размер) на популацията в момента $t \geq 0$;

— $f(t, N)$ е функция, описваща абсолютната скорост на нарастване на биомасата на популацията и отчита различните биологични предположения за средата.

А. Колмогоров е предложил дясната страна на уравнение (7) да е от вида

$$f(t, N) = NW(t, N)$$

(вид на "Колмогоров" [**Gop92**]). Функцията W представлява относителната скорост на нарастване на поулационната численост N и отразява влиянието на биотичните (растения, животни, микроорганизми) и абиотичните (метеорологични, литологични, хидрологични) фактори. Нарича се функция на приспособеност на популацията. Най-общо казано [**ГГППР74**], ако $W(t, cN) \leq W(t, N)$ при $c > 1$ популацията се нарича лимитирана.

В случаите, когато околната среда е подложена на дълготрайни във времето непрекъснати външни въздействия, общото уравнение (7) се пертурбира до диференциално уравнение от вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N) + \varepsilon(t, N), \tag{8}$$

където $\varepsilon(t, N)$ е функция, описваща непрекъснатото влияние на външните фактори (емиграция, имиграция, сезонни бедствия и т.н.).

Като примери на конкретни модели ще посочим следните :

$\boxed{1.}$ *Логистичното уравнение (уравнение на Verhulst)* при

$$W(t, N) = \frac{r}{K}(K - N),$$

т.е.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}N(K - N), \tag{9}$$

където :

— $K = K(t) > 0$ е капацитет на средата (ниво на насищане) ;

— $r = r(t) > 0$ е репродуктивен потенциал на популацията.

$\boxed{2.}$ *Уравнение на Gompertz* при

$$W(t, N) = r - \gamma \ln N,$$

т.е.

$$\frac{dN}{dt} = N(r - \gamma \ln N), \tag{10}$$

където :

— $\gamma = \gamma(t) > 0$ е коефициент на вътревидова конкуренция (коефициент на самоотравяне) ;

— $r = r(t) > 0$ е репродуктивен потенциал на популацията.

Обемът на популацията в момента $t = 0$ е

$$N(0) = N_0\,, \quad N_0 > 0. \tag{11}$$

Задачата (8), (11) описва динамиката на развитие на един биологичен вид в непрекъснатия случай. Ако имаме дискретна външна намеса, т.е. ако отнемаме или добавяме определено количество биомаса, ще са изпълнени следните уравнения:

$$\Delta N(t)\,|_{t=\tau_i} = N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = I_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots\,, \tag{12}$$

където: $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots)$ са моментите на отнемане $(I_i < 0)$ или добавяне $(I_i > 0)$ на биомаса от популацията. Уравненията (8), (12) представляват импулсен аналог на уравнението за развитие на един биологичен вид.

В §1 на глава 2 е разгледана началната задача за едноимпулсно диференциално уравнение, а именно

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(t, N)\,, \quad t \neq \tau; \\ N(\tau + 0) &= N(\tau) - I; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Импулсният момент τ $(0 < \tau \leq T)$ на отнемане на дадено количество I $(I > 0)$ от популационнта биомаса е определен, така че в последния момент T количеството биомаса $N(T)$ е максимално ([**AD99**]).

Тази оптимизационна задача е решена в §1. В този параграф са въведени условията **(H0.3)**:

H0.3.1 $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{C}\{[0, T], \mathbb{R}\}$, $T \in (0, \infty)$.

H0.3.2 $f : \mathbb{D} \longrightarrow (0, \infty)$, където $\mathbb{D} = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in (\varphi_1(t), \varphi_2(t))\}$.

H0.3.3 $f(t, \varphi_1(t)) = f(t, \varphi_2(t)) = 0, t \in [0, T]$.

H0.3.4 $f \in \boldsymbol{C}\{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}_+\}$.

H0.3.5 За всяко $t \in [0, T]$ функцията $F(x) = f(t, x)$ притежава единствен максимум в точката $M(t) \in (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

H0.3.6 Съществува константа $I > 0$ такава, че $\varphi_1(t) + 2I < \varphi_2(t)$, $t \in [0, T]$.

H0.3.7 $f \in C^1\{\mathbb{D}, (0, \infty)\}$.

H0.3.8 $f(t, x) + \dfrac{f_t(t, x) - f_t(t, x - I)}{f_x(t, x) - f_x(t, x - I)} > 0$, $(t, x) \in [0, T] \times (M(t), M(t) + I)$.

H0.3.9 φ_1 е монотонно намаляваща функция в $[0, T]$.

H0.3.10 φ_2 е монотонно растяща функция в $[0, T]$.

H0.3.11 $x_0 \in [\varphi_1(0) + I, \varphi_2(0))$.

Лема 0.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H0.3.1**–**H0.3.5**.

2. $0 < I_1 < I_2$.

3. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I_2, \varphi_2(t) - I_2]$, $t \in [0, T]$.

Тогава за всяко $t \in [0, T]$ *уравненията:*

$$g_i(x) = f(t, x) - f(t, x - I_i) = 0, \; i = 1, 2,$$

притежават:

1. *Единствени непрекъснати решения в интервала* $[0, T]$, *а именно функциите* $\psi_i(t) \in (M(t), M(t) + I_i)$, $i = 1, 2$.
2. *За всяко* $t \in [0, T]$ *са валидни неравенствата* $M(t) < \psi_1(t) < \psi_2(t) < M(t) + I_2$.

Решението на началната задача без импулси

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x); \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{13}$$

означаваме с $x(t; 0, x_0)$.

Ще разгледаме следните две начални задачи за нелинейни диференциални уравнения с импулси:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau; \\ \Delta x(t)|_{t=\tau} &= x(\tau + 0) - x(\tau) = -I; \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{14}$$

и асоциираната с нея

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(t, \hat{x}), \quad t \neq \hat{\tau}; \\ \Delta \hat{x}(t)|_{t=\hat{\tau}} &= \hat{x}(\hat{\tau} + 0) - \hat{x}(\hat{\tau}) = -I; \\ \hat{x}(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Означаваме съответно с $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ решенията на задачите (14) и (15).

Лема 0.4. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.3)**.
2. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I, \varphi_2(t) - I]$, $t \in [0, T]$.

Тогава множеството $\Delta = \{t : t \in [0, T], \, x(t; 0, x_0) = \psi(t)\}$ *се състои най-много от една точка, където функцията* ψ *е единственото решение на уравнението* $g(x) = f(t, x) - f(t, x - I) = 0$.

Забележка 0.6. Лема 0.4 е доказна с помощта на удобното, но силно ограничително условие **H0.3.8**. Така например лесно се вижда, че това условие се използва само за точките от кривата $\{(t, \psi(t)), \, t \in [0, T]\} \subset [0, T] \times (M(t), M(t) + I)$. Ето защо то може да бъде заменено с по-слабо ограничително условие:

$$\mathbf{H0.3.8'} \; f(t, \psi(t)) + \frac{f_t(t, \psi(t)) - f_t(t, \psi(t) - I)}{f_x(t, \psi(t)) - f_x(t, \psi(t) - I)} > 0, \quad t \in [0, T].$$

Теорема 0.3. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.3)**.

2. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I, \varphi_2(t) - I]$, $t \in [0, T]$.
3. $\Delta = \{\tau\}$, *където* $\Delta = \{t : t \in [0, T], x(t; 0, x_0) = \psi(t)\}$, ψ *е решение на уравнението* $g(x) = f(t, x) - f(t, x - I) = 0$.
4. $\tau \neq \hat{\tau}$, $\hat{\tau} \in [0, T]$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

ТЕОРЕМА 0.4. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.3)**.
2. $\Delta = \emptyset$, *т.е. интегралната крива* $(t, x(t))$ *не пресича кривата* $(t, \psi(t))$ *в интервала* $[0, T]$.
3. $0 \leq \hat{\tau} < T$.

Тогава $x(T) - I = x(T; 0, x_0) - I > \hat{x}(T)$.

В §3 на втора глава е разгледана следната начална задача за импулсно диференциално уравнение, модел на един биологичен вид, с краен брой импулсни въздействия в стационарна среда:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(N), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ \Delta N(t) \mid_{t=\tau_i} &= N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = -I_i; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Решена е оптимизационната задача за определяне на:

— броя на импулсните моменти - n;

— количествата на импулсните отнемания - $I_1, I_2, \ldots, I_n$;

— импулсните моменти - $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < T$

така че:

$\boxed{1.}$ $I_0 \leq I_i \leq I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, където I_0 и I са отнапред зададени положителни константи.

$\boxed{2.}$ $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = I$.

$\boxed{3.}$ В крайния момент $T > 0$ решението на разглежданата начална задача да е максимално ([**AD98**]).

Въведени са условията **(H0.4)**:

H0.4.1 $f : (\varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (0, \infty)$; $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

H0.4.2 $f(\varphi_1) = f(\varphi_2) = 0$.

H0.4.3 $f \in C\{[\varphi_1, \varphi_2], \mathbb{R}_+\}$.

H0.4.4 Функцията f притежава единствен максимум в точката $M \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

H0.4.5 $x_0 \in (\varphi_1, M]$.

При определени условия се показва, че уравнението

$$g(x) = f(x) - f(x - I) = 0 \tag{16}$$

притежава единствено решение $\psi \in (M, M+I)$.

Решението на следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,; \tag{17}$$

$$x(0) = x_0 \tag{18}$$

означаваме с $x(t;0,x_0)$.

В сила е:

Лема 0.5. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $M \in [\varphi_1 + I, \varphi_2 - I]$, $I > 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 > 2I$.

Тогава при достатъчно голямо T множеството $\Delta = \{t : t \in [0,T]\,, x(t;0,x_0) = \psi\}$, където ψ е решението на уравнение (16), се състои от единствена точка τ_1, т.е. $\Delta = \{\tau_1\}$.

Заедно със задача (17), (18) ще изследваме и следните две начални задачи за импулсни автономни диференциални уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\ldots,k; \tag{19}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = -I_i; \tag{20}$$

$$x(0) = x_0 \tag{21}$$

и асоциираната с нея

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x})\,, \quad t \neq \hat{\tau}_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,s; \tag{22}$$

$$\Delta \hat{x}\big|_{t=\hat{\tau}_i} = -\hat{I}_i; \tag{23}$$

$$\hat{x}(0) = x_0\,, \tag{24}$$

където $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < T$ и $0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 < \cdots < \hat{\tau}_s < T$ са импулсните моменти; $\{I_i\}_1^k$, $\{\hat{I}_i\}_1^s \subset \mathbb{R}_+$ са големините на импулсните въздействия съответно на задачите (19), (20), (21) и (22), (23), (24).

Означаваме с $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ съответно решенията на горните две задачи.

Забележка 0.7. От условията **(H0.4)** и неравенствата $0 < I_1 < I_2 < \cdots < I_n$, $\varphi_1 + I_n \leq M \leq \varphi_2 - I_n$ получаваме, че:

1. Уравненията $g_i(x) = f(x) - f(x - I_i) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n$, притежават съответно единствени решения $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, такива, че $M < \psi_1 < \psi_2 < \cdots < \psi_n < M + I_n$.
2. За достатъчно голямо T всяко едно от множествата:

   $\Delta_1 = \{\tau_1\} = \{t : t \in (0,T), x(t;0,x_0) = \psi_1\}\,,$

   $\Delta_i = \{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1},T), x(t;\tau_{i-1},\psi_{i-1} - I_{i-1}) = \psi_i\}\,, i = 2,3,\ldots,n$

се състои от една точка.

Теорема 0.5. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$, $M \in [\varphi_1 + I_2, \varphi_2 - I_2]$.
4. $\hat{I}_i = I_i$, $i = 1, 2$.
5. $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$; $0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 \le T$; $\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \ne \{\tau_1, \tau_2\}$; $\{\tau_i\} = \Delta_i$, $i = 1, 2$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

ТЕОРЕМА 0.6. *Нека са изпълнени условията:*
1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$; $M \in [\varphi_1 + \hat{I}, \varphi_2 - \hat{I}]$.
4. $\hat{I}_1 = I_2$, $\hat{I}_2 = I_1$.
5. $\{\tau_1\} = \Delta_1$, $\{\tau_2\} = \Delta_2$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_2\}$, $\{\hat{\tau}_2\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_1, T], x(t; \hat{\tau}_1, \psi_2 - I_2) = \psi_1\}$.

Тогава $x(T) = \hat{x}(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. *Нека са изпълнени следните условия:*
1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = s = n$.
3. $I_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\quad \varphi_1 + \max_i I_i \le M \le \varphi_2 - \max_i I_i$.
4. $\hat{I}_i = I_{\alpha_i}$, *където* $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, *т.е.* $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ *е пермутация на първите* n *естествени числа.*
5. $\{\tau_i\} = \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in (0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_{\alpha_1}\}$,

   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T], x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \psi_{\alpha_i - 1} - \hat{I}_{i-1}) = \psi_{\alpha_i}\}$, $i = 2, 3, \dots n$.

Тогава $x(T) = \hat{x}(T)$.

ТЕОРЕМА 0.7. *Нека са изпълнени условията:*
1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = 2$, $s = 1$.
3. $I_1, I_2 > 0$; $M \in [\varphi_1 + \hat{I}, \varphi_2 - \hat{I}]$, *където* $\hat{I} = I_1 + I_2$.
4. $\{\tau_1\} = \Delta_1$, $\{\tau_2\} = \Delta_2$.
5. $\{\hat{\tau}\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}\}$,

   където $\hat{\psi}$ *е решение на уравнението* $g(x) = f(x) - f(x - \hat{I}) = 0$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 0.2. *Нека са изпълнени следните условия:*
1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.

2. $1 \leq s < k$.
3. $I_i > 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, k\,; \quad \varphi_1 + \sum\limits_{i=1}^{k} I_i \leq M \leq \varphi_2 - \sum\limits_{i=1}^{k} I_i$.
4. $\{\tau_i\} = \Delta_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, k$.
5. $\hat{I}_i = \sum\limits_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} I_j\,;\ k_i \in \mathbb{N}\,,\ i = 1, 2, \ldots, s\,,\ 0 = k_1 < k_2 < \cdots < k_s < k_{s+1} = k$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,

   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T), x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1} - \hat{I}_{i-1}) = \hat{\psi}_i\}\,,\ i = 2, 3, \ldots, s$.

   Тук $\hat{\psi}_i$ *са единствените решения на уравненията* $g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, s$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Теорема 0.8. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = s = 2$.
3. $\hat{I}_1\,,\ \hat{I}_2 > 0\,, \quad \varphi_1 + \max(\hat{I}_1, \hat{I}_2) \leq M \leq \varphi_2 - \max(\hat{I}_1, \hat{I}_2)$.
4. $I = \frac{1}{2}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$.
5. $\{\tau_1\} = \{t :\in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi\}$,

   $\{\tau_2\} = \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi - I) = \psi\}$,

   $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,

   $\{\hat{\tau}_2\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_1, T), x(t; \hat{\tau}_1, \hat{\psi}_1 - \hat{I}_1) = \hat{\psi}_2\}$,

   където $\psi, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ *са съответно единствените решения на уравненията:* $g(x) = f(x) - f(x - I) = 0\ ,\ g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0\,,\ i = 1, 2$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Следствие 0.3. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.4)**.
2. $k = s$.
3. $\hat{I}_i > 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, k\,; \quad \varphi_1 + \max\limits_i \hat{I}_i \leq M \leq \varphi_2 - \max\limits_i \hat{I}_i$.
4. $I = \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} \hat{I}_i$.
5. $\{\tau_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi\}$,

   $\{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1}, T), x(t; \tau_{i-1}, \psi - I) = \psi\}\,,\ i = 2, 3, \ldots, k$,

   $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,

   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T), x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1} - \hat{I}_{i-1}) = \hat{\psi}_i\}\,,\ i = 2, 3, \ldots, k$, *където* $\psi, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_k$ *са съответно единствените решения на уравненията:* $g(x) = f(x) - f(x - I) = 0$, $g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Получените резултати в тези два параграфа са приложени за моделите на Verhulst и Gompertz.

В глава 3 са разгледани импулсни аналози на класическия модел на Lotka-Volterra : една жертва-един хищник. Главата се състои от три параграфа.

В §1 е формулирана и решена следната оптимизационна задача. Предварително са зададени ограничения за ръста на отделните видове в популацията. Това респективно означава, че е зададен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, във вътрешността на който се намира устойчивият център на системата на Lotka-Volterra. Съобществото жертва-хищник се развива по затворена траектория, която съдържа правоъгълника. На съобществото е възможно да се влияе импулсно, като се отнема биомаса от двата вида в количества, пропорционални на моментното съотношение на биомасите им. Задачата е след едно минимално по обем отнемане съобществото да продължи да се развива по затворена траектория, която се съдържа в правоъгълника. За целта е необходимо да се определи момента на отнемане (по-точно точката върху затворената траектория, от която трябва да се осъществи импулс) и големината на импулсното въздействие. Ограничението, което се налага, траекторията след импулса да принадлежи на правоъгълника е от практически съображения. По-точно изисква се в развитието на съобществото биомасите на жертвата и хищника да бъдат ограничени от предварително зададени константи.

Горната задача е обобщена и видоизменена в няколко направления. Ще се спрем на едно от тези обобщения. Нека съобществото се развива по затворена фазова траектория γ_{c_0}, която съдържа във вътрешността си зададена област $\mathbb{G}$. Устойчивият център на системата на Lotka-Volterra принадлежи на $\mathbb{G}$. Предполагаме, че популацията от двата взаимодействащи вида представлява хомогенна биомаса. Следователно отнеманията са пропорционални на моментното съотношение на биомасите на жертвата и хищника. С други думи импулсното въздействие прехвърля точка от γ_{c_0} в посока към началото на координатната система върху друга траектория γ_{c_1} на системата на Lotka-Volterra. Задачата е да се определят γ_{c_1}, точката $(m, M) \in \gamma_{c_0}$, от която се осъществява импулсното въздействие, и големината α на импулсното въздействие така, че $\gamma_{c_1} \subset \overline{\mathbb{G}}$ и α да е минимално. Поставените задачи могат да бъдат видоизменени, като се минимизира друг параметър на импулсната система, аналог на системата на Lotka-Volterra.

Математическото описание на задачата за взаимодействия и развитие на една жертва-един хищник се дава със следната система диференциални уравнения :

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= F_m(m,M) = m(r_1 - q_1 M);\\ \frac{dM}{dt} &= F_M(m,M) = -M(r_2 - q_2 m)\,,\end{aligned} \tag{25}$$

където:

— $m = m(t) > 0, M = M(t) > 0$ са съответно популационните биомаси на жертвата и хищника, в момента $t \geq 0$;

— $r_1, r_2 > 0$ са съответно относителните скорости на растеж на първия вид (жертвата) и на втория вид (хищника);

— $q_1, q_2 > 0$ са съответно коефициенти на вътревидова конкуренция за жертвата и хищника.

Добре е известно, че системата (25) притежава:

— две стационарни точки: $O(0,0)$ - седлова точка, $(m_0, M_0) = \left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1}\right)$ - устойчив център;

— свойството: през всяка точка от първи квадрант минава единствена затворена траектория, която съдържа вътрешно точката (m_0, M_0);

— пръв интеграл

$$U(m,M) = q_1 M + q_2 m - r_1 \ln M - r_2 \ln m + U_0, \tag{26}$$

където

$$U_0 = r_1(\ln\frac{r_1}{q_1} - 1) + r_2(\ln\frac{r_2}{q_2} - 1).$$

Ще казваме, че траекторията γ_{c_1} е "по-близка" ("по-отдалечена") от устойчивия център (m_0, M_0) относно траекторията γ_{c_2}, ако $0 < c_1 < c_2$ $(0 < c_2 < c_1)$.

В §1 на глава 3 са въведени следните условия **(H0.5)**:

H0.5.1 $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^2_+$ е едносвързана област.

H0.5.2 $\partial\mathbb{G} = \{(m,M) : m = \varphi_m(t), M = \varphi_M(t), t \in [t_1, t_2]\}$,

$$\varphi_m, \varphi_M \in \mathbf{C}^1([t_1,t_2], \mathbb{R}_+),\ (\varphi_m(t_1), \varphi_M(t_1)) = (\varphi_m(t_2), \varphi_M(t_2)),$$

$$(\varphi'_m(t))^2 + (\varphi'_M(t))^2 > 0 \text{ за } t \in [t_1, t_2].$$

H0.5.3 $(m_0, M_0) \in \mathbb{G}$.

H0.5.4 $c_0 > 0$ е константа, такава че $\max\limits_{t\in[t_1,t_2]} U(\varphi_m(t), \varphi_M(t)) \leq c_0$.

H0.5.5 γ_{c_0} е траектория на системата (25), такава че $\gamma_{c_0} = \{(m,M) : U(m,M) = c_0\}$.

Означаваме с $\mathbb{D}_{c_0}$ вътрешността на γ_{c_0}, която съдържа устойчивия център на системата (25).

Забележка 0.8. Очевидно е, че съществуват точки $(m,M) \in \gamma_{c_0}$, такива че за всяка константа $c_1 \in (0, c_0)$ може да се намери константа $\alpha = \alpha(m, M, c_1) \in \mathbb{R}_+$, такава, че $U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1$, т.е. $(m - \alpha m, M - \alpha M) \in \gamma_{c_1}$.

В този параграф е разгледана следната задача. Като се използват хипотезите **(H0.5)** да се намери:

— траекторията γ_{c_1}, която изцяло се съдържа в областта $\overline{\mathbb{G}} = \mathbb{G} \cup \partial\mathbb{G}$ и е максимално отдалечена от устойчивия център на системата;

— точка $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$;

— константа $\alpha^* \geq 0$,

такива че

$$\alpha^* = \alpha(m^*, M^*, c_1) = \min_{(m,M)\in\gamma_{c_0}} \alpha(m, M, c_1).$$

Поставената задача е решена в частен случай. Разглежда се съобщество от тип жертва и хищник с минимално и максимално допустими стойности за техните количества биомаси. В този случай областта $\mathbb{G}$ е правоъгълник.

Нека m_1, m_2, M_1, M_2 са съответно минималните и максимални количества биомаси за жертвата и хищника. Нека $ABCD$ е правоъгълник с върхове $A(m_1, M_1)$, $B(m_2, M_1)$, $C(m_2, M_2)$, $D(m_1, M_2)$.

В този случай ще изпозваме условията **(H0.6)**:

H0.6.1 $(m_0, M_0) \in [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]$.

H0.6.2 $c_0 > 0$ е константа, такава че $\max\limits_{i,j=1,2} U(m_i, M_j) \leq c_0$.

H0.6.3 γ_{c_0} е траектория на системата (25), такава че $U(m, M) = c_0$.

Тъй като за всяко $c_0 \in (0, \infty)$ множеството $\mathbb{D}_{c_0}$ е изпъкнало, като приложим условието **H0.6.2** стигаме до извода, че $[m_1, m_2] \times [M_1, M_2] \subset \overline{\mathbb{D}}_{c_0}$.

Решена е следната задача. Като се използват условията **(H0.6)** да се намерят:

— положителна константа c_1, такава че

$$c_1 = \max\{c \in (0, \infty) : \gamma_c \subset [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]\};$$

— точка $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$, такава че

$$\alpha^* = \alpha(m^*, M^*, c_1) = \min_{(m,M)\in\gamma_{c_0}} \alpha(m, M, c_1) \geq 0,$$

$$U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1, \text{ т.е. } (m - \alpha m, M - \alpha M) \in \gamma_{c_1}.$$

Поставената задача решаваме алгоритмично в следната последователност.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Определяне на траекторията γ_{c_1}. За целта ще използваме следната лема.

Лема 0.6. *Нека са валидни следните условия:*

1. *Изпълнени са условията* **(H0.6)**;
2. $c_1 = \max\{c \in (0, \infty) : \gamma_c \subset [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]\}$.

Тогава $c_1 = \min\{U(m_0, M_1), U(m_0, M_2), U(m_1, M_0), U(m_2, M_0)\}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Определяне на множеството от допустими точки от γ_{c_0} за прилагане на импулсно въздействие.

Една точка от γ_{c_0} е допустима за прилагане на импулсно въздействие относно $\gamma_{c_1} \subset \mathbb{D}_{c_0}$, ако от тази точка е възможно да се "достигне" до траекторията γ_{c_1} чрез импулсно въздействие (импулсен скок), насочено към началото на координатната система.

За да намерим допустимите точки извършваме следното.

Нека l_1 и l_2 са тангентите от началото на координатната система към затворената крива γ_{c_1}, съответно с уравнения $M = k_1 m$, $M = k_2 m$, $k_1 < k_2$. Полагаме $\{H_1', H_1''\} = l_1 \cap \gamma_{c_0}$ и $\{H_2', H_2''\} = l_2 \cap \gamma_{c_0}$, където H_1' е между O и H_1'' и H_2' е между O и H_2''. Множеството от допустими точки съвпада с дъгата $H_1''H_2''$ на траекторията γ_{c_0}, която лежи във вътрешността на острия ъгъл $H_1''OH_2''$. Означаваме това множество от точки с $\Delta\gamma$.

Ще използваме следната лема за намиране на ъгловите коефициенти k_1 и k_2 на правите l_1 и l_2.

Лема 0.7. *Нека са изпълнени условията на Лема 0.6.*
Тогава $k_1 = \min\left\{\dfrac{M_1'''}{m_1'''}, \dfrac{M_2'''}{m_2'''}\right\}$ *и* $k_2 = \max\left\{\dfrac{M_1'''}{m_1'''}, \dfrac{M_2'''}{m_2'''}\right\}$, *където*

$\{(m_1''', M_1'''); (m_2''', M_2''')\}$ *е решение на системата*

$$\begin{gathered} U(m, M) = c_1; \\ \frac{m}{F_m(m, M)} = \frac{M}{F_M(m, M)}. \end{gathered} \tag{27}$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Определяне на точката $(m^*, M^*) \in \Delta\gamma$ и големината на импулсното въздействие α^*.

Търсената точка (m^*, M^*) и големината на импулсното въздействие α^* трябва да удовлетворяват условията:

1. $(m^*, M^*) \in \Delta\gamma$.
2. $(m^* - \alpha^* m^*, M^* - \alpha^* M^*) \in \gamma_{c_1}$.
3. $\alpha^* = \min\limits_{(m,M)\in\Delta\gamma} \alpha(m, M, c_1) \geq 0$, където $U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1$.

В сила е следната теорема.

Теорема 0.9. *Нека са изпълнени условията на Лема 0.6.*
Тогава:

1. $\alpha^* = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$, *където* $f(k) = (m_{c_0}(k) - m_{c_1}(k))\sqrt{1+k^2}$, $m_{c_0}(k)$ *и* $m_{c_1}(k)$ *са съответно решенията на уравненията* $U(m, km) = c_0$ *и* $U(m, km) = c_1$.

2. $(m^*, M^*) = (m_{c_0}(k^*), k^* m_{c_0}(k^*))$, *където* $f(k^*) = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$.

В §2 за класическата система на Lotka-Volterra е въведено понятието I -оптимална крива ξ_I. Тази крива е разположена във фазовото пространство на системата. Кривата ξ_I пресича всяка една от траекториите γ_c на системата на Lotka-Volterra най-много един път. Точките от ξ_I притежават следното оптимално свойство. Ако $(m, M) \in \xi_I \cap \gamma_{c_0}$, то след "скок" с големина I по посока на началото $(0,0)$ се попада върху траектория γ_{c_1}. При това c_1 е минимално, т.е. γ_{c_1} е "най-близка" до устойчивия център. Минималността е по отношение на всички останали точки от изходната траектория γ_{c_0}, от която се извършват "импулсни скокове" (отнемания) с големина I по посока на началото на координатната система.

Ще отбележим, че тази крива се изменя в зависимост от големината на константата $I > 0$, т.е. кривите ξ_I представляват еднопараметрично семейство с параметър I.

Ще предполагаме, че $I > 0$ е фиксирана константа.

Дефиниция 0.6. Нека:

1. $c_I = U\left(m_0\left(1+\frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right), M_0\left(1+\frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right)\right)$.

2. За всяко $c \geq c_I$ функциите $m = m(c,I)$, $M = M(c,I)$ са решения на задачата за условен минимум:

$$\min\left\{U\left(m\left(1-\frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right), M\left(1-\frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right)\right); \quad U(m,M)=c\right\}. \qquad (28)$$

Тогава кривата

$$\xi_I = \{(m,M) : m = m(c,I), M = M(c,I), c \geq c_I\}$$

ще наричаме I-оптимална крива за системата (25).

Забележка 0.9. Като вземем под внимание: вида на първия интеграл (26), търсения минимум (28) и въведем означението

$$G(m,M,I) = -\frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}(Mq_1+mq_2) - (r_1+r_2)ln\left(1-\frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right),$$

изискване 2 от Дефиниция 0.6 може да формулираме по следния начин:

$2'$ *за всяко $c \geq c_I$ да се намерят решенията на задачата за условен минимум*

$$\min\{G(m,M,I) + U(m,M); \quad U(m,M) = c\},$$

т.е. на задачата

$$\min\{G(m,M,I); \quad U(m,M) = c\}.$$

Забележка 0.10. По-нататък за удобство ще използваме полярни координати. Първият интеграл на системата (25) придобива вида

$$W(\rho,\theta) = U(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho A(\theta) - (r_1+r_2)\ln\rho - r_1\ln\sin\theta - r_2\ln\cos\theta + U_0,$$

където: $\rho > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $A(\theta) = q_1\sin\theta + q_2\cos\theta$.

В полярни координати кривата ξ_I има вида

$$\xi_I = \{(\rho,\theta) : \rho = \rho(\theta; c, I), \theta = \theta(c,I), c \geq c_I\},$$

където функциите $\rho(\theta; c, I)$ и $\theta(c,I)$ за всяко $c \geq c_I$ са решения на задачата за условен екстремум

$$
\begin{aligned}
\min\{G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,I);&\quad U(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=c\}\\
&=\min\{H(\rho,\theta,I);\quad W(\rho,\theta)=c\}\\
=\min&\left\{-IA(\theta)-(r_1+r_2)ln\left(1-\frac{I}{\rho}\right);\quad W(\rho,\theta)=c\right\},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

където : $H(\rho,\theta,I)=G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, $\rho>0$ и $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Забележка 0.11. Очевидно е, че през всяка точка на кривата ξ_I минава точно една траектория на системата (25).

За всяко фиксирано $c\geq c_I$ от равенството $W(\rho,\theta)=c$ определяме ρ като неявна функция на θ, т.е. $\rho=\rho(\theta;c,I)$. Въвеждаме функцията $h:(0,\frac{\pi}{2})\longrightarrow\mathbb{R}_+$ съгласно равенството

$$h(\theta)=H(\rho(\theta;c,I),\theta,I).$$

За да намерим I-оптималната крива ξ_I е необходимо за всяко $c\geq c_I$ да извършим следното :

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Да се намери

$$\rho'(\theta;c,I)=-\frac{W_\theta(\rho,\theta)}{W_\rho(\rho,\theta)},$$

където

$$
\begin{aligned}
W_\rho(\rho,\theta)&=\frac{\partial W(\rho,\theta)}{\partial\rho}=A(\theta)-\frac{r_1+r_2}{\rho};\\
W_\theta(\rho,\theta)&=\frac{\partial W(\rho,\theta)}{\partial\theta}=\rho A'(\theta)-r_1\cot\theta+r_2\tan\theta.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Да се реши системата

$$h'(\theta)=H_\rho(\rho,\theta,I)\rho'(\theta;c,I)+H_\theta(\rho,\theta,I)=0;\tag{30}$$

$$W(\rho,\theta)=c,\tag{31}$$

която е еквивалентна на системата

$$H_\rho(\rho,\theta,I)W_\theta(\rho,\theta)-H_\theta(\rho,\theta,I)W_\rho(\rho,\theta)=0;\tag{32}$$

$$W(\rho,\theta)=c,\tag{33}$$

където

$$
\begin{aligned}
H_\rho(\rho,\theta,I)&=\frac{\partial H(\rho,\theta,I)}{\partial\rho}=-\frac{I(r_1+r_2)}{\rho(\rho-I)};\\
H_\theta(\rho,\theta,I)&=\frac{\partial H(\rho,\theta,I)}{\partial\theta}=-IA'(\theta).
\end{aligned}
$$

Получаваме следните две решения на (32)

$$\rho_1(\theta,I)=\frac{I}{2}+\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}+\sqrt{D(\theta,I)};\qquad \rho_2(\theta,I)=\frac{I}{2}+\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}-\sqrt{D(\theta,I)},$$

където

$$D(\theta,I)=\frac{I^2}{4}+\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}\left(\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}-\frac{r_1\cot\theta-r_2\tan\theta}{A'(\theta)}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Да се намерят тези θ, за които $\rho_1(\theta, I)$ и $\rho_2(\theta, I)$ са реални, т.е. $D(\theta, I) > 0$ за $\theta \in \Delta$; където $\Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >= (\min\{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}, \max\{\underline{\theta}, \overline{\theta}\})$, $\underline{\theta} = \arctan k_0$, $\overline{\theta} = \arctan k_1$, $k_0 = \frac{M_0}{m_0}$ и $k_1 = \frac{q_1}{q_2}$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Да се избере подходящ полярен радиус вектор. Решението $\rho_2(\theta, I)$ се отхвърля, тъй като при всяко фиксирано $\theta \in \Delta$ след импулс с големина I по посока на координатното начало се достига до траектория, която е по-отдалечена от устойчивия център (m_0, M_0) относно траекторията, на която принадлежи $(\rho_2(\theta, I), \theta)$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Да се намерят съответните $\theta(c, I)$.

За целта заместваме в уравнение (33) ρ с $\rho_1(\theta, I)$ и достигаме до уравнението

$$W_{c,I}(\theta) = W(\rho_1(\theta, I), \theta) - c = 0. \tag{34}$$

Горното уравнение е трансцендентно и за всяко фиксирано $c > c_I$ и $I > 0$ може да се реши само числено. Да означим съответно с θ_i, $i = 1, 2, \ldots$, решенията на уравнение (34). По-нататък ще покажем, че съществува единствено решение $\theta_1 \in \Delta$ (виж Теорема 0.10).

$\boxed{\mathbf{6.}}$ За решенията на системата (32), (33) (виж Теорема 0.12) да се провери, дали е изпълнено неравенството

$$h''(\theta) = H_{\rho\rho}(\rho, \theta, I)(\rho'(\theta; c, I))^2 + 2H_{\rho\theta}(\rho, \theta, I)\rho'(\theta; c, I)$$
$$+ H_{\theta\theta}(\rho, \theta, I) + H_\rho(\rho, \theta, I)\rho''(\theta; c, I) > 0,$$

където

$$H_{\rho\rho}(\rho, \theta, I) = \frac{I(r_1 + r_2)(2\rho - I)}{\rho^2(\rho - I)^2};$$
$$H_{\rho\theta}(\rho, \theta, I) = 0;$$
$$H_{\theta\theta}(\rho, \theta, I) = IA(\theta);$$

$$\rho''(\theta; c, I) = -\frac{W_{\theta\theta}(\rho, \theta) + 2W_{\theta\rho}(\rho, \theta)\rho'(\theta; c, I) + W_{\rho\rho}(\rho, \theta)(\rho'(\theta; c, I))^2}{W_\rho(\rho, \theta)};$$

$$W_{\rho\rho}(\rho, \theta) = \frac{r_1 + r_2}{\rho^2};$$
$$W_{\rho\theta}(\rho, \theta) = A'(\theta);$$
$$W_{\theta\theta}(\rho, \theta) = -\rho A(\theta) + \frac{r_1}{sin^2\theta} + \frac{r_2}{\cos^2\theta}.$$

При доказателството на основните свойства на I-оптималната крива :

— ξ_I е непрекъсната и монотонна по координати ;

— ξ_I е непрекъсната и монотонна по отношение на параметъра $I \in \mathbb{R}_+$;

— за всяко $I \in \mathbb{R}_+$ кривата ξ_I е асимптотично еквивалентна на правата с уравнение $M = \frac{q_1}{q_2}m$, където q_1 и q_2 са съответно коефициентите на вътревидова конкуренция за жертвата и хищника,

се използват следните условия **(H0.7)** :

H0.7.1 r_1, q_1, r_2, $q_2 \in (0,\infty)$ са параметри на системата на Lotka-Volterra (25).

H0.7.2 ξ_I е I-оптимална крива за същата система.

H0.7.3 $\Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >$, $\underline{\theta} = \arctan k_0$, $\overline{\theta} = \arctan k_1$, $k_0 = \frac{M_0}{m_0}$, $k_1 = \frac{q_1}{q_2}$.

H0.7.4 Изпълнено е едно от следните ограничения:

H0.7.4.1 $\frac{\pi}{4} \le \underline{\theta} < \overline{\theta}$, т.е. $1 \le k_0 < k_1$;

H0.7.4.2 $0 < \overline{\theta} < \underline{\theta} \le \frac{\pi}{4}$, т.е. $0 < k_1 < k_0 \le 1$.

Доказани са теоремите.

Теорема 0.10. *Нека са изпълнени условията* **(H0.7)**.

Тогава за всяко $I > 0$ и $c \ge c_I$ съществува единствено решение $\theta_1 = \theta_1(c, I) \in \Delta$ на уравнението $W_{c,I}(\theta) = 0$, където $W_{c,I}$ е дефинирана съгласно равенство (34).

Теорема 0.11. *Нека са изпълнени условията* **(H0.7)**.

Тогава функцията θ_1, дефинирана неявно с уравнението (34), притежава следните свойства:

1. *Ако е изпълнено* **H0.7.4.1**, *то функцията θ_1 е строго монотонно растяща по аргумента си $c \in [c_I, \infty)$ и строго монотонно намаляваща по аргумента си $I \in \mathbb{R}_+$.*
2. *Ако е изпълнено* **H0.7.4.2**, *то функцията θ_1 е строго монотонно намаляваща по аргумента си $c \in [c_I, \infty)$ и строго монотонно растяща по аргумента си $I \in \mathbb{R}_+$.*

Следствие 0.4. *Нека са изпълнени условията* **(H0.7)**.

Тогава за всяка точка $(m, M) \in \xi_I$ е изпълнено $k = \frac{M}{m} \in < k_0, k_1 >= (\min(k_0, k_1), \max(k_0, k_1))$, т.е. I-оптималната крива принадлежи на областта с контур правите $l_0 = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2_+ : M = k_0 m\}$ и $l_1 = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2_+ : M = k_1 m\}$, която е в I-ви квадрант и съдържа устойчивия център на системата на Lotka-Volterra.

Теорема 0.12. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H0.7)**.
2. $I \ge I_0 = \sqrt{m_0^2 + M_0^2}$.

Тогава $h''(\theta_1(c, I)) > 0$, където $\theta_1 \in \Delta$ е единственото решение на уравнение (34).

Теорема 0.13. *Нека са валидни условията* **(H0.7)**.

Тогава кривата ξ_I е асимптотично еквивалентна на правата $l_1 = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2_+ : M = k_1 m\}$ при $\rho_1(\theta, c) \to \infty$.

Теорема 0.14. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H0.7)**.
2. *Кривата ξ_I е права линия, т.е.*

$$\xi_I = \{(m, M) : M(c, I) = Km(c, I), \text{където } K > 0, m(c, I) \ge m_0, c \in [c_I, \infty), I > 0\}.$$

Тогава:

1. $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2}$.
2. $\underline{\theta} = \overline{\theta}$, $k_0 = k_1 = K$.
3. $\Delta = \{\underline{\theta}\} = \{\overline{\theta}\}$.
4. $\rho = \frac{r_1+r_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + I$.

ТЕОРЕМА 0.15. *Нека са валидни условията* **(H0.7)**.
Тогава кривата ξ_I е непрекъсната по параметрите си c и I. По-точно:

1. *Функциите $m(c,I)$, $M(c,I)$, с помощта на които се задава ξ_I (виж Дефиниция 0.6), за всяко фиксирано $I > 0$ са непрекъснати по параметъра $c \in [c_I, \infty)$.*
2. *Функциите $m(c,I)$, $M(c,I)$ за всяко фиксирано $c \in [c_I, \infty)$ са непрекъснати по параметъра $I \in (0, \infty)$.*

С помощта на I-оптималната крива ξ_I може да се реши следната оптимизационна задача за системата на Lotka-Volterra.

Нека са изпълнени следните условия:

1. $c_0 = const > 0$ и γ_{c_0} е траектория на системата на Lotka-Volterra.

2. $I = const > 0$ е количеството биомаса, което може да се отнеме еднократно от съобществото жертва-хищник, описвано от системата на Lotka-Volterra. Обемът I се състои от биомаса на жертвата I_m и биомаса на хищника I_M, т.е. $I = I_m + I_M$. Освен това $\frac{I_m}{I}$ и $\frac{I_M}{I}$ са съответно частите от биомасите на жертвата и хищника в съобществото в момента, в който се отнема от биомасата.

3. n е броя отнемания, които трябва да се осъществят. (Предполага се, че биомасата на съобществото е в достатъчно количество, за да е възможно да се отнеме n пъти по I части от обема ѝ.)

Решена е задачата за определяне на точките от траекторията на изобразяващата точка от съобществото, от които се осъществяват последователно n-те отнемания с обем I. Отнеманията, от математическа гледна точка, представляват импулсни въздействия с големина I, които се осъществяват от определените точки към началото на координатната система. Изисква се траекторията, по която ще се развива съобществото след всичките n на брой отнемания, да е максимално близка до устойчивия център (m_0, M_0) на системата.

Предпечатната подготовка на дисертационния труд е направена с макропакета PC TEX ([**Спи93**], [**Вас97**]). Всички фигури са подготвени с програмите Maple V Release 4.0 ([**Red96**]) и CorelDRAW 8, Version 8.232 ([**XC97**]).

Глава 1

Непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения относно импулсните моменти

В настоящата глава са въведени две нови понятия: непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на системи обикновени диференциални уравнения (с фиксирани импулсни моменти) от импулсните моменти.

В §1 се дефинира непрекъсната зависимост на решенията на системи импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти. В същия параграф са намерени достатъчни условия за такава зависимост.

В §2, като се използва понятието гранична-равномерна устойчивост, равномерно устойчивите решения могат да се разделят на два непресичащи се класа: гранично-равномерно устойчиви решения и равномерно устойчиви решения, които не са гранично-равномерно устойчиви. В същия параграф се дефинира равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти и са намерени достатъчни условия за такава устойчивост.

В параграф 3 получените резултати са приложени в популационната динамика. По-точно разгледани са импулсните аналози на моделите на Verhulst, Lotka-Volterra и двумерен модел с коменсализъм.

В настоящата глава основен обект на изследване е следната начална задача за нелинейна система диференциални уравнения с импулси:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\ldots; && (35)\\
\Delta x(t)|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = I_i(\tau_i, x(\tau_i)); && (36)\\
x(t_0) &= x_0, && (37)
\end{aligned}
$$

където: $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\emptyset \neq \mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$; $\{\tau_i\}_1^\infty$ е редица от импулсни моменти, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$; $I_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $t_0 \in \mathbb{R}_+$; $x_0 \in \mathbb{D}$.

Заедно с тази начална задача ще разглеждаме и асоциираната с нея смутена задача, а именно

$$\frac{dx^*}{dt} = f(t, x^*), \quad t \neq \tau_i^*, \quad i = 1, 2, \dots; \tag{38}$$

$$\Delta x^*(t)|_{t=\tau_i^*} = x^*(\tau_i^* + 0) - x^*(\tau_i^*) = I_i(\tau_i^*, x^*(\tau_i^*)); \tag{39}$$

$$x^*(t_0^*) = x_0^*, \tag{40}$$

където: $t_0^* \in \mathbb{R}_+$; $x_0^* \in \mathbb{D}$; $\{\tau_i^*\}_1^\infty$ са импулсните моменти на началната задача (38), (39), (40), $t_0^* < \tau_1^* < \tau_2^* < \dots$. В общия случай е изпълнено $\tau_i \neq \tau_i^*$, $i = 1, 2, \dots$.

Означаваме с $x(t; t_0, x_0)$ решението на задача (35), (37) без импулси, с $x(t)$ решението на задачата (35), (36), (37), а с $x^*(t)$ - решението на началната задача (38), (39), (40).

Ще използваме още и следните означения: $x_i = x(\tau_i)$, $x_i^* = x^*(\tau_i^*)$, $x_i^+ = x(\tau_i + 0) = x_i + I_i((\tau_i, x_i)$, $x_i^{*+} = x^*(\tau_i^* + 0) = x_i^* + I_i((\tau_i^*, x_i^*)$, $\|.\|$ е Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Решението $x(t)$ е непрекъсната отляво функция и може да се опише по следния начин:

$$x(t) = \begin{cases} x(t; t_0, x_0), & t \in [t_0, \tau_1]; \\ x(t; \tau_i, x_i + I_i(\tau_i, x_i)), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \, i = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Основната част от резултатите в тази глава са публикувани в [**AD97**].

1. Непрекъсната зависимост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти

В настоящия параграф ще приведем някои основни твърдения и теореми за непрекъсната зависимост на решенията на импулсните диференциални уравнения от импулсните моменти.

Дефиниция 1.1. Ще казваме, че решението $x(t)$ на задачата (35), (36), (37) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти $\tau_1, \tau_2, \dots$, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall T > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon, T) > 0)$$

$$(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta,\ |t_i - t_i^*| < \delta,\ i = 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\bar{t}_0, T] \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} < \tau_i, \tau_i^* >,$$

където $\bar{t}_0 = \max\{t_0, t_0^*\}$,

$$< \tau_i, \tau_i^* >= \begin{cases} (\tau_i, \tau_i^*], & \tau_i \le \tau_i^*\,; \\ (\tau_i^*, \tau_i], & \tau_i > \tau_i^*. \end{cases}$$

Забележка 1.1. За дефинираното по-горе понятие непрекъсната зависимост не се изисква близост между решенията на задачите (35), (36), (37) и (38), (39), (40) в достатъчно малки околности на импулсните моменти. Това се дължи на факта, че в общия случай е възможно разглежданата задача и нейната пертурбирана да се изменят импулсно в различни моменти от времето.

Ще използваме следните условия **(H1.1)** :

H1.1.1 Функцията $f \in \boldsymbol{C}\{[0,T] \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$, $t_0 \in (0, T)$.

H1.1.2 Съществува константа $M > 0$ такава, че

$$\|f(t,x)\| \le M, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{D}.$$

H1.1.3 За всяка точка $(\tau, \chi) \in [0,T] \times \mathbb{D}$ решението на системата (35) с начално условие $x(\tau) = \chi$ е единствено и продължимо до T (виж Забележка 1.2).

H1.1.4 $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots,\ \lim\limits_{i \to \infty} \tau_i = \infty$.

H1.1.5 $I_i \in \boldsymbol{C}\{[0,T] \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2, \dots$.

H1.1.6 $(I + I_i) : [0,T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1, 2, \dots$, където $I(t,x) = x$ за всяка точка $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Забележка 1.2. Достатъчни условия за съществуване, единственост и продължимост на решението на задачата

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(\tau) = \chi$$

до $T > \tau$ (T евентуално символа ∞) се съдържат в теоремите [**Хар70**] Гл.II, §1, T1.1, Гл.II, §3, T3.1, Гл.II, §3,Сл.3.2, Гл.III, §6, T6.1.

Забележка 1.3. От условията **H1.1.1**, **H1.1.3**, **H1.1.4**, **H1.1.6** следва, че решението на задачата (35), (36), (37) е единствено и продължимо до T (виж например [**LBS90**]).

Следващата лема дава условия за непрекъсната зависимост на решението на началната задача (35), (36), (37) от един импулсен момент в интервала $[0, T]$.

Лема 1.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H1.1.1**, **H1.1.2**, **H1.1.3**, **H1.1.5**, **H1.1.6**.

2. $\tau_1 < T < \tau_2$.

Тогава решението на задача (35), (36), (37) непрекъснато зависи от импулсния момент τ_1 в интервала $[0, T]$.

Доказателство. От условие 2 на лемата следва, че съществува константа δ_1 такава, че ако

$$|\tau_1 - \tau_1^*| < \delta_1, \quad |\tau_2 - \tau_2^*| < \delta_1, \quad |t_0 - t_0^*| < \delta_1,$$

то са валидни неравенствата

$$t_0^* < \tau_1^* < T < \tau_2^*.$$

Без загуба на общността можем да предполагаме, че $\tau_1 < \tau_1^*$.

Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от теоремата за непрекъсната зависимост от началните условия на решенията на система обикновени диференциални уравнения без импулси [**Хар70**, Гл.V, §2, Т2.1.] (накратко тази теорема ще я наричаме теорема за непрекъсната зависимост) следва, че съществува $\delta_2 > 0$, такова, че ако $|\tau_1 - \tau_1^*| < \delta_2$ и $\|x_1^+ - x_1^{*+}\| < \delta_2$, то

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad \tau_1^* < t < T. \tag{41}$$

От условие **H1.1.5** следва, че съществува $\delta_3 > 0$, такова, че ако $|\tau_1 - \tau_1^*| < \delta_3$ и $\|x_1 - x_1^*\| < \delta_3$, то

$$\|I_1(\tau_1, x_1) - I_1(\tau_1^*, x_1^*)\| < \frac{\delta_2}{3}.$$

Нека $|\tau_1 - \tau_1^*| < \min\left\{\delta_1, \dfrac{\delta_2}{3M}, \delta_3\right\}$. Оценяваме

$$\begin{aligned}
\|x_1^+ - x_1^{*+}\| &= \|x_1 + I_1(\tau_1, x_1) - x_1^* - I_1(\tau_1^*, x_1^*)\| \\
&\le \|x_1 - x_1^*\| + \|I_1(\tau_1, x_1) - I_1(\tau_1^*, x_1^*)\| \\
&\le \|x_1 - x^*(\tau_1)\| + \|x^*(\tau_1) - x_1^*\| + \frac{\delta_2}{3} \\
&\le \|x_1 - x^*(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau_1^*} \|f(t, x^*(t))\|\, dt + \frac{\delta_2}{3} \\
&\le \|x_1 - x^*(\tau_1)\| + M(\tau_1^* - \tau_1) + \frac{\delta_2}{3} \\
&\le \|x_1 - x^*(\tau_1)\| + \frac{2\delta_2}{3}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Отново от теоремата за непрекъсната зависимост заключаваме, че съществува константа $\delta_4 > 0$, такава, че ако $|t_0 - t_0^*| < \delta_4$ и $\|x_0 - x_0^*\| < \delta_4$, то е изпълнено следното неравенство

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*(t; t_0^*, x_0^*)\| < \min\left\{\frac{\delta_2}{3}, \varepsilon\right\} \quad \text{за} \ \ t \in [\bar{t}_0, \tau_1], \tag{43}$$

където $t_0^* > 0$, $x_0^* \in \mathbb{D}$.

От последното неравенство при $t = \tau_1$ и (42) получаваме оценката

$$\|x_1^+ - x_1^{*+}\| \leq \|x(\tau_1; t_0, x_0) - x^*(\tau_1; t_0^*, x_0^*)\| + \frac{2\delta_2}{3} < \delta_2.$$

Нека $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \dfrac{\delta_2}{3M}, \delta_3, \delta_4\right\}$. Тогава, ако $|t_0 - t_0^*| < \delta$, $\|x_0 - x_0^*\| < \delta$, $|\tau_1 - \tau_1^*| < \delta$ и $|\tau_2 - \tau_2^*| < \delta$, то от (43) и (41) имаме

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \ \ \text{за} \ \ t \in [\bar{t}_0, T] \backslash (\tau_1, \tau_1^*].$$

С това лемата е доказана.

Изискването импулсната сиситема (35), (36), (37) да притежава един импулсен момент в интервала $[t_0, T]$ отпада в следващата теорема.

Теорема 1.1. *Нека са изпълнени условията* **(H1.1)**.

Тогава решението на задача (35), (36), (37) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти в интервала $[t_0, T]$.

Доказателство. Възможни са следните два случая.

Случай 1. $T \neq \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$. От условие **H1.1.4** следва, че съществува номер k такъв, че $\tau_k < T < \tau_{k+1}$. Като имаме предвид тези неравенства заключаваме, че съществува константа $\delta_0 > 0$ такава, че ако $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots$ и $|t_0 - t_0^*| < \delta_0$, то

$$t_0^* < \tau_1^* < \tau_2^* < \cdots < \tau_k^* < T < \tau_{k+1}^* < \tau_{k+2}^* < \ldots. \tag{44}$$

Във всеки интервал (τ_i, τ_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots$, избираме точка T_i. Например $T_i = \dfrac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}$. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от Лема 1.1 следва, че съществува константа δ_k, $0 < \delta_k < \varepsilon$ такава, че ако

$$\|x(T_{k-1}) - x^*(T_{k-1})\| < \delta_k, \quad |\tau_k - \tau_k^*| < \delta_k,$$

то

$$\begin{aligned} &\|x(t; T_{k-1}, x(T_{k-1})) - x^*(t; T_{k-1}, x^*(T_{k-1}))\| \\ &= \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \quad \text{за} \ \ t \in [T_{k-1}, T] \backslash < \tau_k, \tau_k^* > . \end{aligned} \tag{45}$$

Отново от Лема 1.1 следва, че съществува константа δ_{k-1}, $0 < \delta_{k-1} < \delta_k < \varepsilon$ такава, че ако

$$\|x(T_{k-2}) - x^*(T_{k-2})\| < \delta_{k-1}, \quad |\tau_{k-1} - \tau_{k-1}^*| < \delta_{k-1},$$

то е изпълнено

$$\begin{aligned} &\|x(t; T_{k-2}, x(T_{k-2})) - x^*(t; T_{k-2}, x^*(T_{k-2}))\| \\ &= \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \quad \text{за} \ \ t \in [T_{k-2}, T_{k-1}] \backslash < \tau_{k-1}, \tau_{k-1}^* >, \quad k = 3, 4, \ldots. \end{aligned} \tag{46}$$

Накрая, съществува константа δ_1, $0 < \delta_1 < \delta_2 < \varepsilon$, такава, че ако

$$|t_0 - t_0^*| < \delta_1, \quad \|x_0 - x_0^*\| < \delta_1, \quad |\tau_1 - \tau_1^*| < \delta_1\,,$$

то

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \delta_2 < \varepsilon \quad \text{за } t \in [\bar{t}_0, T_1] \setminus < \tau_1, \tau_1^* > . \tag{47}$$

Нека $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Тогава от (45), (46), (47), ако

$$|t_0 - t_0^*| < \delta, \quad \|x_0 - x_0^*\| < \delta, \quad |\tau_i - \tau_i^*| < \delta, \ i = 1, 2, \ldots\,,$$

получаваме

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \quad \text{за } t \in [\bar{t}_0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} < \tau_i, \tau_i^* >\,,$$

с което показахме, че решението на задача (35), (36), (37) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти в интервала $[t_0, T]$.

Случай 2. Нека съществува число k такова, че $T = \tau_{k+1}$.

Случай 2.1. $\tau_{k+1}^* > T$. Тогава неравенствата (44) са изпълнени и разглежданията са аналогични на *Случай 1*.

Случай 2.2. $\tau_{k+1}^* \leq T$. В този случай това, което доказахме в *Случай 1*, е валидно за интервала $[t_0, \tau_{k+1}^*] = [t_0, \tau_{k+1}] \setminus (\tau_{k+1}^*, \tau_{k+1}] = [t_0, T] \setminus < \tau_{k+1}, \tau_{k+1}^* >$. Следователно, решението на задача (35), (36), (37) е непрекъснато зависимо от импулсните моменти в интервала $[t_0, T]$.

С това доказателството на Теорема 1.1 е завършено.

2. Равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти

В настоящия параграф ще приведем някои основни твърдения за равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните моменти.

Дефиниция 1.2. Ще казваме, че решението $x(t)$ на задачата (35), (36), (37) е равномерно устойчиво относно импулснита моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots$, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$$
$$(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta,\ |t_i - t_i^*| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots)$$
$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon,\ t \in [\bar{t}_0, \infty] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} < \tau_i, \tau_i^* > .$$

Забележка 1.4. За дефинираното по-горе понятие равномерна устойчивост не се изисква близост между решенията на задачите (35), (36), (37) и (38), (39), (40) в достатъчно малки околности на импулсните моменти. Това се дължи на факта, че разглежданата задача и нейната пертурбирана е възможно да се изменят импулсно в различни моменти от времето.

Ще припомним следната добре известна дефиниция [**Yos66**], [**Хар70**] :

Дефиниция 1.3. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (35), (37) е равномерно устойчиво, ако :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall (t_0^*, x_0^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D},\ |t_0 - t_0^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta)$$
$$\Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - x^*(t; t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon,\ t \geq \bar{t}_0,$$

където $x^*(t; t_0^*, x_0^*)$ е решението на началната задача (38), (40).

Ясно е, че ако решението на задача (35), (37) е равномерно устойчиво, то за всяко ε има безбройно много $\delta > 0$, които удовлетворяват горната дефиниция. Нещо повече всяка една от тези константи $\delta \leq \varepsilon$. Нека означим с $\delta(\varepsilon)$ горната граница на множеството на всички δ, удовлетворяващи Дефиниция 1.3.

За всяко $\varepsilon > 0$ образуваме редицата $\delta_1 = \delta(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta(\delta_1), \ldots, \delta_i = \delta(\delta_{i-1}), \ldots$. Изпълнени са неравенствата $\delta_i > 0$, $\delta_i \geq \delta_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$. Следователно редицата $\{\delta_i\}_1^\infty$ е сходяща. Означаваме нейната граница с $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) = \lim\limits_{i \to \infty} \delta_i$ (виж [**DB92**]).

Дефиниция 1.4. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, x_0)$ на задачата (35), (37) е гранично-равномерно устойчиво, ако :

— то е равномерно устойчиво ;
— за всяко ε имаме $\delta^*(\varepsilon) > 0$.

Забележка 1.5. Ясно е, че равномерно устойчивите решения могат да се разделят на два непресичащи се класа : гранично-равномерно устойчиви и равномерно устойчиви, които не са гранично-равномерно устойчиви. Лесно може да се покаже, че тези два класа са непразни.

Ще припомним и следната дефиниция [**Yos66**], [**Хар70**] :

Дефиниция 1.5. Ще казваме, че решението $x(t;t_0,x_0)$ на задачата (35), (37) е равномерно асимптотично устойчиво, ако :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\exists T=T(\varepsilon)>0)$$
$$(\forall(t_0^*,x_0^*)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{D},\,|t_0-t_0^*|<\delta,\,\|x_0-x_0^*\|<\delta)$$
$$\Rightarrow\|x(t;t_0,x_0)-x^*(t;t_0^*,x_0^*)\|<\varepsilon,\ t\geq\bar{t}_0+T,$$

където $x^*(t;t_0^*,x_0^*)$ е решението на началната задача (38), (40).

Забележка 1.6. Не е трудно да се покаже, че всяко равномерно асимптотично устойчиво решение е гранично-равномерно устойчиво. Следователно, класът **A** на равномерно асимптотично устойчивите решения е подклас на класа на гранично-равномерно устойчивите решения **B**. Нещо повече **A** е същински подклас на **B**.

Следният пример ни убеждава в това.

Пример 1.1. Да разгледаме следната начална задача :

$$\frac{dx}{dt}=0;\qquad x(t_0)=x_0$$

с решение $x(t;t_0,x_0)=x_0,\ t\geq t_0$. Очевидно решението на тази задача е равномерно устойчиво, но не е асимптотично равномерно устойчиво. От друга страна, за всяко $\varepsilon>0$ имаме $\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$. Следователно, редицата $\delta_1,\delta_2,\ldots$, където $\delta_1=\delta(\varepsilon)$, $\delta_2=\delta(\delta_1),\ldots$, съвпада с редицата $\varepsilon,\varepsilon,\ldots$. И така имаме $\delta^*(\varepsilon)=\lim\limits_{i\to\infty}\varepsilon=\varepsilon$. Това означава, че решението на разглежданата задача е гранично-равномерно устойчиво, т.е. $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$.

Лема 1.2. *Нека са изпълнени следните условия :*

1. *За всяка точка $(\tau,\chi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}$ решението на системата (35) с начално условие $x(\tau)=\chi$ е единствено и продължимо до ∞ (виж* [**Yos66**], [**Хар70**]*).*
2. *Решението $x(t;t_0,x_0)$ на задачата (35), (37) е гранично-равномерно устойчиво.*

Тогава :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\forall(t_0^*,x_0^*)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{D},\,|t_0-t_0^*|<\delta^*(\varepsilon),\,\|x_0-x_0^*\|<\delta^*(\varepsilon))$$
$$\Rightarrow\|x(t;t_0,x_0)-x^*(t;t_0^*,x_0^*)\|<\delta^*(\varepsilon),\ t\geq\bar{t}_0=\max\{t_0,t_0^*\}.$$

Доказателство. Нека : $\varepsilon>0$, $\delta_1=\delta(\varepsilon)$, $\delta_2=\delta(\delta_1)$, ... , $\lim\limits_{i\to\infty}\delta_i=\delta^*(\varepsilon)$, $|t_0-t_0^*|<\delta^*(\varepsilon)$, $\|x_0-x_0^*\|<\delta^*(\varepsilon)$. Тъй като $\delta_i\geq\delta^*(\varepsilon)$, то $|t_0-t_0^*|<\delta_i$, $\|x_0-x_0^*\|<\delta_i$. Тогава от Дефиниция 1.3 получаваме

$$\|x(t;t_0,x_0)-x^*(t;t_0^*,x_0^*)\|<\delta_{i-1},\quad t\geq\bar{t}_0,\ i=1,2,\ldots,$$

където $\delta_0=\varepsilon$. Накрая, като използваме, че горното неравенство е изпълнено за $i=1,2,\ldots$ заключаваме, че

$$\|x(t;t_0,x_0)-x^*(t;t_0^*,x_0^*)\|<\delta^*(\varepsilon),\quad t\geq\bar{t}_0,$$

с което доказателството на лемата е завършено.

Забележка 1.7. Тази лема показва, че ако задачата без импулси има гранично-равномерно устойчиво решение, то всяко друго решение на същата система с начално условие от $\mathbb{B}(x_0, \delta^*(\varepsilon))$ (околност на началното условие) за всяко $t \geq \bar{t}_0$ принадлежи на $\mathbb{B}(x(t;t_0,x_0), \delta^*(\varepsilon))$.

Ще предполагаме, че са изпълнени следните условия **(H1.2)** :

H1.2.1 Функцията $f \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$.

H1.2.2 Съществува константа $M > 0$ такава, че

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}.$$

H1.2.3 За всяка точка $(\tau, \chi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ решението на системата (35) с начално условие $x(\tau) = \chi$ е единствено и продължимо до ∞ (виж Забележка 1.2).

H1.2.4 Съществува константа $d > 0$ такава, че $\tau_{i+1} - \tau_i \geq d$, $i = 1, 2, \ldots$.

H1.2.5 $I_i \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

H1.2.6 $(I + I_i) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1, 2, \ldots$.

H1.2.7 Съществува константа a, $0 < a < 1$, такава, че

за всеки две точки (t_1, y_1), $(t_2, y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ е изпълнено

$$\|y_2 - y_1 + I_i(t_2, y_2) - I_i(t_1, y_1)\| \leq a(\|y_2 - y_1\| + |t_2 - t_1|), \; i = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 1.2. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H1.2)**.
2. *Решението на задачата без импулси (35), (37) е гранично-равномерно устойчиво.*

Тогава решението на задача (35), (36), (37) е равномерно устойчиво относно импулсните моменти.

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ и $\delta^* = \delta^*(\varepsilon)$, $0 < \delta^* \leq \varepsilon$, е константата от Дефиниция 1.3. От условие **H1.2.4** следва, че съществува константа δ_1, $0 < \delta_1 \leq \dfrac{d}{2}$, такава, че ако

$$|t_0 - t_0^*| < \delta_1, \quad |\tau_i - \tau_i^*| < \delta_1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то $0 < t_0^* < \tau_1^* < \tau_2^* < \ldots$. Като използваме условия **H1.2.3** и **H1.2.6** заключаваме, че решенията $x(t)$ и $x^*(t)$ съответно на задачите (35), (36), (37) и (38), (39), (40) са единствени и продължими до ∞ (виж [**LBS90**, T1.2.1.]).

Нека $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta_2$, $i = 1, 2, \ldots$, където :

$$\delta_2 = \min\left\{\delta^*, \delta_1, \frac{(1-a)\delta^*}{a(M+1)}\right\}, \quad |t_0 - t_0^*| < \delta_3, \quad \delta_3 = \min\{\delta^*, \delta_1\}, \quad \|x_0 - x_0^*\| < \delta^*.$$

Разглеждаме решенията на задачите (35), (36), (37) и (38), (39), (40) в интервала $[\max\{t_0, t_0^*\}, \min\{\tau_1, \tau_1^*\}]$. От Лема 1.2 следва

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq \delta^* \leq \varepsilon \quad \text{за} \;\; t \in [\max\{t_0, t_0^*\}, \min\{\tau_1, \tau_1^*\}]. \tag{48}$$

Без загуба на общността можем да предполагаме, че $\tau_1 < \tau_1^*$. Тогава

$$\|x_1^+ - x_1^{*+}\| = \|x_1 + I_1(\tau_1, x_1) - x_1^* - I_1(\tau_1^*, x_1^*)\| \le a(\|x_1 - x_1^*\| + |\tau_1 - \tau_1^*|)$$

$$\le a\left(\|x_1 - x^*(\tau_1; t_0^*, x_0^*)\| + \|x^*(\tau_1^*; t_0^*, x_0^*) - x^*(\tau_1; t_0^*, x_0^*)\| + |\tau_1 - \tau_1^*|\right)$$

$$\le a\left(\delta^* + M(\tau_1^* - \tau_1) + |\tau_1 - \tau_1^*|\right) \le a\left(\delta^* + (M+1)\frac{(1-a)\delta^*}{a(M+1)}\right) = \delta^*.$$

Отново от Лема 1.2 получаваме оценката

$$\|x(t) - x^*(t)\| = \|x(t; \tau_1, x_1^+) - x^*(t; \tau_1^*, x_1^{*+}\| \le \delta^* \le \varepsilon$$

за $t \in [\max\{\tau_1, \tau_1^*\}, \min\{\tau_2, \tau_2^*\}]$.

Като използваме индукция получаваме, че

$$\|x(t) - x^*(t)\| \le \delta^* \le \varepsilon, \quad t \in [\max\{\tau_i, \tau_i^*\}, \min\{\tau_{i+1}, \tau_{i+1}^*\}]. \tag{49}$$

От (48) и (49) заключаваме, че ако $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta_2$, $i = 1, 2, \dots$, $|t_0 - t_0^*| < \delta_3$, $\|x_0 - x_0^*\| < \delta^*$, то

$$\|x(t) - x^*(t)\| \le \delta^* \le \varepsilon \quad \text{за} \quad t \in [\bar{t}_0, \infty] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} < \tau_i, \tau_i^* >,$$

с което доказателството е завършено.

В Теорема 1.2 условието **H1.2.4** може да се замени с условието:

H1.2.4′ Съществуват константи l_1 и l_2 такива, че $\lim\limits_{i\to\infty}(\tau_i - il_1) = l_2$.

Действително, валидна е следната лема.

Лема 1.3. *Условието* **H1.2.4** *следва от условие* **H1.2.4′**.

Доказателство. Тъй като $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0, \dots$, то е ясно, че $l_1 > 0$. Избираме $\varepsilon = \dfrac{l_1}{3} > 0$. От условие **H1.2.4′** следва, че съществува номер $i_0 \in \mathbb{N}$ такъв, че за всяко $i \ge i_0$ е валидно $|\tau_i - il_1 - l_2| < \varepsilon = \frac{l_1}{3}$, което може да се запише още така

$$l_2 + il_1 - \frac{l_1}{3} < \tau_i < l_2 + il_1 + \frac{l_1}{3}.$$

Аналогично се намира

$$l_2 + (i+1)l_1 - \frac{l_1}{3} < \tau_{i+1} < l_2 + (i+1)l_1 + \frac{l_1}{3}.$$

За $i \ge i_0$ оценяваме разликата $\tau_{i+1} - \tau_i$ и получаваме

$$\tau_{i+1} - \tau_i > \left(l_2 + (i+1)l_1 - \frac{l_1}{3}\right) - \left(l_2 + il_1 + \frac{l_1}{3}\right) = \frac{l_1}{3}.$$

Нека $d = \min\left\{(\tau_2 - \tau_1), (\tau_3 - \tau_2), \dots, (\tau_{i_0} - \tau_{i_0 - 1}), \dfrac{l_1}{3}\right\}$. Очевидно е, че

$$\tau_{i+1} - \tau_i \ge d > 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

което трябваше да покажем.

3. Приложения в популационната динамика

Редица автори правят класификация на съобществата от взаимодействащи видове по различни показтели [**Hir82**], [**Пых83**], [**Hir85**], [**Hir88**], [**Ver90**], [**Gop92**]. Най-общо за класификацията на биотичните взаимодействия между видовете по такиви общоприети категории като : нейтрализъм, аменсализъм, коменсализъм, конкуренция, хищничество и мутуализъм е предложена следната формална процедура [**ФГ80**]. На всеки два вида от разглежданото съобщество, се съпоставят символите "+", "0", "−", в зависимост от посоката на влиянието на числеността на единия вид на скоростта на развитие на числеността на другия вид (виж Таблица 1.1) :

"+"("−") - увеличаване (намаляване) числеността на единия вид предизвиква увеличаване (намаляване) числеността на другия ;

"0" - липса на влияние.

Таблица 1.1. Класификация на междувидовите биотични взаимодействия

Тип на взаимодействието	Влияние на	
	първия вид на втория	втория вид на първия
нейтрализъм	0	0
аменсализъм	−	0
коменсализъм	+	0
конкуренция	−	−
жертва-хищник	+	−
мутуализъм	+	+

В настоящия параграф ще приведем някои основни приложения на получените резултати в популационната динамика.

3.1. Импулсен модел на Verhulst. Ще разгледмае логистичния модел на Verhulst, описващ динамиката на един биологичен вид при следните предположения :

1. *Популацията е изолирана.*
2. *Средата е стационарна.*
3. *Има фактори, лимитиращи относителната скорост на нарастване.*
4. *Импулсните въздействия се осъществяват в предварително зададени моменти* $\tau_1, \tau_2, \dots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots)$.
5. *Във всеки от импулсните моменти се отнема* p *части от популационната биомаса,* $p \in (0, 1)$.

Този модел се описва с помощта на следната начална задача :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{K}N(K-N), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\ldots; \tag{50}$$

$$\Delta N(t)\mid_{t=\tau_i} = N(\tau_i+0) - N(\tau_i) = -pN(\tau_i), \quad i = 1,2,\ldots; \tag{51}$$

$$N(0) = N_0, \tag{52}$$

където :

— $N = N(t) > 0$ е биомаса (размер) на популацията в момента $t \geq 0$ ($N(t) \in \mathbb{D} = (0, K)$) ;

— $K > 0$ е капацитет на средата (ниво на насищане) ;

— $r > 0$ е репродуктивен потенциал на популацията ;

— p ($p \in (0,1)$) е коефициент, определящ отнеманото количество биомаса във всеки от импулсните моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots$;

— $N_0 \in \mathbb{D}$ е размер на популацията в началния момент от време.

Ще проверим дали са изпълнени условията **(H1.2)** за модела (50), (51), (52). Имаме $f(t,N) = f(N) = \frac{r}{K}N(K-N)$. Очевидно $f \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}_+\}$, така че условие **H1.2.1** е изпълнено. За $N \in (0, K)$ максимумът на f се достига при $N = \frac{K}{2}$, и следователно имаме

$$f(t,N) = f(N) \leq f(\frac{K}{2}) = \frac{rk}{4} = M,$$

$(t,N) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$, т.е. **H1.2.2** е изпълнено. Условието **H1.2.3** е също валидно. Нещо повече, решението $N(t;0,N_0)$ на задача (50), (52) се задава с формулата

$$N(t;0,N_0) = \frac{K}{(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt}+1}. \tag{53}$$

За да бъде изпълнено условието **H1.2.4** е достатъчно да предполагаме, че съществува константа $d > 0$ такава, че $\tau_{i+1} - \tau_i \geq d$, $i = 1,2,\ldots$. Освен това импулсните моменти могат да се получат като функционални стойности на функция φ, $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, т.е. $\tau_i = \varphi(i)$, $i = 1,2,\ldots$. Тогава за да е валидно условието **H1.2.4′**, което влече **H1.2.4**, е необходимо функцията φ да бъде строго растяща и да има наклонена асимптота $y = l_1 i + l_2$ с положителен ъглов коефициент.

Импулсните функции на разглеждания модел са

$$I_i(t,N) = I_i(N) = -pN, \quad i = 1,2,\ldots, \quad N \in (0,K).$$

Следователно $I_i \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}\}$, $i = 1,2,\ldots$, което означава, че условието **H1.2.5** е валидно. Нека $I(t,N) = N$. Тогава имаме

$$I_i(t,N) + I(t,N) = -pN + N = (1-p)N, \quad N \in (0,K),$$

което ни дава $0 < I_i + I = (1-p)N < K$, т.е. $(I_i + I) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1,2,\ldots$, откъдето следва **H1.2.6**.

Условието **H1.2.7** е изпълнено за всяка константа $a \in (1-p, 1)$. Действително, за всеки две точки (t_1, N_1), $(t_2, N_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ имаме

$$|N_2 - N_1 + I_i(t_2, N_2) - I_i(t_1, N_1)|$$

$$= |N_2 - N_1 - pN_2 + pN_1| = (1-p)|N_2 - N_1| < a|N_2 - N_1|.$$

За да покажем, че решението (53) на задачата без импулси (50), (52) е гранично равномерно устойчиво, то трябва да е изпълнено неравенството

$$|N(t; 0, N_0) - N(t; 0, N_0^*)| \le |N_0 - N_0^*|, \quad t \ge 0, \tag{54}$$

където $N_0^* \in (0, K)$. Неравенството (54) показва, че за всяко $\varepsilon > 0$ имаме $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, т.е. редицата $\delta_1 = \delta(\varepsilon), \delta_2 = \delta(\delta_1), \ldots$ съвпада с редицата $\varepsilon, \varepsilon, \ldots$. Тогава нейната граница $\delta^*(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, което показва че решението на задача (50), (52) е гранично равномерно устойчиво.

Преди да докажем (54) за определеност ще предполагаме $N_0 > N_0^*$. От единствеността на решението на задача (50), (52) следва, че $N(t; 0, N_0) > N(t; 0, N_0^*)$ за $t \ge 0$.

Тогава

$$|N(t; 0, N_0) - N(t; 0, N_0^*)| = N(t; 0, N_0) - N(t; 0, N_0^*)$$

$$= \frac{K}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1} - \frac{K}{(\frac{K}{N_0^*} - 1)e^{-rt} + 1}$$

$$= \frac{\frac{K}{N_0}}{\frac{K}{N_0} + e^{rt} - 1} \cdot \frac{\frac{K}{N_0^*}}{\frac{K}{N_0^*} + e^{rt} - 1} \cdot (N_0 - N_0^*). \tag{55}$$

Тъй като $e^{rt} - 1 \ge 0$ при $t \ge 0$, то лесно се получават следните неравенства :

$$0 < \frac{\frac{K}{N_0}}{\frac{K}{N_0} + e^{rt} - 1} < 1, \quad 0 < \frac{\frac{K}{N_0^*}}{\frac{K}{N_0^*} + e^{rt} - 1} < 1.$$

Тогава от горните неравенства и (55) достигаме до (54). Ще отбележим, че условията **(H1.1)** са също изпълнени.

Следователно, за импулсния модел на Verhulst (50), (51), (52) са валидни Теоремите 1.1 и 1.2, т.е. решението на този модел е непрекъснато зависимо и равномерно устойчиво относно импулсните моменти.

3.2. Импулсен аналог на обобщения модел Lotka-Volterra (една жертва-един хищник). Създаването и изследването на моделите от тип "жертва-хищник" започват с работите на V. Volterra [**Вол76**] и A. Lotka. В последствие редица автори доусъвършенстват моделите на Lotka-Volterra и продължават тяхното изследване. А. Колмогоров [**Кол72**] подробно е изследвал системата

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 g_1(N_1) - N_2 L(N_1); \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 g_2(N_1). \end{aligned}$$

При различни предположения за средата и избор на функциите g_1, g_2 и L се получават различни модели от популационната динамика, по известните от които са дадени в следната Таблица 1.2 ([**ПЗ86**]).

ТАБЛИЦА 1.2. Различни модели на съобщества от тип "жертва-хищник"

$g_1(N_1)$	$L(N_1)$	$g_2(N_1, N_2)$	Автори
r_1	$q_1 N_1$	$-r_2 + q_2 N_1$	Volterra & Lotka
$r_1 - a_1 N_1$	$q_1 N_1$	$r_2(1 - e^{-\gamma N_1})$	Gause
r_1	$q_1 N_1$	$r_2 - q_2 \frac{N_2}{N_1}$	Pielou
r_1	$\frac{\alpha N_1}{1 + \alpha h N_1}$	$r_2 - q_2 \frac{N_2}{N_1}$	Holling
r_1	$b(1 - e^{-\gamma N_1})$	$r_2 - q_2 \frac{N_2}{N_1}$	Ивлев
r_1	$\frac{\alpha(N_1)N_1}{1 + h\alpha(N_1)N_1}$	$r_2 - q_2 \frac{N_2}{N_1}$	Royama
$1 - \frac{N_1}{K_1}$	$\frac{\alpha N_1}{1 + h\alpha N_1}$	$1 - \frac{N_2}{K_1} N_1$	Shimazu и др.
$r_1 - a_1 N_1$	$b(1 - e^{-\gamma N_1})$	$r_2(1 - a e^{-\mu N_1})$	May

Разглеждаме биосистема (една "жертва" - един "хищник") при следните ограничения:

1. *Общността от два взаимодействащи вида - жертва и хищник е изолирана.*
2. *Средата е стационарна.*
3. *Хищниците се хранят само с жертви.*
4. *Относителната скорост на нарастване на жертвата е намаляваща функция на количеството от хищника.*
5. *Размножаването на хищника намалява с увеличаването на ръста на неговата численост.*
6. *При постоянно количествено съотношение между жертвата и хищника относителната скорост на нарастване на жертвата намалява с увеличаването на броя на хищниците, а размножаването на хищниците се стимулира от излишното количество жертва.*
7. *За хищника съществува критично количество жертва, под което той не може да се размножава.*
8. *Съществуват пределни количества на жертвата и хищника, след достигането на които, увеличаването на ръста на жертвата се прекратява.*

9. *Импулсно се отнемат p_1 и p_2 части съответно от биомасите на първия вид (жертвата) и втория вид (хищника), $p_1, p_2 \in (0,1)$. Отнеманията се осъществяват в моментите $0 < \tau_1, \tau_2, \ldots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots)$.*

Математическото описание на обобщения модел жертва-хищник, базиран на тези ограничения, се дава със следната система импулсни диференциални уравнения [**Пых83**] :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(N_1, N_2) = g_1(N_1)(b_1 - a_{11}\varphi_1(N_1) - a_{12}\varphi_2(N_2)), \quad t \neq \tau_i; \\ \frac{dN_2}{dt} &= f_2(N_1, N_2) = g_2(N_2)(-b_2 - a_{21}\varphi_1(N_1) - a_{22}\varphi_2(N_2)), \quad t \neq \tau_i; \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} N_1(\tau_i + 0) &= N_1(\tau_i) - p_1 N_1(\tau_i); \\ N_2(\tau_i + 0) &= N_2(\tau_i) - p_2 N_2(\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots; \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} N_1(0) &= N_1^0; \\ N_2(0) &= N_2^0, \end{aligned} \tag{58}$$

където :

— $N_1 = N_1(t) > 0, N_2 = N_2(t) > 0$ са съответно популационните биомаси на жертвата и хищника в момента $t \geq 0$;

— $b_1 > 0$ е коефициент на естествената скорост на нарастване в популацията на жертвата ;

— $b_2 > 0$ е коефициент на естествена смъртртност в популацията на хищника ;

— $a_{11}, a_{22} > 0$ са съответно коефициенти на вътревидова конкуренция за 1-вия и 2-ия вид ;

— $a_{12} > 0$ е коефициент, характеризиращ интензивността на хищничество на 2-ия вид ;

— $a_{21} < 0$ е коефициент, харакреризиращ ефективността на използваната енергия от хищника, получавана от жертвата за възпроизводство на популацията ;

— $g_j, \varphi_j \in \boldsymbol{C}^1\{\mathbb{R}, \mathbb{R}\}$, $j = 1, 2$, са функции, описващи във всеки конкретен случай особеностите на размножението, конкуренцията и хищничеството, характерни за разглежданите популации. Те имат следните свойства :

1. $g_j(0) = \varphi_j(0) = 0$,
2. $g_j(N_j) > 0$,
3. $\dfrac{\partial \varphi_j(N_j)}{\partial N_j} > 0$;

— $p_1 \in (0,1)$ и $p_2 \in [0,1)$ са съответно коефициенти, определящи отнеманото количество биомаса във всеки един от импулсните моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots$ за жертвата и хищника ;

— $N_1^0, N_2^0 \in \mathbb{R}_+$ са размери на популацията на жертвата и хищника в началния момент от време.

Добре е известно [**Кол72**], [**ФГ80**], [**Пых83**], [**Гоп92**] и др., че :

$\boxed{1.}$ Координатите на устойчивия център $\hat{N} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ на системата се получават, като решение на системата:

$$a_{11}\varphi_1(N_1) + a_{12}\varphi_2(N_2) = b_1;$$

$$a_{21}\varphi_1(N_1) + a_{22}\varphi_2(N_2) = -b_2,$$

т.е.

$$\hat{N}_1 = \varphi_1^{-1}\left(\frac{b_1a_{22} + b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right), \quad \hat{N}_2 = \varphi_2^{-1}\left(\frac{-b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right).$$

Тъй като $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ и $b_1a_{22} + b_2a_{12} > 0$, то необходимо и достатъчно условие $\hat{N} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ да е устойчив център е $(-a_{11}b_2 - b_1a_{21}) > 0$.

$\boxed{2.}$ Системата (56) има енергетична функция, която е и пръв интеграл при $a_{11} = a_{22} = 0$. Първият интеграл има формата

$$E_d(N) = \int\limits_{\hat{N}_1}^{N_1} \frac{|a_{21}|}{a_{12}} \frac{\hat{\varphi}_1 - \varphi_1(x)}{g_1(x)}\, dx + \int\limits_{\hat{N}_2}^{N_2} \frac{\hat{\varphi}_2 - \varphi_2(x)}{g_2(x)}\, dx\,,$$

където: $N = (N_1, N_2)$, $\hat{\varphi}_j = \varphi_j(\hat{N}_j)$, $j = 1, 2$. Линиите на ниво за функцията E_d (траекториите) са затворени криви, които съдържат устойчивия център на системата, който е локално устойчив, но не е устойчив в $int\mathbb{R}^2_+$. Всяко едно от решенията на системата (56) е периодично.

Ще проверим дали са изпълнени условията **(H1.2)** за модела (56), (57), (58). Имаме $f(t, N) = f(N) = f(N_1, N_2) = (f_1(N_1, N_2), f_2(N_1, N_2))$. Очевидно $f \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2\}$, така че **H1.2.1** е изпълнено. За $N \in \mathbb{D} = (0, K_1) \times (0, K_2)$, където K_i, $i = 1, 2$, е капацитета на средата за i-тия вид, се вижда, че $\|\sup f(N)\|$ се достига в някоя точка от $\mathbb{D}$ или от $\partial\mathbb{D}$.

Нека $N^* = (N_1^*, N_2^*)$ е решението на системата

$$\frac{\partial\|f(N_1, N_2)\|}{\partial N_1} = 0, \;; \quad \frac{\partial\|f(N_1, N_2)\|}{\partial N_2} = 0.$$

Тогава, ако $M = \max\{\|f(N_1^*, N_2^*)\|, \|f(0, K_2)\|, \|f(K_1, 0)\|, \|f(K_1, K_2)\|\}$, то е удовлетворено **H1.2.2**. Условието **H1.2.3** е също валидно. За да бъде изпълнено условието **H1.2.4** е достатъчно да предполагаме, че съществува константа $d > 0$ такава, че $\tau_{i+1} - \tau_i \geq d$, $i = 1, 2, \ldots$.

Импулсните функции на разглеждания модел са

$$I_i(t, N) = I_i(N) = \begin{pmatrix} -p_1N_1 \\ -p_2N_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, \; N = (N_1, N_2) \in \mathbb{D}.$$

Следователно $I_i \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}^2\}$, $i = 1, 2, \ldots$, което означава, че условието **H1.2.5** е валидно. Нека $I(t, N) = N$. Тогава имаме

$$I_i(t, N) + I(t, N) = \begin{pmatrix} -p_1N_1 + N_1 \\ -p_2N_2 + N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - p_1)N_1 \\ (1 - p_2)N_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, \; N \in \mathbb{D},$$

което ни дава $0 < \|I_i + I\| \leq \max\limits_{j=1,2}(1 - p_j)\|N\|$, т.е. $(I_i + I) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, откъдето следва **H1.2.6**.

Следователно за импулсния модел (56), (57), (58) е валидна Теорема 1.1, т.е. решението на този модел е непрекъснато зависисмо от импулсните моменти.

Забележка 1.8. Ще разгледаме импулсен аналог на класическата система на Lotka-Volterra от тип жертва-хищник. За целта е достатъчно да разгледаме обобщената система (56) при $g_i(N_i) = N_i$, $b_i = r_i$, $a_{ii} = 0$, $\varphi_i(N_i) = N_i$, $i = 1, 2$; $a_{12} = q_1$, $a_{21} = q_2$.

Математическото описание на класическия модел жертва-хищник при тези означения, се дава със следната система импулсни диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(N_1, N_2) = N_1(r_1 - q_1 N_2), \quad t \neq \tau_i; \\ \frac{dN_2}{dt} &= f_2(N_1, N_2) = -N_2(r_2 - q_2 N_1), \quad t \neq \tau_i; \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} N_1(\tau_i + 0) &= N_1(\tau_i) - p_1 N_1(\tau_i); \\ N_2(\tau_i + 0) &= N_2(\tau_i) - p_2 N_2(\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots; \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} N_1(0) &= N_1^0; \\ N_2(0) &= N_2^0. \end{aligned} \tag{61}$$

Горната система се нарича импулсен аналог на системата на Lotka-Volterra. Решението на модела (59), (60), (61) зависи непрекъснато от импулсните моменти. Доказателството на този факт е непосредствено следствие от направените по-горе разглеждания за обобщения модел "жертва-хищник".

3.3. Импулсен аналог на двумерен модел с "коменсализъм". Към този вид взаимодействия се отнасят отношенията между два биологични вида, когато първият вид, наричан "стопанин-гостоприемник", положително въздейства на втория, наричан "комменсал-гост" [**ФГ80**]. "Комменсалът" по никакъв начин не влияе на "стопанина". Най-разпространените форми на комменсализъм са:

— "нахлебничество" - "комменсалът" по някакъв начин получава от "стопанина" храна за своето съществуване;

— "квартирантство" - предоставяне на жилище от "стопанина";

— "форезия" - "стопанинът" способства на разпространението и размножението на "комменсала", като играе роля на преносител на възрастните индивиди или зародиши.

Разглежданията по-нататък ще проведем при следните предположения:

1. *Общността се състои от два вида, които са изолирани.*
2. *Средата за "стопанина" е стационарна.*
3. *Нарастването на популационната плътност на "стопанина" води до линейно нарастване на капацитета на средата за "комменсала".*
4. *Импулсивно се отнемат p_1 и p_2 части съответно от биомасите на 1-вия ("стопанина") и 2-ия ("комменсала") вид, $p_1 \in (0, 1)$, $p_2 \in [0, 1)$. Отнеманията се осъществяват в моментите $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots)$.*

Математическото описание на модела с коменсализъм се дава със системата импулсни диференциални уравнения:

$$\frac{dN_1}{dt} = \quad f_1(N_1, N_2) = r_1 N_1 (1 - \tfrac{N_1}{K_1}), \qquad t \neq \tau_i; \tag{62}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \quad f_2(N_1, N_2) = r_2 N_2 (1 - \tfrac{N_2}{K_2 + \beta N_1}), \quad t \neq \tau_i; \tag{63}$$

$$N_1(\tau_i + 0) = N_1(\tau_i) - p_1 N_1(\tau_i); \tag{64}$$

$$N_2(\tau_i + 0) = N_2(\tau_i) - p_2 N_2(\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots; \tag{65}$$

$$N_1(0) = N_1^0; \tag{66}$$

$$N_2(0) = N_2^0, \tag{67}$$

където:

— $N_1 = N_1(t) > 0, N_2 = N_2(t) > 0$ са съответно популационните биомаси на "стопанина" и "коменсала" в момента $t \geq 0$, съответно;

— $r_1, r_2 > 0$ са съответно относителните скорости на нарастване в популациите на 1-вия и 2-ия вид;

— $K_1 > 0$ е емкост на средата за 1-вия вид;

— $K_2(N_1) = K_2 + \beta N_1 > 0$ е емкост на средата за коменсала, където $K_2 = K_2(0)$ е капацитета на средата за коменсала при отсъствие на "стопанин";

— $\beta > 0$ е коефициент, характеризиращ увеличаването на $K_2(N_1)$ при нарастване с единица плътността N_1 (при $K_2 = K_2(0) = 0$ имаме облигатен коменсализъм);

— $p_1 \in (0, 1)$, $p_2 \in [0, 1)$ са коефициенти, определящи отнеманото количество биомаса във всеки от импулсните моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots$ съответно за жертвата и хищника;

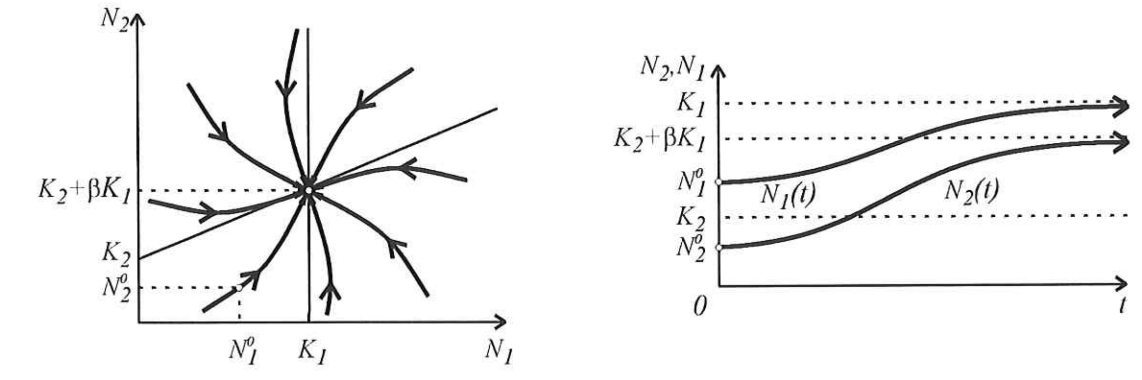
— $N_1(0) = N_1^0 \in (0, K_1)$, $N_2(0) = N_2^0 \in (0, K_2 + \beta N_1^0)$ са размерите на популацията на "стопанина" и "коменсала" в началния момент от време.

Всички решения на задачата (62), (63) с произволно начално условие от $\mathbb{R}_+^2$ са сходящи към устойчивия център на системата $\hat{N} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (K_1, K_2 + \beta K_1)$ [**ФГ80**], [**Пых83**] (виж Фиг.1.1).

Нека $N = (N_1, N_2) \in \mathbb{D}$; $\mathbb{D} = (0, K_1) \times (0, K_2 + \beta K_1) \subset \mathbb{R}_+^2$; $f(t, N) = f(N) = (f_1(N_1, N_2), f_2(N_1, N_2))$. Ще проверим дали са изпълнени условията **(H1.2)**. Условието **H1.2.1** е очевидно. Елементарно се оценява

$$\|f(N)\| = \sqrt{(r_1 N_1)^2 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)^2 + (r_2 N_2)^2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2 + \beta N_1}\right)^2}$$

$$\leq \sqrt{(r_1 N_1)^2 + (r_2 N_2)^2} \leq \sqrt{(r_1 K_1)^2 + r_2^2 (K_2 + \beta K_1)^2} = M,$$



Фигура 1.1. Фазов портрет и параметрични решения 1.

откъдето следва **H1.2.2**. Условието **H1.2.3** е валидно, защото началните задачи (62),(66) и (63),(67) за $t \in \mathbb{R}_+$ притежават съответно решения

$$N_1(t;0,N_1^0) = \frac{K_1}{\left(\frac{K_1}{N_1^0} - 1\right) e^{-r_1 t} + 1}$$

и

$$N_2(t;0,N_2^0) = e^{r_2 t} / \left(\frac{1}{N_2^0} + r_2 \int\limits_0^t \frac{e^{r_2 s}}{K_2 + \beta N_1(s;0,N_1^0)} ds \right).$$

Условието **H1.2.4** може да се удовлетвори при подходящ избор на константата d. Следващите две условия тривиално следват, ако импулсните въздействия имат големините

$$I_i(t,N) = I_i(N) = \begin{pmatrix} -p_1 N_1 \\ -p_2 N_2 \end{pmatrix}; \quad p_j \in (0,1), \ j = 1,2.$$

Ясно е, че $I_i \in \boldsymbol{C}\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}, \mathbb{R}_-\}$. Освен това

$$I_i(t,N) + I(t,N) = I_i(N) + I(N) = \begin{pmatrix} -p_1 N_1 + N_1 \\ -p_2 N_2 + N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p_1) N_1 \\ (1-p_2) N_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}.$$

За да е валидно условието **H1.2.7** е достатъчно $a = \max\{1-p_1, 1-p_2\}$. Действително, за всеки две точки (t_1, N), $(t_2, N^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ получаваме оценката

$$\|N - N^* + I_i(t_1,N) - I_i(t_2,N^*)\| = \|N - N^* - pN + pN^*\|$$
$$\leq \max_j (1-p_j)\|N - N^*\| = a\|N - N^*\|.$$

Ще покажем, че за $t \in \mathbb{R}_+$ е изпълнено следното неравенство

$$N_2(t;0,N_2^0) < K_2 + \beta N_1(t;0,N_1^0).$$

Валидни са неравенствата :

$$\frac{1}{N_2^0} > \frac{1}{K_2 + \beta N_1^0}; \tag{68}$$

$$K_2 + \beta N_1(t; 0, N_1^0) \geq K_2 + \beta N_1(s; 0, N_1^0) \geq K_2 + \beta N_1^0, \quad s \in [0, t].$$

От последното неравенство следва, че за $s \in [0, t]$ имаме

$$\frac{1}{K_2 + \beta N_1(t; 0, N_1^0)} \leq \frac{1}{K_2 + \beta N_1(s; 0, N_1^0)} \leq \frac{1}{K_2 + \beta N_1^0}. \tag{69}$$

Като използваме (68), (69), оценяваме $N_2(t; 0, N_2^0)$ по следния начин

$$N_2(t; 0, N_2^0) = e^{r_2 t} / \left(\frac{1}{N_2^0} + r_2 \int_0^t \frac{e^{r_2 s}}{K_2 + \beta N_1(s; 0, N_1^0)} \, ds \right)$$

$$\leq e^{r_2 t} / \left(\frac{1}{K_2 + \beta N_1^0} + \frac{r_2}{K_2 + \beta N_1(t; 0, N_1^0)} \int_0^t e^{r_2 s} \, ds \right)$$

$$\leq e^{r_2 t} / \left(\frac{1}{K_2 + \beta N_1^0} + \frac{1}{K_2 + \beta N_1(t; 0, N_1^0)} (e^{r_2 t} - 1) \right) \leq K_2 + \beta N_1(t; 0, N_1^0).$$

Решението на разглежданата система е равномерно асимптотично устойчиво [**ФГ80**], [**Пых83**], следователно то е и гранично равномерно устойчиво.

Ще отбележим, че условията **(H1.1)** също са изпълнени. Следователно за импулсния модел (62)-(67) са валидни Теоремите 1.1 и 1.2, т.е. решението на този модел е непрекъснато зависимо и равномерно устойчиво относно импулсните моменти.

4. Отворени проблеми. Непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения от импулсните въздействия

Ще дефинираме две нови понятия: непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения относно големините на импулсните въздействия.

Да разгледаме следните две начални задачи за нелинейни системи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\dots; \\ \Delta x(t)|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i+0) - x(\tau_i) = I_i(\tau_i, x(\tau_i)); \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{70}$$

и асоциираната с нея смутена задача

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f(t,x^*), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\dots; \\ \Delta x^*(t)|_{t=\tau_i} &= x^*(\tau_i+0) - x^*(\tau_i) = I_i^*(\tau_i, x^*(\tau_i)); \\ x^*(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{71}$$

където: $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\emptyset \neq \mathbb{D}$ е област в $\mathbb{R}^n$; $\{\tau_i\}_1^\infty$ е редица от импулсни моменти, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$; $I_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $t_0 \in \mathbb{R}_+$; $x_0 \in \mathbb{D}$; $I_i^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\dots$ са импулсните въздействия на началната задача (71). Най-общо $I_i \neq I_i^*$, $i = 1,2,\dots$. Тези две начални задачи се отличават единствено по големините на импулсните въздействия, които се извършват в моментите $\{\tau_i\}_1^\infty$.

Означаваме с $x(t)$ и $x^*(t)$ съответно решенията на началните задачи (70) и (71).

Дефиниция 1.6. Ще казваме, че решението $x(t)$ на импулсната задачата (70) зависи непрекъснато от големините на импулсните въздействия $I_1, I_2, \dots$, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall T > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon, T) > 0)$$
$$(\forall I_1^*, I_2^*, \dots : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \|I_i - I_i^*\| < \delta,\ i = 1,2,\dots)$$
$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T].$$

Дефиниция 1.7. Ще казваме, че решението $x(t)$ на импулсната задачата (70) е равномерно устойчиво относно големините на импулсните въздействия $I_1, I_2, \dots$, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall I_1^*, I_2^*, \dots : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \|I_i - I_i^*\| < \delta,\ i = 1,2,\dots)$$
$$\Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon,\ t \in [t_0, \infty).$$

Задача. Да се намерят необходими и достатъчни условия за непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на система импулсни диференциални уравнения от големините на импулсните въздействия. Получените резултати да се приложат за модели от популационната динамика.

Глава 2

Оптимизационни задачи в популационната динамика на един биологичен вид

В настоящата глава са поставени и решени няколко оптимизационни задачи от популационната динамика за един биологичен вид. Биологичният вид, обект на нашите изследвания, е разгледан при едно от следните алтернативни предположения:

— биологичният вид е изолиран или не е изолиран;

— средата, в която се развива разглежданата популация, е стационарна или се променя във времето;

— отчетена е вътревидовата конкуренция (популацията е лимитирана).

Основните класически модели на динамиката на един вид се получават от следното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N), \tag{72}$$

където:

— $N = N(t) > 0$ е биомаса (размер) на популацията в момента $t \geq 0$;

— $f(t, N)$ е функция, описваща абсолютната скорост на нарастване на биомасата на популацията и отчита различните биологични предположения за средата.

А. Колмогоров е предложил дясната страна на уравнение (72) да е от вида

$$f(t, N) = NW(t, N)$$

(вид на "Колмогоров" [**Gop92**]). Функцията W представлява относителната скорост на нарастване на популационната численост N и отразява влиянието на биотичните (растения, животни, микроорганизми) и абиотичните (метеорологични, литологични, хидрологични) фактори. Нарича се функция на приспособеност на популацията. Най-общо казано [**ГГППР74**], ако $W(t, cN) \leq W(t, N)$ при $c > 1$ популацията се нарича лимитирана.

В случаите, когато околната среда е подложена на дълготрайни във времето непрекъснати външни въздействия, общото уравнение (72) се пертурбира до диференциално уравнение от вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N) + \varepsilon(t, N), \tag{73}$$

където $\varepsilon(t, N)$ е функция, описваща непрекъснатото влияние на външните фактори (емиграция, имиграция, сезонни бедствия и т.н.).

Като примери на конкретни модели ще посочим следните:

$\boxed{1.}$ *Логистичното уравнение (уравнение на Verhulst)* при

$$W(t,N) = \frac{r}{K}(K-N),$$

т.е.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}N(K-N), \tag{74}$$

където:

— $K = K(t) > 0$ е капацитет на средата (ниво на насищане);

— $r = r(t) > 0$ е репродуктивен потенциал на популацията.

$\boxed{2.}$ *Уравнение на Gompertz* при

$$W(t,N) = r - \gamma \ln N,$$

т.е.

$$\frac{dN}{dt} = N(r - \gamma \ln N), \tag{75}$$

където:

— $\gamma = \gamma(t) > 0$ е коефициент на вътревидова конкуренция (коефициент на самоотравяне);

— $r = r(t) > 0$ е репродуктивен потенциал на популацията.

Обемът на популацията в момента $t = 0$ е

$$N(0) = N_0\,, \quad N_0 > 0. \tag{76}$$

Задачата (73), (76) описва динамиката на развитие на един биологичен вид в непрекъснатия случай. Ако имаме дискретна външна намеса, т.е. ако отнемаме или добавяме определено количество биомаса, ще са изпълнени следните уравнения:

$$\Delta N(t)\,|_{t=\tau_i} = N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = I_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{77}$$

където $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots)$ са моментите на отнемане $(I_i < 0)$ или добавяне $(I_i > 0)$ на биомаса от популацията. Уравненията (73), (77) представляват импулсен аналог на уравнението за развитие на един биологичен вид.

С помощта на импулсни диференциални уравнения са решени следните оптимизационни задачи за моделите споменати по-горе. В параграф 1 е разгледана началната задача за импулсно диференциално уравнение, а именно

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(t,N)\,, \quad t \neq \tau; \\ N(\tau+0) &= N(\tau) - I; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Импулсният момент τ $(0 < \tau \leq T)$ на отнемане на дадено количество I $(I > 0)$ от популационнта биомаса е определен, така че в последния момент T количеството биомаса $N(T)$ е максимално ([**AD99**]).

В §3 е разгледана следната начална задача за импулсно диференциално уравнение на един биологичен вид с краен брой импулсни моменти в стационарна среда:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(N), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ \Delta N(t)\mid_{t=\tau_i} &= N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = -I_i; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Решена е оптимизационната задача за определяне на:
— броя на импулсните моменти - n;
— количествата на импулсните отнемания - $I_1, I_2, \ldots, I_n$;
— импулсните моменти - $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$

така че
$\boxed{1.}$ $I_0 \leq I_i \leq I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, където I_0 и I са отнапред зададени положителни константи;

$\boxed{2.}$ $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = I$;

$\boxed{3.}$ в крайния момент $T > 0$ решението на разглежданата начална задача да е максимално [**AD98**].

Получените резултати в тези два параграфа са приложени за моделите на Verhulst и Gompertz в параграфите 2 и 4.

1. Оптимизационни задачи с едно импулсно въздействие

Ще казваме, че са изпълнени условията **(H2.1)**, ако:

H2.1.1 $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{C}\{[0,T],\mathbb{R}\}$, $T \in (0,\infty)$.

H2.1.2 $f : \mathbb{D} \longrightarrow (0,\infty)$, където $\mathbb{D} = \{(t,x); t \in [0,T], x \in (\varphi_1(t), \varphi_2(t))\}$.

H2.1.3 $f(t,\varphi_1(t)) = f(t,\varphi_2(t)) = 0$, $t \in [0,T]$.

H2.1.4 $f \in \boldsymbol{C}\{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}_+\}$.

H2.1.5 За всяко $t \in [0,T]$ функцията $F(x) = f(t,x)$ притежава единствен максимум в точката $M(t) \in (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

H2.1.6 Съществува константа $I > 0$ такава, че $\varphi_1(t) + 2I < \varphi_2(t)$, $t \in [0,T]$.

H2.1.7 $f \in C^1\{\mathbb{D}, (0,\infty)\}$.

H2.1.8 $f(t,x)+\dfrac{f_t(t,x) - f_t(t,x-I)}{f_x(t,x) - f_x(t,x-I)} > 0$, $(t,x) \in [0,T] \times (M(t), M(t)+I)$.

H2.1.9 φ_1 е монотонно намаляваща функция в $[0,T]$.

H2.1.10 φ_2 е монотонно растяща функция в $[0,T]$.

H2.1.11 $x_0 \in [\varphi_1(0) + I, \varphi_2(0))$.

Лема 2.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H2.1.1-H2.1.5**.
2. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I, \varphi_2(t) - I]$, $t \in [0,T]$, $I > 0$.

Тогава за всяко $t \in [0,T]$ *уравнението*

$$g(x) = f(t,x) - f(t,x-I) = 0 \tag{78}$$

притежава:

1. *Решение* $\psi(t)$.
2. $\psi(t) \in (M(t), M(t)+I)$.
3. *Решението* $\psi(t)$ *е единствено.*
4. $\psi \in \boldsymbol{C}\{[0,T],\mathbb{R}\}$.

Доказателство.

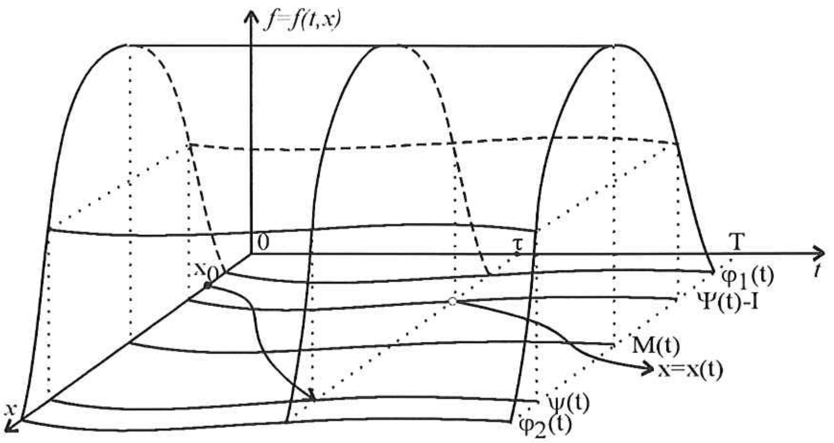
1. За всяко $t \in [0,T]$ от условията **H2.1.2**, **H2.1.3** и **H2.1.6** следва, че:

$$g(\varphi_1(t)+I) = f(t,\varphi_1(t)+I) - f(t,\varphi_1(t)) = f(t,\varphi_1(t)+I) > 0,$$

$$g(\varphi_2(t)) = f(t,\varphi_2(t)) - f(t,\varphi_2(t)-I) = -f(t,\varphi_2(t)-I) < 0.$$

От тези две неравенства и от факта, че за всяко $t \in [0,T]$ функцията $g \in \boldsymbol{C}\{[\varphi_1(t)+I, \varphi_2(t)], \mathbb{R}\}$ следва, че съществува точка $\psi = \psi(t)$ от дефиниционния интервал такава, че

$$g(\psi(t)) = f(t,\psi(t)) - f(t,\psi(t)-I) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{79}$$



ФИГУРА 2.1. $f(t,x), \psi(t), \ldots$

2. От условие **H2.1.5** следва, че за всяко $t \in [0,T]$ функцията $F(x) = f(t,x)$ е строго растяща в интервала $[\varphi_1(t), M(t)]$ и строго намаляваща в $[M(t), \varphi_2(t)]$.

Да допуснем, че $\psi(t) \in [\varphi_1(t) + I, M(t)]$. Тогава ще получим противоречие с (79), защото

$$g(\psi(t)) = F(\psi(t)) - F(\psi(t) - I) > 0.$$

Предположението, че $\psi(t) \in [M(t) + I, \varphi_2(t)]$ ни води до противоположното неравенство $g(\psi(t)) < 0$, което отново противоречи на (79).

Следователно $\psi(t) \in (M(t), M(t) + I)$. (Фиг.2.1, виж също [**Nen98**], [**Nen99**]).

3. Да допуснем, че съществува точка $t \in [0,T]$ такава, че $\psi(t), \psi^*(t)$ са два различни корена на (78). Нека $M(t) < \psi(t) < \psi^*(t) < M(t) + I$. От монотонността на F в интервалите $[\varphi_1(t), M(t)]$ и $[M(t), \varphi_2(t)]$ са изпълнени съответните неравенства :

$$F(\psi^*(t)) < F(\psi(t)), \quad F(\psi^*(t) - I) > F(\psi(t) - I).$$

От тези две неравенства получаваме противоречието

$$0 = g(\psi(t)) = F(\psi(t)) - F(\psi(t) - I) > F(\psi^*(t)) - F(\psi^*(t) - I) = g(\psi^*(t)) = 0.$$

Случаят $M(t) < \psi^*(t) < \psi(t) < M(t) + I$ се разглежда аналогично.

4. Нека $\{t_n\}_1^\infty \subset [0,T]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Редицата $\{\psi(t_n)\}_1^\infty$ е ограничена, тъй като са в сила неравенствата :

$$\min_{t\in[0,T]} \varphi_1(t) \le \psi(t_n) \le \max_{t\in[0,T]} \varphi_2(t)\,,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Следователно редицата $\{\psi(t_n)\}_1^\infty$ има поне една точка на сгъстяване. Да допуснем, че тази редица има две различни точки на сгъстяване - A' и A''. Тогава съществуват подредици $\{t'_n\}_1^\infty$, $\{t''_n\}_1^\infty \subset \{t_n\}_1^\infty$ такива, че

$$\lim_{n\to\infty}\psi(t'_n) = A', \quad \lim_{n\to\infty}\psi(t''_n) = A''.$$

От първото равенство получаваме

$$\lim_{n\to\infty}[f(t'_n, \psi(t'_n)) - f(t'_n, \psi(t'_n) - I)] = f(t_0, A') - f(t_0, A' - I). \tag{80}$$

От (78) получаваме $f(t'_n, \psi(t'_n)) - f(t'_n, \psi(t'_n) - I) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$. От това равенство и (80) следва

$$f(t_0, A') - f(t_0, A' - I) = g(A') = 0. \tag{81}$$

Аналогично на (81) намираме

$$f(t_0, A'') - f(t_0, A'' - I) = g(A'') = 0.$$

Следователно, за $t = t_0$ уравнението $g(x) = 0$ има два корена. Това противоречи на твърдение 3 от лемата, т.е. редицата $\{\psi(t_n)\}_1^\infty$ има една точка на сгъстяване. Тъй като тази редица е ограничена и има единствена точка на сгъстяване, то тя е сходяща. От равенство (81) е ясно, че A' е решение на уравнението $g(x) = 0$ при $t = t_0$, т.е. $A' = \psi(t_0)$. Следователно получаваме $\lim_{n\to\infty}\psi(t_n) = \psi(t_0)$. Така установихме, че функцията ψ е непрекъсната в произволно избрана точка $t_0 \in [0, T]$, с което доказателството е завършено.

Лема 2.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H2.1.1-H2.1.5**.
2. $0 < I_1 < I_2$.
3. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I_2, \varphi_2(t) - I_2]$, $t \in [0, T]$.

Тогава за всяко $t \in [0, T]$ *уравненията:*

$$g_i(x) = f(t, x) - f(t, x - I_i) = 0,\ i = 1, 2,$$

притежават:

1. *Единствени непрекъснати решения в интервала* $[0, T]$*, а именно* $\psi_i(t) \in (M(t), M(t) + I_i)$, $i = 1, 2$.
2. *За всяко* $t \in [0, T]$ *са валидни неравенствата* $M(t) < \psi_1(t) < \psi_2(t) < M(t) + I_2$.

Доказателство.

1. Следва непосредствено от Лема 2.1.

2. От условие **H2.1.5** следва, че за всяко $t \in [0, T]$ функцията $F(x) = f(t, x)$ е строго растяща в $[\varphi_1(t), M(t)]$ и строго намаляваща в $[M(t), \varphi_2(t)]$.

Да допуснем, че

$$M(t) < \psi_2(t) < \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \tag{82}$$

Тогава

$$F(\psi_2(t)) > F(\psi_1(t)). \tag{83}$$

Освен това от (82), условие 2 на лемата и твърдение 2 на Лема 2.1 получаваме, че

$$\psi_2(t) - I_2 < \psi_1(t) - I_1 < M(t), \quad t \in [0, T].$$

Следователно

$$F(\psi_2(t) - I_2) < F(\psi_1(t) - I_1). \tag{84}$$

Накрая от (83), (84) и уравненията

$$g_i(x) = f(t, x) - f(t, x - I_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

получаваме следното противоречие

$$\begin{aligned} 0 = g_1(\psi_1(t)) &= F(\psi_1(t)) - F(\psi_1(t) - I_1) \\ &< F(\psi_2(t)) - F(\psi_2(t) - I_2) = g_2(\psi_2(t)) = 0, \end{aligned}$$

с което Лема 2.2 е доказана.

Решението на началната задача без импулси

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x); \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{85}$$

означаваме с $x(t; 0, x_0)$.

Ще разгледаме следните две начални задачи за нелинейни диференциални уравнения с импулси:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau; \\ \Delta x(t)|_{t=\tau} &= x(\tau + 0) - x(\tau) = -I; \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{86}$$

и асоциираната с нея

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(t, \hat{x}), \quad t \neq \hat{\tau}; \\ \Delta \hat{x}(t)|_{t=\hat{\tau}} &= \hat{x}(\hat{\tau} + 0) - \hat{x}(\hat{\tau}) = -I; \\ \hat{x}(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{87}$$

Означаваме съответно с $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ решенията на задачите (86) и (87). Валидни са следните равенства:

$$x(t) = \begin{cases} x(t; 0, x_0), & t \in [0, \tau]; \\ x(t; 0, x(\tau; 0, x_0) - I), & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t; 0, x_0), & t \in [0, \hat{\tau}]; \\ x(t; 0, x(\hat{\tau}; 0, x_0) - I), & t \in (\hat{\tau}, T]. \end{cases}$$

Лема 2.3. *Нека са изпълнени условията* **H2.1.1-H2.1.4**, **H2.1.6**, **H2.1.9**, **H2.1.10** *и* **H2.1.11**.

Тогава решението на задача (87) е продължимо до T, т.е. интегралната крива на тази задача не напуска $\overline{\mathbb{D}}$ за $t \in [0, T]$.

Доказателство. Лемата ще бъде доказана, ако покажем валидността на неравенствата

$$\varphi_1(t) \leq \hat{x}(t) \leq \varphi_2(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{88}$$

За $t \in [0,\hat{\tau}]$ от условията **H2.1.2**, **H2.1.11** и **H2.1.9** получаваме

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_0^t f(s,\hat{x}(s))\,ds \geq x_0 \geq \varphi_1(0) + I \geq \varphi_1(t) + I > \varphi_1(t) \tag{89}$$

За да покажем, че

$$\hat{x}(t) \leq \varphi_2(t), \quad t \in [0,\hat{\tau}] \tag{90}$$

ще разгледаме следната начална задача с импулси:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{f}(t,\hat{x}), \quad t \neq \hat{\tau}; \\ \Delta\hat{x}(t)|_{t=\hat{\tau}} &= \hat{x}(\hat{\tau}+0) - \hat{x}(\hat{\tau}) = -I; \\ \hat{x}(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{91}$$

където функцията $\hat{f}$ е непрекъснато продължение на f, дефинирана с равенствата:

$$\hat{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{D}; \\ 0, & (t,x) \in \{[0,T]\times\mathbb{R}\}\backslash\mathbb{D}. \end{cases}$$

Ясно е, че за $(t,\hat{x}) \in \overline{\mathbb{D}}$ решенията на задачите (87) и (91) съвпадат. За удобство означаваме решението на задача (91) отново с $\hat{x}(t)$.

Да допуснем, че съществува точка $t_1 \in (0,\hat{\tau}]$ такава, че

$$\hat{x}(t_1) > \varphi_2(t_1). \tag{92}$$

От условие **H2.1.11** и (92) следва, че съществува поне една точка $t_2 \in (0,t_1)$, такава че $\hat{x}(t_2) = \varphi_2(t_2)$. Да предположим, че t_2 е точната горна граница на тези точки.

Очевидно е, че за $t \in [t_2,t_1]$ е изпълнено $\hat{x}(t) \geq \varphi_2(t)$ и следователно $\hat{f}(t,\hat{x}(t)) = 0$. Така получаваме

$$\hat{x}(t_1) = \hat{x}(t_2) + \int_{t_2}^{t_1} \hat{f}(s,\hat{x}(s))\,ds = \hat{x}(t_2) = \varphi_2(t_2) \leq \varphi_2(t_1),$$

което противоречи на (92), т.е. неравенството (90) е валидно.

От неравенствата (89) и (90) за $t = \hat{\tau}$ следват оценките

$$\varphi_1(\hat{\tau}) = \varphi_1(\hat{\tau}+0) \leq \hat{x}(\hat{\tau}) - I = \hat{x}(\hat{\tau}+0) \leq \varphi_2(\hat{\tau}+0) - I < \varphi_2(\hat{\tau}+0) = \varphi_2(\hat{\tau}). \tag{93}$$

Да отбележим, че за $t \in (\hat{\tau},T]$ решението $\hat{x}(t)$ на задача (91) съвпада с решението на следната задача без импулси

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{f}(t,\hat{x}); \\ \hat{x}(\hat{\tau}+0) &= \hat{x}(\hat{\tau}) - I = \hat{x}_0. \end{aligned}$$

Решението на горната задача означаваме с $\hat{x}(t;\hat{\tau},\hat{x}_0)$.

Аналогично на (89) може да се покаже, че за $t \in (\hat{\tau}, T]$ е изпълнено

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t;\hat{\tau},\hat{x}_0) = \hat{x}_0 + \int_{\hat{\tau}}^{t} \hat{f}(s,\hat{x}(s;\hat{\tau},\hat{x}_0))\,ds \geq \hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{\tau}) - I \geq \varphi_1(\hat{\tau}) \geq \varphi_1(t). \quad (94)$$

Доказателството на неравенството

$$\hat{x}(t) \leq \varphi_2(t), \qquad t \in (\hat{\tau}, T], \quad (95)$$

е подобно на (90), затова ще го пропуснем.

Неравенството (88) следва от (89), (90), (94) и (95), с което доказателството на лемата е завършено.

Лема 2.4. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H2.1)**.
2. $M(t) \in [\varphi_1(t) + I, \varphi_2(t) - I]$, $t \in [0, T]$.

Тогава множеството $\Delta = \{t : t \in [0, T],\ x(t; 0, x_0) = \psi(t)\}$ *се състои най-много от една точка, където функцията* ψ *е единственото решение на уравнение (78).*

Доказателство. Съгласно Лема 2.3 решението на задача (86) е продължимо до T. Нека $\Delta \neq \emptyset$ и τ е точната долна граница на Δ. Тъй като Δ е затворено множество, то $\tau \in \Delta$, т.е.

$$x(\tau; 0, x_0) = \psi(\tau). \quad (96)$$

За всяко $t \in [0, T]$ функцията ψ се дефинира неявно от уравнението

$$f(t, x) - f(t, x - I) = 0.$$

Тогава диференцирайки неявно това уравнение получаваме

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{f_t(t,\psi(t)) - f_t(t,\psi(t) - I)}{f_x(t,\psi(t)) - f_x(t,\psi(t) - I)}.$$

От този израз за производната на функцията $h(t) = x(t; 0, x_0) - \psi(t)$ имаме

$$\frac{dh(t)}{dt} = f(t, x) + \frac{f_t(t,\psi(t)) - f_t(t,\psi(t) - I)}{f_x(t,\psi(t)) - f_x(t,\psi(t) - I)}.$$

От (96), неравенствата $M(t) < \psi(t) < M(t) + I$ (твърдение 2 на Лема 2.1) и условие **H2.1.8** за $t = \tau$ получаваме оценката

$$\frac{dh(\tau)}{dt} > 0. \quad (97)$$

Това неравенство и равенството $h(\tau) = 0$ за достатъчно малко $t > \tau$ ни дава оценката $h(t) > 0$. Ще покажем, че $\Delta = \{\tau\}$. Да допуснем, че съществува точка $t_3 > \tau$, такава че $h(t_3) = 0$ и $h(t) > 0$ за $t \in (\tau, t_3)$. Стойността на $\dfrac{dh(t_3)}{dt}$ е неположителна, защото

$$\frac{dh(t_3)}{dt} = \lim_{\delta \to -0} \frac{h(t_3 + \delta) - h(t_3)}{\delta} = \lim_{\delta \to -0} \frac{h(t_3 + \delta)}{\delta} \leq 0.$$

Аналогично на (97) може да се покаже, че $\dfrac{dh(t_3)}{dt} > 0$. Това противоречие ни води до заключението, че $\Delta = \{\tau\}$, което трябваше да покажем.

Нещо повече получихме, че

$$h(t) = x(t;0,x_0) - \psi(t) = x(t;\tau,\psi(\tau)) - \psi(t) > 0, \quad t \in (\tau, T]. \tag{98}$$

Забележка 2.1. Лема 2.4 бе доказна с помощта на условие **H2.1.8**. Това условие се използва при доказателството само за точките от кривата $\{(t,\psi(t)),\ t \in [0,T]\} \subset [0,T]\times(M(t), M(t)+I)$. Ето защо, то може да бъде заменено с по-слабо ограничителното условие:

H2.1.8′ $f(t,\psi(t)) + \dfrac{f_t(t,\psi(t)) - f_t(t,\psi(t)-I)}{f_x(t,\psi(t)) - f_x(t,\psi(t)-I)} > 0\,, \quad t \in [0,T].$

Забележка 2.2. Ще покажем, че за всяко $t \in [0,T]$ функцията

$$f_x(t,x) - f_x(t,x-I) < 0 \quad \text{за} \quad x \in (M(t), M(t)+I).$$

Действително, тъй като функцията $F(x) = f(t,x)$ е строго растяща в $[\varphi_1(t), M(t)]$ и строго намаляваща в $[M(t), \varphi_2(t)]$ имаме:

$$f_x(t,x) = \frac{dF(x)}{dx} < 0; \qquad f_x(t,x-I) = \frac{dF(x-I)}{dx} > 0, \qquad x \in (M(t), M(t)+I).$$

Следователно получаваме

$$f_x(t,x) - f_x(t,x-I) < 0.$$

Като имаме предвид горното неравенство и факта, че $f(t,\psi(t)) > 0$ заключаваме, че условието **H2.1.8′** е изпълнено, ако е валидно условието:

H2.1.8″ $f_t(t,\psi(t)) - f_t(t,\psi(t)-I) < 0, \quad t \in [0,T].$

Следователно от условие **H2.1.8″** следва **H2.1.8′**.

Теорема 2.1. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H2.1)**.
2. $M(t) \in [\varphi_1(t)+I, \varphi_2(t)-I]$, $t \in [0,T]$.
3. $\Delta = \{\tau\}$, *където* $\Delta = \{t : t \in [0,T], x(t;0,x_0) = \psi(t)\}$, ψ *е решение на (78).*
4. $\tau \neq \hat{\tau}$, $\hat{\tau} \in [0,T]$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Доказателство. Ще използваме факта, че функцията

$$s(t) = f(t, x(t;0,x_0)) - f(t, x(t;0,x_0) - I)$$

удовлетворява неравенствата:

$$s(t) > 0,\ t \in [0,\tau); \qquad s(t) < 0,\ t \in (\tau, T]. \tag{99}$$

Действително, $x_0 \leq \psi(0)$. Да допуснем противното, т.е. че $x_0 > \psi(0)$. От условие 2 на теоремата единствената пресечна точка на интегралната крива $(t, x(t;0,x_0))$ на задача (85) с графиката на функцията ψ е точка τ. От направеното предположение заключаваме, че за функцията $h(t) = x(t;0,x_0) - \psi(t)$ са изпълнени неравенствата:

$$h(t) > 0,\ t \in [0,\tau); \qquad h(\tau) = 0,$$

откъдето следва

$$\frac{dh(\tau)}{dt} = \frac{dh(\tau - 0)}{dt} \leq 0,$$

което противиречи на (97).

От неравенството $x_0 \leq \psi(0)$ непосредствено се вижда, че:

$$x(t;0,x_0) < \psi(t) \text{ за } t \in [0,\tau); \qquad x(t;0,x_0) > \psi(t) \text{ за } t \in (\tau,T]. \tag{100}$$

Ще покажем, че $s(t) > 0$ за $t \in [0,\tau)$. Действително, ако за някое $t \in [0,\tau)$ е валидно $x(t;0,x_0) \leq M(t)$, то от факта, че функцията $F(x) = f(t,x)$ е строго растяща в $[\varphi_1(t), M(t)]$ заключаваме, че

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t, x(t;0,x_0)) - f(t, x(t;0,x_0) - I) \\ &= F(x(t;0,x_0)) - F(x(t;0,x_0) - I) > 0. \end{aligned}$$

Ако за някое $t \in [0,\tau)$ е валидно $x(t;0,x_0) > M(t)$, като вземем под внимание (100) и твърдение 2 на Лема 2.1, получаваме

$$M(t) < x(t;0,x_0) < \psi(t) < M(t) + I. \tag{101}$$

От горното неравенство и от факта, че функцията F е строго намаляваща в $[M(t), \varphi_2(t)]$, достигаме до неравенството

$$F(x(t;0,x_0)) > F(\psi(t)). \tag{102}$$

Неравенството (101) ни дава оценката

$$x(t;0,x_0) - I < \psi(t) - I < M(t),$$

откъдето следва

$$F(x(t;0,x_0) - I) < F(\psi(t) - I). \tag{103}$$

Накрая от (102) и (103) заключаваме, че

$$s(t) = F(x(t;0,x_0)) - F(x(t;0,x_0) - I) > F(\psi(t)) - F(\psi(t) - I) = g(\psi(t)) = 0.$$

И така, получихме, че $s(t) > 0$ за $t \in [0,\tau)$.

Нека $t \in (\tau, T]$. Ако за някое t от този интервал са валидни неравенствата

$$M(t) < x(t;0,x_0) - I < x(t;0,x_0),$$

то от монотонността на функцията F в $[M(t), \varphi_2(t)]$ следва неравенството

$$s(t) = F(x(t;0,x_0)) - F(x(t;0,x_0) - I) < 0.$$

Ако за някое $t \in (\tau, T]$ е валидно $x(t;0,x_0) - I \leq M(t)$, то предвид второто от неравенствата (100) получаваме

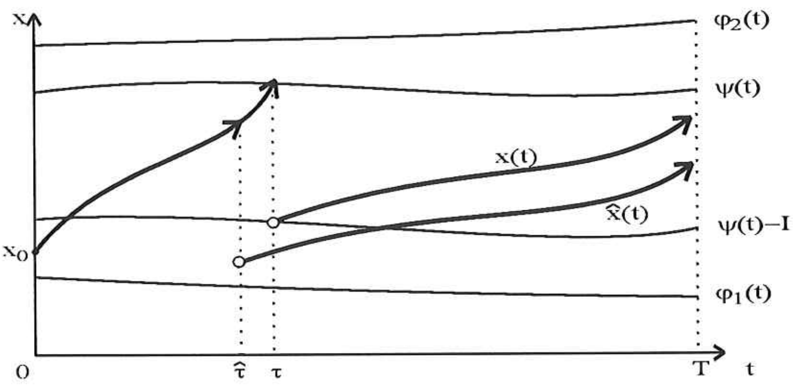
$$\psi(t) - I < x(t;0,x_0) - I \leq M(t) < \psi(t) < x(t;0,x_0),$$

което ни води до

$$\begin{aligned} s(t) = F(x(t;0,x_0)) - F(x(t;0,x_0) - I) &< F(x(t;0,x_0)) - F(\psi(t) - I) \\ &= F(x(t;0,x_0)) - F(\psi(t)) < 0. \end{aligned}$$

Следователно $s(t) < 0$ за $t \in (\tau, T]$.

От условие 4 на теоремата следва, че са възможни следните два случая:



Фигура 2.2. $\hat\tau < \tau$

Случай 1. $\hat\tau < \tau$. Ще покажем, че

$$x(\tau + 0) > \hat{x}(\tau). \tag{104}$$

Тогава от единствеността на решението на задача (85) ще получим

$$x(T) = x(T;\tau, x(\tau) - I) = x(T;\tau, x(\tau + 0)) > x(T;\tau, \hat{x}(\tau)) = \hat{x}(T)$$

(виж Фиг.2.2). Последното неравенство доказва Теорема 2.1 в този случай.

В сила са следните равенства:

$$x(\tau + 0) = x_1 + \int_{\hat\tau}^{\tau} f(t, x(t))\, dt - I\,; \qquad \hat{x}(\tau) = x_1 - I + \int_{\hat\tau}^{\tau} f(t, \hat{x}(t))\, dt,$$

където $x_1 = x(\hat\tau; 0, x_0) = x(\hat\tau) = \hat{x}(\hat\tau)$. Имаме

$$\begin{aligned} x(\tau + 0) - \hat{x}(\tau) &= \int_{\hat\tau}^{\tau} [f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))]\, dt \\ &= \int_{\hat\tau}^{\tau} [f(t, x(t;\hat\tau, x_1)) - f(t, x(t;\hat\tau, x_1 - I))]\, dt. \end{aligned}$$

Ще покажем, че последният интеграл е положителен, откъдето ще следва (104). Достатъчно е да установим, че

$$\begin{aligned} & f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t)) \\ &= f(t, x(t;\hat\tau, x_1)) - f(t, x(t;\hat\tau, x_1 - I)) > 0, \quad t \in (\hat\tau, \tau). \end{aligned} \tag{105}$$

Горното неравенство е вярно при $t = \hat\tau + 0$. Действително

$$f(\hat\tau + 0, x(\hat\tau + 0)) - f(\hat\tau + 0, \hat{x}(\hat\tau + 0)) \;= f(\hat\tau, x_1) - f(\hat\tau, x_1 - I)$$

$$= f(\hat\tau, x(\hat\tau; 0, x_0)) - f(\hat\tau, x(\hat\tau; 0, x_0) - I) \;= s(\hat\tau) > 0.$$

Да допуснем, че (105) не е вярно. Това означава, че съществува точка $t_4 \in (\hat{\tau}, \tau)$, такава че:

$$f(t_4, x(t_4)) - f(t_4, \hat{x}(t_4)) = 0; \tag{106}$$

$$f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t)) > 0, \qquad t \in (\hat{\tau}, t_4). \tag{107}$$

От (107) получаваме

$$x(t_4) - \hat{x}(t_4) = x_1 - x_1 + I + \int\limits_{\hat{\tau}}^{t_4} [f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))]\, dt > I,$$

т.е. изпълнено е

$$\varphi_1(t_4) < \hat{x}(t_4) < x(t_4) - I < \psi(t_4) - I < M(t_4).$$

От последното неравенство и от строгата монотонност на функцията $F(x) = f(t_4, x)$ (монотонно растяща) в интервала $[\varphi_1(t_4), M(t_4)]$ имаме

$$F(\hat{x}(t_4)) < F(x(t_4) - I),$$

което може да се запише още така

$$f(t_4, \hat{x}(t_4)) < f(t_4, x(t_4) - I). \tag{108}$$

От (106) и (108) получаваме следното противоречие

$$\begin{aligned} 0 &= f(t_4, x(t_4)) - f(t_4, \hat{x}(t_4)) > f(t_4, x(t_4)) - f(t_4, x(t_4) - I) \\ &= f(t_4, x(t_4; 0, x_0)) - f(t_4, x(t_4; 0, x_0) - I) = s(t_4) > 0. \end{aligned}$$

С това Теорема 2.1 е доказана в този случай.

Случай 2. $\tau < \hat{\tau}$. Ще покажем, че

$$x(\hat{\tau}) > \hat{x}(\hat{\tau} + 0)\,, \tag{109}$$

откъдето, като използваме факта, че решението на задача (85) е единствено, ще установим, че

$$x(T) = x(T; \hat{\tau}, x(\hat{\tau})) > x(T; \hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau} + 0)) = x(T; \hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}) - I) = \hat{x}(T),$$

което доказва теоремата в този случай (Фиг.2.3).

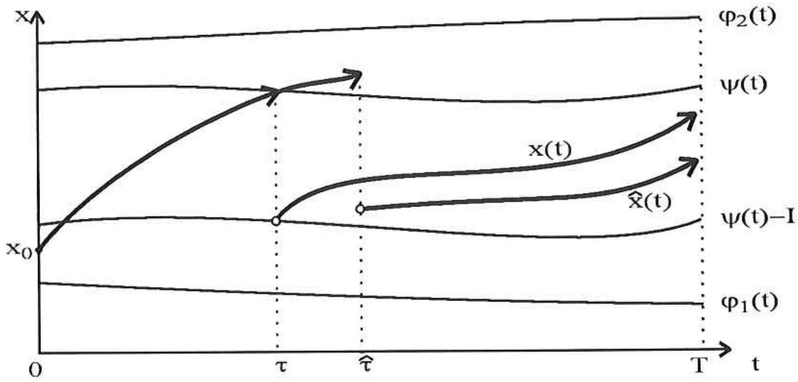
Изпълнени са следните равенства:

$$x(\hat{\tau}) = x(\tau) - I + \int\limits_{\tau}^{\hat{\tau}} f(t, x(t))\, dt = x(\tau; 0, x_0) - I + \int\limits_{\tau}^{\hat{\tau}} f(t, x(t))\, dt;$$

$$\hat{x}(\hat{\tau} + 0) = \hat{x}(\tau) + \int\limits_{\tau}^{\hat{\tau}} f(t, \hat{x}(t))\, dt - I = x(\tau; 0, x_0) + \int\limits_{\tau}^{\hat{\tau}} f(t, \hat{x}(t))\, dt - I,$$

откъдето

$$x(\hat{\tau}) - \hat{x}(\hat{\tau} + 0) = \int\limits_{\tau}^{\hat{\tau}} [f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))]\, dt$$



Фигура 2.3. $\tau < \hat{\tau}$

$$= \int_{\tau}^{\hat{\tau}} [f(t, x(t; \tau, \psi(\tau) - I)) - f(t, x(t; \tau, \psi(\tau)))] \, dt \, .$$

Ще покажем, че последният интеграл е положителен, откъдето ще следва (109). Затова е достатъчно да установим, че

$$f(t, x(t; \tau, \psi(\tau) - I) - f(t, x(t; \tau, \psi(\tau)) > 0, \qquad t \in (\tau, \hat{\tau}). \tag{110}$$

За $t = \tau + 0$, като вземем предвид (79), са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned} f(\tau + 0, x(\tau + 0)) - f(\tau + 0, \hat{x}(\tau + 0)) &= f(\tau, x(\tau) - I) - f(\tau, \hat{x}(\tau)) \\ &= f(\tau, x(\tau; 0, x_0) - I) - f(\tau; x(\tau; 0, x_0)) \\ &= f(\tau, \psi(\tau) - I) - f(\tau, \psi(\tau)) = -g(\psi(\tau)) = 0. \end{aligned} \tag{111}$$

От условие **H2.1.8** и (98) имаме

$$\hat{x}(t) = x(t; \tau, \psi(\tau)) > \psi(t), \; t \in (\tau, \hat{\tau}). \tag{112}$$

От равенство (111) и условие **H2.1.8** заключаваме, че съществува константа $\delta > 0$ такава, че

$$\psi(t) > x(t) = x(t; \tau, \psi(\tau) - I) > \psi(t) - I, \quad \tau < t < \tau + \delta < \hat{\tau}. \tag{113}$$

От (112) и (113) следва, че

$$f(t, \hat{x}(t)) < f(t, \psi(t)) = f(t, \psi(t) - I) < f(t, x(t)), \quad t \in (\tau, \tau + \delta),$$

т.е. неравенството (110) е валидно в $(\tau, \tau + \delta)$.

Да допуснем, че съществува точка t_5, $t_5 \in (\tau, \hat{\tau})$, такава че:

$$f(t_5, x(t_5)) - f(t_5, \hat{x}(t_5)) = 0; \tag{114}$$

$$f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t)) > 0, \quad t \in (\tau, t_5). \tag{115}$$

От (115) получаваме

$$x(t_5) - \hat{x}(t_5) = \psi(\tau) - I - \psi(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_5} [f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))]\, dt > -I,$$

откъдето достигаме до

$$\begin{aligned}\psi(t_5) - I < \hat{x}(t_5) - I < x(t_5) &= x(t_5; \tau, \psi(\tau) - I) \\ &< x(t_5; \tau, \psi(\tau)) = \hat{x}(t_5).\end{aligned}$$

От последните неравенства следва, че са възможни следните два случая:

Случай 2.1. $\psi(t_5) - I < x(t_5) \le \psi(t_5) < \hat{x}(t_5)$. Тогава

$$f(t_5, x(t_5)) \ge f(t_5, \psi(t_5)) > f(t_5, \hat{x}(t_5)),$$

което противоречи на (114).

Случай 2.2. $\psi(t_5) < x(t_5) < \hat{x}(t_5)$. Тогава

$$f(t_5, x(t_5)) > f(t_5, \hat{x}(t_5)),$$

което противоречи отново на (114).

Тези противоречия показват, че неравенството (110) е валидно, откъдето следва (109). С това Теорема 2.1 е доказана.

Теорема 2.2. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H2.1)**.
2. $\Delta = \emptyset$, *т.е. интегралната крива* $(t, x(t))$ *не пресича кривата* $(t, \psi(t))$ *в интервала* $[0, T]$.
3. $0 \le \hat{\tau} < T$.

Тогава $x(T) - I = x(T; 0, x_0) - I > \hat{x}(T)$.

Доказателство. Доказателството на тази теорема е аналогично на това в *Случай 1* на Теорема 2.1, но за пълнота ще го приведем.

От условие 2 на Теорема 2.2 следва, че $x(t; 0, x_0) < \psi(t)$ и

$$s(t) = f(t, x(t; 0, x_0)) - f(t, x(t; 0, x_0) - I) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Означаваме $x_1 = x(\hat{\tau}; 0, x_0)$. В сила са равенствата:

$$\begin{aligned} x(T; 0, x_0) - I = x(T; \hat{\tau}, x_1) - I \quad &= x_1 + \int\limits_{\hat{\tau}}^{T} f(t, x(t; \hat{\tau}, x_1))\, dt - I\,; \\ \hat{x}(T) = x(T; \hat{\tau}, x_1 - I) \quad &= x_1 - I + \int\limits_{\hat{\tau}}^{T} f(t, x(t; \hat{\tau}, x_1 - I))\, dt \end{aligned}$$

и следователно

$$x(T; 0, x_0) - I - \hat{x}(T) = \int\limits_{\hat{\tau}}^{T} [f(t, x(t; \hat{\tau}, x_1)) - f(t, x(t; \hat{\tau}, x_1 - I))]\, dt.$$

Ще покажем, че

$$f(t,x(t;\hat\tau,x_1))-f(t,x(t;\hat\tau,x_1-I))>0,\qquad t\in(\hat\tau,T),\tag{116}$$

което подтвърждава теоремата в този случай. За $t=\hat\tau+0$, като вземем предвид първото от нерванствата (99), имаме

$$\begin{aligned}&f(\hat\tau+0,x(\hat\tau+0;\hat\tau,x_1))-f(\hat\tau+0,x(\hat\tau+0;\hat\tau,x_1-I))\\&\qquad=f(\hat\tau,x_1)-f(\hat\tau,x_1-I)=s(\hat\tau)>0.\end{aligned}$$

Да предположим, че (116) не е вярно. Това означава, че съществува точка $t_6\in(\hat\tau,T)$ такава, че

$$\begin{aligned}&f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1))-f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1-I))=0;\\&f(t,x(t;\hat\tau,x_1))-f(t,x(t;\hat\tau,x_1-I))>0,\qquad t\in(\hat\tau,t_6).\end{aligned}\tag{117}$$

От последното неравенство получаваме

$$\begin{aligned}&x(t_6;\hat\tau,x_1)-x(t_6;\hat\tau,x_1-I)\\&\qquad=x_1-x_1+I+\int\limits_{\hat\tau}^{t_6}[f(t,x(t;\hat\tau,x_1))-f(t,x(t;\hat\tau,x_1-I))]\,dt>I,\end{aligned}$$

което може да се запише още така

$$\varphi_1(t_6)<x(t_6;\hat\tau,x_1-I)<x(\tau_6;\hat\tau,x_1)-I<\psi(t_6)-I<M(t_6).$$

От монотонността на функцията $F(x)=f(t_6,x)$ в $[\varphi_1(t_6),M(t_6)]$ заключаваме, че

$$f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1-I))<f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1)-I).\tag{118}$$

От (117) и (118) се получава противоречието

$$\begin{aligned}0&=f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1))-f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1-I))\\&\qquad>f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1))-f(t_6,x(t_6;\hat\tau,x_1)-I)\\&\qquad\qquad=f(t_6,x(t_6;0,x_0))-f(t_6,x(t_6;0,x_0)-I)=s(t_6)>0.\end{aligned}$$

С това Теорема 2.2 е доказана.

2. Приложения за моделите на Verhulst и Gompertz с едно импулсно въздействие

В този параграф са разгледани най-разпространените едноимпулсни модели на лимитирана популация от вида

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(t,N), \quad t \neq \tau; \\ N(\tau+0) &= N(\tau) - I; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Общият вид на диференциалното уравнение, описващо динамиката на развитие на едновидова лимитирана популация [**ГГППР74**], е

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(r - L(N)), \tag{119}$$

където :

— r е разликата между коефициента на раждаемост и коефициента на смъртност ;

— L е функция на интензивността на лимитиране от числеността със свойствата :

· $L(0) = 0$ (при малка численост на популацията липсва лимитирането),

· $\dfrac{dL}{dN} > 0$ (лимитиращото въздействие нараства с нарастването на ръста на числеността на популацията.

При $L(N) = \gamma N$ се получава логистичния модел, а при $L(N) = \gamma \ln N$ - модела на Gompertz. Най-простите изрази за функцията $L(N)$ са :

— степенен $L(N) = \gamma N^{\alpha}$;

— логаритмичен $L(N) = \gamma \ln(\alpha N + 1)$;

— хиперболичен $L(N) = \dfrac{\alpha}{\gamma - N} - \dfrac{\alpha}{\gamma}$.

Траекториите на уравнението (119) са "S-образни криви" с една инфлексна точка, които малко се отличават от логистичната крива. Усложняването на модела, като се използват нелинейни функции L, не довежда до принципно нови резултати.

Решена е оптимизационната задача за определяне на импулсния момент τ $(0 < \tau \leq T)$ на отнемане на дадено количество I $(I > 0)$ от популационната биомаса, така че в последния момент T количеството биомаса $N(T)$ да е максимално.

2.1. Импулсни модели на Verhulst с едно ИВ.

2.1.1. *Изолирана популация в стационарна среда.* Развитието на едновидова популация с вътревидова конкуренция при наличието на лимитиращи фактори се симулира от уравнението на Verhulst (74). Ще предполагаме, че популацията е изолирана и се развива в стационарна среда, т.е. разглеждаме следната начална задача:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{r}{K}N(K-N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{120}$$

където: $N = N(t) > 0$ е популационната биомаса в момента $t \geq 0$; $K > 0$ е капацитета на популацията; $r > 0$ е репродуктивния потенциал (разликата между коефициента на раждаемост и смъртност); началното условие $N_0 \in (I, K)$; импулсното въздействие $I \in (0, \frac{K}{2})$.

Горната начална задача притежава единствено решение

$$N(t; 0, N_0) = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1}.$$

При този модел имаме

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = K, \quad t \in [0, T].$$

Условията **H2.1.1**, **H2.1.9** и **H2.1.10** следват непосредствено от вида на последните две функции.

От избора на началното условие N_0 и големината на импулсното въздействие I следват условията **H2.1.6** и **H2.1.11**.

Дясната страна на уравнението (120) има вида

$$f(t, x) = f(t, N) = f(N) = \frac{r}{K}N(K - N), \quad (t, N) \in \mathbb{D} = [0, T] \times (0, K),$$

откъдето непосредсвено се установява валидността на условията **H2.1.2** и **H2.1.7**. От равенствата

$$f(t, \varphi_1(t)) = f(t, 0) = 0 = f(t, K) = f(t, \varphi_2(t)), \quad t \in [0, T]$$

следва, че функцията f удовлетворява условията **H2.1.3** и **H2.1.4**.

Функцията $f(t, N) = f(N) = \frac{r}{K}N(K - N)$ притежава единствен максимум в интервала $(0, K)$, като аргументът, при който се достига максимума, е $N = M(t) = \frac{K}{2}$. По този начин се убеждаваме във валидността на условие **H2.1.5**.

Като вземем предвид неравенствата:

$$f(t, N) > 0 \quad \text{и} \quad f_t(t, N) = 0 \quad \text{при } (t, N) \in \mathbb{D}$$

установяваме, че условието **H2.1.8** е изпълнено за разглежданата задача.

С това заключаваме, че за задача (120) са валидни твърденията на Лема 2.4 и Теорема 2.1 или Теорема 2.2.

От Лема 2.1 се получава, че уравнението

$$g(N) = f(t, N) - f(t, N - I) = \frac{r}{K}I(K - 2N + I) = 0$$

притежава единствено решение ψ в интервала $[0, T]$, $\psi(t) = \dfrac{K + I}{2}$, $\psi \in \boldsymbol{C}\left\{[0, T], \left(\frac{K}{2}, \frac{K}{2} + I\right)\right\}$.

Уравнението $N(t;0,N_0) = \psi(t)$ притежава единствено решение τ. Действително, след като решим уравнението

$$\frac{K}{(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt}+1} = \frac{K+I}{2}$$

получаваме точния израз за τ, а именно

$$\tau = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\cdot\frac{K+I}{K-I}\right).$$

Изводите са дадени в §2.3.

2.1.2. *Изолирана популация в нестационарна среда.* Да разгледаме уравнението на Verhulst (74), като предполагаме, че средата не е постоянна, а се изменя с времето :

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{r}{K(t)}N(K(t)-N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{121}$$

където : $r > 0$ е репродуктивния потенциал ; $K(t)$ е функция, описваща капацитета на популацията при следните допълнителни ограничения :

1. $K \in \boldsymbol{C}^1\{[0,T],(0,\infty)\}$,
2. $\dfrac{dK(t)}{dt} \geq 0,\ t \in [0,T]$,
3. $$rK^2(t) - rI^2 > \frac{dK^2(t)}{dt}, \quad t \in [0,T]; \tag{122}$$

началното условие $N_0 \in \left(I, \min\limits_{t\in[0,T]} K(t)\right)$; импулсното въздействие $I \in \left(0, \min\limits_{t\in[0,T]} \frac{K(t)}{2}\right)$.

Решението на началната задача (121) е

$$N(t;0,N_0) = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + rN_0 \int\limits_0^t \frac{e^{rs}}{K(s)}\,ds}.$$

В този случай е изпълнено

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = K(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,T].$$

С изключение на условията **H2.1.8** и **H2.1.10** останалите условия от **(H2.1)** се проверяват аналогично на предходния пример, поради което ще пропуснем проверката им.

Условие **H2.1.10** е изпълнено поради факта, че

$$\varphi_2(t) = K(t); \qquad \frac{dK(t)}{dt} \geq 0, \qquad t \in [0,T].$$

Ще проверим валидността на условие **H2.1.8′**. За целта е достатъчно да е изпълнено неравенството

$$f(t,\psi(t)) + \frac{f_t(t,\psi(t)) - f_t(t,\psi(t)-I)}{f_N(t,\psi(t)) - f_N(t,\psi(t)-I)} > 0\,, \quad t \in [0,T]. \tag{123}$$

Частните производни на $f(t,x) = f(t,N)$ са:

$$f_t = \frac{rN^2}{K^2(t)}\frac{dK(t)}{dt}; \qquad f_N = \frac{r(K(t)-2N)}{K(t)}.$$

След заместване на частните производни на функцията f в (123) и след елементарни преобразования достигаме до диференциалното неравенство (122). Нека τ е решението на уравнението $N(t;0,N_0) = \psi(t)$, т.е.

$$\frac{N_0 e^{rt}}{1 + rN_0 \int\limits_0^t \frac{e^{rs}}{K(s)}\,ds} = \frac{K(t)+I}{2}.$$

По този начин достигаме до извода, че условията на Лема 2.4 и Теорема 2.1 или Теорема 2.2 са изпълнени и следователно тяхните твърдения са валидни за задачата (121).

Изводите са дадени в §2.3.

Забележка 2.3. Непосредствената проверка показва, че диференциалните неравенства за функцията K:

$$\begin{aligned} \frac{dK(t)}{dt} &\geq 0; \\ \frac{dK^2(t)}{dt} &< rK^2(t) - rI^2, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

се удовлетворяват от функцията

$$K(t) = q\sqrt{(K^2(0) - I^2)e^{rt} + I^2},$$

където константата $q > 1$. С други думи ограниченията, които са поставени за капацитета на средата са разрешими.

2.1.3. *Неизолирана популация в нестационарна среда.* Да разгледаме популация в нестационарна среда, върху развитието на която влияят и външни фактори. Адекватен модел на такава популация е следната начална задача

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{r}{K(t)}N(K(t)-N) + \varepsilon(t,N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{124}$$

където: $r > 0$ е репродуктивния потенциал; капацитетът на средата е функция $K \in \boldsymbol{C}^1\{[0,T],(0,\infty)\}$; началното условие $N_0 \in \left(I, \min\limits_{t\in[0,T]} K(t)\right)$; импулсното въздействие $I \in \left(0, \min\limits_{t\in[0,T]} \frac{K(t)}{2}\right)$; функцията $\varepsilon(t,N)$ описва непрекъснатото влияние на външните фактори при някои допълнителни ограничения:

1. $\varepsilon \in \boldsymbol{C}^1\{\mathbb{D},\mathbb{R}_+\}$, $\mathbb{D} = \{(t,N) : t \in [0,T],\, 0 < N < K(t)\}$;
2. $\varepsilon(t,0) = \varepsilon(t,K(t)) = 0$, $t \in [0,T]$;
3. $\varepsilon_N(t, \frac{K(t)}{2}) = 0$, $t \in [0,T]$ и $\varepsilon_N(t,N) \neq 0$ при $N \neq \frac{K(t)}{2}$, $t \in [0,T]$.

Като използваме факта, че коефициентът на вътревидова конкуренция $\gamma(t) = \frac{r}{K(t)}$, то разглежданото диференциално уравнение може да се запише така

$$\frac{dN}{dt} = N(r - \gamma(t)N) + \varepsilon(t, N).$$

Ще проверим валидността на условията **(H2.1)**. При този модел е изпълнено :

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = K(t) \quad t \in [0, T].$$

Условията **H2.1.1** и **H2.1.9** се проверяват непосредствено. При допълнителното предположение, че $\dfrac{dK(t)}{dt} \geq 0$ при $t \in [0, T]$ следва и условие **H2.1.10**.

Дясната страна на разглеждания модел има вида

$$\begin{aligned} f(t, x) = f(t, N) &= f(t, N) + \varepsilon(t, N) \\ &= \frac{r}{K(t)} N(K(t) - N) + \varepsilon(t, N) > 0\,, \quad (t, N) \in \mathbb{D}. \quad (125) \end{aligned}$$

Ясно е, че $f(t, N) > 0$ при $(t, N) \in \mathbb{D}$ и $f \in \boldsymbol{C}\{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}_+\}$, т.е. изпълнени са условията **H2.1.2** и **H2.1.4**.

Условие **H2.1.3** следва от ограничение 2 за функцията ε и равенствата

$$f(t, \varphi_1(t)) = f(t, 0) = 0 = f(t, K(t)) = f(t, \varphi_2(t))\,, \quad t \in [0, T]\,.$$

Тъй като за всяко $t \in [0, T]$ функцията $\varphi(N) = N(r - \gamma(t)N)$, $N \in [0, K(t)]$, достига своя единствен максимум при $N = M(t) = \dfrac{K(t)}{2}$ и като вземем под внимание ограничение 3 за функцията ε достигаме до извода, че за всяко $t \in [0, T]$ дясната страна на разглежданото уравнение $F(N) = f(t, N)$ притежава единствен максимум $M(t)$ в интервала $[0, K(t)]$. Така установихме валидността на условие **H2.1.5**.

От избора на началното условие N_0 и големината на импулсното въздействие I непосредствено следват условията **H2.1.6** и **H2.1.11**. Условието **H2.1.7** е следствие от (125) и ограничение 1 за външното въздействие ε.

Като използваме (125) и частните производни :

$$\begin{aligned} f_t(t, N) &= \frac{d\gamma(t)}{dt} N^2 + \varepsilon_t(t, N); \\ f_N(t, N) &= r - 2N\gamma(t) + \varepsilon_N(t, N), \end{aligned}$$

за израза

$$A(t, N) = f(t, N) + \frac{f_t(t, N) - f_t(t, N - I)}{f_N(t, N) - f_N(t, N - I)}$$

получаваме

$$A(t, N) = N(r - \gamma(t)N) + \varepsilon(t, N) + \frac{I(I - 2N)\frac{d\gamma(t)}{dt} + \varepsilon_t(t, N) - \varepsilon_t(t, N - I)}{\varepsilon_N(t, N) - \varepsilon_N(t, N - I) - 2\gamma(t)I}.$$

Условие **H2.1.8** следва от предположението, че $A(t, N) > 0$ при $(t, N) \in [0, T] \times [\frac{K(t)}{2}, \frac{K(t)}{2} + I]$.

По този начин достигаме до извода, че условията на Лема 2.1, Лема 2.4 и Теорема 2.1 или Теорема 2.2 са валидни за задачата (124).

Изводите са дадени в §2.3.

2.2. Импулсен модел на Gompertz с едно импулсно въздействие.

2.2.1. *Изолирана популация в стационарна среда.* Развитието на едновидова популация с вътревидова конкуренция при наличието на лимитиращи фактори се симулира от уравнението на Gompertz (75). Разглеждаме съответната начална задача:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= N(r - \gamma \ln N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{126}$$

където: $N = N(t) > 0$ е популационната биомаса в момента $t \geq 0$; $r > 0$ е репродуктивния потенциал; $\gamma > 0$ е коефициента на вътревидовата конкуренция; $K = e^{\frac{r}{\gamma}} > 0$ е капацитета на популацията; началното условие $N_0 \in (I, K)$; големината на импулсното въздействие $I \in (0, \frac{K}{e})$, $e = exp(1)$.

Началната задача (126) притежава единствено решение

$$N(t; 0, N_0) = e^{\frac{r}{\gamma}} e^{(\ln N_0 - \frac{r}{\gamma})e^{-\gamma t}} = K \left(\frac{N_0}{K}\right)^{e^{-\gamma t}}.$$

В този случай е изпълнено

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = K, \quad t \in [0, T].$$

Условията **H2.1.1**, **H2.1.9** и **H2.1.10** следват непосредствено от вида на последните две функции.

От избора на началното условие N_0 и големината на импулсното въздействие I следват условията **H2.1.6** и **H2.1.11**.

Дясната страна на уравнението на Gompertz има вида

$$f(t, x) = f(t, N) = f(N) = N(r - \gamma \ln N) > 0, \quad (t, N) \in \mathbb{D} = [0, T] \times (0, K),$$

откъдето непосредствено се установява валидността на условията **H2.1.2** и **H2.1.7**.

Като използваме факта, че $\lim\limits_{N \to 0} N \cdot \ln N = 0$, е възможно да додефинираме функцията f за $(t, N) \in [0, T] \times \{0\}$, а именно $f(t, 0) = f(0) = 0$. По този начин се удовлетворява и условие **H2.1.4**.

От равенствата

$$f(t, \varphi_1(t)) = f(t, 0) = 0 = f(t, K) = f(t, \varphi_2(t)), \quad t \in [0, T],$$

следва валидността на условие **H2.1.3**. Функцията $f(t, N) = f(N)$ притежава единствен максимум в интервала $(0, K)$, който се достига в точката $N = M(t) = \frac{K}{e}$. По този начин се убеждаваме във валидността на условие **H2.1.5**.

Като вземем предвид неравенствата

$$f(t, N) > 0 \quad \text{и} \quad f_t(t, N) = 0 \quad \text{при} \quad (t, N) \in \mathbb{D}$$

установяваме, че условие **H2.1.8** е изпълнено за разглежданата задача.

С това заключаваме, че за началната задача (126) са валидни твърденията на Лема 2.4 и Теорема 2.1 или Теорема 2.2.

От Лема 2.1 се получава, че уравнението

$$g(N) = f(t, N) - f(t, N - I) = -\gamma(N \ln N - (N - I)\ln(N - I) - I \ln K) = 0$$

има единствено решение ψ в интервала $[0, T]$, $\psi \in \boldsymbol{C}\{[0, T], (\frac{K}{e}, \frac{K}{e} + I)\}$, $\psi(t) = h^{-1}(K)$, където h^{-1} е обратната функция на

$$h(N) = \frac{N^{\frac{N}{I}}}{(N - I)^{\frac{N}{I} - 1}}.$$

Нека τ е решението на уравнението $N(t) = \psi(t)$, т.е.

$$K(N_0/K)^{exp(-\gamma t)} = \psi(t).$$

Това уравнение може да се реши само числено.

Изводите са дадени в §2.3.

2.2.2. *Изолирана популация в нестационарна среда.* Да разгледаме уравнението на Gompertz (75), като предполагаме, че средата се изменя с времето. Съответната начална здача има вида

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= N(r - \gamma(t) \ln N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{127}$$

където : $r > 0$ е репродуктивния потенциал на популацията ; $\gamma \in \boldsymbol{C}^1\{[0, T], \mathbb{R}_+\}$ е коефициента на вътревидовата конкуренция, $\dfrac{d\gamma(t)}{dt} \leq 0$ в $[0, T]$; $K(t) = e^{\frac{r}{\gamma(t)}}$ е капацитета на популацията ; $N_0 \in \left(0, \min\limits_{t \in (0,T)} K(t)\right)$ е началното условие ; $I \in \left(0, \min\limits_{t \in [0,T]} \frac{K(t)}{e}\right)$ е големината на импулсното въздействие.

Решението на горната начална задача се задава с формулата

$$N(t; 0, N_0) = exp\left[\left(exp(-\int\limits_0^t \gamma(s)\, ds)\right)\left(\ln N_0 + r\int\limits_0^t exp(\int\limits_0^s \gamma(q)\, dq)\, ds\right)\right].$$

В този случай е изпълнено

$$\varphi_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) = K(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T].$$

С изключение на условията **H2.1.8** и **H2.1.10** останалите условия от **(H2.1)** се проверяват аналогично на предходния пример, поради което ще пропуснем проверката им.

Като вземем под внимание неравенството

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]$$

за производната на функцията φ_2 получаваме оценката

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = \frac{dK(t)}{dt} = -\frac{re^{\frac{r}{\gamma(t)}}}{\gamma^2(t)} \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} \geq 0\,,$$

откъдето заключаваме, че φ_2 е монотонно растяща функция в интервала $[0,T]$, т.е. условието **H2.1.10** е изпълнено.

За частните производни на функцията $f(t,x) = f(t,N)$ имаме:

$$f_t = -\frac{d\gamma(t)}{dt} N \ln N; \qquad f_N = r - \gamma(t) - \gamma(t) \ln N,$$

откъдето за израза

$$A(t,N) = f(t,N) + \frac{f_t(t,N) - f_t(t,N-I)}{f_N(t,N) - f_N(t,N-I)}$$

получаваме

$$A(t,N) = N(r - \gamma(t) \ln N) + \frac{\frac{d\gamma(t)}{dt} \ln \frac{N^N}{(N-I)^{N-I}}}{\gamma(t) \ln \frac{N}{N-I}}.$$

Неравенството $A(t,N) > 0$ е еквивалентно на следното диференциално неравенство

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} > -\frac{\ln(N/(N-I))^N}{\ln(N^N/(N-I)^{(N-I)})} \gamma(t)[r - \gamma(t) \ln N]. \tag{128}$$

Следователно условие **H2.1.8** е изпълнено, ако (128) е валидно за $t \in [0,T]$.

При направените по-горе предположения заключаваме, че за разглежданата задача (127) са валидни твърденията на Лема 2.4 и Теорема 2.1 или Теорема 2.2.

От Лема 2.1 се получава, че уравнението

$$g(N) = f(t,N) - f(t,N-I) = -\gamma(t)(N \ln N - (N-I)\ln(N-I) - I \ln K(t)) = 0$$

има единствено решение ψ в интервала $[0,T]$, $\psi \in \boldsymbol{C}\{[0,T], (\frac{K(t)}{e}, \frac{K(t)}{e} + I)\}$, $\psi(t) = h^{-1}(K(t))$, където h^{-1} е обратната функция на

$$h(N) = \frac{N^{\frac{N}{I}}}{(N-I)^{\frac{N}{I}-1}}.$$

Нека τ е решението на уравнението $N(t;0,N_0) = \psi(t)$. Това уравнение в общия случай се решава числено.

Изводите са дадени в §2.3.

2.3. Изводи - оптимално еднократно отнемане на биомаса. Всяка една от горните моделни начални задачи без импулси може най-общо да се запише така

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(t,N); \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{129}$$

където $f(t,N)$ има конкретния аналитичен израз от (119), (120), (121), (126) или (127).

Съгласно Лема 2.1 за всяко $t \in [0, T]$ уравнението

$$g(N) = f(t, N) - f(t, N - I) = 0$$

притежава единствено решение ψ, като $\psi \in \boldsymbol{C}\{[0, T], (M(t), M(t) + I)\}$.

Да означим с $N(t; 0, N_0)$ решението на началната задача (129). Уравнението

$$N(t; 0, N_0) = \psi(t)\,, \quad t \in [0, T].$$

съгласно Лема 2.4 притежава не повече от едно решение $\tau \in [0, T]$, т.е. $\Delta = \{\tau\}$ или $\Delta = \emptyset$.

Разглеждаме съответната на (129) начална задача с едно импулсно въздействие

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(t, N)\,, \quad t \neq \hat{\tau} \in [0, T]; \\ N(\hat{\tau} + 0) &= N(\hat{\tau}) - I\,; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Означаваме с $N(t; \hat{\tau})$ решението на горната задача.

В зависимост от Δ са възможни следните два случая:

Случай 1. $\Delta = \{\tau\}$, съгласно Теорема 2.1 е изпълнено

$$N(T; \tau) > N(T; \hat{\tau})\,, \quad \tau \neq \hat{\tau},$$

т.е. в крайния момент T количеството биомаса $N(T; \tau)$ е максимално, ако се отнеме количество I в момента τ.

Случай 2. $\Delta = \emptyset$, съгласно Теорема 2.2 е изпълнено

$$N(T; 0, N_0) - I = N(T; \tau) > N(T; \hat{\tau})\,, \quad \hat{\tau} \neq T,$$

т.е. в крайния момент T количеството биомаса $N(T; 0, N_0)$ е максимално, ако се отнеме количество I в последния момент T.

3. Оптимизационни задачи с повече от едно импулсно въздействие

В този параграф са разгледани оптимизационни задачи в автономния случай за уравнение (72) с повече от едно импулсно въздействие (виж [**AD98**]). В такъв аспект условията формулирани в §1 на Глава 2 ще бъдат редуцирани. Ще казваме, че са изпълнени условията **(H2.3)** ако :

H2.3.1 $f : (\varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (0, \infty)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

H2.3.2 $f(\varphi_1) = f(\varphi_2) = 0$.

H2.3.3 $f \in C\{[\varphi_1, \varphi_2], \mathbb{R}_+\}$.

H2.3.4 Функцията f притежава единствен максимум в точката $M \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

H2.3.5 $x_0 \in (\varphi_1, M]$.

Ще преформулираме някои от резултатите, получени в предходния параграф, за автономни диференциални уравнения.

Лема 2.5. *Нека са изпълнени условията :*

1. *Валидни са условията* **H2.3.1–H2.3.4**.
2. $M \in [\varphi_1 + I, \varphi_2 - I]$, $I > 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 > 2I$.

Тогава :

1. *Уравнението*

$$g(x) = f(x) - f(x - I) = 0 \tag{130}$$

притежава единствено решение $\psi \in (M, M + I)$.

2. *Функцията* $g(x) > 0$ *при* $x \in (\varphi_1 + I, \psi)$ *и* $g(x) < 0$ *при* $x \in (\psi, \varphi_2 - I)$.

Решението на следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x) ; \tag{131}$$

$$x(0) = x_0 . \tag{132}$$

означаваме с $x(t; 0, x_0)$.

В сила е

Лема 2.6. *Нека са изпълнени условията :*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)** .
2. $M \in [\varphi_1 + I, \varphi_2 - I]$, $I > 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 > 2I$.

Тогава при достатъчно голямо T *множеството*

$$\Delta = \{t : t \in [0, T] , x(t; 0, x_0) = \psi\} ,$$

където ψ *е решението на уравнение (130) се състои от единствена точка* τ_1, *т.е.* $\Delta = \{\tau_1\}$.

Доказателство. Съгласно условие **H2.3.5** и Лема 2.5 е изпълнено $\varphi_1 < x_0 \leq M < \psi$. Да допуснем, че за всяко $T > 0$ имаме $x(T;0,x_0) < \psi$. Следователно

$$\psi > x(T;0,x_0) = x_0 + \int_0^T f(x(t;0,x_0))\,dt \geq x_0 + T \min_{[x_0,\psi]} f(x),$$

т.е.

$$T \leq (\psi - x_0)/ \min_{[x_0,\psi]} f(x)\,.$$

Последното неравенство не е валидно за всяко $T > 0$. Следователно при достатъчно големи стойности на T интегралната крива $(t, x(t;0,x_0))$ пресича правата $x = \psi$ поне веднъж.

Да предположим, че съществуват две точки $0 < \tau_1 < \tau_1^*$ такива, че

$$\psi = x(\tau_1;0,x_0) = x(\tau_1^*;0,x_0),$$

откъдето получаваме противоречието

$$\psi = x(\tau_1^*;0,x_0) = x(\tau_1;0,x_0) + \int_{\tau_1}^{\tau_1^*} f[x(t;\tau_1,x(\tau_1;0,x_0))]\,dt$$

$$> x(\tau_1;0,x_0) + (\tau_1^* - \tau_1) \min_{[M,M+I]} f(x) > x(\tau_1;0,x0) = \psi.$$

С това Лема 2.6 е доказана.

Заедно със задача (131), (132) ще изследваме и следните две начални задачи за импулсни автономни диференциални уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,, \quad t \neq \tau_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,k; \tag{133}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = -I_i\,; \tag{134}$$

$$x(0) = x_0 \tag{135}$$

и асоциираната с нея

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x})\,, \quad t \neq \hat{\tau}_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,s; \tag{136}$$

$$\Delta \hat{x}\big|_{t=\hat{\tau}_i} = -\hat{I}_i\,; \tag{137}$$

$$\hat{x}(0) = x_0, \tag{138}$$

където: $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < T$ и $0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 < \cdots < \hat{\tau}_s < T$ са импулсните моменти; $\{I_i\}_1^k$, $\{\hat{I}_i\}_1^s \subset \mathbb{R}_+$ са големините на импулсните въздействия съответно на задачите (133), (134), (135) и (136), (137), (138).

Означаваме съответно с $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ решенията на задачите (133), (134), (135) и (136), (137), (138). Изпълнени са следните равенства:

$$x(t) = \begin{cases} x(t;0,x_0), & t \in [0,\tau_1]; \\ x(t;\tau_i,x_i - I_i), & t \in (\tau_i,\tau_{i+1}],\ i = 1,2,\ldots,k-1; \\ x(t;\tau_k,x_k - I_k), & t \in (\tau_k,T], \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t;0,x_0), & t \in [0,\hat{\tau}_1]; \\ x(t;\hat{\tau}_i,\hat{x}_i - \hat{I}_i), & t \in (\hat{\tau}_i,\hat{\tau}_{i+1}],\ i = 1,2,\dots,s-1; \\ x(t;\hat{\tau}_s,\hat{x}_s - \hat{I}_s), & t \in (\hat{\tau}_s,T], \end{cases}$$

където $x(t;\tau_i,x_i - I_i)$ и $x(t;\hat{\tau}_i,\hat{x}_i - \hat{I}_i)$ са съответно решенията на задача (131) с начални точки $(\tau_i,x_i - I_i)$ и $(\hat{\tau}_i,\hat{x}_i - \hat{I}_i)$.

Валидна е следната лема.

Лема 2.7. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s = 1$.
3. $\Delta = \{\tau_1\}$.
4. $\tau_1 \neq \hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_1 \in [0,T]$.
5. $\hat{I}_1 = I_1 = I$.
6. $M \in [\varphi_1 + I, \varphi_2 - I]$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Доказателство. Съгласно Лема 2.3 решенията на задачите (133), (134), (135) и (136), (137), (138) не напускат областта $\overline{\mathbb{D}} = [0,T] \times [\varphi_1,\varphi_2]$.

Случай 1. Нека $\hat{\tau}_1 < \tau_1$. За да бъде изпълнено неравенството

$$x(T) = x(T;\tau_1,x(\tau_1) - I) > \hat{x}(T;\hat{\tau}_1,\hat{x}(\hat{\tau}_1) - I) = \hat{x}(T) \tag{139}$$

е достатъчно да установим, че

$$x(\tau_1 + 0) > \hat{x}(\tau_1).$$

От факта, че $g(x) = f(x) - f(x - I) > 0$ при $x \in [\varphi_1 + I,\psi)$ имаме

$$x(\tau_1 + 0) - \hat{x}(\tau_1) = \left[x(\hat{\tau}_1;0,x_0) + \int\limits_{\hat{\tau}_1}^{\tau_1} f(x(t))\,dt - I\right] - \left[x(\hat{\tau}_1;0,x_0) - I + \int\limits_{\hat{\tau}_1}^{\tau_1} f(\hat{x}(t))\,dt\right]$$

$$= \int\limits_{\hat{\tau}_1}^{\tau_1} [f(x(t;\hat{\tau}_1,\hat{x}(\hat{\tau}_1))) - f(x(t;\hat{\tau}_1,\hat{x}(\hat{\tau}_1) - I))]\,dt = \int\limits_{\hat{\tau}_1}^{\tau_1} g(x(t;\hat{\tau}_1,x(\hat{\tau}_1;0,x_0)))\,dt > 0,$$

с което лемата е доказана в този случай.

Случай 2. Нека $\hat{\tau}_1 > \tau_1$. В този случай неравенството (139) ще бъде изпълнено, ако установим, че

$$x(\hat{\tau}_1) > \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0).$$

Изпълнено е

$$x(\hat{\tau}_1) - \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0) = \left[x(\tau_1; 0, x_0) - I + \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(x(t))\, dt\right]$$
$$- \left[x(\tau_1; 0, x_0) + \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\hat{x}(t))\, dt - I\right]$$
$$= \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} [f(x(t; \tau_1, x(\tau_1) - I)) - f(x(t; \tau_1, x(\tau_1)))]\, dt$$
$$= \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} [f(x(t; \tau_1, \psi - I)) - f(x(t; \tau_1, \psi))]\, dt > \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} [f(\psi - I) - f(\psi)]\, dt = 0.$$

Доказателството на Лема 2.7 е завършено.

ЛЕМА 2.8. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $\Delta = \emptyset$, *т.е. интегралната крива* $(t, x(t))$ *не пресича правата с уравнение* $x = \psi$ *в интервала* $[0, T]$.
3. $0 \leq \hat{\tau} < T$.

Тогава $x(T) - I = x(T; 0, x_0) - I > \hat{x}(T)$.

От Лема 2.2 и Лема 2.6 непосредствено следва следното твърдение.

ЛЕМА 2.9. *Нека са изпълнени условията:*

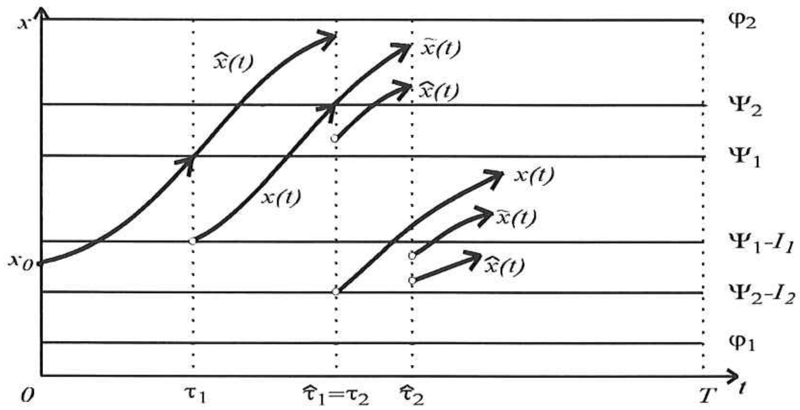
1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $0 < I_1 < I_2$.
3. $M \in [\varphi_1 + I_2, \varphi_2 - I_2]$.

Тогава:

1. *Изпълнени са неравенствата* $M < \psi_1 < \psi_2 < M + I_2$, *където* ψ_1 *и* ψ_2 *са съответно единствените решения на уравненията:*
$$g_i(x) = f(x) - f(x - I_i) = 0\,,\ i = 1, 2. \qquad (140)$$
2. *За достатъчно голямо* T *всяко едно от множествата:*
$$\Delta_1 = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_1\}\,;$$
$$\Delta_2 = \{t : t \in [\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi_1 - I_1)) = \psi_2\}$$
се състои от по една точка, т.е. $\Delta_1 = \{\tau_1\}$, $\Delta_2 = \{\tau_2\}$ *и* $\tau_1 < \tau_2$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$; $M \in [\varphi_1 + I_2, \varphi_2 - I_2]$.



ФИГУРА 2.4. $\tau_1 < \hat{\tau}_1 = \tau_2 < \hat{\tau}_2$

4. $\hat{I}_i = I_i$, $i = 1, 2$.

5. $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$; $0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 \leq T$; $\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \neq \{\tau_1, \tau_2\}$; $\{\tau_i\} = \Delta_i$, $i = 1, 2$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Доказателство. От условие 5 на теоремата следва, че имаме един от следните случаи.

Случай 1. Изпълнено е едно от следните неравенства :

(a) $\hat{\tau}_1 \leq \tau_1 < \hat{\tau}_2 \leq \tau_2$; (c) $\tau_1 \leq \hat{\tau}_1 < \tau_2 \leq \hat{\tau}_2$;

(b) $\hat{\tau}_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \hat{\tau}_2$; (d) $\tau_1 \leq \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 \leq \tau_2$.

Знакът за равенство във всяко едно от неравенства (a), (b), (c), (d) е възможен само веднъж.

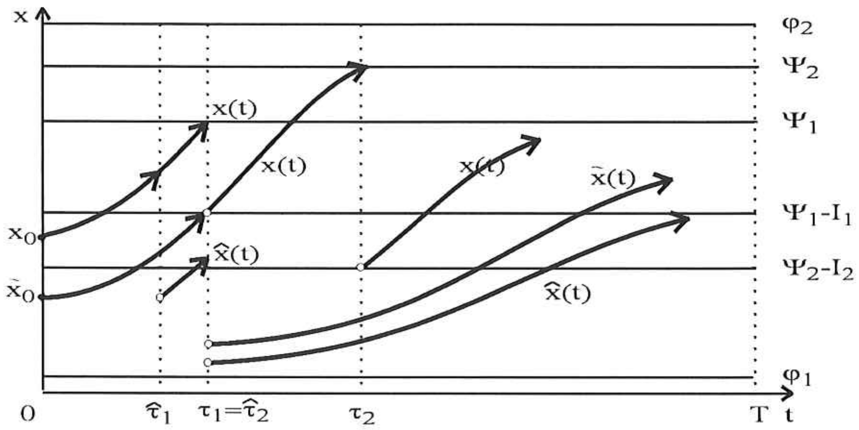
Нека T_1 удовлетворява неравенствата $\max\{\tau_1, \hat{\tau}_1\} < T_1 < \min\{\tau_2, \hat{\tau}_2\}$. Тогава от Лема 2.7 следва $x(T_1) \geq \hat{x}(T_1)$. Равенство имаме само в случая $\tau_1 = \hat{\tau}_1$. Нека $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ да е решение на задача (136), (137) с начално условие $\widetilde{x}(T_1) = x(T_1)$. От Лема 2.7 и условие 5 на теоремата следва, че $x(T) > \widetilde{x}(T)$. От друга страна е ясно, че $\widetilde{x}(T) \geq \hat{x}(T)$, защото $\widetilde{x}(T_1) = x(T_1) \geq \hat{x}(T_1)$. Следователно $x(T) > \hat{x}(T)$.

Случай 2. Да допуснем, че $\tau_1 < \hat{\tau}_1 = \tau_2 < \hat{\tau}_2$ (Фиг.2.4).

Означаваме с $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ решението на началната задача с един импулс

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{x}}{dt} &= f(\widetilde{x}), \quad t \neq \hat{\tau}_2; \\ \Delta\widetilde{x}\Big|_{t=\hat{\tau}_2} &= \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) - \widetilde{x}(\hat{\tau}_2) = -I_2; \\ \widetilde{x}(\tau_1) &= x(\tau_1 + 0) = x(\tau_1) - I_1. \end{aligned}$$

Разглеждаме решението $x(t)$ на задача (133), (134), (135) и решението $\widetilde{x}(t)$. Ясно е, че $\widetilde{x}(\tau_1) = x(\tau_1 + 0) = \psi_1 - I_1 \in (\varphi_1, M)$. За двете решения е приложима



ФИГУРА 2.5. $\hat{\tau}_1 < \tau_1 = \hat{\tau}_2 < \tau_2$

Лема 2.7, от която следва, че

$$x(T) > \widetilde{x}(T)\,. \tag{141}$$

Сега ще разгледаме решението $\hat{x}(t)$ на задачата (136), (137), (138) и решението $\widetilde{x}(t)$. Изпълнено е

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_1) = x(\hat{\tau}_1)\,. \tag{142}$$

От друга страна от Лема 2.7 следва, че

$$x(\hat{\tau}_1) > \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0) = \hat{x}(\hat{\tau}_1) - I_1. \tag{143}$$

От (142) и (143) получаваме

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_1) > \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0).$$

Следователно

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_2) > \hat{x}(\tau_2)$$

или

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) = \widetilde{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 > \hat{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 = \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0).$$

От последното неравенство получаваме, че

$$\widetilde{x}(T) = x(T;\hat{\tau}_2, \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) > x(T;\hat{\tau}_2, \hat{x}(\tau_2 + 0)) = \hat{x}(T). \tag{144}$$

Окончателно от (141) и (144) намираме, че $x(T) > \widetilde{x}(T) > \hat{x}(T)$.

Случай 3. Нека $\hat{\tau}_1 < \tau_1 = \hat{\tau}_2 < \tau_2$ (Фиг.2.5).
Означаваме

$$\widetilde{x}_0 = x(0;\tau_1, x(\tau_1 + 0)) = x(0;\tau_1, x(\tau_1) - I_1) = x(0;\tau_1, \psi_1 - I_1).$$

Ясно е, че $\widetilde{x}_0 \in (\varphi_1, x_0) \subset (\varphi_1, M)$.

Разглеждаме началните задачи с един импулс:

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(\widetilde{x}), \quad t \neq \tau_1 = \hat{\tau}_1; \qquad\qquad \frac{d\widetilde{\widetilde{x}}}{dt} = f(\widetilde{\widetilde{x}}), \quad t \neq \tau_2;$$
$$\Delta\widetilde{x}\Big|_{t=\tau_1} = -I_2; \qquad\qquad \Delta\widetilde{\widetilde{x}}\Big|_{t=\tau_2} = -I_2;$$
$$\widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \qquad\qquad \widetilde{\widetilde{x}}(0) = \widetilde{x}_0\,.$$

Решенията на тези задачи означаваме съответно с $\widetilde{x}(t)$ и $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$. От избора на началната точка $\widetilde{x}_0$ следва, че

$$x(t) = \widetilde{\widetilde{x}}(t) \ \text{ при } \ t > \tau_1 \qquad \text{и} \qquad \widetilde{x}(\tau_1) = x(\tau_1) - I_1\,,$$

откъдето заключаваме, че $x(T) = \widetilde{\widetilde{x}}(T)$.

За решенията $\widetilde{x}(t)$ и $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$ е приложима Лема 2.7, откъдето получаваме

$$\widetilde{x}(T) < \widetilde{\widetilde{x}}(T) = x(T). \tag{145}$$

За решенията $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ на задачите (133), (134), (135) и (136), (137), (138) от Лема 2.8 (крайният момент е $\tau_1 = \hat{\tau}_2$) следва неравенството

$$x(\tau_1) - I_1 > \hat{x}(\tau_1) = \hat{x}(\hat{\tau}_2),$$

откъдето достигаме до

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) = \widetilde{x}(\tau_1 + 0) = \widetilde{x}(\tau_1) - I_2 = x(\tau_1) - I_1 - I_2 > \hat{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 = \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0).$$

Накрая, като имаме предвид, че

$$\widetilde{x}(T) = x(T; \hat{\tau}_2, \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) > x(T; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) = \hat{x}(T)$$

от неравенството (145) заключаваме, че

$$x(T) > \widetilde{x}(T) > \hat{x}(T),$$

с което теоремата е доказана в този случай.

Случай 4. Имаме $\hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 \leq \tau_1 < \tau_2$. Ако $\hat{\tau}_2 = \tau_1$, то предишният случай ни дава, че $x(T) > \hat{x}(T)$. Нека $\hat{\tau}_2 < \tau_1$. Означаваме с $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ решението на задачата

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(\widetilde{x}), \quad t \neq \hat{\tau}_1\,, \tau_1;$$
$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_1 + 0) = \widetilde{x}(\hat{\tau}_1) - I_1;$$
$$\widetilde{x}(\tau_1 + 0) = \widetilde{x}(\tau_1) - I_2\,;$$
$$\widetilde{x}(0) = x_0\,.$$

От *Случай 3* имаме (виж Фиг.2.6)

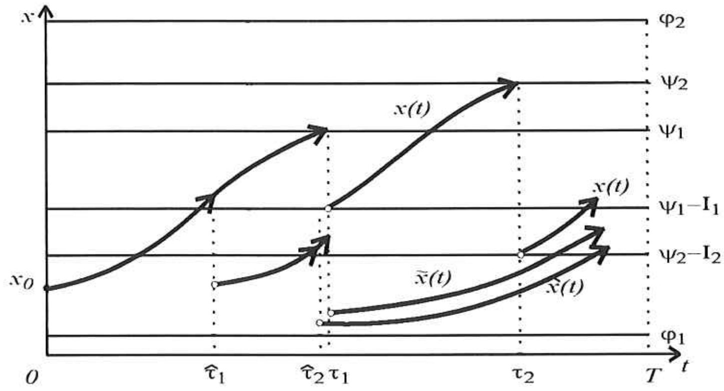
$$\widetilde{x}(T) < x(T). \tag{146}$$

Ще сравним $\widetilde{x}(T)$ и $\hat{x}(T)$. За $t \in [0, \hat{\tau}_2]$ е изпълнено $\widetilde{x}(t) = \hat{x}(t)$. За $t \in (\hat{\tau}_2, \tau_1]$ имаме

$$\widetilde{x}(t) = x(t; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2)) > x(t; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2) - I_2) = \hat{x}(t). \tag{147}$$

От Лема 2.7 следва, че $x(\tau_1 + 0) > \widetilde{x}(\tau_1)$. Освен това

$$x(\tau_1 + 0) = \psi_1 - I_1 < M. \tag{148}$$



Фигура 2.6. $\hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 < \tau_1 < \tau_2$

Следователно от (147) и (148) за $t \in (\hat{\tau}_2, \tau_1]$ получаваме

$$M > x(\tau_1 + 0) > \widetilde{x}(\tau_1) \geq \widetilde{x}(t) > \hat{x}(t).$$

От условие **H2.3.4** за $t \in (\hat{\tau}_2, \tau_1]$ имаме $f(\widetilde{x}(t)) > f(\hat{x}(t))$.

Изпълнени са следните неравенства

$$\widetilde{x}(\tau_1 + 0) = \hat{x}(\hat{\tau}_2) + \int_{\hat{\tau}_2}^{\tau_1} f(\widetilde{x}(t))\,dt - I_2 > \hat{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 + \int_{\hat{\tau}_2}^{\tau_1} f(\hat{x}(t))\,dt = \hat{x}(\tau_1).$$

За $t \in (\tau_1, T]$ намираме, че

$$\widetilde{x}(t) = x(t; \tau_1, \widetilde{x}(\tau_1 + 0)) > x(t; \tau_1, \hat{x}(\tau_1)) = \hat{x}(t)\,.$$

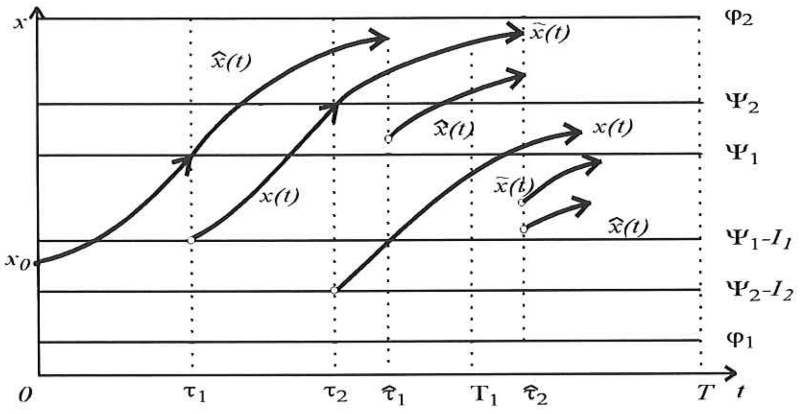
От това неравенство при $t = T$ получаваме $\widetilde{x}(T) > \hat{x}(T)$. Накрая, последното неравенство и (146) ни дават $x(T) > \hat{x}(T)$.

Случай 5. Нека $\tau_1 < \tau_2 \leq \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2$. Ако $\tau_2 = \hat{\tau}_1$, то са валидни ограниченията на *Случай 2* на доказваната теорема, откъдето следва верността на твърдението. Нека $\tau_2 < \hat{\tau}_1$ (Фиг.2.7).

Разглеждаме помощната начална задача с два импулса

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{x}}{dt} &= f(\widetilde{x}), \quad t \neq \tau_1, \hat{\tau}_2; \\ \widetilde{x}(\tau_1 + 0) &= \widetilde{x}(\tau_1) - I_1; \\ \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) &= \widetilde{x}(\hat{\tau}_2) - I_2; \\ \widetilde{x}(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{149}$$

решението на която означаваме с $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$. Ясно е, че при $t > \tau_1$ решението $x(t)$ на задачата (133), (134), (135) (с два импулса) и решението $\widetilde{x}(t)$ на задачата



Фигура 2.7. $\tau_1 < \tau_2 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2$

(149) са съответно и решения на задачите с един импулс:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq \tau_2; \qquad \frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(\widetilde{x}), \quad t \neq \hat{\tau}_2;$$

$$x(\tau_2 + 0) = x(\tau_2) - I_2; \qquad \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) = \widetilde{x}(\hat{\tau}_2) - I_2;$$

$$x(\tau_1 + 0) = \psi_1 - I_1, \qquad \widetilde{x}(\tau_1 + 0) = \psi_1 - I_1.$$

За горните две задачи е приложима Лема 2.7, откъдето заключаваме, че е валидно неравенството (146), т.е. $\widetilde{x}(T) < x(T)$.

Нека T_1 е произволна точка от интервала $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$. Като приложим Лема 2.7 за решенията $\widetilde{x}(t)$ и $\hat{x}(t)$ в интервала $[0, T_1]$ получаваме неравенството

$$\widetilde{x}(T_1) > \hat{x}(T_1),$$

откъдето следва, че

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_2) = x(\widetilde{\tau}_2; T_1, \widetilde{x}(T_1)) > x(\hat{\tau}_2; T_1, \hat{x}(T_1)) = \hat{x}(\hat{\tau}_2).$$

От горното неравенство намираме, че

$$\widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0) = \widetilde{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 > \hat{x}(\hat{\tau}_2) - I_2 = \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)$$

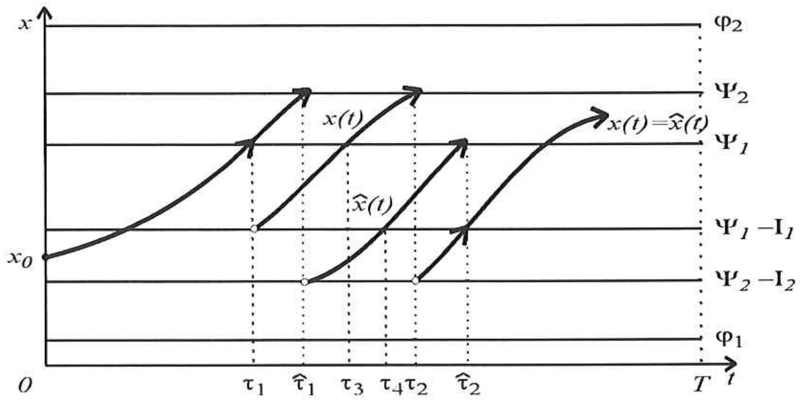
и следователно

$$\widetilde{x}(T) = x(T; \hat{\tau}_2, \widetilde{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) > x(T; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) = \hat{x}(T).$$

От (146) и последното неравенство се убеждаваме във верността на теоремата и в този случай.

Теорема 2.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$, $M \in [\varphi_1 + I_2, \varphi_2 - I_2]$.
4. $\hat{I}_1 = I_2$, $\hat{I}_2 = I_1$.
5. $\{\tau_1\} = \Delta_1$, $\{\tau_2\} = \Delta_2$.



Фигура 2.8. $\tau_1 < \hat\tau_1 < \tau_2 < \hat\tau_2$

6. $\{\hat\tau_1\} = \{t : t \in [0,T], x(t;0,x_0) = \psi_2\}$;

$\{\hat\tau_2\} = \{t : t \in (\hat\tau_1,T], x(t;\hat\tau_1,\psi_2 - I_2) = \psi_1\}$.

Тогава $x(T) = \hat x(T)$.

Доказателство. Ще използваме следните означения:

$$\begin{aligned}\{\tau_3\} &= \{t : t \in (\tau_1,\tau_2),\ x(t;\tau_1,\psi_1 - I_1) = \psi_1\};\\ \{\tau_4\} &= \{t : t \in (\hat\tau_1,\hat\tau_2),\ x(t;\hat\tau_1,\psi_2 - I_2) = \psi_1 - I_1\}.\end{aligned}$$

От условия 3-6 на теоремата получаваме неравенствата

$$\tau_1 < \hat\tau_1 < \tau_2 < \hat\tau_2\,.$$

Като използваме факта, че разглежданите уравнения са автономни, установяваме, че

$$\hat\tau_1 - \tau_1 = \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_1 = \hat\tau_2 - \tau_4.$$

Имаме (Фиг.2.8)

$$\begin{aligned}
&x(\hat\tau_2) - \hat x(\hat\tau_2 + 0)\\
&= \left[\psi_1 - I_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t))\,dt + \int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t))\,dt - I_2 + \int_{\tau_2}^{\hat\tau_2} f(x(t))\,dt\right]\\
&\qquad - \left[\psi_1 + \int_{\tau_1}^{\hat\tau_1} f(\hat x(t))\,dt - I_2 + \int_{\hat\tau_1}^{\tau_4} f(\hat x(t))\,dt + \int_{\tau_4}^{\hat\tau_2} f(\hat x(t))\,dt - I_1\right]\\
&= \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t))\,dt - \int_{\tau_4}^{\hat\tau_2} f(\hat x(t))\,dt\right] + \left[\int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t))\,dt - \int_{\tau_1}^{\hat\tau_1} f(\hat x(t))\,dt\right]
\end{aligned}$$

$$+\left[\int_{\tau_2}^{\hat\tau_2} f(x(t))\,dt - \int_{\hat\tau_1}^{\tau_4} f(\hat x(t))\,dt\right]$$

$$= \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t;\tau_1,\psi_1 - I_1))\,dt - \int_{\tau_4}^{\hat\tau_2} f(x(t;\tau_4,\psi_1 - I_1))\,dt\right]$$

$$+\left[\int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t;\tau_3,\psi_1))\,dt - \int_{\tau_1}^{\hat\tau_1} f(x(t;\tau_1,\psi_1))\,dt\right]$$

$$+\left[\int_{\tau_2}^{\hat\tau_2} f(x(t;\tau_2,\psi_2 - I_2))\,dt - \int_{\hat\tau_1}^{\tau_4} f(x(t;\hat\tau_1,\psi_2 - I_2))\,dt\right]$$

$$= \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t;\tau_1,\psi_1 - I_1))\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t+\tau_4-\tau_1;\tau_4,\psi_1 - I_1))\,dt\right]$$

$$+\left[\int_{\tau_1}^{\hat\tau_1} f(x(t+\tau_3-\tau_1;\tau_3,\psi_1))\,dt - \int_{\tau_1}^{\hat\tau_1} f(x(t;\tau_1,\psi_1))\,dt\right]$$

$$+\left[\int_{\hat\tau_1}^{\tau_4} f(x(t+\tau_2-\hat\tau_1;\tau_2,\psi_2 - I_2))\,dt - \int_{\hat\tau_1}^{\tau_4} f(x(t;\hat\tau_1,\psi_2 - I_2))\,dt\right],$$

откъдето, като имаме предвид автономността на (133), следва

$$x(\hat\tau_2) - \hat x(\hat\tau_2 + 0) = 0.$$

От това равенство заключаваме, че

$$x(T) = x(T;\hat\tau_2, x(\hat\tau_2)) = x(T;\hat\tau_2,\hat x(\hat\tau_2+0)) = \hat x(T)\,,$$

с което доказтелството на Теорема 2.4 е завършено.

Забележка 2.4. Като използваме Лемите 2.5-2.9, условията **(H2.3)** и неравенствата $0 < I_1 < I_2 < \dots < I_n$, $\varphi_1 + I_n \le M \le \varphi_2 - I_n$ получаваме:

1. Уравненията $g_i(x) = f(x) - f(x - I_i) = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, n$, притежават съответно единствени решения $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, такива че $M < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_n < M + I_n$.
2. За достатъчно голямо T всяко едно от множествата:

   $\Delta_1 = \{\tau_1\} = \{t : t \in (0,T), x(t;0,x_0) = \psi_1\}$;

   $\Delta_i = \{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1},T), x(t;\tau_{i-1},\psi_{i-1} - I_{i-1}) = \psi_i\}\,,\ i = 2, 3, \dots, n$

се състои от една точка.

Следствие 2.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s = n$.
3. $I_i > 0\,,\; i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad \varphi_1 + \max\limits_i I_i \le M \le \varphi_2 - \max\limits_i I_i$.
4. $\hat{I}_i = I_{\alpha_i}$, *където* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, *т.е.* $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ *е пермутация на първите* n *естествени числа.*
5. $\{\tau_i\} = \Delta_i\,,\; i = 1, 2, \ldots, n$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in (0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_{\alpha_1}\}$,
   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T], x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \psi_{\alpha_i - 1} - \hat{I}_{i-1}) = \psi_{\alpha_i}\}\,,\; i = 2, 3, \ldots n$.

Тогава $x(T) = \hat{x}(T)$.

Теорема 2.5. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = 2\,,\; s = 1$.
3. $I_1, I_2 > 0\,;\; M \in [\varphi_1 + \hat{I}, \varphi_2 - \hat{I}]$, *където* $\hat{I} = I_1 + I_2$.
4. $\{\tau_1\} = \Delta_1\,,\; \{\tau_2\} = \Delta_2$.
5. $\{\hat{\tau}\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}\}$,
   където $\hat{\psi}$ *е решение на уравнението* $g(x) = f(x) - f(x - \hat{I}) = 0$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Доказателство. Възможни са следните случаи.

Случай 1. $0 < \tau_1 < \tau_2 < \hat{\tau}$. Съгласно Теорема 2.4 без загуба на общността можем да предполагаме, че $I_1 > I_2$. От Лема 2.6 имаме $M < \psi_2 < \psi_1 < \hat{\psi} < M + \hat{I}$ и съответно $\hat{\psi} - \hat{I} < \psi_1 - I_1 < \psi_2 - I_2 < M$. Тогава

$$x(\hat{\tau}) = x(\hat{\tau}; \tau_2, x(\tau_2 + 0)) = x(\hat{\tau}; \tau_2, \psi_2 - I_2)$$

$$= \psi_2 - I_2 + \int\limits_{\tau_2}^{\hat{\tau}} f(x(t; \tau_2, \psi_2 - I_2))\, dt > \psi_2 - I_2 > \hat{\psi} - \hat{I} > \hat{x}(\hat{\tau} + 0)\,.$$

Следователно

$$x(T) = x(T; \hat{\tau}, x(\hat{\tau})) > x(T; \hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau} + 0)) = \hat{x}(T).$$

Това означава, че Теорема 2.5 е доказана в този случай.

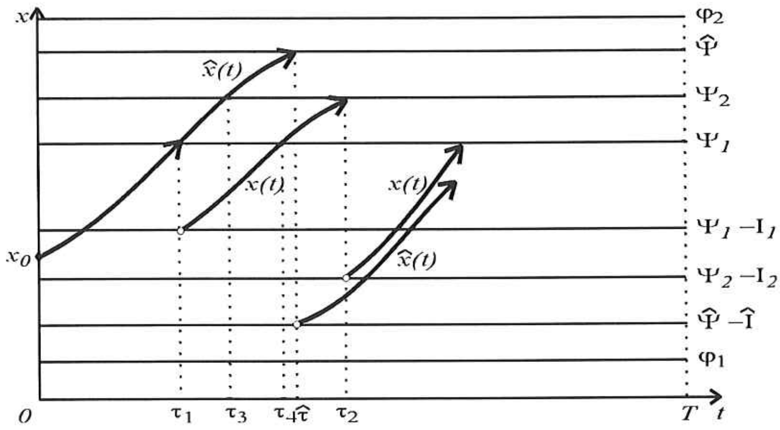
Случай 2. Нека $0 < \tau_1 < \hat{\tau} < \tau_2$ (Фиг.2.9). Съгласно Теорема 2.4 без ограничение на общността можем да считаме, че $I_1 < I_2$. Полагаме:

$$\{\tau_3\} = \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi_1) = \psi_2\}\,;$$

$$\{\tau_4\} = \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi_1 - I_1) = \psi_1\}.$$

Изпълнени са следните неравенства

$$\tau_1 < \tau_3 < \hat{\tau} < \tau_2\,.$$



ФИГУРА 2.9. $\tau_1 < \tau_3 < \hat{\tau} < \tau_2$

Да допуснем, че $\hat{x}(\tau_2) \geq \psi_2 - I_2$. Тогава, като имаме предвид, че: $\hat{x}(\hat{\tau} + 0) = \hat{\psi} - \hat{I}$, непрекъснатостта на функцията $\hat{x}$ за $t \in (\hat{\tau}, \tau_2]$ и неравенството $\hat{\psi} - \hat{I} < \psi_2 - I_2$, достигаме до извода, че съществува точка τ_5, $\hat{\tau} < \tau_5 \leq \tau_2$, такава, че $\hat{x}(\tau_5) = \psi_2 - I_2$. Автономността на разглежданите уравнения ни дава $\tau_3 - \tau_1 = \tau_2 - \tau_4$, откъдето намираме (Фиг.2.9)

$$\tau_4 - \tau_1 = \tau_2 - \tau_3 \geq \tau_5 - \tau_3 \,.$$

Накрая, получаваме

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_4} f(\hat{x}(t))\,dt > f(\psi_1)(\tau_4 - \tau_1) > f(\psi_2)(\tau_4 - \tau_1) \geq f(\psi_2)(\tau_5 - \tau_3) \\ &= f(\psi_2)(\hat{\tau} - \tau_3) + f(\psi_2 - I_2)(\tau_5 - \hat{\tau}) > \int\limits_{\tau_3}^{\hat{\tau}} f(\hat{x}(t))\,dt + \int\limits_{\hat{\tau}}^{\tau_5} f(\hat{x}(t))\,dt \\ &= (\hat{\psi} - \psi_2) + [(\psi_2 - I_2) - (\hat{\psi} - \hat{I})] = I_1 \,. \end{aligned}$$

Полученото противоречие показва, че $\hat{x}(\tau_2) < \psi_2 - I_2 = x(\tau_2 + 0)$, откъдето намираме

$$x(T) = x(T; \tau_2, x(\tau_2 + 0)) > x(T; \tau_2, \hat{x}(\tau_2)) = \hat{x}(T) \,.$$

С това теоремата е доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $1 \leq s < k$.
3. $I_i > 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, k\,;\quad \varphi_1 + \sum\limits_{i=1}^{k} I_i \leq M \leq \varphi_2 - \sum\limits_{i=1}^{k} I_i$.
4. $\{\tau_i\} = \Delta_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, k$.

5. $\hat{I}_i = \sum\limits_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} I_j$; $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $0 = k_1 < k_2 < \cdots < k_s < k_{s+1} = k$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,
   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T), x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1} - \hat{I}_{i-1}) = \hat{\psi}_i\}$, $i = 2, 3, \ldots, s$.
   Тук $\hat{\psi}_i$ *са единствените решения на уравненията* $g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Теорема 2.6. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s = 2$.
3. $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2 > 0$, $\quad \varphi_1 + \max(\hat{I}_1, \hat{I}_2) \le M \le \varphi_2 - \max(\hat{I}_1, \hat{I}_2)$.
4. $I = \frac{1}{2}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$.
5. $\{\tau_1\} = \{t :\in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi\}$,
   $\{\tau_2\} = \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi - I) = \psi\}$,
   $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,
   $\{\hat{\tau}_2\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_1, T), x(t; \hat{\tau}_1, \hat{\psi}_1 - \hat{I}_1) = \hat{\psi}_2\}$,
   където $\psi, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ *са съответно единствените решения на уравненията* $g(x) = f(x) - f(x - I) = 0$, $g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0$, $i = 1, 2$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Доказателство. Съгласно Теорема 2.4 без ограничение на общността можем да предполагаме, че $\hat{I}_1 > \hat{I}_2$. От Лема 2.9 следва, че $\hat{\psi}_2 < \psi < \hat{\psi}_1$ Полагаме:

$$\begin{aligned} \{\tau_3\} &= \{t : t \in (\tau_1, \tau_2), x(t; \tau_1, \psi - I) = \hat{\psi}_2\}; \\ \{\tau_4\} &= \{t : t \in (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2), x(t; \hat{\tau}_1, \hat{\psi}_1 - \hat{I}_1) = \psi - I\}. \end{aligned}$$

Автономността на диференциалните уравнения ни дава:

$$\tau_3 - \tau_1 = \hat{\tau}_2 - \tau_4; \qquad \tau_4 - \tau_1 = \hat{\tau}_2 - \tau_3.$$

Тъй като $I = \dfrac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2}{2} < \hat{I}_1$, то е ясно, че

$$0 < \tau_1 < \hat{\tau}_1. \tag{150}$$

Ще покажем, че

$$\tau_2 < \hat{\tau}_2. \tag{151}$$

Да допуснем противното, т.е. $\tau_2 \geq \hat{\tau}_2$. Тогава получаваме следното противоречие

$$0 = \frac{\hat{I}_1 - \hat{I}_2}{2} - \frac{\hat{I}_1 - \hat{I}_2}{2}$$

$$= \left\{ [\hat{\psi}_1 - \psi] + [(\psi - I) - (\hat{\psi}_1 - \hat{I}_1)] \right\} - \left\{ [(\hat{\psi}_2 - \hat{I}_2) - (\psi - I)] + [\psi - \hat{\psi}_2)] \right\}$$

$$< [\hat{\psi}_1 - \psi] + [(\psi - I) - (\hat{\psi}_1 - \hat{I}_1)] - [\psi - \hat{\psi}_2]$$

$$= \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\hat{x}(t))\,dt + \int_{\hat{\tau}_1+0}^{\hat{\tau}_4} f(\hat{x}(t))\,dt - \int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t))\,dt$$

$$< \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\psi)\,dt + \int_{\hat{\tau}_1+0}^{\hat{\tau}_4} f(\psi - I)\,dt - \int_{\tau_3}^{\tau_2} f(\psi)\,dt$$

$$= f(\psi)[\hat{\tau}_1 - \tau_1 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3] < f(\psi)[\tau_4 - \tau_1 - \hat{\tau}_2 + \tau_3] = 0\,.$$

От (150) и (151) следва, че е валиден един от следните два случая.

Случай 1. Изпълнено е $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2$. Тогава е валидно неравенството

$$x(\hat{\tau}_1) = x(\tau_2) - I + \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_1} f(x(t))\,dt > \psi - I > \hat{\psi}_1 - \hat{I}_1 = \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0)\,,$$

откъдето следва

$$x(T) = x(T; \hat{\tau}_1, x(\hat{\tau}_1)) > x(T; \hat{\tau}_1, \hat{x}(\hat{\tau}_1 + 0)) > \hat{x}(T)\,,$$

с което теоремата е доказана в този случай.

Случай 2. Изпълнено е $0 < \tau_1 < \hat{\tau}_1 < \tau_2 < \hat{\tau}_2$. Ако допуснем, че $x(\hat{\tau}_2) \geq \psi$, то като имаме предвид, че $\hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0) = \hat{\psi}_1 - \hat{I}_1$, веднага следва, че

$$x(\hat{\tau}_2) > \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)\,, \tag{152}$$

откъдето заключаваме, че

$$x(T) = x(T; \hat{\tau}_2, x(\hat{\tau}_2)) > x(T; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) = \hat{x}(T)\,, \tag{153}$$

с което теоремата е доказана.

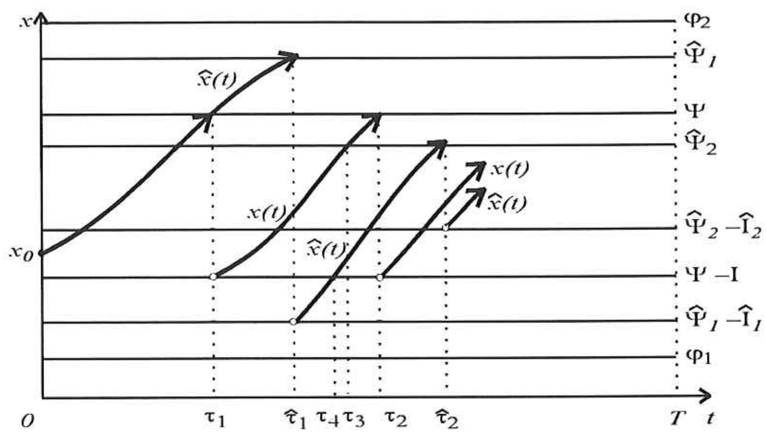
Нека $x(\hat{\tau}_2) < \psi$. Тогава е изпълнено неравенството

$$\int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(x(t))\,dt > \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(\psi - I)\,dt = f(\psi - I)(\hat{\tau}_2 - \tau_2)\,. \tag{154}$$

Като имаме предвид (154) ще покажем, че е изпълнено (152), откъдето ще следва (153), с което теоремата ще бъде доказана и в този случай.

Имаме (Фиг.2.10)

$$x(\hat{\tau}_2) - \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0) =$$



Фигура 2.10. $\tau_1 < \hat{\tau}_1 < \tau_2 < \hat{\tau}_2$

$$= \left[\psi - I + \int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t))\,dt + \int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t))\,dt - I + \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(x(t))\,dt\right]$$

$$- \left[\psi + \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\hat{x}(t))\,dt - \hat{I}_1 + \int_{\hat{\tau}_1}^{\tau_4} f(\hat{x}(t))\,dt + \int_{\tau_4}^{\hat{\tau}_2} f(\hat{x}(t))\,dt - \hat{I}_2\right]$$

$$= \left[\int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t))\,dt + \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(x(t))\,dt - \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\hat{x}(t))\,dt - \int_{\hat{\tau}_1}^{\tau_4} f(\hat{x}(t))\,dt\right]$$

$$+ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t))\,dt - \int_{\tau_4}^{\hat{\tau}_2} f(\hat{x}(t))\,dt\right] = \left[\int_{\tau_3}^{\tau_2} f(x(t;\tau_3,\hat{\psi}_2))\,dt + \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(x(t;\tau_2,\psi - I))\,dt\right]$$

$$- \left[\int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(x(t;\tau_1,\psi))\,dt + \int_{\hat{\tau}_1}^{\tau_4} f(x(t;\hat{\tau}_1,\hat{\psi}_1 - \hat{I}_1))\,dt\right]$$

$$+ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t;\tau_1,\psi - I))\,dt - \int_{\tau_4}^{\hat{\tau}_2} f(x(t;\tau_4,\psi - I))\,dt\right]$$

$$> \left[\int_{\tau_3}^{\tau_2} f(\psi)\,dt + \int_{\tau_2}^{\hat{\tau}_2} f(\psi - I)dt - \int_{\tau_1}^{\hat{\tau}_1} f(\psi)\,dt - \int_{\hat{\tau}_1}^{\tau_4} f(\psi - I)\,dt\right]$$

$$+ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t;\tau_1,\psi - I))\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_3} f(x(t + \tau_4 - \tau_1;\tau_4,\psi - I))\,dt\right].$$

Тъй като $f(\psi) = f(\psi - I)$ и $x(t; \tau_1, \psi - I) = x(t + \tau_4 - \tau_1; \tau_4, \psi - I)$ заключаваме, че

$$x(\hat{\tau}_2) - \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0) > [\tau_2 - \tau_3 + \hat{\tau}_2 - \tau_2 - \hat{\tau}_1 + \tau_1 - \tau_4 + \hat{\tau}_1] f(\psi) = 0\,.$$

От последното неравенство за $t \in (\hat{\tau}_2, T]$ намираме

$$x(t) = x(t; \hat{\tau}_2, x(\hat{\tau}_2)) > x(t; \hat{\tau}_2, \hat{x}(\hat{\tau}_2 + 0)) = \hat{x}(t)\,,$$

откъдето при $t = T$ получаваме $x(T) > \hat{x}(T)$, което трябваше да докажем.

С това теоремата е доказана.

Следствие 2.3. *Нека са изпълнени условията:*

1. *В сила са условията* **(H2.3)**.
2. $k = s$.
3. $\hat{I}_i > 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, k\,; \quad \varphi_1 + \max\limits_i \hat{I}_i \le M \le \varphi_2 - \max\limits_i \hat{I}_i$.
4. $I = \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} \hat{I}_i$.
5. $\{\tau_1\} = \{t :\in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi\}$,

   $\{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1}, T), x(t; \tau_{i-1}, \psi - I) = \psi\}\,,\ i = 2, 3, \ldots, k$,

   $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1\}$,

   $\{\hat{\tau}_i\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_{i-1}, T), x(t; \hat{\tau}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1} - \hat{I}_{i-1}) = \hat{\psi}_i\}\,,\ i = 2, 3, \ldots, k$,

   където $\psi, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_k$ *са съответно единствените решения на уравненията:* $g(x) = f(x) - f(x - I) = 0\ ,\ g_i(x) = f(x) - f(x - \hat{I}_i) = 0\,;\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

4. Приложения за моделите на Verhulst и Gompertz с n импулсни въздействия

В този параграф са разгледани най-разпространените импулсни модели, описващи динамиката на едновидова изолирана популация в стационарна среда без непрекъснато влияние на външните фактори.

Нашата основна цел е да определим:

— броя на импулсните моменти - n ;

— големините на импулсните отнемания - $I_1, I_2, \dots I_n$;

— импулсните моменти - $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$,

така, че:

$\boxed{1.}$ $I_0 \le I_i \le I$, $i = 1, 2, \dots, n$, където I_0 е минималното количество биомаса, което може да се отнеме еднократно, а I е общото количество биомаса, което трябва да се отнеме за периода [0,T].

$\boxed{2.}$ $I_1 + I_2 + \dots + I_n = I$.

$\boxed{3.}$ В последния момент T популационната биомаса $N(T)$ да бъде максимална.

Резултатите от предишния §3 са приложени върху импулсните модели на Verhulst и Gompertz.

4.1. Импулсен модел на Verhulst с n импулсни въздействия. Разглеждаме импулсния модел на Verhulst

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}N(K-N), \quad t \neq \tau_i, \; i = 1, 2, \dots, n; \tag{155}$$

$$\Delta N\big|_{t=\tau_i} = N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = -I_i; \tag{156}$$

$$N(0) = N_0 > 0, \tag{157}$$

където: $N = N(t) \ge 0$ е биомасата на популацията в момента $t \ge 0$; $r > 0$ е репродуктивния потенциал на популацията; $K > 0$ е капацитета на околната среда; $N_0 \in (0, K)$.

Решението на началната задача без импулси (155), (157) е

$$N(t; 0, N_0) = \frac{K}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1}.$$

Ще проверим валидността на условията **(H2.3)**.

В разглеждания модел имаме

$$f(x) = f(N) = \frac{r}{K}N(K-N).$$

Непосредсвено се вижда, че $f(N) > 0$ при $N \in (0, K)$ и $f(0) = f(K) = 0$. Следователно $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = K$. Освен това

$$\max_{N \in [0,K]} f(N) = f(\frac{K}{2})$$

и тази точка на максимум $M = \frac{K}{2}$ е единствена. При направените по-горе означения е ясно, че условията от **H2.3.1** до **H2.3.4** са изпълнени. При допълнителното изискване $N_0 \in (0, \frac{K}{2})$ следва и условие **H2.3.5**.

Ще предполагаме, че

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i < \frac{K}{2} \qquad \text{и} \qquad \max_i I_i \leq M \leq K - \max_i I_i \,.$$

От направените разглеждания и предположения достигаме до извода, че са валидни твърденията от предходния параграф 3 (Леми с номера от 2.5 до 2.9 и Теореми с номера от 2.3 до 2.6). По-конкретно:

— уравненията

$$g_i(N) = f(N) - f(N - I_i) = \frac{r}{K} I_i(K - 2N + I_i) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

притежават съответно единствени решения

$$\psi_i = \frac{K + I_i}{2}, \qquad \psi_i \in \left(\frac{K}{2}, \frac{K}{2} + I_i\right)\,;$$

— за достатъчно голямо T всяко едно от множествата $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ се състои от единствена точка, а именно

$$\Delta_1 \;=\; \{\tau_1\} = \left\{\frac{1}{r} ln\left(\frac{K - N_0}{N_0} \cdot \frac{K + I_1}{K - I_1}\right)\right\}, \tag{158}$$

$$\Delta_i \;=\; \{\tau_i\} = \left\{\tau_{i-1} + \frac{1}{r} ln\left(\frac{K + I_{i-1}}{K - I_{i-1}} \cdot \frac{K + I_i}{K - I_i}\right)\right\}, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,; \tag{159}$$

— за $0 < I_1 < \cdots < I_n$ решенията ψ_i удовлетворяват неравенствата $\psi_1 < \psi_2 < \cdots < \psi_n$.

Изводите са дадени в §4.3.

4.2. Импулсен модел на Gompertz с n импулсни въздействия. Разглеждаме импулсния модел на Gompertz

$$\frac{dN}{dt} \;=\; N(r - \gamma \cdot lnN)\,, \quad t \neq \tau_i\,,\; i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{160}$$

$$\Delta N\Big|_{t=\tau_i} \;=\; N(\tau_i + 0) - N(\tau_i) = -I_i\,; \tag{161}$$

$$N(0) \;=\; N_0 > 0\,, \tag{162}$$

където: $N = N(t) \geq 0$ е биомасата на популацията в момента $t \geq 0$; $r > 0$ е репродуктивния потенциал на популацията; $\gamma > 0$ е коефициент на вътревидова конкуренция; $K = e^{\frac{r}{\gamma}}$ е капацитет на околната среда за популацията; $N_0 \in (0, K)$.

Решението на началната задача без импулси (160), (162) е

$$N(t; 0, N_0) = K \cdot \left(\frac{N_0}{K}\right)^{e^{-\gamma t}} .$$

В разглеждания модел имаме

$$f(x) = f(N) = N(r - \gamma \cdot lnN) .$$

Непосредствено се вижда, че $f(N) > 0$ за $N \in (0, K)$. Дефинираме $f(0) = 0$, като използваме факта, че $\lim\limits_{N \to 0} N \cdot lnN = 0$, откъдето следва $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = K$. Освен това единственият максимум на f се достига в точката $M = \frac{K}{e}$. При направените по-горе означения е ясно, че условията **H2.3.1** до **H2.3.4** са изпълнени. При предположение, че $N_0 \in (0, \frac{K}{e})$ следва и условие **H2.3.5**.

Ще предполагаме, че

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i < \frac{K}{2} \qquad \text{и} \qquad \max_i I_i \leq M \leq K - \max_i I_i .$$

От направените разглеждания и предположения достигаме до извода, че са валидни твърденията от предходния параграф 3 (Леми с номера от 2.5 до 2.9 и Теореми с номера от 2.3 до 2.6), а именно :

— уравненията

$$g_i(N) = f(N) - f(N - I_i) = 0$$

или еквивалентните им уравнения

$$K = \frac{N^{\frac{N}{I_i}}}{(N - I_i)^{\frac{N}{I_i} - 1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

притежават съответно единствени решения $\psi_i = h^{-1}(K; I_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, където h^{-1} е обратната функция на

$$h(N; I_i) = \frac{N^{\frac{N}{I_i}}}{(N - I_i)^{\frac{N}{I_i} - 1}},$$

и $\psi_i \in \left(\frac{K}{e}, \frac{K}{e} + I_i\right)$;

— за достатъчно голямо T всяко едно от множествата $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ се състои от единствена точка, а именно :

$$\Delta_1 \;=\; \{\tau_1\} = \{t : t \in (0, T), N(t; 0, N_0) = \psi_1\} , \tag{163}$$

$$\Delta_i \;=\; \{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1}, T), N(t; \tau_{i-1}, \psi_{i-1} - I_{i-1}) = \psi_i\}, \;\; i = 2, 3, \ldots, n; \tag{164}$$

— за $0 < I_1 < \cdots < I_n$ решенията ψ_i удовлетворяват неравенствата $\psi_1 < \psi_2 < \cdots < \psi_n$.

Изразите за $\tau_i \,, i = 1, 2, \ldots, n$, се получават от (163) и (164). Освен това ще отбележим, че съответните уравнения могат да се решат само числено. Теоремите от 2.3 до 2.6 са валидни. Изводите са дадени в §4.3.

4.3. Изводи - оптимално многократно отнемане на биомаса. В резюме, като използваме полученети в §3 резултати, поставената в началото на този параграф оптимизационна задача може да се реши с помощта на следния алгоритъм :

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Пресмята се броя на импулсните моменти n, който е цялата част на дробта $\dfrac{I}{I_0}$, т.е $n = \left[\dfrac{I}{I_0}\right]$.

$\boxed{2.}$ Намират се големините на импулсните въздействия, които са равни помежду си, т.е. $I_i = \dfrac{I}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\boxed{3.}$ Определят се константите ψ_i, $\psi_i = \psi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, където ψ е единственото решение на уравнението

$$f(\psi) - f(\psi - \frac{I}{n}) = 0\,.$$

Специално за логистичния модел $\psi = \dfrac{K + \frac{I}{n}}{2}$. Правите с уравнение $N = \psi = \psi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, понататък ще наричаме управляващи.

$\boxed{4.}$ Намират се импулсните моменти τ_i :

$$\begin{aligned} \{\tau_1\} &= \{t : t \in [0, T), N(t; 0, x_0) = \psi_1\}\,; \\ \{\tau_i\} &= \{t : t \in (\tau_{i-1}, T), N(t; \tau_{i-1}, \psi_{i-1} - \frac{I}{n}) = \psi_i\}, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

За модела на Verhulst се получават следните равенства за импулсните моменти (виж също [**BD89**]) :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{r} ln \left[\frac{K - N_0}{N_0} \cdot \frac{K + \frac{I}{n}}{K - \frac{I}{n}} \right]; \\ \tau_i &= \tau_1 + (i-1) \frac{1}{r} ln \left(\frac{K + \frac{I}{n}}{K - \frac{I}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r} ln \left[\frac{K - N_0}{N_0} \cdot \left(\frac{K + \frac{I}{n}}{K - \frac{I}{n}} \right)^{2i-1} \right], \quad i = 2, 3, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

които лесно се получават от (158), (159) и равенствата $I_1 = I_2 = \cdots = I_n = \dfrac{I}{n}$.

Разглеждаме началната задача с n импулсни въздействия

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= f(N), \quad t \neq \hat{\tau}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n; \\ \Delta N\Big|_{t=\hat{\tau}_i} &= N(\hat{\tau}_i + 0) - N(\hat{\tau}_i) = -I_i; \\ N(0) &= N_0. \end{aligned}$$

Означаваме с $\hat{N}(t)$, $t \in [0, T]$, решението на горната задача, а с $N(t)$ решението на същата задача, ако $\hat{\tau}_i = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Съгласно Теореми от 2.3 до 2.6 е изпълнено

$$N(T) > \hat{N}(T)\,,$$

т.е. в крайния момент T количеството биомаса $N(T)$ е максимално, ако се отнемат равни количества $\dfrac{I}{n}$ в момените τ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Отворени проблеми. Оптимизационни задачи в монотонни по времето среди

Ще казваме, че са изпълнени условията **(H2.5)** ако:

H2.5.1 Валидни са условията **H2.1.1-H2.1.10**.

H2.5.2 За всяко $x \in \mathbb{D}$ функцията $G(t) = f(t,x)$ е монотонна по t в $[0,T]$.

H2.5.3 $x_0 \in [\varphi_1(0) + I, M(0)]$.

Разглеждаме следните начални задачи:

— начална задача без импулси

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x); \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

— начална задача с k импулса

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\ldots,k; \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = -I_i; \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

— начална задача с s импулса

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(t,\hat{x}), \quad t \neq \hat{\tau}_i, \quad i = 1,2,\ldots,s; \\ \Delta \hat{x}\big|_{t=\hat{\tau}_i} &= \hat{x}(\tau_i + 0) - \hat{x}(\tau_i) = -\hat{I}_i; \\ \hat{x}(0) &= x_0, \end{aligned}$$

аналогични съответно на задачите (131), (132); (133), (134) (135); (136) (137), (138). Решенията им означаваме съответно с $x(t;0,x_0)$, $x(t)$ и $\hat{x}(t)$.

Валидни са Леми 2.1-2.4; Теореми 2.1, 2.2; Леми 2.8, 2.9, Теорема 2.5.

Нека:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{\tau_1\} = \{t :\in [0,T), x(t;0,x_0) = \psi_1(t)\}; \\ \Delta_i &= \{\tau_i\} = \{t : t \in (\tau_{i-1},T), x(t;\tau_{i-1},\psi_{i-1} - I_{i-1}) = \psi_i(t)\}, \quad i = 2,3,\ldots,k, \end{aligned}$$

където $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ са единствените непрекъснати решения на уравненията:

$$g_i(x) = f(t,x) - f(t,x - I_i) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Хипотетично могат да се формулират следните теореми за импулсни уравнения с монотонна по времето дясна страна.

Теорема 2.7. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.5)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$, $I = I_2$, $M(t) \in [\varphi_1(t) + I_2, \varphi_2(t) - I_2]$, $t \in [0,T]$.
4. $\hat{I}_i = I_i$, $i = 1,2$.

5. $\{\tau_i\} = \Delta_i$, $i = 1, 2$.
6. $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \in [0, T]$; $\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \neq \{\tau_1, \tau_2\}$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Теорема 2.8. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **(H5)**.
2. $k = 2$, $s = 1$.
3. $I_1, I_2 > 0$; $M(t) \in [\varphi_1(t) + \hat{I}, \varphi_2(t) - \hat{I}]$, $t \in [0, T]$, *където* $\hat{I} = I = I_1 + I_2$.
4. $\{\tau_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_1(t)\}$,

$$\{\tau_2\} = \begin{cases} \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi_1(\tau_1) - I_1) = \psi_2(t)\}, \text{ ако интегралната крива} \\ (t, x(t; \tau_1, \psi_1(\tau_1) - I_1)) \text{ пресича кривата } (t, \psi_2(t)) \text{ в интервала } (\tau_1, T); \\ T, \text{ в противен случай.} \end{cases}$$

5.

$$\{\hat{\tau}\} = \begin{cases} \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}(t)\}, \text{ ако интегралната крива } (t, x(t; 0, x_0)) \\ \text{пресича кривата } (t, \hat{\psi}(t)) \text{ в интервала } [0, T); \\ T, \text{ ако } x(t; 0, x_0) \neq \hat{\psi}(t) \text{ при } t \in [0, T], \end{cases}$$

където $\hat{\psi}(t)$ *е единственото решение на уравнението* $g(x) = f(t, x) - f(t, x - \hat{I}) = 0$ *за* $t \in [0, T]$ *или* $\{\hat{\tau}\} = T$.

Тогава $x(T) > \hat{x}(T)$.

Теорема 2.9. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.5)**.
2. $k = s = 2$.
3. $0 < I_1 < I_2$, $I = I_2$, $M(t) \in [\varphi_1(t) + I_2, \varphi_2(t) - I_2]$, $t \in [0, T]$.
4. $\hat{I}_1 = I_2$, $\hat{I}_2 = I_1$.
5. $\{\tau_i\} = \Delta_i$, $i = 1, 2$.
6. $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi_2(t)\}$,
   $\{\hat{\tau}_2\} = \{t : t \in [\hat{\tau}_1, T), x(t; \hat{\tau}_1, \psi_2(\hat{\tau}_1) - I_2) = \psi_1(t)\}$.

Тогава:

1. $x(T) > \hat{x}(T)$, *ако за всяко* $x \in \mathbb{D}$ *функцията* $G(t) = f(t, x)$ *е монотонно растяща по* t *в интервала* $[0, T]$.
2. $x(T) < \hat{x}(T)$, *ако за всяко* $x \in \mathbb{D}$ *функцията* $G(t) = f(t, x)$ *е монотонно намаляваща по* t *в интервала* $[0, T]$.

Теорема 2.10. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **(H2.5)**.
2. $k = s = 2$.

3. $\hat{I}_1 > \hat{I}_2 > 0$. $M(t) \in [\varphi_1(t) + \hat{I}_1, \varphi_2(t) - \hat{I}_1]$, $t \in [0, T]$.

4. $I = \frac{1}{2}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$.

5. $\{\tau_1\} = \{t :\in [0, T), x(t; 0, x_0) = \psi(t)\}$,

   $\{\tau_2\} = \{t : t \in (\tau_1, T), x(t; \tau_1, \psi(\tau_1) - I) = \psi(t)\}$,

   $\{\hat{\tau}_1\} = \{t : t \in [0, T), x(t; 0, x_0) = \hat{\psi}_1(t)\}$,

   $\{\hat{\tau}_2\} = \{t : t \in (\hat{\tau}_1, T), x(t; \hat{\tau}_1, \hat{\psi}_1(\hat{\tau}_1) - \hat{I}_1) = \hat{\psi}_2(t)\}$,

   където за всяко $x \in \mathbb{D}$ *функциите* $\psi(t), \hat{\psi}_1(t), \hat{\psi}_2(t)$ *са съответно единствените решения на уравненията:* $g(x) = f(t, x) - f(t, x - I) = 0$, $g_i(x) = f(t, x) - f(t, x - \hat{I}_i) = 0$, $i = 1, 2$, *в интервала* $[0, T]$.

Тогава $x(T) < \hat{x}(T)$, *ако за всяко* $x \in \mathbb{D}$ *функцията* $G(t) = f(t, x)$ *е монотонно намаляваща по* t *в интервала* $[0, T]$.

Накрая, ако формулираните по-горе твърдения са вярни, то при допълнителни ограничения е възможно те да се приложат за някои модели от популационната динамика. По-точно за тези модели да се реши следната оптимизационна задача :

Задача. Да се определят :

броя на импулсните моменти - n ;

количествата на импулсните отнемания - $I_1, I_2, \ldots, I_n$;

импулсните моменти - $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$,

така че :

$\boxed{1.}$ $I_0 \leq I_i \leq I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, където I_0, I са отнапред зададени положителни константи.

$\boxed{2.}$ $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = I$.

$\boxed{3.}$ В крайния момент $T > 0$ решението на разглежданата начална задача да е максимално.

Глава 3

Оптимизационни задачи в популационната динамика на два съвместно съществуващи вида от тип жертва-хищник

В настоящата глава са разгледани импулсни аналози на класическия модел на Lotka-Volterra: една жертва-един хищник. Съобщества от тип Lotka-Volterra са разглеждани и изследвани за: непрекъсната зависимост, устойчивост, периодичност и др. от много автори ([**Vol76**], [**Пых83**], [**Gop84a**], [**Gop84b**], [**Hir85**], [**Gop92**] и др.). Главата се състои от три параграфа.

В §1 е формулирана и решена следната оптимизационна задача. Предварително е зададен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, във вътрешността на който се намира устойчивия център на системата на Lotka-Volterra. Съобществото жертва-хищник се развива по затворена траектория, която съдържа правоъгълника. На съобществото е възможно да се влияе импулсно, като се отнема биомаса от двата вида в количества, пропорционални на моментното съотношение на биомасите на тези видове. Задачата е: след еднократно минимално по обем отнемане съобществото да продължи да се развива по затворена траектория, която се съдържа в правоъгълника. За целта е необходимо да се определят момента на отнемане (по-точно точката върху затворената траектория, от която трябва да се отнемат биомасите) и големината на импулсното въздействие. Ограничението, а именно, траекторията след импулса да принадлежи на правоъгълника, е от практически съображения. По-точно, изисква се в развитието на съобществото биомасите на жертвата и хищника да бъдат ограничени от предварително зададени константи.

Решената задача е обобщена и видоизменена в няколко направления. Ще се спрем на едно от тези обобщения. Нека съобществото се развива по затворена фазова траектория γ_{c_0}, която съдържа във вътрешността си зададена област $\mathbb{G}$. Устойчивият център на системата на Lotka-Volterra принадлежи на $\mathbb{G}$. Предполагаме, че популацията от двата взаимодействащи вида представлява хомогенна биомаса. Следователно, отнеманията са пропорционални на моментното съотношение на биомасите. С други думи импулсното въздействие прехвърля точка от γ_{c_0} в посока към началото на координатната система върху друга траектория γ_{c_1} на системата на Lotka-Volterra. Задачата е: да се определят γ_{c_1} : точката $(m, M) \in \gamma_{c_0}$, от която се осъществява импулсното въздействие, и големината α на импулсното въздействие така, че $\gamma_{c_1} \subset \overline{\mathbb{G}}$ и α да е минимално. Поставените задачи могат да бъдат видоизменени, като се минимизира друг параметър на импулсната система, аналог на системата на Lotka-Volterra.

В §2 за класическата система на Lotka-Volterra е въведено понятието I-оптимална крива ξ_I. Тази крива е разположена във фазовото пространсртво на системата. Кривата ξ_I пресича всяка една от траекториите γ_c на системата на Lotka-Volterra най-много един път. Точките от ξ_I притежават следното оптимално свойство. Ако $(m, M) \in \xi_I \cap \gamma_{c_0}$, то след "скок" с големина I по посока на началото $(0, 0)$ се попада върху траектория γ_{c_1}. При това c_1 е минимално, т.е. γ_{c_1} е "най-близка" до устойчивия център. Минималността е по отношение на всички останали точки от изходната траектория γ_{c_0}, от която се извършват "импулсни скокове" (отнемания) с големина I по посока на началото на координатната система.

Установени са следните свойства на кривата ξ_I:

$\boxed{1.}$ ξ_I е непрекъсната и монотонна по координати.

$\boxed{2.}$ ξ_I е непрекъсната и монотонна по отношение на параметъра $I \in (0, \infty)$, т.е. ако I_1 е "близко" до I_2, то ξ_{I_1} е "близка" до ξ_{I_2} в смисъл на Евклидова метрика в $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{3.}$ За всяко $I \in (0, \infty)$ кривата ξ_I е асимптотично еквивалентна на правата с уравнение $M = \frac{q_1}{q_2} m$, където q_1 и q_2 са съответно коефициентите на вътревидова конкуренция за жертвата и хищника.

Класическата задача за взаимодействия от тип жертва-хищник е разгледана само за два взаимодействащи вида при следните предположения:

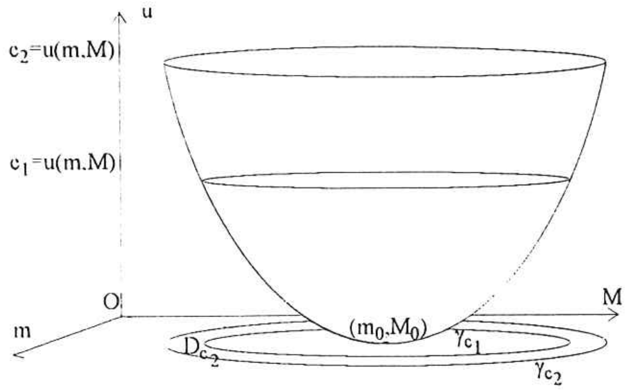
1. *Общността от два взаимодействащи вида (жертва и хищник) е изолирана.*
2. *Средата е стационарна.*
3. *При отсъствие на хищник жертвата има положителна относителна скорост на нарастване.*
4. *Хищниците се хранят само с жертви.*
5. *При отсъствие на жертва хищникът има отрицателна относителна скорост на нарастване.*
6. *Количество от жертвата, което се изяжда, е пропорционално на количеството хищник.*
7. *Ако хищникът има достатъчно запаси от храна за преживяване, той се репродуцира пропорционално на излишното количество жертва.*

Математическото описание на задачата за взаимодействия и развитие на една жертва-един хищник, основаващо се на тези ограничения, се дава със следната система диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= F_m(m, M) = m(r_1 - q_1 M); \\ \frac{dM}{dt} &= F_M(m, M) = -M(r_2 - q_2 m), \end{aligned} \tag{165}$$

където:

$m = m(t) > 0, M = M(t) > 0$ са съответно популационните биомаси на жертвата и хищника в момента $t \geq 0$;



Фигура 3.1. Интеграл на системата

— $r_1, r_2 > 0$ са съответно относителните скорости на растеж на първия вид (жертвата) и на втория вид (хищника);

— $q_1, q_2 > 0$ са съответно коефициенти на вътревидова конкуренция за жертвата и хищника.

Добре е известно, че системата (165) притежава:

— две стационарни точки: $O(0,0)$ - седлова точка, $(m_0, M_0) = \left(\frac{r_2}{q_2}, \frac{r_1}{q_1}\right)$ - устойчив център. През всяка точка от първи квадрант минава единствена затворена траектория на системата (165), която съдържа вътрешно точката (m_0, M_0);

— пръв интеграл

$$U(m, M) = q_1 M + q_2 m - r_1 \ln M - r_2 \ln m + U_0, \tag{166}$$

където

$$U_0 = r_1(\ln \frac{r_1}{q_1} - 1) + r_2(\ln \frac{r_2}{q_2} - 1).$$

Забележка 3.1. Следните твърдения са очевидни:

1. $U(m, M) > 0$ за всяка точка $(m, M) \in [(0, \infty) \times (0, \infty)] \setminus \{(m_0, M_0)\}$.
2. $U(m_0, M_0) = 0$.
3. За всяка константа $c > 0$ множеството

$$\mathbb{D}_c = \{(m, M) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : U(m, M) < c\}$$

е едносвързана област с гладък контур

$$\partial \mathbb{D}_c = \gamma_c = \{(m, M) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : U(m, M) = c\}.$$

4. Ако $0 < c_1 < c_2$, то $\gamma_{c_1} \subset \mathbb{D}_{c_2}$ (Фиг.3.1).

Ще казваме, че траекторията γ_{c_1} е "по-близка" ("по-отдалечена") от устойчивия център (m_0, M_0) относно траекторията γ_{c_2}, ако $0 < c_1 < c_2$ ($c_1 > c_2$).

1. Оптимизационни задачи с едно импулсно въздействие за модела на Lotka-Volterra

Ще използваме следните условия **(H3.1)** :

H3.1.1 $\emptyset \neq \mathbb{G} \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$ е едносвързана област.

H3.1.2 $\partial\mathbb{G} = \{(m, M) : m = \varphi_m(t), M = \varphi_M(t), t \in [t_1, t_2]\}$,

$\varphi_m, \varphi_M \in \mathrm{C}^1\{[t_1,t_2],(0,\infty)\}$, $(\varphi_m(t_1), \varphi_M(t_1)) = (\varphi_m(t_2), \varphi_M(t_2))$,

$(\varphi'_m(t))^2 + (\varphi'_M(t))^2 > 0$ за $t \in [t_1, t_2]$.

H3.1.3 $(m_0, M_0) \in \mathbb{G}$.

H3.1.4 $c_0 \in (0,\infty)$ е константа, такава че $\max\limits_{t\in[t_1,t_2]} U(\varphi_m(t), \varphi_M(t)) \leq c_0$.

H3.1.5 γ_{c_0} е траектория на системата (165), такава че

$$\gamma_{c_0} = \{(m, M) : U(m, M) = c_0\}.$$

Означаваме с $\mathbb{D}_{c_0}$ вътрешността на γ_{c_0}, която съдържа устойчивия център на системата (165).

Забележка 3.2. Очевидно е, че съществуват точки $(m, M) \in \gamma_{c_0}$, такива че за всяка константа c_1 може да се намери константа $\alpha = \alpha(m, M, c_1) \in \mathbb{R}$, такава че $U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1$, т.е. $(m - \alpha m, M - \alpha M) \in \gamma_{c_1}$.

Ще разгледаме следната задача. При ограниченията на условията **(H3.1)** да се намерят :

— траектория γ_{c_1}, която изцяло се съдържа в областта $\overline{\mathbb{G}} = \mathbb{G} \cup \partial\mathbb{G}$ и е максимално отдалечена от центъра на системата ;

— точка $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$;

— константа $\alpha^* \geq 0$,

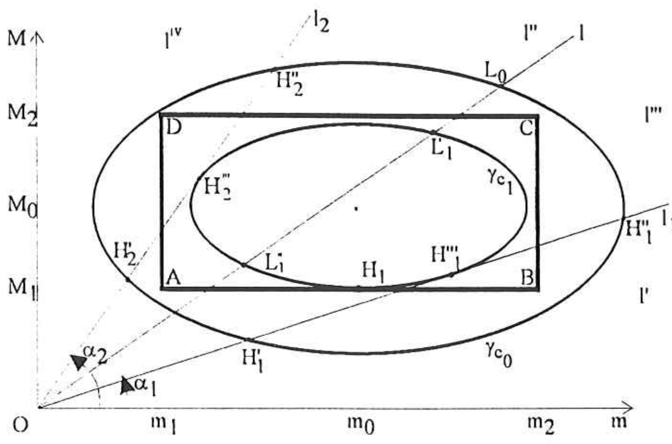
такива че $\alpha^* = \alpha(m^*, M^*, c_1) = \min\limits_{(m,M)\in\gamma_{c_0}} \alpha(m, M, c_1)$.

Забележка 3.3. Ако областта $\mathbb{G} \not\subset \mathbb{D}_{c_0}$, то поставената задача може да се формулира по следният начин. Нека $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_{c_0}$. Ясно е, че $\mathbb{G}_1$ удовлетворява условията **H3.1.1**, **H3.1.3**, **H3.1.4**, **H3.1.5**. Условието **H3.1.2** е валидно почти навсякъде с изключение на точките от $\partial\mathbb{G} \cap \gamma_{c_0}$ и $\alpha^* = 0$. Като използваме този факт, е възможно задачата да се преформулира и за множеството $\mathbb{G}_1$.

Големината на импулсното въздействие е пропорционална на биомасите на жертвата и хищника в съобществото в момента на въздействие t. Оттук нататък ще предполагаме, че върху дадената двувидова популация се въздейства само като се отнема от хомогенната ѝ биомаса, т.е. $\alpha(m, M, c_1) \geq 0$.

Поставената задача ще решим в следния конкретен случай. Ще разгледаме съобщество от тип жертва и хищник с минимално и максимално допустими стойности за техните количества биомаси. В този случай областта $\mathbb{G}$ е правоъгълник.

Нека m_1, m_2, M_1, M_2 са минималните и максимални количества биомаса за жертвата и хищника, съответно. Нека $ABCD$ е правоъгълник с върхове $A(m_1, M_1)$, $B(m_2, M_1)$, $C(m_2, M_2)$, $D(m_1, M_2)$.



ФИГУРА 3.2. Област $\mathbb{G} \equiv_{\sqsubset\sqsupset} ABCD$

В този конкретен случай на областта $\mathbb{G}$ условията **Н3.1.1-Н3.1.5** се преформулират така:

Н3.1.6 $(m_0, M_0) \in [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]$.

Н3.1.7 $c_0 \in (0, \infty)$ е константа, такава че $\max\limits_{i,j=1,2} U(m_i, M_j) \leq c_0$.

Н3.1.8 γ_{c_0} е траектория на системата (165), такава че $U(m, M) = c_0$.

Тъй като за всяко $c_0 \in (0, \infty)$ множеството $\mathbb{D}_{c_0}$ е изпъкнало, то като използваме условието **Н3.1.7** стигаме до извода, че $[m_1, m_2] \times [M_1, M_2] \subset \overline{\mathbb{D}}_{c_0}$.

Ще решим следната задача. При ограничения на условията **Н3.1.6, Н3.1.7, Н3.1.8** да се намерят:

— положителна константа c_1, такава че:

$$c_1 = \max\{c \in \mathbb{R}_+ : \gamma_c \subset [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]\};$$

— точка $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$, такава че

$$\alpha^* = \alpha(m^*, M^*, c_1) = \min_{(m,M)\in\gamma_{c_0}} \alpha(m, M, c_1) \geq 0;$$
$$U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1, \text{ т.е. } (m - \alpha m, M - \alpha M) \in \gamma_{c_1}$$

(виж Фиг.3.2).

Поставената задача решаваме алгоритмично в следната последователност.

$\boxed{1.}$ Определяне на траекторията γ_{c_1}. Валидна е следната лема.

ЛЕМА 3.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* (**Н3.1**).
2. $c_1 = \max\{c \in (0, \infty) : \gamma_c \subset \overline{\mathbb{G}}\}$, $\gamma_c = \{(m, M) : U(m, M) = c\}$.

Тогава $c_1 = \min\limits_{t\in[t_1,t_2)} U(\varphi_m(t), \varphi_M(t))$.

Доказателството на тази лема следва от следните факти:

— ако $c_1 = \min\limits_{t\in[t_1,t_2)} U(\varphi_m(t), \varphi_M(t))$, то $\gamma_{c_1} \subset \overline{\mathbb{G}}$;

— ако $c_2 > c_1$, то $\gamma_{c_2} \not\subset \overline{\mathbb{G}}$.

Лема 3.2. *Нека са валидни следните условия:*

1. *Изпълнени са условията* **H3.1.6, H3.1.7, H3.1.8**.
2. $c_1 = \max\{c \in (0, \infty) : \gamma_c \subset [m_1, m_2] \times [M_1, M_2]\}$.

Тогава $c_1 = \min\{U(m_0, M_1), U(m_0, M_2), U(m_1, M_0), U(m_2, M_0)\}$.

Доказателство. Ясно е, че траекторията γ_{c_1} вътрешно се допира до поне една от правите: $l'(A, B \in l')$, $l''(B, C \in l''), l'''(C, D \in l'''), l^{iv}(D, A \in l^{iv})$ (Фиг.3.2). Ще определим траекториите $\gamma_{c_1'}, \gamma_{c_1''}, \gamma_{c_1'''}, \gamma_{c_1^{iv}}$ на системата (165), които се допират съответно до правите l', l'', l''', l^{iv}.

Тъй като уравнението на правата l' е $M = M_1$, то за точката (m, M_1) от траекторията $\gamma_{c_1'}$ имаме

$$\frac{dM}{dt}|_{M=M_1} = F_M(m, M_1) = 0.$$

Уравнението $F_M(m, M_1) = 0$ се удовлетворява за $m = m_0$, откъдето следва, че допирната точка на $\gamma_{c_1'}$ с l' е точката $H_1(m_0, M_1)$. Това ни дава $c_1' = U(m_0, M_1)$. По-подобен начин намираме $c_1'' = U(m_2, M_0)$, $c_1''' = U(m_0, M_2)$, $c_1^{iv} = U(m_1, M_0)$.

Очевидно е, че търсената траектория γ_{c_1} е "най-вътрешна" от траекториите $\gamma_{c_1'}$, $\gamma_{c_1''}$, $\gamma_{c_1'''}$, $\gamma_{c_1^{iv}}$.

Следователно $c_1 = \min(c_1', c_1'', c_1''', c_1^{iv})$, с което доказателството на Лема 3.2 е завършено.

$\boxed{2.}$ Определяне на множеството от допустими точки от γ_{c_0} за прилагане на импулсното въздействие.

Дефиниция 3.1. Нека е изпълнено:

1. γ_{c_0} и γ_{c_1} са затворени траектории на задачата (165).
2. $\gamma_{c_1} \subset \mathbb{D}_{c_0}$.
3. Точката $(m, M) \in \gamma_{c_0}$ и съществува константа $\alpha = \alpha(m, M) > 0$ такава, че точката $((1-\alpha)m, (1-\alpha)M) \in \gamma_{c_1}$.

Тогава (m, M) се нарича допустима точка на γ_{c_0} относно γ_{c_1}.

С други думи една точка от γ_{c_0} е допустима за прилагане на импулсното въздействие относно γ_{c_1}, ако от тази точка е възможно да се "достигне" до траекторията γ_{c_1} чрез импулсно въздействие (импулсен скок), насочено към началото на координатната система.

За да намерим допустимите точки извършваме следното.

Нека l_1 и l_2 са тангентите от началото на координатната система към затворената крива γ_{c_1}, $l_1 \cap l_2 = O(0, 0)$. Нека тези тангенти притежават съответно уравнения $M = k_1 m$ и $M = k_2 m$, $k_1 < k_2$. Полагаме $\{H_1', H_1''\} = l_1 \cap \gamma_{c_0}$ и $\{H_2', H_2''\} = l_2 \cap \gamma_{c_0}$, където H_1' е между O и H_1'', и H_2' е между O и H_2'' (Фиг.3.2). Множеството от допустими точки съвпада с дъгата $H_1''H_2''$ на траекторията γ_{c_0}, която лежи във вътрешността на острия ъгъл $H_1''OH_2''$. Означаваме това множество от точки с $\Delta\gamma$.

Ще използваме следната лема за намиране на ъгловите коефициенти k_1 и k_2 на правите l_1 и l_2.

ЛЕМА 3.3. *Нека са изпълнени условията Лема 3.2.*
Тогава $k_1 = \min\left\{\frac{M_1'''}{m_1'''}, \frac{M_2'''}{m_2'''}\right\}$ *и* $k_2 = \max\left\{\frac{M_1'''}{m_1'''}, \frac{M_2'''}{m_2'''}\right\}$, *където* $\{(m_1''', M_1'''); (m_2''', M_2''')\}$ *е решение на системата*

$$U(m, M) = c_1; \qquad \frac{m}{F_m(m, M)} = \frac{M}{F_M(m, M)}. \tag{167}$$

Доказателство. Нека $H_1'''(m_1''', M_1''') = \gamma_{c_1} \cap l_1$ и $H_2'''(m_2''', M_2''') = \gamma_{c_1} \cap l_2$ (Фиг.3.2). Ясно е, че:

$$U(m_1''', M_1''') = c_1; \qquad U(m_2''', M_2''') = c_1. \tag{168}$$

От друга страна направлението на полето на системата (165) съвпада в точките H_1''' и H_2''' с тангентите през тези две точки към траекторията γ_{c_1}. Следователно:

$$\frac{M_1'''}{m_1'''} = \frac{F_M(m_1''', M_1''')}{F_m(m_1''', M_1''')}; \qquad \frac{M_2'''}{m_2'''} = \frac{F_M(m_2''', M_2''')}{F_m(m_2''', M_2''')}. \tag{169}$$

От (168) и (169) получаваме, че (m_1''', M_1''') и (m_2''', M_2''') са решения на системата (167). По този начин доказателството на Лема 3.3 е завършено.

$\boxed{3.}$ Определяне на точката $(m^*, M^*) \in \Delta\gamma$ и големината на импулсното въздействие α^*. Търсената точка (m^*, M^*) и големината на импулсното въздействие α^* трябва да удовлетворяват условията:

1. $(m^*, M^*) \in \Delta\gamma$.
2. $(m^* - \alpha^* m^*, M^* - \alpha^* M^*) \in \gamma_{c_1}$.
3. $\alpha^* = \min\limits_{(m,M)\in\Delta\gamma} \alpha(m, M, c_1) \geq 0$, където $U(m - \alpha m, M - \alpha M) = c_1$.

В сила е следната теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Нека са изпълнени условията на Лема 3.2.*
Тогава:

1. $\alpha^* = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$, *където* $f(k) = (m_{c_0}(k) - m_{c_1}(k))\sqrt{1+k^2}$, $m_{c_0}(k)$ *и* $m_{c_1}(k)$ *са съответно решенията на уравненията* $U(m, km) = c_0$ *и* $U(m, km) = c_1$;
2. $(m^*, M^*) = (m_{c_0}(k^*), k^* m_{c_0}(k^*))$, *където* k^* *се определя от равенството* $f(k^*) = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$.

Доказателство.

1. Нека l е права с уравнение $M = km$, $k_1 \leq k \leq k_2$ (Фиг.3.2). Полагаме $L_0(m_{c_0}(k), M_{c_0}(k)) = l \cap \Delta\gamma$, $\{L_1'(m_{c_1}'(k), M_{c_1}'(k)), L_1''(m_{c_1}''(k), M_{c_1}''(k))\} = l \cap \gamma_{c_1}$. Нека освен това $(m_{c_1}')^2 + (M_{c_1}')^2 > (m_{c_1}'')^2 + (M_{c_1}'')^2$, т.е. точката L_1' е по-отдалечена отколкото L_1'' спрямо началото на координатната система.

Очевидно е, че:

$$M_{c_0}(k) = km_{c_0}(k); \qquad M_{c_1}(k) = km_{c_1}(k);$$
$$U(m_{c_0}(k), km_{c_0}(k)) = c_0; \qquad U(m_{c_1}(k), km_{c_1}(k)) = c_1.$$

Нещо повече, изпълнено е

$$\alpha^* = \min_{k\in[k_1,k_2]} |L_0L_1'| = \min_{k\in[k_1,k_2]} \sqrt{(m_{c_0}(k) - m'_{c_1}(k))^2 + (M_{c_0}(k) - M'_{c_1}(k))^2}$$
$$= \min_{k\in[k_1,k_2]} \left(m_{c_0}(k) - m'_{c_1}(k)\right)\sqrt{1+k^2} = \min_{k\in[k_1,k_2]} f(k).$$

Доказателството на твърдение 2 е тривиално.

Пример 3.1. Разглеждаме системата (165) при $r_1 = r_2 = q_1 = q_2 = 1$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \dot m = F_m(m, M) = m(1-M); \\ \frac{dM}{dt} &= \dot M = F_M(m, M) = -M(1-m). \end{aligned} \tag{170}$$

Системата (170) има устойчив център $(m_0, M_0) = (1, 1)$ и пръв интеграл

$$U(m, M) = M + m - \ln M - \ln m - 2.$$

Нека $m_1 = 0.5$, $m_2 = 2$, $M_1 = 0.5$, $M_2 = 1.5$ са съответно минималните и максималните допустими количества биомаса за жертвата и хищника. Правоъгълникът $ABCD$ има върхове $A(m_1, M_1)$, $B(m_2, M_1)$, $C(m_2, M_2)$, $D(m_1, M_2)$ ($A(0.5, 0.5)$, $B(2, 0.5)$, $C(2, 1.5)$, $D(0.5, 1.5)$).

Константата $c_0 = 1$ е избрана така че

$$c_0 > \max\{U(m_1, M_1), U(m_2, M_1), U(m_2, M_2), U(m_1, M_2)\}$$
$$= \max\{\ln 4 - 1, 0.5, 1.5 - \ln 3, \ln 4 - \ln 3\} = 0.5.$$

Очевидно е, че Лема 3.2, Лема 3.3 и Теорема 3.1 са валидни. Като приложим Лема 3.2 намираме

$$c_1 = \min\{c_1', c_1'', c_1''', c_1^{\prime v}\}$$
$$= \min\{\ln 2 - 0.5, 1 - \ln 2, 0.5 - \ln 3 + \ln 2, \ln 2 - 0.5\} = 0.5 - \ln 1.5.$$

Ограниченията на разглеждания пример трансформират системата (167) в система

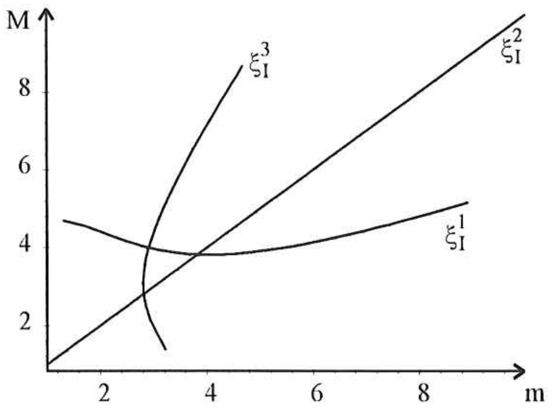
$$M + m - \ln M - \ln m - 2 = 0.5 - \ln 3 + \ln 2;$$
$$\frac{1}{1-M} = \frac{-1}{1-m}$$

с решения $m_1''' = 1 + \sqrt{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$, $M_1''' = 1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$, $m_2''' = 1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$, $M_2''' = 1 + \sqrt{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$. Следователно ъгловите коефициенти на тангентите l_1 и l_2 са $k_1 = \frac{M_1'''}{m_1'''} \approx 0.538$ и $k_2 = \frac{M_2'''}{m_2'''} \approx 1.859$.

Теорема 3.1 ни дава $\alpha^* = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$, където $f(k) = (m_{c_0}(k) - m_{c_1}(k))\sqrt{1+k^2}$, $m_{c_0}(k)$ и $m_{c_1}(k)$ са съответно решения на уравненията:

$$m + km - 2\ln m - \ln k - 2 = 1;$$
$$m + km - 2\ln m - \ln k - 2 = 0.5 - \ln 3 + \ln 2\,.$$

Следователно, точката на импулсното въздействие е $(m^*, M^*) = (m_{c_0}(k^*), k^* m_{c_0}(k^*))$, където $f(k^*) = \min\limits_{k\in[k_1,k_2]} f(k)$. Числените решения са $k^* = 1$, $m^* \approx 2.358$, $M^* \approx 1.34$ и $\alpha^* = f(k^*) \approx 1.44$.



Фигура 3.3. $\xi_I^1 : \frac{r_1}{r_2} > (\frac{q_1}{q_2})^2, \quad \xi_I^2 : \frac{r_1}{r_2} = (\frac{q_1}{q_2})^2, \quad \xi_I^3 : \frac{r_1}{r_2} < (\frac{q_1}{q_2})^2$

2. Оптимизационни задачи с n импулсни въздействия за модела на Lotka-Volterra

Основните разглеждания и резултати в настоящия параграф са свързани с намирането и изследването на една специална крива ξ_I, наречена I-оптимална крива за системата (165), която е разположена във фазовото пространство на същата система. Ще отбележим, че тази крива се изменя в зависимост от големината на константата $I > 0$, т.е. кривите ξ_I представляват еднопараметрично семейство с параметър I.

Ще предполагаме, че $I > 0$ е фиксирана константа.

Дефиниция 3.2. Нека :

1. $c_I = U\left(m_0\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right), M_0\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right)\right)$, където (m_0, M_0) са координатите на устойчивия център на системата на Lotka-Volterra.

2. За всяко $c \geq c_I$ функциите $m = m(c, I)$, $M = M(c, I)$ са решения на задачата за условен минимум :

$$\min\left\{U\left(m\left(1 - \frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right), M\left(1 - \frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right)\right); \quad U(m, M) = c\right\}. \quad (171)$$

Тогава кривата

$$\xi_I = \{(m, M) : m = m(c, I), M = M(c, I), c \geq c_I\}$$

ще наричаме I-оптимална крива (Фиг.3.3).

Забележка 3.4. Като вземем под внимание вида на първия интеграл (166), и след като въведем означението

$$G(m, M, I) = -\frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}(Mq_1 + mq_2) - (r_1 + r_2)ln\left(1 - \frac{I}{\sqrt{m^2+M^2}}\right),$$

то задачата за условен минимум (171) може да формулираме по следния начин:

$2'$ *За всяко* $c \geq c_I$ *да се намерят решенията на задачата за условен минимум*

$$\min\{G(m,M,I)+U(m,M); \quad U(m,M)=c\},$$

т.е.

$$\min\{G(m,M,I); \quad U(m,M)=c\}.$$

Забележка 3.5. По-нататък за удобство ще преминем към полярни координати. Първият интеграл на системата (165) придобива вида

$$W(\rho,\theta)=U(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho A(\theta)-(r_1+r_2)\ln\rho-r_1\ln\sin\theta-r_2\ln\cos\theta+U_0,$$

където: $\rho>0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $A(\theta)=q_1\sin\theta+q_2\cos\theta$ и $U_0=r_1(\ln\dfrac{r_1}{q_1}-1)+r_2(\ln\dfrac{r_2}{q_2}-1)$.

В полярни координати кривата ξ_I има вида

$$\xi_I=\{(\rho,\theta):\rho=\rho(\theta;c,I),\theta=\theta(c,I),c\geq c_I\},$$

където $\rho(\theta;c,I)$ и $\theta(c,I)$ за всяко $c\geq c_I$ са решения на задачата за условен минимум

$$\begin{aligned}\min\{G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,I); &\quad U(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=c\}\\ =\min\{H(\rho,\theta,I); &\quad W(\rho,\theta)=c\}\\ =\min\left\{-IA(\theta)-(r_1+r_2)ln\left(1-\frac{I}{\rho}\right);\right. &\left.\quad W(\rho,\theta)=c\right\},\end{aligned}\tag{172}$$

където: $H(\rho,\theta,I)=G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, $\rho>0$ и $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Забележка 3.6. Очевидно е, че през всяка точка на кривата ξ_I минава точно една траектория на системата (165).

За всяко фиксирано $c\geq c_I$ от условието $W(\rho,\theta)=c$ определяме ρ като неявна функция на θ, т.е. $\rho=\rho(\theta;c,I)$. Въвеждаме функцията $h:(0,\frac{\pi}{2})\longrightarrow\mathbb{R}_+$ съгласно равенството

$$h(\theta)=H(\rho(\theta;c,I),\theta,I).$$

За да намерим I-оптималната крива ξ_I е необходимо за всяко $c\geq c_I$ да извършим следното:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Да се намери

$$\rho'(\theta;c,I)=-\frac{W_\theta(\rho,\theta)}{W_\rho(\rho,\theta)},$$

където:

$$W_\rho(\rho,\theta)=\frac{\partial W(\rho,\theta)}{\partial\rho}=A(\theta)-\frac{r_1+r_2}{\rho};$$

$$W_\theta(\rho,\theta)=\frac{\partial W(\rho,\theta)}{\partial\theta}=\rho A'(\theta)-r_1\cot\theta+r_2\tan\theta.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Да се реши системата

$$h'(\theta)=H_\rho(\rho,\theta,I)\rho'(\theta;c,I)+H_\theta(\rho,\theta,I)=0;\tag{173}$$

$$W(\rho,\theta)=c,\tag{174}$$

която е еквивалентна на системата

$$H_\rho(\rho,\theta,I)W_\theta(\rho,\theta) - H_\theta(\rho,\theta,I)W_\rho(\rho,\theta) = 0; \tag{175}$$

$$W(\rho,\theta) = c, \tag{176}$$

където :

$$H_\rho(\rho,\theta,I) = \frac{\partial H(\rho,\theta,I)}{\partial \rho} = -\frac{I(r_1+r_2)}{\rho(\rho-I)};$$
$$H_\theta(\rho,\theta,I) = \frac{\partial H(\rho,\theta,I)}{\partial \theta} = -IA'(\theta).$$

Непосредствените пресмятания показват, че уравнението (175) дава възможност да се изрази ρ чрез θ. За целта е необходимо да се реши уравнението

$$\rho^2 - \left(I + \frac{2(r_1+r_2)}{A(\theta)}\right)\rho + \frac{r_1+r_2}{A(\theta)A'(\theta)}\left(IA'(\theta) + r_1\cot\theta - r_2\tan\theta\right) = 0. \tag{177}$$

Получаваме следните две решения на уравнението (177) :

$$\rho_1(\theta,I) = \frac{I}{2} + \frac{r_1+r_2}{A(\theta)} + \sqrt{D(\theta,I)}; \qquad \rho_2(\theta,I) = \frac{I}{2} + \frac{r_1+r_2}{A(\theta)} - \sqrt{D(\theta,I)},$$

където

$$D(\theta,I) = \frac{I^2}{4} + \frac{r_1+r_2}{A(\theta)}\left(\frac{r_1+r_2}{A(\theta)} - \frac{r_1\cot\theta - r_2\tan\theta}{A'(\theta)}\right).$$

$\boxed{3.}$ Да се намерят тези θ, за които $\rho_1(\theta,I)$ и $\rho_2(\theta,I)$ са реални, т.е. $D(\theta,I) \geq 0$. При големи стойности на параметъра I последното неравенство е валидно. Ще отбележим, че при достатъчно малко I за да е изпълнено неравенството $D(\theta) \geq 0$ е необходимо

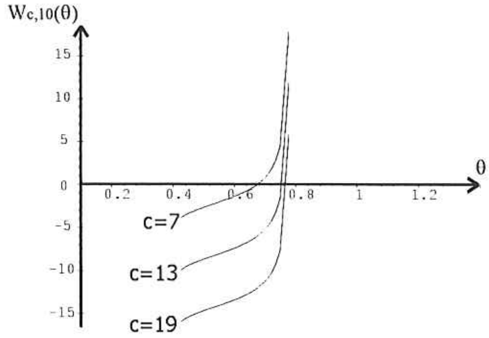
$$B(\theta) = \frac{r_1+r_2}{A(\theta)} - \frac{r_1\cot\theta - r_2\tan\theta}{A'(\theta)} \geq 0. \tag{178}$$

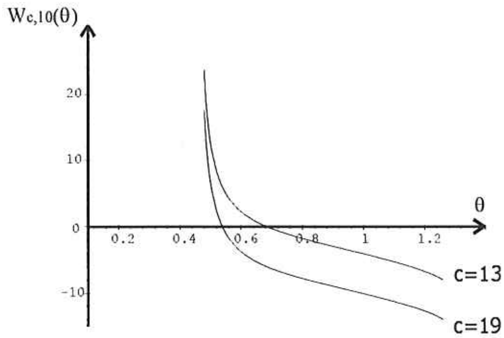
Горното неравенство е валидно за $\theta \in \Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >= \left(\min\{\underline{\theta},\overline{\theta}\}, \max\{\underline{\theta},\overline{\theta}\}\right)$, $\underline{\theta} = \arctan k_0$, $\overline{\theta} = \arctan k_1$, $k_0 = \frac{M_0}{m_0}$, $k_1 = \frac{q_1}{q_2}$ (виж Лема 3.4). За да установим, че функциите ρ_1 и ρ_2 са реални и могат да се изразят от (177) остава да покажем, че знаменателите в (177) и (178) не се анулират в Δ.

Непосредствената проверка показва, че $A'(\theta) \neq 0$ за $\theta \in \Delta$ (виж Лема 3.4). Нещо повече, $A(\theta) > 0$ при $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset \Delta$. Следователно $\rho_1(\theta,I)$ и $\rho_2(\theta,I)$ са добре дефинирани.

$\boxed{4.}$ Да се избере подходящ полярен радиус вектор. Решението $\rho_2(\theta,I)$ се отхвърля, тъй като при всяко фиксирано $\theta \in \Delta$ след импулс с големина I по посока на координатното начало се достига до траектория, която е по-отдалечена от устойчивия център (m_0, M_0) относно траекторията, на която принадлежи точката $(\rho_2(\theta,I),\theta)$.

$\boxed{5.}$ Да се намерят съответните на ρ_1 аргументи $\theta(c,I)$ така, че $W(\rho_1,\theta) = c$ (Фиг.3.4).





Фигура 3.4. $r_1 = 3, q_1 = 1, r_2 = 4, q_2 = 1, \quad r_1 = 3, q_1 = 1, r_2 = 5, q_2 = 2$

За целта заместваме в уравнение (176) ρ с $\rho_1(\theta, I)$ и достигаме до уравнението

$$W_{c,I}(\theta) = W(\rho_1(\theta, I), \theta) - c = 0. \tag{179}$$

Горното уравнение е трансцендентно и за всяко фиксирано $c > c_I$ и $I > 0$ може да се реши само числено. Да означим съответно с θ_i, $i = 1, 2, \dots$, решенията на уравнение (179). По-нататък ще покажем, че съществува единствено решение $\theta_1 \in \Delta$ (виж Теорема 3.2).

В Таблици 3.1 и 3.2 при фиксирани параметри на системата на Lotka-Volterra са посочени няколко конкретни стойности за I и съответно изчислените им c_I. При $c \in \{7, 13, 19\}$ са пресметнати съответните радиус вектори и аргументите на точките от I-оптималната крива, за които първата производна на функцията h е 0, а втората производна е положителна. На Фиг.3.4, при посочените под фигурата стойности на параметрите на системата на Lotka-Volterra са начертани графиките на функцията $W_{c,I}(\theta)$ при $I = 10$ и $c \in \{7, 13, 19\}$. От тези графики ясно личи, че функцията $W_{c,I}(\theta)$ е строго монотонна в Δ, $W_{c,I}(\underline{\theta})W_{c,I}(\overline{\theta}) < 0$ и $W_{c,I}(\theta) = 0$ в единствена точка $\theta = \theta_1 \in \Delta$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ За решенията на системата (175), (176), които удовлетворяват предходните две точки на настоящия алгоритъм, да се провери, дали е изпълнено неравенството (виж Теорема 3.4)

$$h''(\theta) = H_{\rho\rho}(\rho, \theta, I)(\rho'(\theta; c, I))^2 + 2H_{\rho\theta}(\rho, \theta, I)\rho'(\theta; c, I)$$
$$+ H_{\theta\theta}(\rho, \theta, I) + H_\rho(\rho, \theta, I)\rho''(\theta; c, I) > 0,$$

където :

$$H_{\rho\rho}(\rho, \theta, I) = \frac{I(r_1 + r_2)(2\rho - I)}{\rho^2(\rho - I)^2};$$
$$H_{\rho\theta}(\rho, \theta, I) = 0;$$
$$H_{\theta\theta}(\rho, \theta, I) = IA(\theta);$$

ТАБЛИЦА 3.1. $r_1 = 3$, $q_1 = 1$, $r_2 = 4$, $q_2 = 1$; $\underline{\theta} = 0.644$, $\overline{\theta} = 0.785$; $\frac{r_1}{r_2} < \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2$

I	c_I	c	ρ_1	θ_1	h'	h''
		7	15.531	0.756	0	2.037
1	0.124	13	21.332	0.773	0	1.175
		19	26.678	0.778	0	1.204
		7	15.549	0.744	0	5.324
5	2.148	13	21.337	0.769	0	5.582
		19	26.679	0.776	0	5.827
		7	15.665	0.675	0	7.986
10	6.31	13	21.35	0.758	0	9.863
		19	26.683	0.773	0	10.911

ТАБЛИЦА 3.2. $r_1 = 3$, $q_1 = 1$, $r_2 = 5$, $q_2 = 2$; $\underline{\theta} = 0.876$, $\overline{\theta} = 0.464$; $\frac{r_1}{r_2} > \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2$

I	c_I	c	ρ_1	θ_1	h'	h''
		7	10.394	0.562	0	1.994
1	0.225	13	14.081	0.511	0	1.943
		19	17.512	0.492	0	1.95
		7	10.658	0.653	0	8.512
5	3.648	13	14.146	0.536	0	8.959
		19	17.537	0.502	0	9.267
10	10.326	13	14.632	0.683	0	13.469
		19	17.63	0.538	0	15.861

$$\rho''(\theta; c, I) = -\frac{W_{\theta\theta}(\rho,\theta) + 2W_{\theta\rho}(\rho,\theta)\rho'(\theta; c, I) + W_{\rho\rho}(\rho,\theta)(\rho'(\theta; c, I))^2}{W_\rho(\rho,\theta)};$$

$$W_{\rho\rho}(\rho,\theta) = \frac{r_1 + r_2}{\rho^2};$$

$$W_{\rho\theta}(\rho,\theta) = A'(\theta);$$

$$W_{\theta\theta}(\rho,\theta) = -\rho A(\theta) + \frac{r_1}{sin^2\theta} + \frac{r_2}{\cos^2\theta}.$$

При доказателството на основните свойства на I-оптималната крива ще използваме следните условия **(H3.2)** :

H3.2.1 r_1, q_1, r_2, $q_2 \in \mathbb{R}_+$ са параметри на системата на Lotka-Volterra (165).

H3.2.2 ξ_I е I-оптимална крива за същата система.

H3.2.3 $\Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >$, $\underline{\theta} = \arctan k_0$, $\overline{\theta} = \arctan k_1$, $k_0 = \frac{M_0}{m_0}$, $k_1 = \frac{q_1}{q_2}$.

H3.2.4 Изпълнено е едно от следните две неравенства :

H3.2.4.1 $\frac{\pi}{4} \le \underline{\theta} < \overline{\theta}$, т.е. $1 \le k_0 < k_1$.

H3.2.4.2 $0 < \underline{\theta} < \overline{\theta} \le \frac{\pi}{4}$, т.е. $0 < k_1 < k_0 \le 1$.

Ще използваме следните помощни твърдения.

Лема 3.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H3.2.1** *и* **H3.2.3**.
2. $A(\theta) = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.
3. $B(\theta) = \dfrac{r_1 + r_2}{A(\theta)} - \dfrac{r_1 \cot\theta - r_2 \tan\theta}{A'(\theta)},\ \theta \in \Delta = <\underline{\theta}, \overline{\theta}>$.

Тогава:

1. *Функцията* A *има единствен максимум в точката* $\overline{\theta} \in (0, \frac{\pi}{2})$, $A'(\theta) > 0$ *при* $\theta \in (0, \overline{\theta})$ *и* $A'(\theta) < 0$ *при* $\theta \in (\overline{\theta}, \frac{\pi}{2})$.
2. $B(\underline{\theta}) = 0$ *и* $\lim\limits_{\theta \to \overline{\theta},\, \theta \in \Delta} B(\theta) = \infty$.
3. $B(\theta) > 0$ *при* $<\underline{\theta}, \overline{\theta}>$.

Доказателство.
1. За производната на функцията A е изпълнено

$$A'(\theta) = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta.$$

Тя се анулира при $\theta = \overline{\theta}$. Непосредствено се вижда, че $A'(\theta) > 0$ при $\theta \in (0, \overline{\theta})$ и $A'(\theta) < 0$ при $\theta \in (\overline{\theta}, \frac{\pi}{2})$. Следователно функцията A има единствен максимум в точката $\overline{\theta} \in (0, \frac{\pi}{2})$, при това тя е строго монотонно растяща в $(0, \overline{\theta})$ и строго монотонно намаляваща в $(\overline{\theta}, \frac{\pi}{2})$.

2. Нека $k = \tan\theta$. Тогава

$$B(\theta) = \beta(k) = \frac{(1+k^2)(r_2 q_1 k - r_1 q_2)}{k(q_1 k + q_2)(q_1 - q_2 k)} = \frac{r_2 q_1 (1+k^2)(k - k_0)}{q_2^2 k (1 + k_1 k)(k_1 - k)}, \tag{180}$$

където $k_0 = \tan\underline{\theta} = \frac{r_1 q_2}{r_2 q_1} > 0$ и $k_1 = \tan\overline{\theta} = \frac{q_1}{q_2} > 0$.

Ясно е, че $B(\underline{\theta}) = \beta(k_0) = 0$. При $\Delta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ е изпълнено

$$\lim_{\theta \to \overline{\theta} - 0} B(\theta) = \lim_{k \to k_1 - 0} \beta(k) = \lim_{k \to k_1 - 0} \frac{r_2 q_1 (1+k^2)(k - k_0)}{q_2^2 k (1 + k_1 k)(k_1 - k)} = +\infty.$$

Аналогично при $\Delta = (\overline{\theta}, \underline{\theta})$ се получава, че

$$\lim_{\theta \to \overline{\theta} + 0} B(\theta) = \lim_{k \to k_1 + 0} \beta(k) = \infty.$$

3. Последното твърдение следва от (180) и факта, че $\beta(k) > 0$ при $k \in\ <k_0, k_1>$.

Следствие 3.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **H3.2.1** *и* **H3.2.3**.
2. $D(\theta, I) = \dfrac{I^2}{4} + (r_1 + r_2)\dfrac{B(\theta)}{A(\theta)},\ \theta \in \Delta = <\underline{\theta}, \overline{\theta}>,\ I > 0$.
3. $\rho_1(\theta, I) = \dfrac{I}{2} + \dfrac{r_1 + r_2}{A(\theta)} + \sqrt{D(\theta, I)},\ \theta \in \Delta,\ I > 0$.

Тогава:

1. $D(\underline{\theta}, I) = \dfrac{I^2}{4}$.
2. $\rho_1(\underline{\theta}, I) = I + \dfrac{r_1 + r_2}{A(\underline{\theta})} = I + \sqrt{m_0^2 + M_0^2}$.
3. $\lim\limits_{\theta \to \overline{\theta}} \rho_1(\theta, I) = \infty$.

Лема 3.5. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **Н3.2.1** *и* **Н3.2.3**.
2. $C(\theta) = \dfrac{B(\theta)}{A(\theta)}$, $\theta \in \Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >$, *където:*

$$B(\theta) = \frac{r_1 + r_2}{A(\theta)} - \frac{r_1 \cot\theta - r_2 \tan\theta}{A'(\theta)}, \qquad A(\theta) = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta.$$

Тогава:

1. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.1**, *то функцията* $C(\theta)$ *е строго монотонно растяща при* $\theta \in \Delta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$.
2. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.2**, *то функцията* $C(\theta)$ *е строго монотонно намаляваща при* $\theta \in \Delta = (\overline{\theta}, \underline{\theta})$.

Доказателство. Ясно е, че функцията $C \in \boldsymbol{C}^1\{\Delta, \mathbb{R}_+\}$. Тогава от $(\ln C(\theta))' > 0$ (< 0) ще следва $C'(\theta) > 0$ (< 0) за $\theta \in \Delta$. Изпълнено е

$$\begin{aligned}
(\ln C(\theta))' &= \frac{r_2 q_1 \cos\theta + r_1 q_2 \sin\theta}{r_2 q_1 \sin\theta - r_1 q_2 \cos\theta} - \frac{2A'(\theta)}{A(\theta)} - \frac{A''(\theta)}{A'(\theta)} + \tan\theta - \cot\theta \\
&= \frac{1 + k_0 k}{k - k_0} - \frac{2(k_1 - k)}{1 + k_1 k} + \frac{1 + k_1 k}{k_1 - k} + \frac{k^2 - 1}{k} \\
&= \left[\frac{1 + k_0 k}{k - k_0} - \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right] + \left[\frac{1 + k_1 k}{k_1 - k} - \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right] + \frac{k^2 - 1}{k}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$(\ln C(\theta))' = \frac{(1 + k_1 k_0)(1 + k^2)}{(k - k_0)(1 + k_1 k)} + \frac{(k_1 k - k + 1 + k_1)(k_1 k + k + 1 - k_1)}{(k_1 - k)(1 + k_1 k)} + \frac{k^2 - 1}{k}. \tag{181}$$

Нека е изпълнено **Н3.2.4.1**, т.е. $1 \le k_0 < k < k_1$. Тогава непосредствено се вижда, че всяко едно от събираемите от дясната страна на (181) е положително, което означава, че $(\ln C(\theta))' > 0$, т.е.

$$\frac{C'(\theta)}{C(\theta)} > 0.$$

От последното неравенство като вземем под внимание, че $C(\theta) > 0$ (виж Лема 3.4) заключаваме, че $C'(\theta) > 0$, с което първото от твърденията на Лема 3.5 е доказано.

Нека е валидно **Н3.2.4.2**, т.е. $0 < k_1 < k < k_0 \leq 1$. Тогава непосредствено се установява, че първото и последното от събираемите в дясната страна на (181) са отрицателни. Ще покажем, че

$$\frac{(k_1k - k + 1 + k_1)(k_1k + k + 1 - k_1)}{(k_1 - k)(1 + k_1k)} < 0.$$

За целта е достатъчно да проверим, че функцията $E(k) = (k_1 - 1)k + 1 + k_1$ е положителна при $k \in (k_1, k_0)$. Като имаме предвид, че $k_1 - 1 < 0$ (в разглеждания от нас случай), то достигаме до извода, че E е строго монотонно намаляваща и следователно най-малката ѝ стойност при $k \in [k_1, k_0]$ се достига при $k = k_0$. Следователно

$$E(k) > E(k_0) = k_1k_0 + k_1 + 1 - k_0 > 0, \quad k \in (k_1, k_0).$$

Окончателно, като имаме предвид (181) заключаваме, че $(\ln C(\theta))' < 0$, т.е. $C'(\theta) < 0$, откъдето следва и второто твърдение на Лема 3.5.

Забележка 3.7. Условията в Лема 3.5 са достатъчни. Нещо повече, вероятно, твърдението на лемата е валидно без да се налага условие **Н3.2.4**.

Следствие 3.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Валидни са условията* **Н3.2.1** *и* **Н3.2.3**.
2. $B(\theta) = \dfrac{r_1 + r_2}{A(\theta)} - \dfrac{r_1 \cot\theta - r_2 \tan\theta}{A'(\theta)}$, $\theta \in \Delta =< \underline{\theta}, \overline{\theta} >$, $A(\theta) = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$.

Тогава:

1. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.1**, *то функцията* $B(\theta)$ *е строго монотонно растяща при* $\theta \in \Delta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$.
2. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.2**, *то функцията* $B(\theta)$ *е строго монотонно намаляваща при* $\theta \in \Delta = (\overline{\theta}, \underline{\theta})$.

Доказателството на твърдението следва от аналитичния израз за

$$(\ln B(\theta))' = \frac{r_2q_1 \cos\theta + r_1q_2 \sin\theta}{r_2q_1 \sin\theta - r_1q_2 \cos\theta} - \frac{A'(\theta)}{A(\theta)} - \frac{A''(\theta)}{A'(\theta)} + \tan\theta - \cot\theta$$
$$= \frac{1 + k_0k}{k - k_0} - \frac{k_1 - k}{1 + k_1k} + \frac{1 + k_1k}{k_1 - k} + \frac{k^2 - 1}{k},$$

където $k = \tan\theta$.

Следствие 3.3. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **Н3.2.1** *и* **Н3.2.3**.
2. $D(\theta, I) = \dfrac{I^2}{4} + (r_1 + r_2)\dfrac{B(\theta)}{A(\theta)}$, $\theta \in \Delta$.

Тогава за всяко $I > 0$ *са в сила следните твърдения:*

1. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.1**, *то функцията* $D(\theta, I)$ *е строго монотонно растяща при* $\theta \in \Delta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$.
2. *Ако е изпълнено* **Н3.2.4.2**, *то функцията* $D(\theta, I)$ *е строго монотонно намаляваща при* $\theta \in \Delta = (\overline{\theta}, \underline{\theta})$.

Твърдението веднага следва от аналитичния израз за

$$\frac{\partial D(\theta, I)}{\partial \theta} = (r_1 + r_2)\,(C(\theta))'.$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Нека са валидни условията* **(H3.2)**.

Тогава за всяко $I > 0$ и $c > c_I$ съществува единствено решение $\theta_1 = \theta_1(c, I) \in \Delta$ на уравнението $W_{c,I}(\theta) = 0$, където функцията $W_{c,I}$ е дефинирана съгласно равенство (179).

Доказателство. За целта ще покажем, че за всяко $I > 0$ и $c > c_I$:

1. $W_{c,I}(\underline{\theta}) < 0$ и $\lim\limits_{\theta \to \overline{\theta},\, \theta \in \Delta} W_{c,I}(\theta) = \infty$.

2. $W_{c,I}$ е строго монотонна в Δ.

1. Валидно е следното неравенство

$$W_{c,I}(\underline{\theta}) = W(\rho_1(\underline{\theta}, I), \underline{\theta}) - c < W(\rho_1(\underline{\theta}, I), \underline{\theta}) - c_I = W_{c_I,I}(\underline{\theta}), \tag{182}$$

където :

$$W_{c,I}(\underline{\theta}) = IA(\underline{\theta}) + r_1 + r_2 - (r_1 + r_2)\ln\left(I + \frac{r_1 + r_2}{A(\underline{\theta})}\right)$$
$$- r_1 \ln \sin \underline{\theta} - r_2 \ln \cos \underline{\theta} + U_0 - c;$$

$$\rho_1(\underline{\theta}, I) = I + \frac{r_1 + r_2}{A(\underline{\theta})}; \qquad A(\underline{\theta}) = \frac{q_1 M_0 + q_2 m_0}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}};$$

$$c_I = U\left(m_0\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}\right), M_0\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}\right)\right)$$
$$= U(m_0, M_0) + I\frac{q_1 M_0 + q_2 m_0}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}} - (r_1 + r_2)\ln\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}\right)$$
$$= IA(\underline{\theta}) - (r_1 + r_2)\ln\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}\right).$$

Тогава получаваме, че

$$W_{c_I,I}(\underline{\theta}) = IA(\underline{\theta}) + r_1 + r_2 - (r_1 + r_2)\ln\left(I + \frac{r_1 + r_2}{A(\underline{\theta})}\right)$$
$$- r_1 \ln \frac{M_0}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}} - r_2 \ln \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}} + r_1(\ln M_0 - 1) + r_2(\ln m_0 - 1)$$
$$- IA(\underline{\theta}) + (r_1 + r_2)\ln\left(1 + \frac{I}{\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}\right)$$
$$= -(r_1 + r_2)\ln\left(I + \frac{(r_1 + r_2)\sqrt{m_0^2 + M_0^2}}{q_1 M_0 + q_2 m_0}\right) + (r_1 + r_2)\ln\sqrt{m_0^2 + M_0^2}$$

$$+(r_1+r_2)\ln\left(1+\frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right)= \tag{183}$$

$$=-(r_1+r_2)\ln\left(\frac{r_1+r_2}{q_1M_0+q_2m_0}+\frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right)+(r_1+r_2)\ln\left(1+\frac{I}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}}\right)=0.$$

От неравенство (182) и равенство (183) следва $W_{c,I}(\underline{\theta})<0$.

Ще покажем, че $\lim\limits_{\theta\to\overline{\theta},\,\theta\in\Delta} W_{c,I}(\theta)=\infty$. Действително, от $\lim\limits_{\theta\to\overline{\theta},\theta\in\Delta} B(\theta)=\infty$ следва $\lim\limits_{\theta\to\overline{\theta},\theta\in\Delta} \rho_1(\theta,I)=\infty$, откъдето получаваме, че

$$\lim_{\theta\to\overline{\theta},\,\theta\in\Delta} W_{c,I}(\theta)=\lim_{\theta\to\overline{\theta},\,\theta\in\Delta}\left[\rho_1(\theta,I)\left(A(\theta)-\frac{(r_1+r_2)\ln\rho_1(\theta,I)}{\rho_1(\theta,I)}\right)\right]$$

$$-r_1\ln\sin\overline{\theta}-r_2\ln\cos\overline{\theta}+U_0-c=\infty. \tag{184}$$

2. Ще покажем, че $W_{c,I}$ е строго монотонно растяща (намаляваща) в $\Delta=(\underline{\theta},\overline{\theta})$ $(\Delta=(\overline{\theta},\underline{\theta}))$. След елементарни преобразования получаваме, че

$$W'_{c,I}(\theta)=\frac{\partial\rho_1(\theta,I)}{\partial\theta}A(\theta)+\rho_1(\theta,I)A'(\theta)-\frac{r_1+r_2}{\rho_1(\theta,I)}\cdot\frac{\partial\rho_1(\theta,I)}{\partial\theta}-r_1\cot\theta+r_2\tan\theta$$

$$=\frac{\partial\rho_1(\theta,I)}{\partial\theta}\cdot\frac{\rho_1(\theta,I)A(\theta)-(r_1+r_2)}{\rho_1(\theta,I)}$$

$$+\left(\frac{I}{2}+\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}+\sqrt{D(\theta,I)}\right)\cdot A'(\theta)-r_1\cot\theta+r_2\tan\theta$$

$$=\frac{\partial\rho_1(\theta,I)}{\partial\theta}\cdot\frac{A(\theta)(\frac{I}{2}+\sqrt{D(\theta,I)})}{\rho_1(\theta,I)}+\left(\frac{I}{2}+\sqrt{D(\theta,I)}\right)A'(\theta)+$$

$$+\frac{r_1+r_2}{A(\theta)}A'(\theta)-r_1\cot\theta+r_2\tan\theta=$$

$$=\frac{\frac{I}{2}+\sqrt{D(\theta,I)}}{\rho_1(\theta,I)}\cdot\frac{d}{d\theta}(\rho_1(\theta,I)A(\theta))+A'(\theta)B(\theta). \tag{185}$$

От първото твърдение на Лема 3.4 и Следствие 3.3 получаваме, че

$$\operatorname{sgn}A'(\theta)=\operatorname{sgn}\frac{\partial D(\theta,I)}{\partial\theta},\quad \theta\in\Delta.$$

Следователно производната

$$\frac{d}{d\theta}(\rho_1(\theta,I)A(\theta))=\left(\frac{I}{2}+\sqrt{D(\theta,I)}\right)A'(\theta)+\frac{A(\theta)}{2\sqrt{D(\theta,I)}}\frac{\partial D(\theta,I)}{\partial\theta}$$

е положителна при $\underline{\theta}<\overline{\theta}$ и отрицателна при $\overline{\theta}<\underline{\theta}$, т.е.

$$\frac{d}{d\theta}(\rho_1(\theta,I)A(\theta))>0,\quad \theta\in(\underline{\theta},\overline{\theta})\quad\text{и}\quad\frac{d}{d\theta}(\rho_1(\theta,I)A(\theta))<0,\quad\theta\in(\overline{\theta},\underline{\theta}).$$

Накрая, от (185) и горните неравенства следва, че $W_{c,I}$ е строго монотонна в Δ.

От твърдения 1 и 2 следва, че за всяко $I > 0$ и $c \geq c_I$ уравнението $W_{c,I}(\theta) = 0$ притежава единствено решение $\theta_1 = \theta_1(c, I) \in \Delta$.

Теорема 3.3. *Нека са валидни условията* **(Н3.2)**.

Тогава функцията θ_1, дефинирана неявно с уравнението (179), притежава следните свойства:

1. *Ако е изпълнено условие* **Н3.2.4.1**, *то функцията θ_1 е строго монотонно растяща по аргумента си $c \in [c_I, \infty)$ и строго монотонно намаляваща по аргумента си $I \in \mathbb{R}_+$.*
2. *Ако е изпълнено условие* **Н3.2.4.2**, *то функцията θ_1 е строго монотонно намаляваща по аргумента си $c \in [c_I, \infty)$ и строго монотонно растяща по аргумента си $I \in \mathbb{R}_+$ $c \in [c_I, \infty)$.*

Доказателство.

1. Нека $I > 0$ е фиксирано. За всяко $c \geq c_I$ стойностите на θ_1 се определят от уравнение (179), което може да се запише още и така

$$v(\theta) = W(\rho_1(\theta, I), \theta) = c.$$

Изпълнено е

$$v'(\theta) = \frac{\partial W(\rho_1(\theta, I), \theta)}{\partial \theta} = W'_{c,I}(\theta), \qquad \theta \in \Delta.$$

От Теорема 3.2 следва, че

$$v'(\theta) = W'_{c,I}(\theta) > 0, \quad \text{при} \quad \underline{\theta} < \overline{\theta}; \qquad v'(\theta) = W'_{c,I}(\theta) < 0, \quad \text{при} \quad \overline{\theta} < \underline{\theta}. \tag{186}$$

Следователно, съществува единствена обратна функция v^{-1}, $v^{-1} \in \boldsymbol{C}^1\{[c_I, \infty), \Delta\}$ такава, че

$$\theta_1 = \theta_1(c, I) = v^{-1}(c).$$

От горното равенство получаваме, че

$$\frac{\partial \theta_1(c, I)}{\partial c} = \frac{dv^{-1}(c)}{dc} = \frac{1}{v'(\theta)}. \tag{187}$$

От (186) и (187) следва, че функцията θ_1 е строго монотонно растяща по аргумента си $c \in [c_I, \infty)$, ако е валидно условие **Н3.2.4.1** и е строго монотонно намаляваща, ако е изпълнено **Н3.2.4.2**.

2. Нека $c \geq c_I$ е фиксирано. Като диференцираме неявно уравнение (179) получаваме, че

$$\frac{\partial \theta_1(c, I)}{\partial I} = -\frac{W_I(\rho_1(\theta, I), \theta)}{W_\theta(\rho_1(\theta, I), \theta)}, \tag{188}$$

където:

$$W_I(\rho_1(\theta, I), \theta) = W_\rho(\rho_1(\theta, I), \theta)\frac{\partial \rho_1(\theta, I)}{\partial I};$$

$$\frac{\partial \rho_1(\theta, I)}{\partial I} = \frac{1}{2} + \frac{I}{4\sqrt{D(\theta, I)}};$$

$$W_\theta(\rho_1(\theta, I), \theta) = W'_{c,I}(\theta). \tag{189}$$

За $\theta \in \Delta$ и $I > 0$ лесно се установяват следните неравенства:

$$W_\rho(\rho_1(\theta, I), \theta) = A(\theta) - \frac{r_1 + r_2}{\rho_1(\theta, I)} = \left(\frac{I}{2} + \sqrt{D(\theta, I)}\right) \cdot \frac{A(\theta)}{\rho_1(\theta, I)} > 0$$

и

$$\frac{\partial \rho_1(\theta, I)}{\partial I} > 0,$$

т.е. $W_I(\rho_1(\theta, I), \theta) > 0$. Тогава от (188) и последното равенство от (189) следва, че

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial \theta_1(c, I)}{\partial I} = -\operatorname{sgn} W'_{c,I}(\theta). \tag{190}$$

В предходната Теорема 3.2 установихме, че ако е изпълнено условие **H3.2.4.1**, то $W'_{c,I}(\theta) > 0, \quad \theta \in \Delta$, и $W'_{c,I}(\theta) < 0, \quad \theta \in \Delta$, ако е валидно **H3.2.4.2**. От този факт и равенството (190) следва доказателството на Теорема 3.3.

Следствие 3.4. *Нека са валидни условията* **(H3.2)**.

Тогава за всяка точка $(m, M) \in \xi_I$ *е изпълнено* $k = \frac{M}{m} \in <k_0, k_1>$, *т.е.* I*-оптималната крива принадлежи на областта с контур правите* $l_0 = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2_+ : M = k_0 m\}$ *и* $l_1 = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2_+ : M = k_1 m\}$, *която е в* I*-ви квадрант и съдържа устойчивия център на системата на Lotka-Volterra.*

Теорема 3.4. *Нека са валидни следните условия:*

1. *Изпълнени са условията* **(H3.2)**.
2. $I \geq I_0 = \sqrt{m_0^2 + M_0^2}$.

Тогава $h''(\theta_1(c, I)) > 0$, *където* $\theta_1 \in \Delta$ *е единственото решение на уравнение (179).*

Доказателство. Като използваме факта, че $\rho_1 = \rho_1(\theta_1, I)$ и $\theta_1 = \theta_1(c, I)$ са решения на системата (173), (174) получаваме, че

$$\rho'(\theta_1; c, I) = -\frac{H_\theta(\rho_1, \theta_1, I)}{H_\rho(\rho_1, \theta_1, I)} = -\frac{A'(\theta_1)\rho_1(\rho_1 - I)}{r_1 + r_2}.$$

Тогава

$$h''(\theta_1) = \frac{I(A')^2(\theta_1)(2\rho_1 - I)}{r_1 + r_2} + IA(\theta_1)$$

$$+ \frac{I(r_1 + r_2)}{\rho_1 - I} \cdot \frac{-\rho_1 A(\theta_1) + \frac{r_1}{\sin^2\theta_1} + \frac{r_2}{\cos^2\theta_1} + \frac{-2(A')^2(\theta_1)\rho_1(\rho_1 - I)}{r_1 + r_2} + \frac{(A')^2(\theta_1)(\rho_1 - I)^2}{r_1 + r_2}}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1 + r_2)}$$

$$= I\left[A(\theta_1) + \frac{r_1 + r_2}{\rho_1 - I} \cdot \frac{-\rho_1 A(\theta_1) + \frac{r_1}{\sin^2\theta_1} + \frac{r_2}{\cos^2\theta_1}}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1 + r_2)}\right]$$

$$+ \frac{I(A')^2(\theta_1)}{r_1 + r_2} \cdot \left[2\rho_1 - I + \frac{(r_1 + r_2)(-\rho_1 - I)}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1 + r_2)}\right]. \tag{191}$$

Като имаме предвид, че $\sin\theta_1 < 1$, $\cos\theta_1 < 1$, $D(\theta_1, I) \geq \frac{I}{2}$ и $\rho_1 = \dfrac{I}{2} + \dfrac{r_1+r_2}{A(\theta_1)} + \sqrt{D(\theta_1, I)} > 0$ получаваме следната оценка

$$A(\theta_1) + \frac{r_1+r_2}{\rho_1 - I}\cdot\frac{-\rho_1 A(\theta_1) + \frac{r_1}{\sin^2\theta_1} + \frac{r_2}{\cos^2\theta_1}}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1+r_2)} > A(\theta_1) - \frac{r_1+r_2}{\rho_1 - I}$$

$$= \frac{A(\theta_1)}{\rho_1 - I}\left(-\frac{I}{2} + \sqrt{D(\theta_1, I)}\right) \geq 0. \quad (192)$$

Непосредствените пресмятания показват, че

$$2\rho_1 - I - \frac{(r_1+r_2)(\rho_1+I)}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1+r_2)} = \frac{2\rho_1^2 A(\theta_1) - 3\rho_1(r_1+r_2) - I\rho_1 A(\theta_1)}{\rho_1 A(\theta_1) - (r_1+r_2)}$$

$$= \frac{\rho_1}{(\frac{I}{2} + \sqrt{D(\theta_1, I)})A(\theta_1)}(2A(\theta_1)\sqrt{D(\theta_1, I)} - (r_1+r_2)). \quad (193)$$

От Лема 3.4 и Следствие 3.1 следва оценката

$$2A(\theta_1)\sqrt{D(\theta_1, I)} \geq 2\inf_{\theta\in\Delta} A(\theta)\inf_{\theta\in\Delta}\sqrt{D(\theta, I)} = IA(\bar\theta)$$

$$= I\frac{r_1+r_2}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}} \geq I_0\frac{r_1+r_2}{\sqrt{m_0^2+M_0^2}} = r_1 + r_2. \quad (194)$$

От (191), (192), (193) и (194) следва твърдението на теоремата.

Забележка 3.8. Условията в Теорема 3.4 са достатъчни. Нещо повече, вероятно, твърдението на лемата е валидно без да се налага условие 2.

Теорема 3.5. *Нека са валидни условията* **(Н3.2)**.
Тогава кривата ξ_I е асимптотично еквивалентна на правата $l_1 = \{(m, M) \in \mathbb{R}_+^2 : M = k_1 m\}$ при $c \to \infty$.

Доказателство. Ясно е, че при фиксирано $c \geq c_I$ полярните координати на точка от ξ_I се получават като решение на задачата за условен екстремум (172). По-точно, ако $c = const \geq c_I$ и $(\rho_1(c), \theta_1(c)) = (\rho_1(\theta_1(c, I), I), \theta_1(c, I))$ е решението на задачата (172), то е изпълнено

$$-IA(\theta_1(c)) - (r_1+r_2)\ln\left(1 - \frac{1}{\rho_1(c)}\right)$$

$$= min\left\{-IA(\theta) - (r_1+r_2)\ln\left(1-\frac{1}{\rho}\right);\quad W(\rho,\theta) = c\right\}. \quad (195)$$

Имаме

$$W(\rho_1(c), \theta_1(c)) = c,$$

откъдето заключаваме, че

$$\lim_{c\to\infty} W(\rho_1(c), \theta_1(c)) = \infty.$$

От горното равенство и като имаме предвид, че

$$W(\rho_1(c), \theta_1(c)) = \rho_1(c)A(\theta_1(c)) - (r_1+r_2)\ln\rho_1(c) - r_1\ln\sin\theta_1(c) - r_2\ln\cos\theta_1(c) + U_0$$

достигаме до извода, че

$$\lim_{c\to\infty} \rho_1(c) = \infty.$$

Нещо повече, ако точката (ρ, θ) удовлетворява равенството $W(\rho, \theta) = c$, то е ясно, че $\rho \to \infty$ при $c \to \infty$.

Да оставим в задачата (195) $c \to \infty$. Получаваме

$$\lim_{c\to\infty}(-IA(\theta_1(c))) = \min_{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})}\{-IA(\theta)\},$$

т.е.

$$\lim_{c\to\infty} A(\theta_1(c)) = \max_{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})} A(\theta) = A(\overline{\theta}).$$

Следователно $\lim\limits_{c\to\infty} \theta_1(c) = \overline{\theta} = \arctan \dfrac{q_1}{q_2}$.

С това Теорема 3.5 е доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. *Нека са изпълнени условията:*

1. *Валидни са условията* **Н3.2.1**, **Н3.2.2**.
2. *Кривата* ξ_I *е права линия, т.е.* $\xi_I = \{(m, M) : M(c, I) = Km(c, I)$, *където* $K > 0, m(c, I) \geq m_0, c \in [c_I, \infty), I > 0\}$.

Тогава:

1. $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2}$.
2. $\underline{\theta} = \overline{\theta}$, $k_0 = k_1 = K$.
3. $\rho = \frac{r_1+r_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + I$.

Доказателство.

1. За всяко $c \in [c_I, \infty)$ и $I > 0$ кривата ξ_I е права, която минава през $O(0,0)$, което означава, че $\rho = \rho_1(\theta_1(c, I), I)$ не зависи от θ. Следователно за фиксирано I е изпълнено $\rho'(\theta) = 0$, откъдето следва $W_\theta(\rho, \theta) = 0$, т.е.

$$W_\theta(\rho, \theta) = \rho A'(\theta) - r_1 \cot\theta + r_2 \tan\theta = 0. \tag{196}$$

За да бъде изпълнено (173) е необходимо $H_\theta(\rho, \theta, I) = 0$, т.е.

$$H_\theta(\rho, \theta, I) = -IA'(\theta) = 0. \tag{197}$$

От (197) получаваме $A'(\theta) = 0$, т.е. $k = \tan\theta = \frac{q_1}{q_2}$. Като използваме този факт от (196) се получава и необходимото условие I-оптималната крива да бъде права, а именно

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2}. \tag{198}$$

2. Ясно е, че $k_0 = \frac{M_0}{m0} = \frac{r_1q_2}{q_1r_2} = \frac{q_1}{q_2} = k_1$. От това равенство и Следствие 3.4 веднага се получава съответното твърдение на теоремата.

3. От факта, че еднопараметричното семейство криви линии ξ_I се състои от една единствена права за всяко $I > 0$, получаваме $H_I(\rho, \theta, I) = 0$, т.е.

$$H_I(\rho, \theta, I) = -A(\theta) + \frac{r_1 + r_2}{\rho - I}. \tag{199}$$

От (199) определяме $\rho = \frac{r_1+r_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + I$. Достатъчното условие за минимум е също изпълнено :

$$h''(\theta) = -\frac{W_{\theta\theta}(\rho,\theta)}{W_\rho(\rho,\theta)} = -\frac{-\rho A(\theta) + \frac{r_1}{\sin^2\theta} + \frac{r_2}{\cos^2}}{A(\theta) - \frac{r_1+r_2}{\rho}} > 0,$$

което завършва доказателството на теоремата.

Забележка 3.9. Условието (198) е и достатъчно условие. От него веднага следва $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1q_2}{r_2q_1}$, т.е. $\Delta = \{\underline{\theta}\} = \{\overline{\theta}\}$. За всяко фиксирано $I > 0$ от условието (176) следва

$$c = W(\rho, \underline{\theta}, I) = f(\rho, I).$$

При $\rho \geq \frac{r_1+r_2}{A(\underline{\theta})} = \sqrt{m_0^2 + M_0^2}$ функцията $f(\rho, I)$ е непрекъсната и строго монотонно растяща, тогава тя притежава единствена обратна f^{-1}. Следователно $\rho = f^{-1}(c, I)$, $m(c, I) = f^{-1}(c, I)\cos\underline{\theta}$, $M(c, I) = f^{-1}(c, I)\sin\underline{\theta}$.

Теорема 3.7. *Нека са валидни условията* **(H3.2)**.
Тогава кривата ξ_I *е :*

1. *Непрекъсната по c, т.е. функциите $m(c, I)$, $M(c, I)$, с помощта на които се задава ξ_I, са непрекъснати в $[c_I, \infty)$ за всяко фиксирано $I > 0$.*
2. *Непрекъсната по I, т.е. функциите $m(c, I)$, $M(c, I)$ са непрекъснати за $I > 0$ при всяко фиксирано c в $[c_I, \infty)$.*

Доказателството следва от непрекъснатостта на функциите $\rho_1(\theta_1, I)$ и $\theta_1 = \theta_1(c, I)$ по c и I и зависимостите :

$$m(c, I) = \rho_1(\theta_1, c)\cos\theta_1(c, I); \quad M(c, I) = \rho_1(\theta_1, c)\sin\theta_1(c, I).$$

Забележка 3.10. С помощта на I-оптималната крива ξ_I може да се реши следната оптимизационна задача за системата на Lotka-Volterra.

Нека са изпълнени следните условия :

1. $c_0 = const > 0$ и γ_{c_0} е траектория на системата на Lotka-Volterra.

2. $I = const > 0$ е количеството биомаса, което може да се отнеме еднократно от съобществото жертва-хищник, описвано от системата на Lotka-Volterra. Обемът I се състои от биомаса на жертвата I_m и биомаса на хищника I_M, т.е. $I = I_m + I_M$. Освен това $\frac{I_m}{I}$ и $\frac{I_M}{I}$ са съответно частите от биомасите на жертвата и хищника в съобществото в момента, в който се отнема от биомасата.

3. n е броя на отнеманията, които трябва да се осъществят. (Предполага се, че биомасата на съобществото е в достатъчно количество, че да е възможно да се отнеме n пъти по I части от обема ѝ.)

Поставя се задачата : Да се определят точките от траекторията на изобразяващата точка от съобществото, от които се осъществяват последователно n-те отнемания с обем I. Отнеманията (от математическа гледна точка) представляват импулсни въздействия с големина I, които се осъществяват от намерените точки към началото на координатната система. Изисква се траекторията, по която ще се развива съобществото, след всичките n на брой отнемания да е максимално близка до устойчивия център (m_0, M_0) на системата.

Поставената задача има биологична и технологична обосновка. Ясно е, че колкото траекторията е "по-близо" до устойчивия център, толкова измененията на количествата на биомасите на жертвата и хищника ще са по-малки и следователно по-лесно контролируеми.

Съгласно получените в този параграф резултати, поставената задача може да се реши алгоритмично така:

$\boxed{0.}$ Построява се кривата ξ_I, където I е обема, който може да се отнеме еднократно от биомасата на съобществото.

$\boxed{1.1}$ Намираме точката $(m_{c_0}, M_{c_0}) = \xi_I \cap \gamma_{c_0}$. Ще отбележим, че от тази точка се извършва първото импулсно въздействие с големина I по посока към началото на координатната система.

$\boxed{1.2}$ Намираме точката

$$(\hat{m}_{c_1}, \hat{M}_{c_1}) = \left(m_{c_0} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_0}^2 + M_{c_0}^2}} \right), M_{c_0} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_0}^2 + M_{c_0}^2}} \right) \right).$$

Ще отбележим, че последната точка е тази, в която попада изобразяващата точка на съобществото след импулсното въздействие.

$\boxed{1.3}$ $c_1 = U(\hat{m}_{c_1}, \hat{M}_{c_1})$.

$\boxed{2.1}$ Намираме $(m_{c_1}, M_{c_1}) = \xi_I \cap \gamma_{c_1}$. Това е точката, от която се осъществява втория импулс.

$\boxed{2.2}$ Намираме

$$(\hat{m}_{c_2}, \hat{M}_{c_2}) = \left(m_{c_1} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_1}^2 + M_{c_1}^2}} \right), M_{c_1} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_1}^2 + M_{c_1}^2}} \right) \right).$$

$\boxed{2.3}$ $c_2 = U(\hat{m}_{c_2}, \hat{M}_{c_2})$.

....

$\boxed{n.1}$ Намираме $(m_{c_{n-1}}, M_{c_{n-1}}) = \xi_I \cap \gamma_{c_{n-1}}$. Това е точка, от която се осъществява n-тия импулс.

$\boxed{n.2}$ Намираме

$$(\hat{m}_{c_n}, \hat{M}_{c_n}) = \left(m_{c_{n-1}} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_{n-1}}^2 + M_{c_{n-1}}^2}} \right), M_{c_{n-1}} \left(1 - \frac{I}{\sqrt{m_{c_{n-1}}^2 + M_{c_{n-1}}^2}} \right) \right).$$

$\boxed{n.3}$ $c_n = U(\hat{m}_{c_n}, \hat{M}_{c_n})$.

Като се има предвид доказните в този параграф твърдения се съобразява, че траекторията γ_{c_n} е максимално близка до устойчивия център на системата, в сравнение с всички други траектории, върху които попада и се развива съобществото след n на брой импулсни въздействия с големина I по посока на координатното начало.

Накрая, ще разгледаме един пример за намиране на I-оптимална крива ξ_I.

Пример 3.2. Да разгледаме следната система на Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= F_m(m, M) = m(1 - M); \\ \frac{dM}{dt} &= F_M(m, M) = -M(1 - m). \end{aligned} \tag{200}$$

Параметрите на системата са $r_1 = r_2 = q_1 = q_2 = 1$. Условие **H3.2.1** е изпълнено.

Устойчивият център на системата (200) е $(m_0, M_0) = (1, 1)$. Първият интеграл на (200) има вида

$$U(m, M) = M + m - \ln M - \ln m - 2.$$

Ще покажем, че при ограниченията на примера, независимо от големината на импулсното въздействие I, I-оптималната крива се задава по следния начин :

$$\xi_I = \{(m, M) : m = m(c, I) = t, M = M(c, I) = t, t \in [\frac{c_I}{\sqrt{2}}, \infty)\},$$

където $c_I = U\left(1 + \frac{I}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{I}{\sqrt{2}}\right)$.

Действително, валидна е Теорема 3.6. Изпълнено е $\underline{\theta} = \overline{\theta} = \frac{\pi}{4}$, $k_0 = \tan \underline{\theta} = \tan \overline{\theta} = \frac{q_1}{q_2} = 1 = K$, т.е. $\xi_I = \{(m, M) : M = m, c \in [c_I, \infty)\}$ съвпада с ъглополовящата на I и III квадрант. I-оптималната крива (права) е непрекъсната и гладка.

3. Отворени проблеми. Оптимизационни задачи за модела на Lotka-Voterra

3.1. Допълнителни оптимизационни задачи към §1. Освен разгледаната задача в параграф 1 могат да се изследват още и задачите:

Задача 1. Нека са в сила условията на Лема 3.1 или Лема 3.2. Да се определят точка (m^*, M^*) и константа $\alpha^* \in (0, \infty)$ така, че:

1. $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$ и $(m^* - \alpha^* m^*, M^* - \alpha^* M^*) \in \gamma_{c_1}$;
2. $\alpha^* = \max\limits_{(m,M)\in\gamma_{c_0}} \{\alpha = \alpha(m, M, c_1) \in (0, \infty), (m - \alpha m, M - \alpha M) \in \gamma_{c_1}\}$.

В тази задача количеството биомаса, което се отнема трябва да бъде максимално и пропорционално на биомасите на жертвата и хищника в момента на отнемане.

Задача 2. Нека са изпълнени условията на Лема 3.1 или Лема 3.2. Да се определи константа $k^* \in [k_1, k_2]$, където интервала $[k_1, k_2]$ е предварително определен така, че

$$(m_{c_0}(k^*) - m_{c_1}(k^*)) = \max_{k\in[k_1,k_2]} (m_{c_0}(k) - m_{c_1}(k)),$$

където $m_{c_0}(k)$ и $m_{c_1}(k)$ са съответно решения на уравненията:

$$U(m, km) = c_0, \qquad U(m, km) = c_1.$$

В тази задача отново количеството биомаса, което се отнема от популацията, е пропорционално на биомасите на жертвата и хищника в момента на отнемане. Освен това количество биомаса, което се отнема от жертвата (обикновено добивът от жертвата се счита, че е полезен за потребителя), трябва да бъде максимален.

Задача 3. Нека са валидни условията на Лема 3.1 или Лема 3.2. Да се намери точка (m^*, M^*) и вектор $(\Delta m^*, \Delta M^*)$, такива че:

1. $(m^*, M^*) \in \gamma_{c_0}$ и $(m^* + \Delta m^*, M^* + \Delta M^*) \in \gamma_{c_1}$;
2. $(\Delta m^*)^2 + (\Delta M^*)^2 = \min\{(\Delta m)^2 + (\Delta M)^2$, където Δm и ΔM са такива, че за тях съществува точка $(m, M) \in \gamma_{c_0}$ такава, че $(m + \Delta m, M + \Delta M) \in \gamma_{c_1}\}$.

Последната задача може да се реши като се използва условен екстремум. По-точно, решението се търси като

$$\min\{(\Delta m)^2 + (\Delta M)^2\}$$

при условия:

$$U(m, M) = c_0;$$
$$U(m + \Delta m, M + \Delta M) = c_1 .$$

3.2. Допълнителни оптимизационни задачи към §2. Ще дефинираме нова крива, която притежава свойства, необходими за решаването на оптимизационната задача от §2.

Дефиниция 3.3. Нека са изпълнени съотношенията:

1. $c > 0$.

2. $I_c = (m_0^* - m_0)\sqrt{1 + (\frac{M_0}{m_0})^2}$, където $U(m_0^*, \frac{M_0}{m_0} m_0^*) = c$.
3. $m = m(c, I)$, $M = M(c, I)$ са решения на задачата (171) за условен минимум.

Тогава кривата

$$\chi_c = \{(m, M) \in \mathbb{R}_+^2 : \quad m = m(c, I)\left(1 - \frac{I}{\sqrt{m^2(c, I) + M^2(c, I)}}\right), \\ M = M(c, I)\left(1 - \frac{I}{\sqrt{m^2(c, I) + M^2(c, I)}}\right), \ I \in (0, I_c]\,\}$$

ще наричаме c-оптимална крива.

Задача 4. Да се докаже, че кривата χ_c притежава следните свойства:

1. c-оптималната крива е непрекъсната по параметрите $c \geq c_I$ и $I \in (0, I_c]$.
2. Единият край на χ_c съвпада с устойчивия център (m_0, M_0) на системата, а другият ѝ край лежи на траекторията γ_c.
3. За всяка некрайна точка $(m, M) \in \chi_c$ е изпълнено $\frac{M}{m} \in (k_1, k_2)$, където $\{k_1, k_2\} = \{k_0, \lim\limits_{I \to 0} \dfrac{M(c, I)}{m(c, I)}\}$, $k_0 = \frac{M_0}{m_0}$.
4. Функцията $f(k) = \rho(A_1(k), A_2(k))$ е монотонна за $k \in (k_1, k_2)$, където:

$$A_1(k) = l(k) \cap \chi_c\,;$$

$$A_2(k) = l(k) \cap \gamma_c\,;$$

$$l(k) = \{(m, M) \in \mathbb{R}_+^2 : \tfrac{M}{m} = k\}\,.$$

Заключение

Резюме на основните резултати. В дисертацията са получени следните по-важни резултати:

1. Въведени са понятията непрекъсната зависимост и равномерна устойчивост на решенията на нелинейна система импулсни диференциални уравнения относно импулсните моменти. Намерени са достатъчни условия, при които решенията на тези системи зависят непрекъснато и са равномерно устойчиви от импулсните моменти. Резултатите са приложени за логистичния модел, класическия модел на Lotka-Volterra и модел с комменсализъм.

2. Разгледани са нелинейни, неавтономни диференциални уравнения с еднократно импулсно въздействие с фиксирана големина. При определени условия е намерен момента на импулсното въздействие така, че в крайния момент решението на това уравнение има максимална стойност. Резултатите са приложени за логистичния модел и модела на Gompertz.

3. Изследвани са нелинейни, автономни диференциални уравнения с краен брой импулсни въздействия, сумата от големините на които е фиксирана. При определени ограничения са определени броя, големините и моментите на импулсните въздействия така, че в крайния момент решението на това уравнение има максимална стойност. Резултатите са приложени за логистичния модел и модела на Gompertz.

4. Разгледана е началната задача за класическата система на Lotka-Volterra с едно импулсно въздействие. Върху траекторията, определена от началното условие, е намерена единствена точка, притежаваща следното оптимално свойство. След минимално по големина импулсно въздействие, пропорционално на биомасите на жертвата и хищника, еволюционният процес продължава по траектория, върху която обемите на популациите са ограничени от предварително зададени константи.

5. За класическата система на Lotka-Volterra е въведено понятието I-оптимална крива. Тази крива е разположена във фазовото пространство на системата и пресича всяка една от траекториите на системата най-много един път. Точките от I-оптималната крива притежават следното оптимално свойство. След импулсно въздействие с големина I, пропорционално на биомасите на жертвата и хищника, еволюционният процес продължава по траектория, която е "максимално близка" до устойчивия център на системата. За I-оптималната крива са доказани: непрекъснатост и монотонност по всички параметри и линейна асимптотичност.

Библиография

[AD97] J. Angelova and A. Dishliev, *Continuous dependence and uniform stability of solutions of impulsive differential equations on impulsive moments,* Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, Vol. 28, No. 5, 1997, pp. 825–835.

[AD98] J. Angelova and A. Dishliev, *Optimization problems in population dynamics,* Applicable Analysis, Vol.69, No. 3-4, 1998, pp. 207–221.

[AD99] J. Angelova and A. Dishliev, *Optimization problems for one impulsive models from population dynamics,* Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, to appear.

[BC94] D. Bainov and V. Covachev, *Impulsive differential equations with a small parameter,* World Scientific Publishers, Singapore, 1994.

[BD89] D. Bainov and A. Dishliev, *Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for regeneration of a biomass taken away from population,* Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, Vol. 42, No. 12, 1989, pp. 29–32.

[BD90] D. Bainov and A. Dishliev, *Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses,* Int. J. Systems Sci., Vol. 21, No. 12, 1990, pp. 2637–2643.

[BS89] D. Bainov and P. Simeonov, *Systems with impulse effect. Stability, theory and applications,* Ellis Horwood Ltd, 1989.

[BS92] D. Bainov and P. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations. Periodic solutions and applications,* Longman Ltd, 1992.

[BKM94] D. Bainov, S. Kostadinov and N. V. Minh, *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations,* Science Culture Technology Publishing, Singapore, 1994.

[DB88] A. Dishliev and D. Bainov, *Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces,* J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 135, No. 2, 1988, pp. 369–382.

[DB90] A. Dishliev and D. Bainov, *Dependence upon initial conditions and parameter of solutions of impulsive differential equations with variable structure,* Int. J. of Theoretical Physics, Vol. 29, No. 6, 1990, pp. 655–676.

[DB92] A. Dishliev and D. Bainov, *Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations,* Int. J. of Theoretical Physics, Vol. 31, No. 2, 1992, pp. 363–373.

[Ede88] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical models in biology,* Random House, New York, 1988.

[Fre80] H. Freedman, *Deterministic mathematical models in population ecology,* Marcel Dekker, New York, 1980.

[Gan94] M. Gander, *A non spiraling integrator for the Lotka-Volterra eqautions,* Il Volterriano, No. 4, 1994, pp. 21–28.

[Gop84a] K. Gopalsamy, *Global asymptotic stability in Volterra's population systems,* J. Math. Biology, No. 19, 1984, pp. 157–168.

[Gop84b] K. Gopalsamy, *Delayed responses and stability in two-species systems,* J. Austral. Math. Soc.,Ser. B, No. 25, 1984, pp. 473–500.

[Gop92] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Netherlands, 1992.

[Hir82] M. Hirsch, *Systems of differential eqautions which are cooperative. I. Limit sets,* SIAM J. Math. Anal., No. 13, 1982, pp. 167–179.

[Hir85] M. Hirsch, *Systems of differential eqautions that are competitive or cooperative. II. Convergence almost everywhere,* SIAM J. Math. Anal., No. 16, 1985, pp. 423–439.

[Hir88] M. Hirsch, *Systems of differential eqautions which are competitive or cooperative. III. Competing species* , Nonlinearity, No. 1, 1988, pp. 51–71.

[LBS90] V. Lakshmikantham , D. Bainov and P. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations,* World Scientific Publishers, Singapore, 1990.

[Liu92] X. Liu, *Practical stabilization of control systems with impulse effects,* J. of Math. Analysis and Applications, Vol. 166, No. 2, 1992, pp. 563–576.

[Nen98] S. Nenov, *Impulsive controllability and optimization problems. Lagrange's method and applications,* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, Vol. 17 , No. 2 , 1998 , pp. 501–512.

[Nen99] S. Nenov, *Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, No. 36, 1999, pp. 881–890.

[PD82] S. Pandit and S. Deo, *Differential systems involving impulses,* Springer-Verlag, 1982.

[Red96] D. Redfern, *The maple handbook: Maple V Release 4,* Springer-Verlag, New York, 1996.

[Rob95] C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos* Studies advanced mathematics, CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1995.

[Ver90] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems,* Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

[Yos66] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method,* Gakujutsutosho Printing Co.,Tokyo, Japan, 1966.

[Вас97] В. Василев, *УлтимативниятTEX. Удоволствието да правим предпечатна подготовка сами,* Изд. "Интела", София, 1997.

[Вол76] В. Вольтерра, *Математическая теория борьбы за существование,* Наука, Москва, 1976.

[ГГППР74] А. Гимельфарб, Л. Гинзбург, Р. Полуэктов, Ю. Пых, В. Ратнер, *Динамическая теория биологических популяции,* Наука, Москва, 1974.

[Кол72] А. Колмогоров, *Качественное изучение математических моделей динамики популяцийй,* Проблемы кибернетики, Вып. 25, 1976, сс. 100-106

[КФ76] А. Колмогоров и С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа,* Наука, Москва, 1976.

[Мар83] Дж. Марри, *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии,* Мир, Москва, 1983.

[ММ60] В. Мильман и А. Мышкис, *Об устойчивости движения при наличии толчков,* Сиб. мат. журн., Том 1, Кн. 2, 1960, сс. 233–237.

[ММ63] В. Мильман и А. Мышкис, *Случайные толчки в линейных динамических системах. В кн.: Приближеннные методы решения диференциальных уравнений,* Изд. АН УССР, Киев, 1963, сс. 64-81.

[ПЗ86] Л. Петросян и В. Захаров, *Введение в математическую экологию,* Изд. Лен. Унив., Ленинград, 1986.

[Пых83] Ю. Пых, *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики,* Наука, Москва, 1983.

[СП87] А. Самойленко и Н. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием,* Вища школа, Киев, 1987.

[Спи93] М. Спивак, *Восхитетвельный TEX: руководство по комфортному изготовлению научных публикаций в пакете AMS-TEX,* Мир, Москва, 1993.

[ФГ80] В. Федоров и Т. Гильманов, *Экология,* Изд. МГУ, 1980.

[ХВ74] А. Халанай и Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем,* Мир, Москва, 1974.

[Хар70] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения,* Мир, Москва, 1970.

[ХС97] У. Харъл и У. Стюарт, *Тайните на CorelDRAW 7,* ИК Алекс Софт, 1997.

[ХП83] В. Хатсон и Дж. Пим, *Приложения функционального анализа и теории операторов,* Мир, Москва, 1983.