СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

Владимир Димитров Самодивкин

ДОМИНИРАНЕ В ГРАФИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен "Доктор" по научната специалност 01.01.12

Научен консултант:

доц. д-р Владимир Т. Тодоров

София

2002

СЪДЪРЖАНИЕ

Въведение

0.1 Общи определения и означения

Нека V е крайно непразно множество, а E - съвкупност от 2-елементни подмножества на V. Наредената двойка $G = (V, E)$ се нарича граф. Елементите на V са върхове, тези на E - ребра на G. За по - голяма яснота понякога вместо V и E ще пишем съответно $V(G)$ и $E(G)$. Недефинираните понятия и означения са както в [16]. Означенията и наименованията на инвариантите, свързани с доминирането в графи, са съобразени с тези от [58] и [59].

Множеството от върхове, съседни с връх x на графа G, се означава с $N(x, G)$ и се нарича отворена околност на x в G. Затворена околност на x в G е $N[x, G] = N(x, G) \cup \{x\}$. Степента на върха x в графа G е $|N(x.G)|$ и се бележи с $d(x, G)$. Минимумът на степените на върховете се бележи с $\delta(G)$, а максимумът - с $\Delta(G)$. Връх от степен 1 е висящ, а ребро, инцидентно с висящ връх, е висящо. Множеството от върховете, съседни с някой връх на V_1, където $V_1 \subseteq V(G)$, се бележи с $N(V_1, G)$, а $N[V_1, G] = N(V_1, G) \cup V_1$. За графите $G = (V, E)$ и $G_1 = (V_1, E_1)$ се казва, че G е подграф на G_1, ако $V \subseteq V_1$ и $E \subseteq E_1$. В този случай G_1 е надграф на G. Ако V_1 е подмножество на $V(G)$, то $< V_1, G >$ е породеният от V_1 подграф на G. Допълнителният граф на G се означава с $\overline{G}$. Пълният граф с n върха е K_n, а 2 - регулярният граф с n върха - C_n. Нека G и F са графи. G е F-свободен, ако в G няма породен подграф изоморфен на F. Инвариант на граф е такова свойство, което е налице във всички графи, изоморфни на него. Ако G_1, G_2 са графи без общи ребра, то $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ е обединението на тези графи.

Отстраняването на връх v от граф G води до подграф $G - v$, съдържащ всички върхове на G с изключение на v и всички ребра на G, които нямат за край v. Отстраняването на множество M от върхове на G води до подграф $G - M$, съдържащ върховете на G извън M и ребрата на G, които нямат край в M. Отстраняването на ребро e от граф G води до подграф $G - e$, който има същите върхове като G и същите ребра с изключение на e. Добавянето на ребро e на графа $\overline{G}$ към графа G води до графа $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$.

Графът G е x-съчленяване на графите G_1 и G_2, ако $G = G_1 \cup G_2$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$.[18]

Нека G е граф , $v \in V(G)$ и $v' \notin V(G)$. Тогава разширение на G с v' (през v) е граф, който се означава с $< G, v, v' >$ и за който $V(< G, v, v' >) = V(G) \cup \{v'\}$ и $E(< G, v, v' >) = E(G) \cup \{v'u : u \in N[v, G]\}$.[42]

В глава 1 ще използваме и насочени графи. Нека V е крайно непразно множество, а $\overrightarrow{E}$ е съвкупност от две по две различни наредени двойки от различни елементи на V. Наредената двойка $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ се нарича насочен граф. Ако $a, b \in V$ и $(a, b) \in \overrightarrow{E}$, то наредената двойка (a, b) ще означаваме с $\overrightarrow{ab}$.

0.2. Определения и означения в доминирането на графи. Постановка на проблема.

Нека G е граф и $S \subseteq V(G)$. Множеството S се нарича *доминиращо множество* за графа G, ако всеки връх $v \in V(G) - S$ е съседен с поне един връх от S. Най - малкото число k, за което G има доминиращо множество от k върха се нарича *число на доминиране* и се означава с $\gamma(G)$. Всяко доминиращо множество с $\gamma(G)$ върха се нарича γ - *множество*. Множеството от всички γ - множества на графа G ще означаваме с $\mathcal{D}(G)$. Едно доминиращо множество е *минимално*, ако няма собствено подмножество, което е доминиращо. Множеството на всички минимални доминиращи множества за графа G се означава с $MDS(G)$. Най-голямото число k за което съществува елемент на $MDS(G)$ с k върха се нарича *горно число на доминиране* и се бележи с $\Gamma(G)$.

Множеството S се нарича *ефикасно доминиращо (съвършен код)*, ако за всеки връх $v \in V(G)$ е изпълнено $|N[v, G] \cap S| = 1$. [11]

Множеството S се нарича *съвършено доминиращо* , ако за всеки връх $v \in V(G) - S$ е изпълнено $|N[v, G] \cap S| = 1$. [31] Най-малкото число k за което съществува съвършено доминиращо множество в графа G се бележи с $\gamma_p(G)$ и се нарича *число на съвършено доминиране.*

Множеството S се нарича *локаторно доминиращо* , ако за всеки два различни върха $v, w \in V(G) - S$ е изпълнено $N(v, G) \cap S \neq N(w, G) \cap S$. [86] Най-малкото число k за което съществува локаторно доминиращо множество в графа G се бележи с $\gamma_L(G)$ и се нарича *число на локаторно доминиране.*

Множеството S се нарича *тотално (отворено) доминиращо*, ако $N(S, G) = V(G)$. Най-малкото число k, за което съществува тотално (отворено) доминиращо множество в графа G се бележи с $\gamma_t(G)$ и се нарича *число на тотално доминиране.* ([28])

Множеството S се нарича *ограничено доминиращо* , ако всеки връх $v \in V(G) - S$ е съседен с някой друг връх от $V(G) - S$. Най-малкото число k, за което съществува ограничено доминиращо множество в графа G се бележи с $\gamma_r(G)$ и се нарича *число на ограничено доминиране* [35].

Множеството S се нарича *нечетно доминиращо* . ако $|N[v, G] \cap S| \equiv 1(\ mod\ 2)$ за всеки връх $v \in V(G)$. Най-малкото число k, за което съществува нечетно доминиращо множество в графа G се бележи с $\gamma_l(G)$ и се нарича *число на нечетно доминиране* [22].

Доматично число на графа $G = (V, E)$, което се означава с $d(G)$, е най-голямото число k, за което съществува разлагане на множеството V като обединение на k дизюнктни доминиращи множества [32].

Множеството S се нарича *независимо*, ако графът $< S, G >$ е без ребра. *Максимално независимо* множество е независимо множество, което не е собствено подмножество на друго независимо множество. Най-малкото число k, за което съществува максимално независимо множество с k върха в G, се нарича *число на независимо доминиране* и се бележи с $i(G)$. Всяко независимо доминиращо множество с $i(G)$ върха се нарича *i-множество.* Множеството на всички i-множества на графа G ще означаваме с $\mathcal{I}(G)$. Множеството на всички максимални независими множества ще означаваме с $MInS(G)$.

Хроматично разлагане на графа $G = (V, E)$ се нарича всяко разлагане на множеството V от върховете му като обединение на дизюнктни независими множества, които се наричат класове на хроматично разлагане. Хроматичните разлагания с минимален брой хроматични класове се наричат минимални хроматични разлагания, а броят на класовете в такова разлагане - *хроматично число*; означава се с $\chi(G)$.

Нека μ е числов инвариант на графа G. μ-стабилност на G по отношение на операцията отстраняване на връх е е най-малкото число k, за което съществуват k върха на графа, отстраняването на които променя μ. μ^+-стабилност (съответно μ^--стабилност) на G по отношение на операцията отстраняване на връх е най-малкото число k, за което съществуват k върха на графа, отстраняването на които води до увеличаване (намаляване) на μ. Аналогично се дефинират и стабилност по отношение на операцията добавяне на ребро и и по отношение операцията отстраняване на ребро. Тези понятия са въведени от *F. Harary* в [51] през 1982г.

Системното изучаване на доминирането в графи започва в началото на 60-те години на 20 в. с книгите на *Берж* [14], [13] и *Оре* [76], като на последния дължим термина "доминиране". До 1977 г. изследванията са главно в рамките на алгоритмични въпроси. свързани с доминирането [15]. [30], [41], [73]. [75]. Статията на *Кокайне* и *Хедетниеми* [32] с програмните си тезиси предизвика голям интерес сред специалистите и стимулира развитието на значителен брой нови идеи. отнасящи се до тази проблематика. През 1998 г. излизат [58] и [59] , в които са сумирани и систематизирани почти всички резултати, получени дотогава. Към този момент понятийният апарат и терминологията в тази област вече са общоприети и унифицирани. Досега са въведени повече от 75 типа доминиращи множества и, съответно, числа на доминиране. които се групират в 10 категории :

Категория А: На всяко доминиращо множество S е наложено ограничение върху $< S, G >$ и (или) $V(G) - S$. Тук са независимото, тоталното, свързаното и други доминирания. (общо 12)([3], [4], [15], [25]. [27], [56]. [63], [60], [99], [100], [64], [103]).

Категория В: Ограниченията върху всяко доминиращо множество S се отнасят до това какви свойства има $N(v, G)$ за всеки връх $v \in V(G) - S$. В нея влизат слабото и силното доминиране ([83], [79]), локаторното доминиране ([86]), к-доминирането [45], съвършеното доминиране, K_k-доминиране [65], пълното доминиране [17] и α-доминирането [39].

Категория С: Ограниченията тук са свързани с намиране на мярка за степента на доминиране на доминиращо множество върху всеки връх. Тук спадат глобалното, факторното , к-пъти доминирането и др. ([52], [20]),(общо 9).

Категория D: Ограниченията са силни и не всеки граф има такъв тип доминиращо множество. Тази група се състои от кликово доминиране [68], [69], циклово доминиране . верижно доминиране [46], ефикасно и ефикасно отворено доминиране [11], двучастово доминиране и ациклично доминиране [62].

Категория Е: Нека $f : V \to I$, където I е множество от цели числа. Тегло на f е $w(f) = \Sigma_{v \in V} f(v)$. Тук типовете доминиране са свързани с ограничения за I и минимизиране на $w(f)$ ([38], [37], [34]) и др. - общо 9 типа.

Категория F: Включва дистанционно доминиране или, еквивалентно на това, доминиране в произведения на графи - общо 8 типа ([24], [26]).

Категория G: Типове на доминиране, свързани с върхове и ребра в ребрени, тотални и усреднени графи (както и в някои техни специални подграфи) - общо 7 - ([88], [2], [57]).

Категория N: Включва типове доминиране, свързани с няколко доминиращи множества едновременно. Това са доматичното, итерационното и др. - общо 5 типа ([32], [102], [80], [89]).

Категория I: Тук доминиращото свойство е съчетано с друго граф-теоретично свойство - например оцветяване, 1-фактор и др. -

4 типа ([85], [87]).

Категория J: Тук влизат типове характеристики, близки до доминирането, като например: покрития с върхове, ребра [9] и околности [21]; иредундантност [61]; кодове ; безанклавни множества ;число на независимост ; число на подкрепление и др. (поне 23 типа).

Въвеждането на повечето от тези типове доминиране в теорията е станало по пътя на обобщението на различни практически задачи, някои от които с много голямо значение. Например избор на ефективна система от представители, оптимално организиране на комуникационна мрежа, (r, d)-конфигурации, в теорията на социалните връзки ([47], [66]) и др. Въпреки това, основните задачи и направления при изследването на доминирането в графи сега се определят главно от потребностите на теорията. Такива са, например, задачата за намиране на различни връзки между типовете доминиране, задачата за намиране на зависимости между типовете доминиране и други граф-теоретични свойства, характеризирането на критичните по отношение на типа доминиране графи спрямо даден клас операции, намиране на екстремални графи и т.н. ([7], [8], [10], [29], [50], [58]).

Тъй като намирането на доминиращите параметри е NP-пълен проблем ([49]), то е естествено да се търсят оценки за числата на доминиране с комбинаторни и вероятностни методи.

За изучаването на даден числов инвариант на граф, като важна задача се счита тази за намирането на стабилноста на този инвариант по отношение на определен клас от операции приложени върху графа (*Харари* [51]). В настоящата работа се изучава стабилноста на числото на доминиране $\gamma(G)$ и тази на числото на независимо доминиране $i(G)$ на граф G по отношение на операциите *отстраняване на връх, отстраняване на ребро* и *добавяне на ребро*. Продължени са изследвания на *Валикар и Ашариа* [98], *Бауер, Харари, Ниеминен и Суфел* [12], *Бригхам, Чин и Дутън* [19], *Карингтон, Харари и Хейнс* [23], *Дутън и Бригхам* [40], *Сампаткумар и Ниерлаги* [82], *Самнер и Блитч* [91], *Тешнер* [94] и др.

За първи път стабилност на $\gamma(G)$ е изследвана от *Бауер, Харари, Ниеминен и Суфел* през 1983 в [12]. Използваните операции там са отстраняване на ребро и отстраняване на връх. Изучаването стабилноста на $\gamma(G)$ по отношение на операцията добавяне на ребро е започнато с работата на *Самнер и Блитч* [91]. Да отбележим, че γ-стабилността по отношение на операцията отстраняване на ребро се нарича *число на зависимост* [44], а γ-стабилността по отношение на операцията добавяне на ребро се нарича *число на подкрепление* [67] (използува се и термина *число на ко-зависимост [70]*).

През 1992г *Карингтон, Харари и Хейнс* разглеждат в [23] следните шест класа графи, свързани с γ - стабилността на графите по отношение на операциите отстраняване на връх, добавяне на ребро и отстраняване на ребро:

- (CVR) $\gamma(G-v) \neq \gamma(G)$ за всеки връх $v \in V(G)$
- (CER) $\gamma(G-e) \neq \gamma(G)$ за всяко ребро $e \in E(G)$
- (CEA) $\gamma(G+e) \neq \gamma(G)$ за всяко ребро $e \in E(\overline{G})$
- (UVR) $\gamma(G-v) = \gamma(G)$ за всеки връх $v \in V(G)$
- (UER) $\gamma(G-e) = \gamma(G)$ за всяко ребро $e \in E(G)$
- (UEA) $\gamma(G+e) = \gamma(G)$ за всяко ребро $e \in E(\overline{G})$.

(Акронимите, които се използуват имат следните значения: C - промяна; U - непромяна; V - връх; E - ребро; R - отстраняване; A - добавяне.)

Там е поставен и въпросът за характеризирането на тези класове графи. Трябва да отбележим, че:

1. Всеки от класовете (CVR), (CER) и (CEA) е критичен по отношение на определящата го операция;
2. (CER)-графите са са характеризирани в [98] и независимо в [12];
3. (CVR)-графите са въведени от *Бригхам, Чин и Дуттон* през 1984г в [18] под названието *върхово γ-критични графи,*
4. (CEA)-графите са известни и с названието *ребрено γ-критични графи* [91].
5. Изучаването на (UER) и (UEA) графите започва от 1992г. Основните резултати са свързани главно с намирането на оценки за числото на зависимост на (UER)-графите и числото на подкрепление на (UEA)-графите. При това почти всички резултати се отнасят за специални класове от графи. ([94])

Всеки граф G с $\gamma(G) = k$ е подграф на ребрено γ - критичен негов надграф F със същия брой върхове и същото число на доминиране [90]. В този случай F се нарича *ребрено продължение на* G.

Нека G е граф и $e \in E(\overline{G})$. Реброто e се нарича *критично*, ако $\gamma(G) < \gamma(G+e)$. Ако $\gamma(G) = \gamma(G+e)$, то e е *неутрално*.

Нека G е граф и $e_1, .., e_t$ са ребрата на $\overline{G}$. Получаването на ребрено продължение F на G може да се осъществи посредством следния алгоритъм:

$F := G$. За $i = 1$ до t: ако реброто e_i е неутрално за F, то $F := F + e$.

Всяко ребрено продължение на върхово γ-критичен граф е едновременно върхово γ-критичен граф и ребрено γ-критичен граф [18].

При изучаване резултатите от действието на операцията отстраняване на връх от граф G върху изменението на числото на доминиране естественият подход е бил разглеждането на следното разлагане на множеството от върхове на графа G :

$$V(G) = V_0 \cup V^+ \cup V^-,$$

където: $V_0 = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) = \gamma(G)\}$; $V^+ = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) > \gamma(G)\}$ и $V^- = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) < \gamma(G)\}$. ([12], [23], [58], [93]).

Сампаткумар и Ниерлаги в [82] разглеждат разбиване на множеството от върховете на граф в зависимост от принадлежността или не на връх на графа към някое γ - множество. Независимо от тях, същото разлагане е разглеждано от *Тешнер* в [94] и от автора в 1). Дефинират се (означенията са както в 1):

$\mathcal{D}(G)$ - *множеството на всички γ - множества на графа G.*

$D(G) = \{x \in V(G) | x$ *е елемент на някое γ - множество на* $G\}$.

$DN(G) = V(G) - D(G)$

$DK(G) = \{x \in V(G) | x$ *е елемент на всяко γ - множество на* $G\}$

$DK_p(G) = \{x \in V(G) | \gamma(G-x) = \gamma(G) + p\}$ *за* $p \geq 1$

$DK_q(G) = \{x \in DK(G) | \gamma(G-x) = \gamma(G) + q\}$ *за* $q \in \{-1, 0\}$

$D_0(G) = \{x \in D(G) - DK_0(G) | \gamma(G-x) = \gamma(G)\}$

$D_{-1}(G) = \{x \in V(G) - DK_{-1}(G) | \gamma(G-x) = \gamma(G) - 1\}$

$D^0(G) = \{x \in V(G) | \gamma(G-x) = \gamma(G)\}$.

Допълнително дефинираме:(за граф G и негов връх x)

$\mathcal{D}(\{x\}, G) = \{M \in \mathcal{D}(G) | x \in M\}$

$MDS(\{x\}, G) = \{M \in MDS(G) | x \in M\}$

Да отбележим следната:

Теорема А1 *Нека G е граф. и $|V(G)| = n \geq 2$. Тогава:*

(*i*) *[82] Всеки връх на графа G е елемент на някое от множествата $DN(G), DK(G), D_0(G)$ и $D_{-1}(G)$;*

(*ii*) *[82]* $DK(G) = \cup_{p=-1}^{n-2} DK_p(G)$ *и* $DK_{-1}(G) = \{x \in V(G) | d(x, G) = 0\}$;

(*iii*) *[12]* $D(G) = D_{-1}(G) \cup D_0(G) \cup DK(G)$;

(*iv*) *[23]* $D^0(G) = DN(G) \cup D_0(G) \cup DK_0(G)$.

Елементите на множеството $DN(G)$ се наричат *γ-неутрални*, тези на $DK(G)$ *γ-неподвижни* (използува се и термина *γ--фиксирани*, тези на $D_0(G)$ - *γ-свободни* и елементите на $D_{-1}(G)$ се наричат *γ-критични* [82], [94].

Централно значение в работата има следното:
Определение 0.1 За графът G наредената 4-ка множества

$$(DK(G), D_0(G), D_{-1}(G), DN(G))$$

ще наричаме *γ-разлагане*. Множествата $DK(G), D_0(G), D_{-1}(G)$ и $DN(G)$ ще наричаме *елементи* на γ-разлагането. За всеки два графа G_1 и G_2 ще казвме, че имат едно и също γ-разлагане, ако едновременно са изпълнени равенствата: $DK(G_1) = DK(G_2)$, $D_0(G_1) = D_0(G_2)$, $D_{-1}(G_1) = D_{-1}(G_2)$ и $DN(G_1) = DN(G_2)$.

В настоящата работа ще изучаваме резултатите от действието на операцията добавяне на ребро $e = x_1x_2$ върху върховете на граф, а именно:

(1) *локално* (върху краищата x_1 и x_2 на добавеното ребро): при дадена принадлежност на несъседните върхове x_1 и x_2 на граф G, към елементи на неговото γ-разлагане, да се намери принадлежността на x_1 и x_2 към елементи на γ-разлагането на графа $G + x_1x_2$.

(2) *глобално* (върху γ - разлагането): намиране връзки между γ-разлагането на графа G и γ-разлагането на графа $G + x_1x_2$.

Едновременно с това ще изучаваме и :

(3) измененията, в описаните по-горе случаи, на: множеството от γ-множествата на графа. (Да отбележим, че това се прави за първи път.)

Всичко това има непосредствено отношение към възможностите за проследяване на трансформациите, които претърпява един граф в процеса на преобразуването му, по описания по-горе алгоритъм, в негово ребрено продължение. С помоща на този алгоритъм, всеки (UEA)-граф G се преобразува в ребреното си продължение F, т.е. в (CER)-граф. В процеса на това трансформиране се запазва числото на доминиране, но в общия случай могат да се променят γ-разлагането и множеството от γ-множествата.

Аналогични изследвания ще извършим и по отношение на операцията отстраняване на ребро. Ще изследваме въздействието на тази операция и върху графите от класовете (CER) и (UER).

За изследване на инвариантите, свързани с доминиране в графи съдържащи разрязващи върхове, от първостепенно значение е влиянието на описаните по-горе операции върху разрязващите върхове на графа.

Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Ще направим пълно изследване на възможностите върхът x да принадлежи на определен елемент на γ - разбиването на G, ако е известна принадлежността му към елементи на γ - разбиванията на G_1 и G_2.

По нататък ще се нуждаем от следните определения, свързани с граф G и неговото число на независимо доминиране $i(G)$:

Определение 0.2
$\mathcal{I}(G)$ - *множеството на всички i-множества на графа G.*
$I(G) = \{x \in V(G) | x \text{ е елемент на някое } i\text{-множество на } G\}$
$IN(G) = V(G) - I(G)$
$IK(G) = \{x \in V(G) | x \text{ е елемент на всяко } i\text{-множество на } G\}$
$$IK_p(G) = \begin{cases} \{x \in V(G) | i(G-x) = i(G) + p\} & \text{за} \quad p \geq 1 \\ \{x \in IK(G) | i(G-x) = i(G) + p\} & \text{за} \quad p \in \{-1, 0\} \end{cases}$$
$I_0(G) = \{x \in I(G) - IK_0(G) | i(G-x) = i(G)\}$
$I_{-1}(G) = \{x \in V(G) - IK_{-1}(G) | i(G-x) = i(G) - 1\}$
$I^0(G) = \{x \in V(G) | i(G-x) = i(G)\}$.

Някои свойства на множеството $I_{-1} \cup IK_{-1}$ са разгледани в [6], а на $IK(G)$, когато G е дърво, в [74].

Определение 0.3 За графът G наредената четворка множества

$$(IK(G), I_0(G), I_{-1}(G), IN(G))$$

ще наричаме *i-разлагане.* Множествата $IK(G), I_0(G), I_{-1}(G)$ и $IN(G)$ ще наричаме *елементи на i-разлагането.*

За i-стабилността на графите по отношение на операциите отстраняване на връх, добавяне на ребро и отстраняване на ребро дефинираме (аналогично на случая на γ-стабилност) следните шест класа графи:

Определение 0.4

- $(CVR)_i$ $i(G - v) \neq i(G)$ за всеки връх $v \in V(G)$
- $(CER)_i$ $i(G - e) \neq i(G)$ за всяко ребро $e \in E(G)$
- $(CEA)_i$ $i(G + e) \neq i(G)$ за всяко ребро $e \in E(\overline{G})$
- $(UVR)_i$ $i(G - v) = i(G)$ за всеки връх $v \in V(G)$
- $(UER)_i$ $i(G - e) = i(G)$ за всяко ребро $e \in E(G)$
- $(UEA)_i$ $i(G + e) = i(G)$ за всяко ребро $e \in E(\overline{G})$.

(Акронимите. които се използуват имат следните значения: C - промяна; U - непромяна; V - връх; E - ребро; R - отстраняване; A - добавяне.)

Аналогични изследвания, с тези за $\gamma(G)$ и γ-разлагането на граф, ще извършим и върху числото на независимо доминиране и i-разлагането на граф, макар и в една рестриктивна форма - главно за графи с разрязващи върхове.

За изучаването на отделен клас от графи с естествените за теорията на графите методи е необходимо и съответно характеризиране на този клас. Измежду различните характеризации на един клас $\mathcal{S}$ от графи особен интерес представляват конструктивните, т.е. тези, при които се определя минимална подсъвкупност $\mathcal{S}_0$ на $\mathcal{S}$, от която $\mathcal{S}$ се получава чрез прилагане на система Σ от операции. При това, разбира се, съвкупността $\mathcal{S}_0$ трябва да бъде позната, а Σ да съдържа естествени за $\mathcal{S}$ операции.

В настоящата работа ще бъдат конструктивно характеризирани някои класове от ациклични графи, на които само два от елементите на γ-разлагането или на i-разлагането им са различни от празното множество.

Ще получим и характеризация на дърветата с число на независимо доминиране равно на половината от броя на върховете им.

1 ГЛАВА

ДОМИНИРАЩИ МНОЖЕСТВА

1.1 Минимални доминиращи множества в x-съчленение

Изучаването на множеството $MDS(G)$ на графа G досега се е свеждало до намиране на оценки за числата $\gamma(G)$ и $\Gamma(G)$. В този параграф ще намерим връзки между множествата $MDS(G_1), MDS(G_2)$ от една страна, и множеството $MDS(G)$ от друга, където G е граф, който е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

Твърдение 1.1.1 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Нека $x \in M \in MDS(G)$ и $M_j = M \cap V(G_j)$ за $j = 1, 2$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

(i) $M_j \in MDS(G_j)$ *за* $j = 1, 2$;

(ii) Съществуват числа l и m, че $\{l, m\} = \{1, 2\}$, $M_l \in MDS(G_l)$, $M_m - \{x\} \in MDS(G_m)$ и за всеки връх $v \in M_m - \{x\}$: $M_v = M_m - \{v\}$ не е доминиращо множество в G_m.

Доказателство: От $x \in M$ следва, че M_j е доминиращо множество на G_j , $j = 1, 2$. Да допуснем,че $M_j \notin MDS(G_j)$ за $j = 1, 2$. Тогава ще има връх u_1 , $u_1 \in M_1$ и връх $u_2 \in M_2$, че $M_j - \{u_j\}$ е доминиращо множество на G_j , $j = 1, 2$. Следователно $(M_1 - \{u_1\}) \cup (M_2 - \{u_2\}) = M - (\{u_1\} \cup \{u_2\})$ е доминиращо множество на G, което е в противоречие с $M \in MDS(G)$.

Оттук, без загуба на общност, можем да считаме,че $M_1 \notin MDS(G_1)$ и $M_2 \in MDS(G_2)$. Тогава, има връх $u \in M_1$ такъв, че $M_1 - \{u\}$ е доминиращо множество на G_1 . Ако $u \neq x$, то $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G - противоречие. Следователно $u = x$ и $M_1 - \{x\}$ е доминиращо множество на G_1 . Допускаме, че $M_1 - \{x\} \notin MDS(G_1)$. Тогава има връх $w \in M_1 - \{x\}$ такъв, че $M_1 - \{x, w\}$ е доминиращо множество на G_1 . Оттук $M - \{w\}$ е доминиращо множество на G, което е в противоречие с определението на M. Следователно $M_1 - \{x\} \in MDS(G_1)$. Нека $v \in M_1 - \{x\}$ и допуснем, че $M_1 - \{v\}$ е доминиращо множество на G_1. Тогава $M - \{v\}$ е доминиращо множество на G - противоречие. с което твърдението е доказано.

Твърдение 1.1.2 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2, $|V(G_i)| > 1$ за $i = 1, 2$. Нека $x \notin M \in MDS(G)$ и $M_j = M \cap V(G_j)$, $j = 1, 2$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

(*i*) $M_j \in MDS(G_j)$ *за* $j = 1, 2$.

(*ii*) *Съществуват числа* l *и* m, *че* $\{l, m\} = \{1, 2\}$, $M_l \in MDS(G_l)$, $M_m \in MDS(G_m - x)$ *и* M_m *не е доминиращо множество на* G_m.

Доказателство: Нека за определеност M_1 е доминиращо множество на G_1. Допускаме,че $M_1 \notin MDS(G_1)$. Тогава има връх $u \in M_1$ такъв, че $M_1 - \{u\}$ е доминиращо множество на G_1 и тогава $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G - противоречие. Оттук $M_1 \in MDS(G_1)$. Аналогично, ако M_2 е доминиращо множество на G_2, то $M_2 \in MDS(G_2)$. Сега нека M_2 не е доминиращо множество на G_2. Тогава M_2 е доминиращо множество на $G_2 - x$ Допускаме, че $M_2 \notin MDS(G_2 - x)$. В такъв случай има връх $v \in M_2$ такъв, че $M_2 - \{v\}$ е доминиращо множество на $G_2 - x$ и следователно $M - \{v\}$ е доминиращо множество на G - противоречие.

Твърдение 1.1.3 *Нека графът* G *е* x*-съчленение на графите* G_1 *и* G_2. *Нека* $x \notin M_j \in MDS(G_j)$ *за* $j = 1, 2$. *Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

(*i*) $M_1 \cup M_2 \in MDS(G)$.

(*ii*) *съществуват* $l \in \{1, 2\}$ *и* $u \in V(G_l)$, *че* $\{u\} = N(x, G_l) \cap M_l$, $M_l - \{u\} \in MDS(G_l - x)$ *и* $(M_1 \cup M_2) - \{u\} \in MDS(G)$.

Доказателство: Нека $M = M_1 \cup M_2$. Тогава M е доминиращо множество на G. Допускаме, че $M \notin MDS(G)$. Следователно има връх u, $u \in M$, че $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G. Нека за определеност $u \in V(G_1)$. Тогава $M_1 - \{u\}$ не е доминиращо множество на G_1 и следователно $M_1 - \{u\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$. Следва, че $\{u\} = N(x, G_1) \cap M_1$. Допускаме, че $M_1 - \{u\} \notin MDS(G_1) - x$. Тогава има връх $v \in M_1 - \{u\}$ такъв, че $M_1 - \{u, v\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$. Оттук - $M_1 - \{v\}$ е доминиращо множество на G_1, което е противоречие. Тъй, че $M_1 - \{u\} \in MDS(G_1 - x)$ и тогава $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G. Допускаме,че $M - \{u\} \notin MDS(G)$. Тогава има връх w, $w \in M - \{u\}$, че $M - \{u, w\}$ е доминиращо множество на G. Ако $w \in V(G_1)$, то $M_1 - \{u, w\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$ - противоречие. Следователно $w \in V(G_2)$ и $M_2 - \{w\}$ е доминиращо множество на G_2,което е противоречие. И така, $M - \{u\} \in MDS(G)$.

Твърдение 1.1.4 *Нека графът* G *е* x*-съчленение на графите* G_1 *и* G_2. *Нека* $x \in M_j \in MDS(G_j)$ *за* $j = 1, 2$. *Тогава* $M_1 \cup M_2 \in MDS(G)$.

Доказателство: Нека $M = M_1 \cup M_2$. Очевидно M е доминиращо множество на G. Допускаме, че $M \notin MDS(G)$. Тогава има връх u, $u \in M$, че $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G . Нека за определеност $u \in V(G_1)$. Ако $u \neq x$,то $M_1 - \{u\}$ е доминиращо множество на G_1 - противоречие. Ако $u = x$, то или $M_1 - \{x\}$ е доминиращо множество на G_1 или $M_2 - \{x\}$ е доминиращо множество на G_2 - противоречие. И така, $M \in MDS(G)$.

Твърдение 1.1.5 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Нека $x \in M_1 \in MDS(G_1)$ и $x \notin M_2 \in MDS(G_2)$ за $j = 1, 2$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

(i) $M_1 \cup M_2 \in MDS(G)$.

(ii) $M_1 - \{x\} \in MDS(G_1 - x)$ *и* $(M_1 \cup M_2) - \{x\} \in MDS(G)$.

(iii) съществува връх $u \in M_2$, че $(M_2 - \{u\}) \cup \{x\}$ е доминиращо множество на G_2 и $(M_1 \cup M_2) - \{u\}$ е доминиращо множество на G.

Доказателство: Нека $M = M_1 \cup M_2$ и нека $M \notin MDS(G)$. Тогава има връх u, $u \in M$ такъв, че $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G. Понеже $x \in M_1 \in MDS(G_1)$, то $u \notin V(G_1) - \{x\}$.

Нека $u = x$. Тогава $M_1 - \{x\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$. Допускаме, че $M_1 - \{x\} \notin MDS(G_1 - x)$. Сега ще има връх v, $v \in M_1 - \{x\}$, че $M_1 - \{x, v\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$. Следователно $M_1 - \{v\}$ е доминиращо множество на G_1 - противоречие. И така, $M_1 - \{x\} \in MDS(G_1 - x)$. Сега допускаме,че $M - \{x\} \notin MDS(G)$. Тогава има връх w, $w \in M - \{x\}$ такъв, че $M - \{x, w\}$ е доминиращо множество на G. Ако $w \in V(G_1)$, то $M_1 - \{x, w\}$ е доминиращо множество на $G_1 - x$ - противоречие. Ако $w \in V(G_2)$, то $M_2 - \{w\}$ е доминиращо множество на G_2, т.е. противоречие. И така, $M - \{x\} \in MDS(G)$.

Нека $u \in M_2$. Тогава $M_2 - \{u\}$ не е доминиращо множество на G_2. Следователно $(M_2 - \{u\}) \cup \{x\}$ е доминиращо множество на G_2 и тогава $M - \{u\}$ е доминиращо множество на G.

Доказаните дотук твърдения ни дават възможност да получим основните неравенства за числото на доминиране в x-съчленение, които в [19] са дадени без доказателство. Да отбележим, че подобни неравенства са намерени още само за доматичното число ([97]) и числото на ребрено доминиране ([92]).

Следствие 1.1.6 *[19] Нека графа G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Тогава $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 \leq \gamma(G) \leq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.*

Доказателство: От твърдение 1.1.1 и твърдение 1.1.2 следва $\gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1 \leq \gamma(G)$. Сега нека $M_j \in \mathcal{D}(G_j)$ за $j=1,2$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е доминиращо множество на G и следователно $\gamma(G_1)+\gamma(G_2) = |M_1| + |M_2| \geq |M_1 \cup M_2| \geq \gamma(G)$.

В следващото твърдение намираме за x-съчленението G на графите G_1 и G_2, кога точно е изпълнено $\gamma(G) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$ и кога $\gamma(G) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1$.

Твърдение 1.1.7 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2 и нека $d(x, G_j) \geq 1$ за $j = 1,2$.*

1. *Ако $x \notin DN(G_1) \cup DN(G_2)$, то $\gamma(G) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1$.*

2. *Ако $x \in DN(G_1) \cap D_{-1}(G_2)$ или $x \in D_{-1}(G_1) \cap DN(G_2)$, то*
$$\gamma(G) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1.$$

3. *Ако $x \in DN(G_1) - D_{-1}(G_2)$ или $x \in DN(G_2) - D_{-1}(G_1)$, то*
$$\gamma(G) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2).$$

Доказателство: 1). Нека $M_i \in \mathcal{D}(G_i)$ за $i=1,2$ и $x \in M_1 \cap M_2$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е доминиращо множество на G с $|M_1 \cup M_2| = \gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1$ върха. От твърдение 1.1.1 - $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$.

2). Нека за определеност $x \in DN(G_1) \cap D_{-1}(G_2)$. Тогава съществува $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$, че $M_2 - \{x\}$ е доминиращо множество на $G_2 - x$. Следва, че $M_1 \cup (M_2 - \{x\})$ е доминиращо множество на G с $\gamma(G_1)+\gamma(G_2)-1$ върха, където $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$. Исканото сега следва от следствие 1.1.6.

3). Нека за определеност $x \in DN(G_1) - D_{-1}(G_2)$. Достатъчно е да докажем,че $\gamma(G) \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$, поради следствие 1.1.6.

Случай 1. Нека $x \in M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $M \cap V(G_i)$ е доминиращо множество на G_i за $i=1,2$. Следователно $|M \cap V(G_1)| \geq \gamma(G_1)+1$ и $|M \cap V(G_2)| \geq \gamma(G_2)$. Оттук $\gamma(G) = |M| \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$.

Случай 2. Нека $x \in DN(G)$ и $M \in \mathcal{D}(G)$. Ако $M \cap V(G_1)$ е доминиращо множество на G_1, то $M \cap V(G_2)$ е доминиращо множество на G_2 или на $G_2 - x$. Тогава $|M| = \gamma(G) \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$. Ако $M \cap V(G_1)$ не е доминиращо множество на G_1, то $M \cap V(G_1)$ е доминиращо множество на $G_1 - x$ и $M \cap V(G_2)$ е доминиращо множество на G_2. Следователно $|M| = \gamma(G) \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$.

В теорема 1.1.8 по дадена принадлежност на върха x към елемент на γ-разлагането на графа G_1 и към елемент на γ-разлагането на графа G_2 е намерена принадлежността на върха x към елемент на γ-разлагането на графа G, който е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

Теорема 1.1.8 *Нека графа G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.*

1. *Нека $x \in DK_p(G_1), p \geq 1$. Ако $x \in D_0(G_2)$, то $x \in DK_{p+1}(G)$. Ако $x \in DK_r(G_2)$ и $r \geq 0$, то $x \in DK_{p+r+1}(G)$. Ако $x \in DN(G_2) \cup D_{-1}(G_2)$, то $x \in DK_p(G)$.*

2. *Нека $x \in DK_0(G_1)$. Ако $x \in DK_0(G_2) \cup D_0(G_2)$, то $x \in DK_1(G)$. Ако $x \in D_{-1}(G_2)$, то $x \in DK_0(G)$. Ако $x \in DN(G_2)$, то $x \in D_0(G)$.*

3. *Нека $x \in D_0(G_1)$. Ако $x \in D_0(G_2)$, то $x \in DK_1(G)$. Ако $x \in DN(G_2) \cup D_{-1}(G_2)$, то $x \in D_0(G)$.*

4. *Нека $x \in D_{-1}(G_1)$. Ако $x \in D_{-1}(G_2)$, то $x \in D_{-1}(G)$. Ако $x \in DN(G_2)$, то $x \in DN(G)$.*

5. *Ако $x \in DN(G_1) \cap DN(G_2)$, то $x \in DN(G)$.*

Доказателство: Очевидно $\gamma(G-x) = \gamma(G_1 - x) + \gamma(G_2 - x)$.

1. Изпълнено е $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + p + \gamma(G_2 - x)$.

Нека $x \in D_0(G_2)$. Тогава $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$. Оттук $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + p + \gamma(G_2)$ и от твърдение 1.1.7: $\gamma(G-x) = \gamma(G) + p + 1$. Следователно $x \in DK_{p+1}(G)$.

Нека $x \in DK_r(G_2), r \geq 0$. Имаме $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2) + r$ и тогава $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p + r = \gamma(G) + p + r + 1$, което следва от твърдение 1.1.7. Оттук - $x \in DK_{p+r+1}(G)$.

Ако $x \in D_{-1}(G_2)$, то $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2) - 1$. Тогава $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p - 1 = \gamma(G) + p$ поради твърдение 1.1.7. Оттук $x \in DK_p(G)$.

Ако $x \in DN(G_2)$ имаме $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$. Следва, че $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p = \gamma(G) + p$.

2. Имаме $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - x)$.

Ако $x \in DK_0(G_2) \cup D_0(G_2)$, то $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$ и тогава $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G) + 1$, което следва от твърдение 1.1.7.

Нека $x \in D_{-1}(G)$. В този случай $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2) - 1$ и тогава $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$, което следва от твърдение 1.1.7. От теорема A1 следва, че $x \in DN(G) \cup D_0(G) \cup DK_0(G)$. Нека $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$, $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$ и $M_2 - \{x\}$ е доминиращо множество на $G_2 - x$. Тогава $x \in M_1$ и $M = M_1 \cup M_2$ е доминиращо множество в G с $|M| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$ върха, т.е. $M \in \mathcal{D}(G)$. Следва, че $x \in D_0(G) \cup DK_0(G)$. Да допуснем, че $x \in D_0(G)$. Нека $M \in \mathcal{D}(G)$ и $x \notin M$. Нека $M_i = M \cap V(G_i)$ за $i = 1, 2$. Ако M_1 е доминиращо множество за G_1, то $|M_1| > \gamma(G_1)$ и M_2 е доминиращо множество за $G_2 - x$. Следователно $\gamma(G) = |M_1| + |M_2| > \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$, с което получаваме противоречие, имайки пред вид твърдение 1.1.7. Следва, че M_1 е доминиращо множество за $G_1 - x$ и M_2 е доминиращо множество за G_2. В този случай $|M_1| = \gamma(G_1)$ и $|M_2| \geq \gamma(G_2)$. Тогава $\gamma(G) = |M| \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$, което е в противоречие с твърдение 1.1.7. Така доказахме, че $x \in DK_0(G)$.

Нека $x \in DN(G_2)$. Тогава $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$ и $\gamma(G - x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$, което следва от твърдение 1.1.7. Така, ако $M_i \in \mathcal{D}(G_i), i = 1,2$ то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$ и $x \in M_1 \cup M_2$. Следователно $x \in D_0(G) \cup DK_0(G)$. Нека $T_1 \in \mathcal{D}(G_1 - x)$ и $T_2 \in \mathcal{D}(G_2)$. Тогава $|T_1| = \gamma(G_1)$, $|T_2| = \gamma(G_2)$, $x \notin T_1 \cup T_2$ и $T_1 \cup T_2$ е доминиращо множество на G с $|T_1 \cup T_2| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$ върха. Следва, че $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{D}(G)$ и $x \notin T_1 \cup T_2$. И така, $x \in D_0(G)$.

3.В този случай $\gamma(G - x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - x)$.

Нека $x \in D_0(G_2)$. Имаме $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$ и от твърдение 1.1.7: $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$. Тогава $\gamma(G) = \gamma(G - x) - 1$, т.е. $x \in DK_1(G)$.

Нека $x \in D_{-1}(G_2)$. Тогава $\gamma(G_2-x) = \gamma(G_2)-1$, откъдето $\gamma(G-x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$. Тъй като $x \in D_0(G_1)$, то съществуват $M_1, M_3 \in \mathcal{D}(G_1)$ такива, че $x \in M_1 - M_3$. Тъй като $x \in D_{-1}(G_2)$, то съществува $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$ такова, че $x \in M_2$ и $M_2 - \{x\}$ е доминиращо множество за $G_2 - x$. Тогава $M_1 \cup (M_2 - \{x\})$ и $M_3 \cup (M_2 - \{x\})$ са от $\mathcal{D}(G)$. Следователно $x \in D_0(G)$.

Нека $x \in DN(G_2)$. Имаме $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$ и тогава $\gamma(G - x) = \gamma(G_1)+\gamma(G_2) = \gamma(G)$. Тъй като $x \in D_0(G_1)$, то съществуват $M_1, M_3 \in \mathcal{D}(G_1)$ такива, че $x \in M_1$ и $x \notin M_3$. Нека $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$. Тогава $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$. Следователно $x \in D_0(G)$.

4. Имаме $\gamma(G_1 - x) = \gamma(G_1) - 1$.

Нека $x \in D_{-1}(G_2)$. Тогава $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2) - 1$. Следователноа $\gamma(G - x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 2 = \gamma(G) - 1$.

Нека $x \in DN(G_2)$. Оттук $\gamma(G_2 - x) = \gamma(G_2)$ и тогава $\gamma(G - x) = \gamma(G_1) - 1 + \gamma(G_2) = \gamma(G)$. Да допуснем, че $x \in D_0(G) \cup DK_0(G)$. Тогава съществува множество $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $M_1 = M \cap V(G_1)$ е доминиращо множество за G_1, $M_2 = M \cap V(G_2)$ е доминиращо множество за G_2 и $x \in M$. Следва, че $|M_1| \geq \gamma(G_1)$, $|M_2| \geq \gamma(G_2) + 1$ и тогава $\gamma(G) = |M| \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, което е в противоречие с твърдение 1.1.7.

5. Имаме $\gamma(G - x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ и от твърдение 1.1.7: $\gamma(G - x) = \gamma(G)$. Да допуснем, че съществува $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $x \in M$. Тогава $M_i = M \cap V(G_i)$ е доминиращо множество за G_i $i = 1,2$. Така $\gamma(G) = |M| \geq \gamma(G_1) + 1 + \gamma(G_2) + 1 - 1$ - противоречие. Следователно $x \in DN(G)$.

От твърдение 1.1.7 и от теорема 1.1.8. непосредствено следва :

Теорема 1.1.9 *Нека графа G е x-съчленение на графите G_1 и G_2 и нека $d(x, G_j) \geq 1$ за $j = 1, 2$.*

1. *Ако $x \in DN(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, то*
   $x \in DN(G_1) \cap DN(G_2)$.
2. *Ако $x \in DN(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$, то*
   $x \in (D_{-1}(G_1) \cap DN(G_2)) \cup (DN(G_1) \cap D_{-1}(G_2))$.
3. *Ако $x \in D_{-1}(G)$, то $x \in D_{-1}(G_1) \cap D_{-1}(G_2)$.*
4. *Ако $x \in D_0(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$, то*
   $x \in (D_{-1}(G_1) \cap D_0(G_2)) \cup (D_0(G_1) \cap D_{-1}(G_2))$.
5. *Ако $x \in D_0(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, то $x \in (DN(G_1) \cap (DK_0(G_2) \cup D_0(G_2))) \cup (DN(G_2) \cap (D_0(G_1) \cup DK_0(G_1)))$.*
6. *Ако $x \in DK_0(G)$, то*
   $x \in (DK_0(G_1) \cap D_{-1}(G_2)) \cup (DK_0(G_2) \cap D_{-1}(G_1))$.
7. *Ако $x \in DK_p(G)$, $p \geq 1$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, то*
   $x \in (DK_p(G_1) \cap DN(G_2)) \cup (DK_p(G_2) \cap DN(G_1))$.
8. *Нека $x \in DK_p(G), p \geq 1$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*
   (*i*) $x \in (DK_p(G_1) \cap D_{-1}(G_2)) \cup (DK_p(G_2) \cap D_{-1}(G_1))$.
   (*ii*) $x \in (D_0(G_1) \cap DK_{p-1}(G_2)) \cap (D_o(G_2) \cap DK_{p-1}(G_1))$.
   (*iii*) $p = 1$ *и* $x \in D_0(G_1) \cap D_0(G_2)$.

С теорема 1.1.9 са характеризирани разрязващите върхове на даден граф по отношение на принадлежността им към елемент на $\gamma-$ разбиването на графа.

Лема 1.1.10 *Нека G е граф, $x \in V(G)$, $y \in N(x, G)$ и $N[x, G] \subseteq N[y, G]$. Тогава $x \notin DK(G)$.*

Доказателство: Нека $x \in D(G)$. Тогава съществува множество $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $x \in M$. Следователно $(M - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{D}(G)$, откъдето $x \notin DK(G)$.

Теорема 1.1.11 *Ако върхът x на графа G е инцидентен само с мостове, то $x \notin DK_0(G)$.*

Доказателство: Ако $d(x) = 1$, то $x \notin DK_0(G)$ поради лема 1.1.10. Тъй, че нека $d(x.G) > 1$ и $T_1, T_2, ..., T_k$ са компонентите на $G - x$. Нека за $i = 1, 2, ..., k$: $G_i =< V(T_i) \cup \{x\}, G >$. Очевидно x е висящ връх за всеки от графите $G_1, ..., G_k$. Следователно $x \notin DK_0(G_i)$ за всяко $i = 1, 2, ..., k$. (вж. лема 1.1.10). Сега прилагайки теорема 1.1.8 последователно към графите x-съчленения: $H_2 = G_1 \cup G_2, H_3 = H_2 \cup G_3, ... H_k = H_{k-1} \cup G_k$, получаваме $x \notin DK_0(H_i)$ за всяко $i = 1, 2, ..., k$. С това всичко е доказано, тъй като $H_k = G$.

Следствие 1.1.12 *[12] За всяко дърво T е изпълнено : $DK_0(T) = \emptyset$.*

Като следствие е получен контрапример на едно твърдение на *Бауер, Харари, Ниеминен и Суфел* [12] за x-съчленения.

Контрапример: В [12] се твърди, че:

" Ако x е разрязващ връх на графа G и x е елемент на всяко най-малко доминиращо множество на G , то $\gamma(G - x) > \gamma(G)$ ".

Същото се твърди и в [81] (1998г.).

Ще отбележим, че това твърдение е невярно. Това е така поради теорема 1.1.8 2). Достатъчно е да покажем, че съществува граф A с $D_{-1}(A) \neq \emptyset$ и граф B с $DK_0(B) \neq \emptyset$.

За $n \geq 6$, нека S_n е граф дефиниран така : $V(S_n) = \{x, y_1, y_2, y_3, z, t_1, ..., t_{n-5}\}$ и $E(S_n) = \{xy_1, xy_2, y_1y_3, y_2y_3, y_3z, zt_1, zt_2, ..., zt_{n-5}\}$. Очевидно $DN(S_n) = \{y_1, y_2, y_3, t_1, ..., t_{n-5}\}$, $DK_{n-5}(S_n) = \{z\}$ и $DK_0(S_n) = \{x\}$.

Тогава графът Q_n, $n \geq 9$, който е x - съчленение на S_{n-3} с копие на C_4 е контрапример за това твърдение. Наистина, върхът x на Q_n е разрязващ връх на Q_n, $x \in DK_0(S_{n-3})$ и очевидно $V(C_4) = D_{-1}(C_4)$. Тогава $x \in DK_0(Q_n)$, което следва от теорема 1.1.8.

Резултатите от този параграф могат да се разглеждат като стъпка към изучаването на γ-разлагането на дърветата, т.е. на графите с най-много разрязващи върхове, а така също и на блоковете - графите без разрязващи върхове.

1.2 Добавяне на ребро

Разгледана е операцията *добавяне на ребро* между два несъседни върха x_1, x_2 на графа G.

С твърдение 1.2.3, твърдение 1.2.5 и твърдение 1.2.6 е отговорено на следните въпроси:

- При дадена принадлежност на x_1 и x_2 към елементи на γ-разлагането на графа G, на кои елементи на γ-разлагането на $G + x_1x_2$ принадлежат x_1 и x_2?

- Критично или неутрално е реброто x_1x_2 за графа G ?

Твърдение A2 *Нека G е граф, и $|V(G)| = n \geq 2$. Тогава:*

(i) *[23] Ако $x \in D_{-1}(G)$, то $N(x, G) \subseteq D_{-1}(G) \cup D_0(G)$;*

(ii) *[?] Ако $x \in DK(G)$, то $N(x, G) \subseteq DK(G) \cup D_0(G) \cup DN(G)$ и $N(x, G) - DK(G) \neq \emptyset$;*

(iii) *[?] Ако $x \in DN(G)$, то $N(x, G) \subset DK(G) \cup D_0(G) \cup DN(G)$ и $N(x, G) - DN(G) \neq \emptyset$.*

Твърдение A3 [91], [82]. *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ Реброто x_1x_2 е критично тогава и само тогава, когато е вярно поне едно от следните твърдения:*

(i) *x_1 е критичен връх и $x_2 \in D(G - x_1)$*

(ii) *x_2 е критичен връх и $x_1 \in D(G - x_2)$*

Ако реброто x_1x_2 е критично, то $|\{x_1, x_2\} \cap M| = 1$ и $M \cup \{x_1, x_2\} \in \mathcal{D}(G)$ за всяко $M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Ако x_1 е критичен връх и $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$, то $N(x_1, G) \cap M = \emptyset$.

Идеята за следващото определение идва от [91].

Определение 1.2.1 *Нека G е граф. Насоченият граф $\overrightarrow{G^{\gamma}}(V, \overrightarrow{E})$ има $V(\overrightarrow{G^{\gamma}}) = V(G)$ и $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^{\gamma}}) = \{\overrightarrow{x_1x_2} : x_2$ е критичен и $x_1 \in D(G - x_2)\}$.*

Следствие A4 [91] *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$. Реброто x_1x_2 е критично тогава и само тогава, когато $\{\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_1}\} \cap \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^{\gamma}}) \neq \emptyset$.*

Твърдение 1.2.2 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G)$ и $x_1 \neq x_2$.*

1. *Нека $x_1 \in D_{-1}(G) \cup DK_{-1}(G)$ и $x_2 \in DK_q(G)$, $q \geq 0$. Тогава $x_2 \in DK(G - x_1) - DK_{-1}(G - x_1)$.*

2. *Нека $x_1 \in D^0(G)$ и $x_2 \in DK_q(G)$, $q \geq 2$. Тогава $x_2 \in DK(G - x_1) - DK_{-1}(G - x_1)$.*

3. *Ако $x_1 \in D_0(G) \cup DN(G)$ и $x_2 \in DK_q(G)$, където $q \in \{0, 1\}$, то $x_2 \in D(G - x_1)$.*

4. *Ако $x_1 \in D_{-1}(G) \cup DK_{-1}(G)$ и $x_2 \in DN(G)$, то $x_2 \in DN(G - x_1)$.*

5. *Ако $x_1 \in DN(G)$ и $x_2 \in D_{-1}(G)$, то $x_2 \in D_{-1}(G - x_1)$.*

Доказателство: Ако $x \in DK_r(G)$, $r \geq 0$, то $d(x, G) > 1$, което следва от лема 1.1.10.

1). Нека $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G-x_1)$. Тогава $M \cup \{x_1\} \in \mathcal{D}(G)$ и $x_2 \notin M \cup \{x_1\}$ - противоречие.

2). Нека $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Тогава $M_1 = M \cup \{x_1\}$ е доминиращо множество за G, $|M_1| = \gamma(G) + 1$ и $x_2 \notin M_1$. Следва, че M_1 е доминиращо множество за $G - x_2$ с $|M_1| = \gamma(G) + 1 < \gamma(G - x_2)$ - противоречие.

3). Нека $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G - x_1)$.

4). Ако $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G - x_1)$, то $x_2 \in M \cup \{x_1\} \in \mathcal{D}(G)$ - противоречие.

5). Нека $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G)$ и $N[M - \{x_2\}, G] = V(G - x_2)$. Тогава $N[M - \{x_2\}, G - x_1] = V((G - x_1) - x_2)$. Тъй като $\gamma(G - x_1) = \gamma(G)$ получаваме, че $x_2 \in D_{-1}(G - x_1) \cup DK_{-1}(G - x_1)$. От твърдение A2 имаме $x_1x_2 \notin E(G)$ и тогава $d(x_2, G - x_1) \neq 0$. Следователно $x_2 \in D_{-1}(G - x_1)$.

Твърдение 1.2.3 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2$, $x_1x_2 \notin E(G)$ и $x_1 \in D_{-1}(G) \cup DK_{-1}(G)$.*

1. *Нека $x_2 \in DK_q(G)$, $q \geq 0$. Тогава $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$, $x_2 \in DK_{q+1}(G + x_1x_2)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$.*

2. *Нека $x_2 \in D_0(G) \cap D(G - x_1)$. Тогава $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$, $x_2 \in DK_1(G + x_1x_2)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$.*

3. *Нека $x_2 \in (D_{-1}(G) \cap D(G - x_1)) \cup DK_{-1}(G)$ и $x_1 \in DN(G - x_2)$. Тогава $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$, $x_2 \in DK_0(G + x_1x_2)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$.*

4. *Нека $x_2 \in (D_{-1}(G) \cap D(G - x_1)) \cup DK_{-1}(G)$ и $x_1 \in D(G - x_2)$. Тогава $x_1, x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$.*

Доказателство: 1). Нека $M \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Тогава $M \cup \{x_1\} \in \mathcal{D}(G)$. Следователно $x_2 \in M$. От твърдение A3: $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$. Следва, че $\gamma((G + x_1x_2) - x_2) = \gamma(G - x_2) = \gamma(G) + q = \gamma(G + x_1x_2) + q + 1$, и тогава $x_2 \in DK_{q+1}(G + x_1x_2)$. Сега от твърдение A3 следва, че $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$.

2). От твърдение A3 : $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$. Следва, че $\gamma((G + x_1x_2) - x_2) = \gamma(G - x_2) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2) + 1$. Тогава $x_2 \in DK_1(G + x_1x_2)$. От твърдение A3 - $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$.

3). От твърдение A3 : $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$. Тогава $\gamma((G + x_1x_2) - x_2) = \gamma(G - x_2) = \gamma(G) - 1 = \gamma(G + x_1x_2)$. Ако $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$, то $x_2 \notin M$ и $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G - x_2)$ - противоречие. Следователно от твърдение A3 се получава, че $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$ и $x_2 \in DK_0(G + x_1x_2)$.

4). От твърдение А3 : $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$. Нека $x_1 \in M_1 \in \mathcal{D}(G - x_2)$ и $x_2 \in M_2 \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Тогава M_1 и M_2 са доминиращи множества за $G + x_1x_2$ и $|M_s| = \gamma(G) - 1 = \gamma(G + x_1x_2)$. Следва, че $M_1, M_2 \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Тъй като $x_1 \notin M_2$ и $x_2 \notin M_1$, то $x_1, x_2 \in D_{-1}(G + x_1x_2) \cup D_0(G + x_1x_2)$. От $\gamma((G + x_1x_2) - x_s) = \gamma(G - x_s) = \gamma(G) - 1 = \gamma(G - x_1x_2)$, където $s = 1, 2$, имаме, че $x_1, x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$.

Твърдение 1.2.4 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G)$ и $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$. Тогава $\mathcal{D}(\{x_1\}, G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)$. Ако $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, то $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)$. Ако $\overrightarrow{x_2x_1} \notin \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, то $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)$.*

Доказателство: От твърдение А3: $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_1\}, G + x_1x_2) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G + x_1x_2)$. Тъй като $x_1 \in D(G - x_2)$, то $\mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2) \neq \emptyset$. Нека $M \in \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$ и $\gamma(G) - 1 = \gamma(G - x_2) = |M| \geq \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$. Следователно $M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$ и $x_1 \in M$.

Нека $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Поради $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1 = \gamma(G - x_2)$, имаме, че $M \in \mathcal{D}(G - x_2)$ и $x_1 \in M$.

Следва, че $\mathcal{D}(\{x_1\}, G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)$. Ако $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, то аналогично - $\mathcal{D}(\{x_2\}, G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)$.

Нека $\overrightarrow{x_2x_1} \notin \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$. Допускаме, че $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. От твърдение А3 $x_1 \notin M$. Следва, че M е доминиращо множество за $G - x_1$. Тъй като $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) - 1$ получаваме, че $M \in \mathcal{D}(G - x_1)$ x_1 е критичен връх и $x_2 \in D(G - x_1)$. Следователно $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ - противоречие.

Твърдение 1.2.5 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$.*

1. *Нека $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DK_q(G)$ и $p \geq 1$, $q \geq 1$. Тогава $x_1 \in DK_p(G + x_1x_2)$, $x_2 \in DK_q(G + x_1x_2)$.*

2. *Нека $x_1 \in DK_0(G)$, $x_2 \in DK_q(G)$ и $q \geq 2$. Тогава $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$ $x_2 \in DK_q(G + x_1x_2)$.*

3. *Нека $x_1 \in DK_0(G)$, $x_2 \in DK_1(G) \cap D(G - x_1)$. Тогава $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$ $x_2 \in DK_1(G + x_1x_2)$.*

4. *Нека $x_1 \in DK_0(G)$, $x_2 \in DK_1(G) \cap DN(G - x_1)$. Тогава $x_1 \in DK_0(G + x_1x_2)$, $x_2 \in DK_1(G + x_1x_2)$.*

5. *Нека $x_1, x_2 \in DK_0(G)$ и $x_2 \in DN(G - x_1)$. Тогава $x_1 \in DK_0(G + x_1x_2)$.*

6. Нека $x_1, x_2 \in DK_0(G)$ *и* $x_2 \in D(G - x_1)$*. Тогава* $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$*.*

7. Нека $x_1 \in D_0(G)$ *и* $x_2 \in DK_q(G)$ *,* $q \geq 1$*. Тогава* $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$ *и* $x_2 \in DK_q(G + x_1x_2)$*.*

8. Нека $x_1 \in (D_0(G) \cap D(G - x_2))$ *и* $x_2 \in DK_0(G)$*. Тогава* $x_1, x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$*.*

9. Нека $x_1 \in (D_0(G) \cap DN(G - x_2))$ *и* $x_2 \in DK_0(G)$*. Тогава* $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$ *,* $x_2 \in DK_0(G + x_1x_2)$*.*

10. Нека $x_1 \in DN(G)$ *и* $x_2 \in DK_q(G)$ *,* $q \geq 1$*. Тогава* $x_1 \in DN(G+x_1x_2)$ *и* $x_2 \in DK_q(G + x_1x_2)$*.*

11. Нека $x_1 \in DN(G) \cap DN(G-x_2)$ *и* $x_2 \in DK_0(G)$*. Тогава* $x_1 \in DN(G+x_1x_2)$ *и* $x_2 \in DK_0(G + x_1x_2)$*.*

12. Нека $x_1 \in DN(G) \cap D(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DK_0(G)$*. Тогава* $x_1, x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$*.*

13. Ако някоя от хипотезите на твърденията $1 \div 12$ *е изпълнена, то* $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$*.*

Доказателство: Нека някоя от хипотезите на твърденията $1 \div 12$ е изпълнена. Тогава от твърдение А3 - $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$. Следователно:

(i) $\gamma((G + x_1x_2) - x_s) = \gamma(G - x_s)$ за $s = 1, 2$.

(ii) Ако $x_s \in DK_r(G)$, $r \geq 1$, то $x_s \in DK_r(G+x_1x_2)$, където $s \in \{1, 2\}$.

(iii) Ако $x_s \in DK_0(G)$, то $x_s \in D_0(G + x_1x_2) \cup DK_0(G + x_1x_2)$, където $s \in \{1, 2\}$.

1). Следва непосредствено от (ii).

2). Нека $M \in \mathcal{D}(G - x_1)$. От твърдение 1.2.2 следва, че $x_2 \in DK(G - x_1)$. От $|M| = \gamma(G - x_1) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$ следва, че $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$.

3). Нека $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G-x_1)$. От $|M| = \gamma(G-x_1) = \gamma(G) = \gamma(G+x_1x_2)$ следва, че $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Сега от (iii) получаваме, че $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$.

4). Допускаме, че $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. От (ii) - $x_2 \in M$ и тогава M е доминиращо множество за $G - x_1$ и $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) = \gamma(G - x_1)$. Следователно $x_2 \in D(G - x_1)$ - противоречие. И така, $x_1 \in DK(G + x_1x_2)$. Сега от (iii) следва, че $x_1 \in DK_0(G + x_1x_2)$.

5). Допускаме, че $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G - x_1$ и $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) = \gamma(G - x_1)$.

Следва, че $M \in \mathcal{D}(G - x_1)$ и $x_2 \notin M$. Тогава $M \in \mathcal{D}(G)$ и $x_1, x_2 \notin M$ - противоречие.

6). Нека $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Тогава M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$ и $|M| = \gamma(G - x_1) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$. Следва, че $M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$ и $x_1 \notin M$. Сега от (iii) - $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$.

7). Поради $\gamma((G + x_1x_2) - x_1) = \gamma(G - x_1) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$ имаме, че $x_1 \in D_0(G + x_1x_2) \cup DK_0(G + x_1x_2)$. Нека $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$.

8). Както в 7) - $x_1 \in D_0(G+x_1x_2)$. Нека $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G-x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$ и $|M| = \gamma(G - x_2) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$. Така, че $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$.

9). Както в 7) - $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$. Допускаме, че $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G - x_2$ и $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) = \gamma(G - x_2)$. Така, че $M \in \mathcal{D}(G - x_2)$. Следва, че $x_1 \notin M$ и тогава M е доминиращо множество за G, $x_1, x_2 \notin M$ и $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$ - противоречие.

10). Допускаме, че $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Тогава $x_1, x_2 \in M$ и M е доминиращо множество за G. Тъй като $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$ имаме, че $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G)$ - противоречие.

11). Допускаме, че $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G+x_1x_2)$. Ако $x_2 \in M$, то $M \in \mathcal{D}(G)$ и $x_1 \in M$ - противоречие. Следователно $x_2 \notin M$ и тогава M е доминиращо множество за $G - x_2$ с $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G) = \gamma(G - x_2)$. Следователно $M \in \mathcal{D}(G - x_2)$ и $x_1 \in M$ - противоречие. И така, $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$.

Нека $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G+x_1x_2)$. Тогава $x_1, x_2 \notin M$ и $|M| = \gamma(G+x_1x_2) = \gamma(G)$. Следва, че $x_2 \notin M \in \mathcal{D}(G)$ - противоречие. Следователно $x_2 \in DK_0(G + x_1x_2)$.

12). Нека $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G - x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$. Тъй като $|M| = \gamma(G - x_2) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$, то $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$ и $x_2 \notin M$. Следва, че $x_1 \in D(G + x_1x_2)$ и $x_2 \in D_0(G+x_1x_2)$. От $\gamma((G+x_1x_2)-x_1) = \gamma(G-x_1) = \gamma(G) = \gamma(G+x_1x_2)$ следва, че $x_1 \in DK_0(G + x_1x_2) \cup D_0(G + x_1x_2)$. Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. Тъй като $x_1 \notin M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$ получаваме, че $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$.

Твърдение 1.2.6 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$.*

1. *Нека $x_1 \in DN(G) \cup D_0(G)$ и $x_2 \in D_0(G)$. Тогава $x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$.*
2. *Нека $x_1 \in DN(G)$ и $x_2 \in DN(G) \cup D_0(G)$. Ако $x_1 \in D(G - x_2)$, то $x_1 \in D_0(G + x_1x_2)$. Ако $x_1 \in DN(G - x_2)$, то $x_1 \in DN(G + x_1x_2)$.*
3. *Нека $x_1 \in D_{-1}(G) \cup DK_{-1}(G)$ и $x_2 \in (D_0(G) \cap DN(G - x_1)) \cup DN(G)$. Тогава $x_1 \in D_{-1}(G + x_1x_2)$ и $x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$.*

4. *Нека* $x_1 \in D_{-1}(G) \cap DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in D_{-1}(G) \cap DN(G - x_1)$. *Тогава* $x_1, x_2 \in D_{-1}(G + x_1x_2)$.

5. *Ако някоя от хипотезите в* $1 \div 5$ *е изпълнена, то* $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$.

Доказателство: Нека някоя от хипотезите в $1) \div 4)$ е изпълнена. Тогава от твърдение А3 - $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$. Очевидно:

(i) $\gamma((G + x_1x_2) - x_s) = \gamma(G - x_s)$ за $s = 1, 2$

(ii) $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G + x_1x_2)$.

1). От (i) и (ii) - $x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$.

2). Нека $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G - x_2)$. Тогава M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$. Тъй като $\gamma(G - x_2) = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$, то $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Сега от (i) и (ii) получаваме исканото.

Нека $x_1 \in DN(G - x_2)$. Допускаме, че $x_1 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Поради $|M| = \gamma(G)$ и $x_1 \in DN(G)$ - M не е доминиращо множество за G. Следователно $M \in \mathcal{D}(G - x_2)$ - противоречие.

3). От (i) - $x_1 \in D_{-1}(G + x_1x_2)$ и $x_2 \in D^0(G + x_1x_2)$. Нека $M \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Тогава $M_1 = M \cup \{x_2\}$ е доминиращо множество за $G + x_1x_2$, $|M_1| = \gamma(G - x_1) + 1 = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$. Следователно $x_2 \in M \in \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Сега от (ii) - $x_2 \in D_0(G + x_1x_2)$.

4). Резултатът непосредствено следва от (i).

В останалата част на този параграф ще се занимаваме с ефектите, които операцията добавяне на ребро предизвиква в множеството на γ-множествата.

Нека G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$. *Дефинираме:* $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \{M : M$ *е доминиращо множество за* $G - x_1$, $x_2 \in M$, $|M| = \gamma(G)$ *и* $M \notin \mathcal{D}(G)\}$.

Очевидно, $\mathcal{S}(x_1, x_2) \cap \mathcal{S}(x_2, x_1) = \emptyset$ и $(\mathcal{S}(x_1, x_2) \cup \mathcal{S}(x_2, x_1)) \cap \mathcal{D}(G) = \emptyset$.

Твърдение 1.2.7 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ *и* $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$. *Тогава* $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{S}(x_1, x_2) \cup \mathcal{S}(x_2, x_1)$.

Доказателство: От $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$ следва $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G + x_1x_2)$. Нека $\mathcal{A} = \mathcal{D}(G + x_1x_2) - \mathcal{D}(G)$.

Нека $M \in \mathcal{S}(x_1, x_2)$. Следва, че M е доминиращо множество за $G + x_1x_2$ и $|M| = \gamma(G) = \gamma(G + x_1x_2)$. Следователно $M \in \mathcal{A}$. Така, че $\mathcal{S}(x_1, x_2) \subseteq \mathcal{A}$. Аналогично - $\mathcal{S}(x_2, x_1) \subseteq \mathcal{A}$.

Нека $M \in \mathcal{A}$. Тогава $|M| = \gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$ и $|M \cap \{x_1, x_2\}| = 1$. Нека $x_2 \in M$ и $x_1 \notin M$. Следва, че $M \in \mathcal{S}(x_2 . x_1)$ и тогава $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}(x_1, x_2) \cup \mathcal{S}(x_2, x_1)$.

Едно по-конкретно определение на множествата $\mathcal{S}(x_1, x_2)$ и $\mathcal{S}(x_2, x_1)$, в зависимост от принадлежността на x_1 и x_2 към конкретен елемент на γ-разлагането на графа G, е получено с лема 1.2.8.

Лема 1.2.8 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$.*

1. *Ако $x_1 \in IK_q(G)$, $q \geq 1$, то $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \emptyset$.*

2. *Нека $x_1 \in D^0(G)$. Тогава $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1) - \mathcal{D}(G)$. Ако $x_2 \in DK_q(G), q \geq 2$, то $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \mathcal{D}(G - x_1) - \mathcal{D}(G)$. Ако $x_2 \in DN(G - x_1)$, то $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \emptyset$.*

3. *Нека $x_1 \in D_{-1}(G) \cup DK_{-1}(G)$. Тогава $x_2 \in DN(G - x_1)$ и $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \{Q \cup \{x_2\} : Q \in \mathcal{D}(G - x_1)\} \cup \{M : M \in MDS(\{x_2\}, G - x_1), |M| = \gamma(G)$ и $M \cap N(x_1, G) = \emptyset\}$.*

Доказателство: 1). Нека M е доминиращо множество за $G - x_1$. Тогава $|M| \geq \gamma(G - x_1) > \gamma(G)$.

2). $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \{M : M \in \mathcal{D}(G - x_1), x_2 \in M, M \notin \mathcal{D}(G)\} = \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1) - \mathcal{D}(G)$. Сега, ако $x_2 \in DK_q(G)$, $q \geq 2$, то от твърдение 1.2.2 - $x_2 \in DK(G - x_1) - DK_{-1}(G - x_1)$ и тогава $\mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1) = \mathcal{D}(G - x_1)$. Ако $x_2 \in DN(G - x_1)$, то $\mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1) = \emptyset$.

3). От твърдение A3 - $x_2 \in DN(G - x_1)$.

Нека $M \in \{Q \cup \{x_2\} : Q \in \mathcal{D}(G - x_1)\} = A$. Тогава $x_2 \in M$, M е доминиращо множество за $G - x_1$ и $|M| = |Q| + 1 = \gamma(G - x_1) + 1 = \gamma(G)$. Ако M е доминиращо множество за G, то Q е доминиращо множество за G - противоречие. Следователно $A \subseteq \mathcal{S}(x_1, x_2)$.

Очевидно, $B = \{M : M \in MDS(\{x_2\}, G - x_1)$, $|M| = \gamma(G)$ и $M \cap N(x_1, G) = \emptyset\} \subseteq \mathcal{S}(x_1, x_2)$.

Нека $M \in (\mathcal{S}(x_1, x_2) - MDS(G - x_1))$. Тогава съществува $Q \in MDS(G - x_1)$ такова, че $Q \subset M$. От $\gamma(G) - 1 = \gamma(G - x_1) \leq |Q| < |M| = \gamma(G)$ следва $Q \in \mathcal{D}(G - x_1)$. Следователно $M = Q \cup \{x_2\}$ и тогава $M \in A$.

Нека $M \in (\mathcal{S}(x_1, x_2) \cap MDS(G - x_1))$. Тогава $x_2 \in M$, $|M| = \gamma(G)$ и $M \cap N(x_1, G) = \emptyset$. Следва, че $M \in B$.

В твърдение 1.2.9 са намерени достатъчни условия, за да е изпълнено:

$$\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G + x_1x_2).$$

Твърдение 1.2.9 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$. Нека е вярно едно от следните твърдения:*

(*i*) $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DK_q(G)$, *където* $p \geq 1$ *и* $q \geq 1$

(*ii*) $x_1 \in D^0(G$ *и* $x_2 \in DK_1(G) \cap DN(G - x_1)$

(*iii*) $x_1, x_2 \in D^0(G)$, $x_1 \in DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DN(G - x_1)$.

Тогава $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G)$.

Доказателство: От лема 1.2.8 - $\mathcal{S}(x_1, x_2) = \mathcal{S}(x_2, x_1) = \emptyset$. Резултатът следва от твърдение 1.2.7.

За останалите случаи, в твърдение 1.2.10, са намерени разлагания на $\mathcal{D}(G+x_1x_2)$ чрез $\mathcal{D}(G)$ и някое (някои) от множествата $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}(G - x_s), \mathcal{D}(\{x_i\}, G - x_j), s = 1, 2, \{i, j\} = \{1.2\}$. Тези резултати позволяват да бъдат намерени оценки за $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)|$, което е направено в следствие 1.2.11.

Твърдение 1.2.10 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ *и* $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$.

1. *Нека* $x_1 \in D^0(G)$ *и* $x_2 \in DK_q(G), q \geq 2$. *Тогава* $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{D}(G - x_1)$. *Ако* $x_1 \in DK_0(G)$, *то* $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G - x_1) = \emptyset$. *Ако* $x_1 \in D_0(G)$, *то* $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G - x_1) \neq \emptyset$.

2. *Нека* $x_1 \in D^0(G)$ *и* $x_2 \in DK_1(G) \cap D(G - x_1)$. *Тогава* $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)$. *Ако* $x_1 \in DK_0(G)$, *то* $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G - x_1) = \emptyset$

3. *Нека* $x_1, x_2 \in D^0(G)$, $x_1 \in DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in D(G - x_1)$. *Тогава* $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)$.

4. *Нека* $x_1, x_2 \in D^0(G)$, $x_1 \in D(G - x_2)$ *и* $x_2 \in D(G - x_1)$. *Тогава* $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1) \cup \mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)$.

Доказателство: Непосредствено следва от твърдения 1.2.2, 1.2.7 и лема 1.2.8.

От твърдение 1.2.10 имаме:

Следствие 1.2.11 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ *и* $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$.

1. *Нека* $x_1 \in D^0(G)$ *и* $x_2 \in DK_q(G), q \geq 2$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| \leq |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(G - x_1)|$. *Ако* $x_1 \in DK_0(G)$, *то* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(G - x_1)|$.

2. *Нека* $x_1 \in D^0(G)$ *и* $x_2 \in DK_1(G) \cap D(G-x_1)$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G+x_1x_2)| \leq |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(\{x_2\}, G-x_1)|$. *Ако* $x_1 \in DK_0(G)$, *то* $|\mathcal{D}(G+x_1x_2)| = |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(\{x_2\}, G-x_1)|$.

3. *Нека* $x_1, x_2 \in D^0(G)$, $x_1 \in DN(G-x_2)$ *и* $x_2 \in D(G-x_1)$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G+x_1x_2)| \leq |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(\{x_2\}, G-x_1)|$.

4. *Нека* $x_1, x_2 \in D^0(G)$, $x_1 \in D(G-x_2)$ *и* $x_2 \in D(G-x_1)$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G+x_1x_2)| \leq |\mathcal{D}(G)| + |\mathcal{D}(\{x_2\}, G-x_1)| + |\mathcal{D}(\{x_1\}, G-x_2)|$.

Подобни оценки, в случая когато x_1x_2 е критично ребро за графа $G + x_1x_2$, са направени в твърдение 1.2.12 и следствие 1.2.13.

Твърдение 1.2.12 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G)$ *и* $x_1 \neq x_2$.

1. *Ако* $\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $d(x_s, G) \geq 1$, $s = 1, 2$, *то* $|\mathcal{D}(\{x_2\}, G-x_1)|d(x_1, G) + |\mathcal{D}(\{x_1\}, G-x_2)|d(x_2, G) + |\mathcal{D}(\{x_1, x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(\{x_1\}, G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$.

2. *Ако* $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, $\overrightarrow{x_2x_1} \notin \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $d(x_s, G) \geq 1$, $s = 1, 2$, *то* $|\mathcal{D}(\{x_1\}, G-x_2)|(d(x_2, G)+1) \leq |\mathcal{D}(\{x_1\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$.

3. *Нека* $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, $d(x_1, G) = 0$ *и* $d(x_2, G) > 0$. *Тогава* $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $|\mathcal{D}(G-x_2)|d(x_2, G) + |\mathcal{D}(\{x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$.

Доказателство: Нека $u, v \in V(G)$ и $\overrightarrow{uv} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$. Нека $A(u) = \{M \cup \{v\} : M \in \mathcal{D}(\{u\}, G-v)\}$ и ако $d(v, G) \geq 1$ нека $B(u) = \{M \cup \{z\} : M \in \mathcal{D}(\{u\}, G-v)$ и $z \in N(v, G)\}$. Следователно $|B(u)| = |\mathcal{D}(\{u\}, G-v)|d(v, G)$ и $|A(u)| = |\mathcal{D}(\{u\}, G-v)|$.

1). Имаме $B(x_1) \subseteq \mathcal{D}(\{x_1\}, G) - \mathcal{D}(\{x_2\}, G)$, $B(x_2) \subseteq \mathcal{D}(\{x_2\}, G) - \mathcal{D}(\{x_1\}, G)$ и $A(x_1) \cup A(x_2) \subseteq \mathcal{D}(\{x_1, x_2\}, G)$. Тогава $A(x_1) \cup A(x_2) \cup B(x_1) \cup B(x_2) \subseteq \mathcal{D}(\{x_1\}, G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G) \subseteq \mathcal{D}(G)$ и $|A(x_1) \cup A(x_2)| + |B(x_1)| + |B(x_2)| \leq |\mathcal{D}(\{x_1\}, G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$. Оттук следва исканото.

2). Имаме $A(x_1) \subseteq \mathcal{D}(\{x_1, x_2\}, G)$ и $B(x_1) \subseteq \mathcal{D}(\{x_1\}, G) - \mathcal{D}(\{x_1, x_2\}, G)$, откъдето следва исканото.

3). Върхът x_2 е критичен и тогава $x_2 \in D(G)$ и $x_2 \in D(G-x_1)$. Следователно $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$. Сега както в 1) : $B(x_1) \subseteq \mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(\{x_2\}, G)$, $A(x_1) \cup A(x_2) \subseteq \mathcal{D}(\{x_2\}, G)$, $A(x_1) \cup A(x_2) \cup B(x_1) \subseteq \mathcal{D}(G)$ и $|A(x_1) \cup A(x_2)| + |B(x_1)| \leq |\mathcal{D}(G)|$. С това всичко е доказано.

Следствие 1.2.13 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G)$ *и* $x_1 \neq x_2$.

1. *Ако* $\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $d(x_2, G) \geq d(x_1, G) \geq 1$ *, то* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)|d(x_1, G)+|\mathcal{D}(\{x_1\}, G-x_2)|(d(x_2, G)-d(x_1, G))+|\mathcal{D}(\{x_1, x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(\{x_1\}, G) \cup \mathcal{D}(\{x_2\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$

2. *Ако* $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$, $\overrightarrow{x_2x_1} \notin \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $d(x_s, G) \geq 1$ *,* $s = 1, 2$*, то* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)|(d(x_2, G) + 1) \leq |\mathcal{D}(\{x_1\}, G)| \leq |\mathcal{D}(G)|$.

3. *Нека* $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *,* $d(x_1, G) = 0$ *и* $d(x_2, G) > 0$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| + |\mathcal{D}(G - x_2)|(d(x_2, G) - 1) \leq |\mathcal{D}(G)|$.

4. *Нека* $\overrightarrow{x_1x_2} \notin \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *,* $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ *и* $d(x_1, G) = 0$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = |\mathcal{D}(\{x_2\}, G)|$. *Ако* $x_2 \in DK(G)$*, то* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = |\mathcal{D}(G)|$. *Ако* $x_2 \in D_0(G)$*, то* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| < |\mathcal{D}(G)|$

5. *Нека* $d(x_1, G) = d(x_2, G) = 0$. *Тогава* $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = 2|\mathcal{D}(G)|$.

Доказателство: От твърдения 1.2.4 и 1.2.12 следват веднага 1), 2) и 3).

4). От твърдение 1.2.4 : $\mathcal{D}(G + x_1x_2) = \mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)$. Следователно $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = |\mathcal{D}(\{x_2\}, G)|$.

5). Очевидно $|\mathcal{D}(\{x_1\}, G - x_2)| = |\mathcal{D}(\{x_2\}, G - x_1)| = |\mathcal{D}(G)|$. Тогава от твърдение 1.2.4: $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)| = 2|\mathcal{D}(G)|$.

Следствие 1.2.14 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G)$ и $x_1 \neq x_2$. Ако $\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ и $d(x_s, G) \geq 1$, $s = 1, 2$, то $|\mathcal{D}(G + x_1x_2)|\delta(G) + 1 \leq |\mathcal{D}(G)|$.*

Определение 1.2.15 *Нека G е граф и e е ребро на $\overline{G}$. Ще казваме, че e е $\mathcal{D}$ - критично ако $|\mathcal{D}(G + e)| < |\mathcal{D}(G)|$. Графът G е $\mathcal{D}$ - критичен, ако $|\mathcal{D}(G + e)| < |\mathcal{D}(G)|$ за всяко ребро $e \in E(\overline{G})$.*

Теорема 1.2.16 *Нека G е граф и $\delta(G) \geq 1$. Тогава G е $\mathcal{D}$ - критичен тогава и само тогава, когато G е ребрено-γ-критичен.*

Доказателство: Нека G е $\mathcal{D}$ - критичен. Нека $e \in E(\overline{G})$. Ако $\gamma(G + e) = \gamma(G)$, то $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G + e)$. Следва, че $\gamma(G + e) < \gamma(G)$.

Нека G е ребрено-γ-критичен. Тогава, ако $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2$ и $x_1x_2 \notin E(G)$, то или $\overrightarrow{x_1x_2} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$ или $\overrightarrow{x_2x_1} \in \overrightarrow{E}(\overrightarrow{G^\gamma})$. Сега от следствие 1.2.13 - G е $\mathcal{D}$-критичен.

Теорема 1.2.17 *Нека G е свързан ребрено-γ-критичен граф с $|V(G)| \geq 4$. Тогава $V(G) = D_{-1}(G) \cup D_0(G)$.*

Доказателство: От [91] - $V(G) = D_{-1}(G) \cup D_0(G) \cup DK_0(G)$. Да допуснем, че $x \in DK_0(G)$ Тогава $R =< N(x,G), G >$ е пълен граф - иначе се получава противоречие с твърдение А3. Следователно $N[x,G] \subseteq N[v,G]$ за всеки връх $v \in N(x,G)$. Сега, ако $M \in \mathcal{D}(G)$, то $(M - \{x\}) \cup \{v\}$, където $v \in N(x,G)$, е доминиращо множество за G - противоречие.

1.3 Отстраняване на ребро

Операциите добавяне на ребро и отстранявяне на ребро са, в известен смисъл, взаимно обратни. Това ни дава възможност, ползувайки теорема 1.2.3. теорема 1.2.5 и теорема 1.2.6 да получим обратните им - теорема 1.3.1 и теорема 1.3.2. С теорема 1.3.1 се характеризират всички случаи на това, кога едно ребро на граф не е критично, а с теорема 1.3.2 се характеризират всички случаи на това, кога едно ребро на граф е критично. С теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 е изследван случаят когато отстраняваното ребро е мост. Тези резултати дават възможности за изучаването на дърветата, което се прави в глава 3.

Следващите две теореми са непосредствено следствие от теореми 1.2.3, 1.2.5 и 1.2.6.

Теорема 1.3.1 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G)$, $x_1x_2 \in E(G)$ и $G_1 = G - x_1x_2$. Нека $\gamma(G) = \gamma(G_1)$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

1. $x_1, x_2 \in D_{-1}(G)$, $x_1 \in D_{-1}(G_1) \cap DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in D_{-1}(G_1) \cap DN(G - x_1)$.

2. $x_i \in D_{-1}(G)$, $x_j \in D_0(G)$, $x_i \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_j \in (D_0(G_1) \cap DN(G - x_i)) \cup DN(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

3. $x_1, x_2 \in DN(G)$, $x_1 \in DN(G_1) \cap DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DN(G_1) \cap DN(G - x_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

4. $x_i \in DN(G), x_j \in D_0(G)$, $x_i \in DN(G_1) \cap DN(G - x_j)$ *и* $x_j \in (DN(G_1) \cap DN(G - x_i)) \cup D_0(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

5. $x_i \in DN(G)$, $x_j \in DK_q(G), q \geq 1$, $x_i \in DN(G_1)$ *и* $x_j \in DK_q(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

6. $x_i \in DN(G)$, $x_j \in DK_0(G)$, $x_i \in DN(G_1) \cap DN(G - x_j)$ *и* $x_j \in DK_0(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

7. $x_1, x_2 \in D_{\cdot}(G)$ *и едно от следните твърдения е вярно:*

(i) $x_1 \in DK_0(G_1) \cap D(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DK_0(G_1) \cap D(G - x_1)$.

(ii) $x_i \in DK_0(G_1)$ *и* $x_j \in D_0(G_1) \cap D(G - x_i)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

(iii) $x_i \in DN(G_1) \cap D(G - x_j)$ *и* $x_j \in DK_0(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

(iv) $x_1 \in D_0(G_1)$ *и* $x_2 \in D_0(G_1)$.

(v) $x_i \in DN(G_1) \cap D(G - x_j)$ *и* $x_j \in D_0(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

(vi) $x_1 \in DN(G_1) \cap D(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DN(G_1) \cap D(G - x_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

8. $x_i \in D_0(G)$, $x_j \in DK_0(G)$, $x_i \in D_0(G_1) \cap DN(G - x_j)$ *и* $x_j \in DK_0(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

9. $x_i \in D_0(G)$, $x_j \in DK_0(G)$, $x_i \in DK_0(G_1) \cap DN(G - x_j)$ *и* $x_j \in DK_0(G_1) \cap D(G - x_i)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

10. $x_i \in D_0(G)$, $x_j \in DK_q(G), q \geq 2$, $x_i \in DK_0(G_1) \cup D_0(G_1)$ *и* $x_j \in DK_q(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

11. $x_i \in D_0(G)$, $x_j \in DK_1(G)$, $x_i \in D_0(G_1)$ *и* $x_j \in DK_1(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

12. $x_i \in D_0(G)$, $x_j \in DK_1(G)$, $x_i \in DK_0(G_1)$ *и* $x_2 \in DK_1(G_1) \cap D(G - x_i)$ *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

13. $x_1, x_2 \in DK_0(G)$, $x_1 \in DK_0(G_1) \cap DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DK_0(G_1) \cap DN(G - x_1)$.

14. $x_i \in DK_0(G)$, $x_j \in DK_1(G)$, $x_i \in DK_0(G_1)$ *и* $x_j \in DK_1(G_1) \cap DN(G - x_i)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

15. $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DK_q(G)$, $x_1 \in DK_p(G_1)$ *и* $x_2 \in DK_q(G_1)$, *където* $p \geq 1$ *и* $q \geq 1$.

Теорема 1.3.2 *Нека* G *е граф,* $x_1, x_2 \in V(G)$, $x_1x_2 \in E(G)$ *и* $G_1 = G - x_1x_2$. *Нека* $\gamma(G) = \gamma(G_1) - 1$. *Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

1. $x_i \in DN(G)$, $x_j \in DK_q(G), q \geq 1$, $x_i \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_j \in DK_{q-1}(G_1)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

2. $x_i \in DN(G)$. $x_j \in DK_1(G)$, $x_i \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_j \in D_0(G_1) \cap D(G - x_i)$. *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

3. $x_i \in DN(G)$. $x_j \in DK_0(G)$, $x_i \in D_{-1}(G_1) \cap DN(G - x_j)$ *и* $x_j \in D_{-1}(G_1) \cap D(G - x_i)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

4. $x_1, x_2 \in D_0(G)$. $x_1 \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_2 \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$.

От терема 1.3.1 и теорема 1.3.2 имаме:

Следствие 1.3.3 *Нека* G *е граф и* $x \in DK_0(G)$. *Тогава* $N(x, G) \subseteq (DN(G) \cup D_0(G) \cup DK_0(G) \cup DK_1(G))$.

В случая, когато x_1x_2 е мост, от теорема 1.3.1 и теорема 1.3.2 получаваме следните две теореми:

Теорема 1.3.4 *Нека* G_1 *и* G_2 *са графи без общ връх. Нека* $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$ *и* $G = (G_1 \cup G_2) + x_1x_2$. *Нека* $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. *Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

1. $x_i \in D_{-1}(G) \cap (D_{-1}(G_i) \cup DK_{-1}(G_i))$ *и* $x_j \in D_0(G) \cap DN(G_j)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

2. $x_j \in DN(G) \cap DN(G_j)$ *за* $j = 1, 2$.

3. $x_i \in DN(G) \cap DN(G_i)$ *и* $x_j \in D_0(G) \cap D_0(G_j)$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

4. $x_i \in DN(G) \cap DN(G_i)$ *и* $x_j \in DK_q(G) \cap DK_q(G_j)$, *за* $q \geq 0$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

5. $x_1, x_2 \in D_0(G)$ *и едно от следните твърдения е вярно:*

   (*i*) $x_1 \in DK_0(G_1)$ *и* $x_2 \in DK_0(G_2)$

   (*ii*) $x_1 \in D_0(G_1)$ *и* $x_2 \in DK_0(G_2)$

   (*iii*) $x_1 \in DK_0(G_1)$ *и* $x_2 \in D_0(G_2)$

   (*iv*) $x_j \in D_0(G_j)$ *за* $j = 1, 2$.

6. $x_i \in D_0(G) \cap DK_0(G_i)$ *и* $x_j \in DK_q(G) \cap DK_q(G_j)$ *за* $q \geq 1$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

7. $x_i \in D_0(G) \cap D_0(G_i)$ *и* $x_j \in DK_q(G) \cap DK_q(G_j)$ *за* $q \geq 1$, *където или* $i = 1, j = 2$ *или* $i = 2, j = 1$.

8. $x_1 \in DK_p(G) \cap DK_p(G_1)$ *и* $x_2 \in DK_q(G) \cap DK_q(G_2)$, *където* $p, q \geq 1$.

Теорема 1.3.5 *Нека G_1 и G_2 са графи без общ връх. Нека $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$ и $G = (G_1 \cup G_2) + x_1x_2$. Нека $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:*

1. *$x_i \in DN(G)$, $x_j \in DK_q(G), q \geq 1$, $x_i \in D_{-1}(G_i) \cup DK_{-1}(G_i)$ и $x_j \in DK_{q-1}(G_j$, където или $i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$.*

2. *$x_i \in DN(G) \cap (D_{-1}(G_i) \cup DK_{-1}(G_i))$ и $x_j \in DK_1(G) \cap D_0(G_j)$, където или $i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$.*

3. *$x_1, x_2 \in D_0(G)$ и $x_j \in D_{-1}(G_j) \cup DK_{-1}(G_j)$ за $j = 1, 2$.*

Резултатите получени в §1.2 и в §1.3 позволяват да се направи следният извод:

Нека G е свързан граф с поне два върха. Ако са известни γ-разложенията на всички графи получени от G след отстраняване на връх или ребро, то тогава с помоща на теореми 1.3.1 и 1.3.2 може да бъде намерено и γ-разложението на G.

Да отбележим, че теореми 1.3.4 и 1.3.5 усилват и уточняват резултати получени в [98], [23], [82] и [94].

1.4 Подразделяне на ребро

Реброто uv на графа G е k-подразделено, ако е заменено с път, имащ дължина $k+1$.

Нека G е граф и x_1x_2 е мост в графа G. Ако се знае принадлежността на x_1 и x_2 към елементи на γ-разлагането на графа G, то се намира принадлежността на $x_1, x_2, y_1, .., y_k$ към елементи на γ-разлагането на графа G_k, получен от G чрез подразделяне на реброто x_1x_2 чрез върховете $y_1, .., y_k$. Резултатите в този пункт могат да се разглеждат като стъпка към решаването на някои нерешени проблеми в изучававането на доминирането в кактуси ([58], [59]).

Теорема 1.4.1 *Нека G е граф, $x_1, x_2, x_3 \in V(G)$, $N(x_2, G) = \{x_1, x_3\}$ и x_1x_2, x_2x_3 са мостове.*

1. *Ако $x_1 \in (D_{-1}(G - x_2) \cup DK_{-1}(G - x_2))$ и $x_3 \in DN(G - x_2)$, то $x_1, x_2 \in D_0(G)$, $x_3 \in DN(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.*

2. *Ако $x_1, x_3 \in (D_{-1}(G - x_2) \cup DK_{-1}(G - x_2))$, то $x_1, x_3 \in DN(G)$, $x_2 \in DK_1(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G - x_2) - 1$.*

3. *Ако* $x_1, x_3 \in DN(G - x_2)$, *то* $x_1, x_3 \in D_0(G)$, $x_2 \in D_{-1}(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2) + 1$.

4. *Ако* $x_1 \in D_0(G - x_2)$ *и* $x_3 \in (D_{-1}(G - x_2) \cup DK_{-1}(G - x_2))$, *то* $x_1, x_2 \in D_0(G)$, $x_3 \in D_{-1}(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

5. *Ако* $x_1 \in D_0(G - x_2)$ *и* $x_3 \in DN(G - x_2)$, *то* $x_1 \in DK_1(G)$, $x_2, x_3 \in DN(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

6. *Ако* $x_1, x_3 \in D_0(G - x_2)$, *то* $x_1, x_3 \in D_0(G)$, $x_2 \in DN(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

7. *Ако* $x_1 \in DK_p(G - x_2), p \geq 0$ *и* $x_3 \in DN(G - x_2)$, *то* $x_1 \in DK_{p+1}(G)$, $x_2, x_3 \in DN(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

8. *Ако* $x_1 \in DK_0(G - x_2)$ *и* $x_3 \in D_{-1}(G - x_2) \cup DK_{-1}(G - x_2)$, *то* $x_1, x_2 \in D_0(G)$, $x_3 \in D_{-1}(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

9. *Ако* $x_1 \in DK_p(G - x_2), p \geq 1$ *и* $x_3 \in (D_{-1}(G - x_2) \cup DK_{-1}(G - x_2)$, *то* $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in D_0(G)$, $x_3 \in D_{-1}(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

10. *Ако* $x_1 \in DK_p(G - x_2), p \geq 0$ *и* $x_3 \in D_0(G - x_2)$, *то* $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DN(G)$, $x_3 \in D_0(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

11. *Ако* $x_1 \in DK_p(G - x_2), p \geq 0$, $x_3 \in DK_q(G - x_2), q \geq 0$, *то* $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DN(G)$, $x_3 \in DK_q(G)$ *и* $\gamma(G) = \gamma(G - x_2)$.

Доказателство: Нека G_j е компонентата на $G - x_2$, която съдържа $x_j, j = 1, 3$. Дефинираме: $G_{12} =< V(G_1) \cup \{x_2\}, G >$, $G_{13} =< V(G_1) \cup \{x_2, x_3\}, G >$, $G_{32} =< V(G_3) \cup \{x_2\}, G >$, $G_{31} =< V(G_3) \cup \{x_1, x_2\}, G >$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следват:

(i) Ако $x_1 \in (DK(G_1) - DK_{-1}(G_1)) \cup D_0(G_1)$, то $x_2 \in DN(G_{12}), x_3 \in D_{-1}(G_{13})$ и $\gamma(G_1) = \gamma(G_{12})$.

(ii) Ако x_1 е γ-критичен връх на G_1, то $x_2 \in D_0(G_{12}), x_3 \in DN(G_{13})$ и $\gamma(G_1) = \gamma(G_{12})$.

(iii) Ако $x_1 \in DN(G_1)$, то $x_2 \in D_{-1}(G_{12}), x_3 \in D_0(G_{13})$ и $\gamma(G_1) = \gamma(G_{12}) + 1$.

(iv) Ако $x_3 \in (DK(G_3) - DK_{-1}(G_3)) \cup D_0(G_3)$, то $x_2 \in DN(G_{32}), x_1 \in D_{-1}(G_{32})$ и $\gamma(G_3) = \gamma(G_{32})$.

(v) Ако x_3 е γ-критичен връх на G_3, то $x_2 \in D_0(G_{32}), x_1 \in DN(G_{31})$ и $\gamma(G_3) = \gamma(G_{32})$.

(vi) Ако $x_3 \in DN(G_3)$, то $x_2 \in D_{-1}(G_{32}), x_1 \in D_0(G_{32})$ и $\gamma(G_3) = \gamma(G_{32}) + 1$.

Сега от $(i) \div (vi)$, теорема 1.1.7 и теорема 1.1.8 приложени към G като x_1-съчленение на G_1 и G_{31}, като x_2-съчленение на G_{12} и G_{32}, и като x_3-съчленение на G_{13} и G_3, следва исканото.

Следствие 1.4.2 *Нека* $P_n = (\{x_1, x_2, .., x_n\}, \{x_1x_2, x_2x_3, .., x_{n-1}x_n\}), n \geq 2$

1. *Ако* $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $V(P_n) = DK_1(P_n) \cup DN(P_n)$ *и* $DK_1(P_n) = \{x_k | k \equiv 2(mod\ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$.

2. *Ако* $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $V(P_n) = D_0(P_n) \cup D_{-1}(P_n)$ *и* $D_{-1}(P_n) = \{x_k | k \equiv 1(mod\ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$.

3. *Ако* $n \equiv 2(mod\ \ 3)$ *и* $n > 2$, *то* $V(P_n) = D_0(P_n) \cup DN(P_n)$ *и* $DN(P_n) = \{x_k | k \equiv 0(mod\ \ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$. *Ако* $n = 2$, *то* P_n *е* $D_0 - \gamma -$*граф.*

Доказателство: При $n \leq 3$ твърдението е очевидно вярно. Ще приложим индукция по броя на върховете. От индукционната хипотеза и теорема 1.4.1, приложена към всяко 1-подразделение на ребро на P_{n-1} се получава резултатът.

Твърдение 1.4.3 *Нека* G *е граф,* y_1 *и* y_2 *са висящи върхове в* G, $N(y_1, G) = \{z_1\}$, $N(y_2, G) = \{z_2\}$. *Нека* $z_1, x_1, .., x_n, z_2$ *е проста верига в* G, $n \geq 1$ *и* $d(x_i, G) = 2$ *за* $i = 1, .., n$. *Нека* $s \in \{1, .., n\}$.

1. *Ако* $n = 1$, *то* $x_1 \in DN(G)$.

2. *Ако* $n = 2$, *то* $x_1, x_2 \in DN(G)$ *и* $z_1, z_2 \in DK(G)$.

3. *Нека* $n \equiv 0(mod\ \ 3)$. *Ако* $s \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in D_{-1}(G)$. *Ако* $s \not\equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in D_0(G)$.

4. *Нека* $n \equiv 1(mod\ \ 3)$ *и* $n > 1$. *Ако* $s \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in DN(G)$. *Ако* $s \not\equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in D_0(G)$.

5. *Нека* $n \equiv 2(mod\ \ 3)$ *и* $n > 2$. *Тогава* $z_1, z_2 \in DK(G)$. *Ако* $s \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in DK_1(G)$. *Ако* $s \not\equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $x_s \in DN(G)$.

Доказателство: Нека $P_n =< \{x_1, .., x_n\}, G >$ и $R =< \{x_2, .., x_{n-1}\}, G >$. Добре известно е, че:

(i) $\gamma(P_n) = [(n + 2)/3]$.

Тъй като y_1 и y_2 са висящи върхове, то

(ii) За всяко γ-множество M в G, множеството $M_1 = (M - \{y_1, y_2\}) \cup \{z_1, z_2\}$ е γ-множество в G.

От (i) и от (ii) следват:

(iii) $\gamma(G) = \gamma(G - V(R)) + \gamma(R) = \gamma(G - V(R)) + [n/3]$.

(iv) В P_n съществува $[n/3]$-елементно множество от върхове, което е доминиращо множество за R.

1) и 2) следват непосредствено от (ii).

3) От (ii) следва, че има γ-множество M на G, че $z_1, z_2 \in M$. В този случай $A_1 = \{x_k : k \equiv 2(mod\ \ 3)\}$ е γ-множество в R,а от следствие 1.4.2 - $A_1 = D_{-1}(R)$ и $V(R) - A_1 = D_0(R)$. Тогава за всеки връх v от A_1 в R има γ-множество, сечението на което с $N[v, G]$ е $\{v\}$. Оттук и от (iii) следва, че $A_1 \subseteq D_{-1}(G)$. Следователно $V(R) - A_1 \subseteq D_0(G) \cup D_{-1}(G)$. Да допуснем, че $x_1 \in D_{-1}(G)$. Тогава ще има γ-множество Q, съдържащо x_1 и y_1. Получихме противоречие тъй като в този случай $(Q - \{x_1, y_1\}) \cup \{z_1\}$ е доминиращо множество с по-малко от $\gamma(G)$ елемента. И така, $x_1 \in D_0(G)$. Аналогично получаваме, че и $x_n \in D_0(G)$. Нека $1 < s < n$ е цяло число и $s \not\equiv 2(mod\ \ 3)$. Да допуснем, че $x_s \in D_{-1}(G)$. Тогава има γ-множество M на G такова, че $z_1, z_2 \in M$ и $x_{s-1}, x_{s+1} \in M$. В този случай обаче $|M \cap V(P_n)| > [n/3]$, което е в противоречие с (ii).

4) От (ii) следва, че има γ-множество M на G, че $z_1, z_2 \in M$. В този случай $A_1 = \{x_k : k \equiv 0(mod\ \ 3)\}$ и $A_2 = \{x_k : k \equiv 2(mod\ \ 3)\}$ са всичките $[n/3]$-елементни доминиращи R множества. Следователно $A_1 \cup A_2 \subseteq D_0(G) \cup D_{-1}(G)$ и $A_3 = \{x_k : k \equiv 1(mod\ \ 3)\} \in DN(R)$. Оттук и от (iii) - $A_3 \in DN(G)$ и тогава - $A_1 \cup A_2 \in D_0(G)$.

5) От (ii) следва, че има γ-множество M на G, че $z_1, z_2 \in M$. Тъй като $A = \{x_k : k \equiv 0(mod\ \ 3)\}$ е единственото $[n/3]$-елементно доминиращо множество в R, то $M \cap \{x_1, .., x_n\} = A$. Да допуснем, че $z_1 \notin DK(G)$. Тогава има γ-множество Q на G, че $z_1 \notin Q$. Следователно $Q_1 = Q \cap \{x_1, .., x_n\}$ е γ-множество на $< \{x_1, .., x_{n-1}\}, G >$ или на $< \{x_1, .., x_n\}, G >$ и тогава от (i) ще следва, че $|Q_1| > |A|$, с което неравенство стигаме до противоречие. И така, z_1 и аналогично z_2 са елементи на $DK(G)$. Оттук и от единствеността на γ-множеството A, получаваме исканото.

В останалата част от този пункт ще считаме, че:
(i) G_1 и G_2 са графи без общи върхове;
(ii) $P_n = (\{x_1, x_2, .., x_n\}, \{x_1x_2, x_2x_3, .., x_{n-1}x_n\})$, $n \geq 3$;
(iii) $P_n(k) = \{x_i | i \equiv k(\ mod\ 3), n \geq i \geq k\}$, $1 \leq k \leq n$;
(iv) $P_n(x_i, x_j) =< \{x_i, x_{i+1}, .., x_j\}, P_n >$ за $1 \leq i < j \leq n$;
(v) $V(P_n) \cap V(G_1) = \{x_1\}$;
(vi) $V(P_n) \cap V(G_2) = \{x_n\}$;
(vii) $H_n = G_1 \cup G_2 \cup P_n$.

Теорема 1.4.4 *Нека* $x_1 \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_n \in DN(G_2)$.

1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$,*то* $P_n(2) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-2)/3]$.

Теорема 1.4.5 *Нека* $x_1 \in D_{-1}(G_1) \cup DK_{-1}(G_1)$ *и* $x_n \in D_{-1}(G_2) \cup DK_{-1}(G_2)$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(2) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-4)/3]$.

Теорема 1.4.6 *Нека* $x_1 \in DN(G_1)$, $x_n \in DN(G_2)$ *и* $m \geq 1$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(2) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq DN(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [n/3]$.

Теорема 1.4.7 *Нека* $x_1 \in D_0(G_1)$, $x_n \in (D_{-1}(G_2) \cup DK_{-1}(G_2))$ *и* $m \geq 1$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-3)/3]$.

Теорема 1.4.8 *Нека* $x_1 \in D_0(G_1)$, $x_n \in DN(G_2)$ *и* $m \geq 1$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-1)/3]$.

Теорема 1.4.9 *Нека* $x_1 \in D_0(G_1)$, $x_n \in D_0(G_2)$ *и* $m \geq 1$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq D_0(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(1) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.
4) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-2)/3]$.

Теорема 1.4.10 *Нека* $x_1 \in DK_p(G_1), p \geq 0, x_n \in DN(G_2)$ *и* $m \geq 1$.
1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_{p+1}(H_n)$, $P_n(1) - \{x_1\} \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.
2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$ *и* $p > 0$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(4) \subseteq D_0(H_n)$.
3) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$ *и* $p = 0$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.

4) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq D_0(H_n)$.

5) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-1)/3]$.

Теорема 1.4.11 *Нека* $x_1 \in DK_p(G_1), p \geq 0, x_n \in D_{-1}(G_2) \cup DK_{-1}(G_2)$ *и* $m \geq 1$.

1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$ *и* $p \geq 1$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $(P_n(1) \cup P_n(2)) - \{x_1\} \subseteq D_0(H_n)$.

2) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$ *и* $p = 0$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.

3) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq D_0(H_n)$.

4) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_{p+1}(H_n)$, $P_n(4) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.

5) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-3)/3]$.

Теорема 1.4.12 *Нека* $x_1 \in DK_p(G_1), p \geq 0, x_n \in D_0(G_2)$ *и* $m \geq 1$.

1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $(P_n(1) \cup P_n(3)) - \{x_1\} \subseteq D_0(H_n)$.

2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_{p+1}(H_n)$, $P_n(4) \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.

3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$ *и* $p \geq 1$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(4) \subseteq D_0(G)$.

4) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$ *и* $p = 0$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.

5) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-2)/3]$.

Теорема 1.4.13 *Нека* $x_1 \in DK_p(G_1), x_n \in DK_q(G_2), p \geq q \geq 0$ *и* $m \geq 1$.

1) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$,*то* $x_1 \in DK_p(H_n), x_n \in DK_q(H_n), P_n(2) \subseteq DN(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(3) - \{x_1, x_n\} \subseteq D_0(H_n)$.

2) Ако $n \equiv 1(mod\ \ 3)$, *то* $x_1 \in DK_{p+1}(H_n), x_n \in DK_{q+1}(H_n)$, $P_n(4) - \{x_n\} \subseteq DK_1(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq DN(H_n)$.

3) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$ *и* $q \geq 1$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n), x_n \in DK_q(H_n)$, $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(4) - \{x_n\} \subseteq D_0(H_n)$.

4) Ако $n \equiv 2(mod\ \ 3)$, $p \geq 1$ *и* $q = 0$, *то* $x_1 \in DK_p(H_n)$, $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(2) \cup P_n(4) \subseteq D_0(H_n)$.

5) Ако $n \equiv 0(mod\ \ 3)$ *и* $p = q = 0$, *то* $P_n(3) \subseteq D_{-1}(H_n)$ *и* $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq D_0(H_n)$.

6) $\gamma(H_n) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + [(n-2)/3]$.

Доказателство: на теореми 1.4.4 $\div$ 1.4.13:

Доказателството ще проведем по индукция за n. При $n = 3$ всяка от теоремите се съдържа в теорема 1.5.1. Нека $n > 3$.

От индукционната хипотеза и теорема 1.4.1, приложена към всяко 1-подразделение на ребро на P_{n-1} в H_{n-1}, след преномерация на върховете получаваме искания резултат.

1.5 Околности

Намерени са някои достатъчни условия за това, връх на граф да не бъде инцидентен само с мостове.

Лема 1.5.1 *Нека G е граф, $x \in V(G), A = \{y \in N(x) | d(y) = 1\}$ и $|A| \geq 2$. Тогава $A \subseteq DN(G)$ и $x \in DK_p(G)$ за някое $p \geq |A| - 1$. При това $p = |A| - 1$ тогава и само тогава, когато е изпълнено някое от:*

(i) G е изоморфен на $K(1, |A|)$;

(ii) $x \in D_{-1}(G - A) \cup DN(G - A)$.

Доказателство: Нека $Q =< \{x\} \cup A, G >$. Очевидно Q е изоморфен на $K(1, |A|)$. Ако $Q = G$, то $DN(G) = A$ и $x \in DK_{|A|-1}(G)$. Нека $Q \neq G$. От Теорема 1.1.8 приложена към $G - A$ и Q получаваме, че $x \in DK_p(G)$ за някое $p \geq |A| - 1$. Очевидно $A \subseteq DN(G)$. Ако $x \in D_{-1}(G - A) \cup DN(G - A)$, то от теорема 1.1.8 - $x \in DK_{|A|-1}(G)$. Ако $x \in DK_{|A|-1}(G)$, то $x \in D_{-1}(G - A) \cup DN(G - A)$, което следва от отново от теорема 1.1.8.

Теорема 1.5.2 *Нека върхът x на графа G е инцидентен само с мостове и нека x не е висящ връх. Тогава $N[x, G] - D_0(G) \neq \emptyset$.*

Доказателство: Да допуснем, че $N[x, G] \subseteq D_0(G)$. От теорема 1.4.1 следва, че $d(x, G) > 2$. Нека F е множество от ребра , които са инцидентни с x и е такова, че :

(i) за всяко множество $Q \subseteq F$: $N[x, G - Q] = D_0(G - Q)$ и

(ii) за всяко ребро f инцидентно с x в $G - F$, $N[x, G_f] - D_0(G_f) \neq \emptyset$, където G_f е компонентата на $G - F - \{f\}$, която съдържа x .

Нека $U = G - F$ и $N(x, U) = \{y_1, .., y_k\}$. От теорема 1.3.4, теорема 1.3.5 и теорема 1.1.11 следва,че $x \in D_{-1}(U_i) \cup D_0(U_i)$ за всяко $i = 1, 2, .., k$, , където U_i е компонентата на $U - xy_i$, която съдържа x . Нека H_s е компонентата на $G - xy_s$, която съдържа y_s , $s = 1, 2, .., k$. Ако някое от $y_1, y_2, .., y_k$ е висящ връх, нека без загуба на общност y_1 е висящ връх. Тогава няма висящ връх сред $y_2, y_3, .., y_k$, което следва от лема 1.5.1.

Нека за $s = 2, 3, .., k$: $T_s =< (\cup_{i=1}^{s} V(H_i)) \cup \{x\},\ G - F >$. Да допуснем, че $x \in D_{-1}(U_s)$ за някое $s \in \{1, 2, .., k\}$. Ако y_1 е висящ връх, то от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва, че $x \in D_{-1}(U_1)$. Тогава без загуба на общност , нека $x \in D_{-1}(U_1)$. Ако y_1 не е висящ връх, то от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва $y_1 \in D_{-1}(H_1)$. От тези теореми следва още, че $y_m \in DN(H_m)$ за $m = 2, 3, .., k$. Да отбележим още,че $x \in D_0(T_2)$, което следва от теорема 1.4.4. Сега прилагаме теорема 1.2.5 последователно към графите $T_3, T_4, ..., T_k$ и получаваме $x \in D_0(T_s)$ и $y_s \in DN(T_s)$ за $s = 3, 4, ..., k$. И тъй като $T_k = U$, то $y_k \in DN(U)$ - противоречие.

Следователно $x \in D_0(U_s)$ за всяко $s = 1, 2, .., k$. Тогава $y_i \in D_0(H_i) \cup DK_0(H_i)$ за всяко $i = 1, 2, .., k$, което следва от теорема 1.3.4. От теорема 1.4.1 имаме $x \in DN(T_2)$. Тогава от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва $x \in DN(T_m)$ за $m = 3, 4, .., k$. Тъй като $T_k = G$, имаме $x \in DN(G)$, с което получихме противоречие.

Теорема 1.5.3 *Нека G е свързан граф и $x \in DK_p(G)$, $p \geq 0$. Ако $N(x, G) \subset D(G)$, то съществува $y \in N(x, G) \cap D_0(G)$ такова, че xy не е мост за G.*

Доказателство: Нека $N(x, G) \subset D(G)$. От твърдение А2 следва, че $N(x, G) \subset D_0(G) \cup DK(G)$ и $A = N(x, G) \cap D_0(G) \neq \emptyset$. Нека $A = \{y_1, y_2, .., y_k\}$. Да допуснем, че $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове. Нека $M \in \mathcal{D}(G)$ е такова, че $|A \cap M|$ е най-голямо . Нека, без загуба на общност $y_1 \notin M$. Тогава $y_1 \in D_0(Q) \cup DK_0(Q)$, $\gamma(G) = \gamma(Q) + \gamma(G - V(Q))$ и $x \in DK(G - V(Q))$, където Q е компонентата на $G - xy_1$, която съдържа y_1 (следва от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5). Да допуснем, че $A - M \neq \emptyset$. Нека $y_1 \in M_1 \in \mathcal{D}(Q)$. Следователно $(M - (M \cap V(Q)) \cup M_1 \in \mathcal{D}(G)$ - противоречие с избора на M . Тогава $A \subset M$. И така $N(x, G) \subset M$, което е в противоречие с $x \in M$.

Твърдение 1.5.4 *Нека G е свързан граф с поне три върха. Нека $x, y \in V(G)$ са такива, че $N(x, G) = \{y\}$ и $x \in D_0(G)$. Тогава $y \in D_0(G) \cap D_{-1}(G - x)$. Ако zy е мост на G и $z \neq x$, то $z \in DN(G)$.*

Доказателство: От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 - $y \in D_0(G)$ и $y \in D_{-1}(G - x)$. Нека $z \neq x$ и zy е мост. Ако $N(y, G) = \{x, z\}$, то $z \in DN(G)$, което следва от теорема 1.4.1. Затова ще считаме, че $d(y, G) > 2$. Нека $z \in M \in \mathcal{D}(G)$, G_1 е компонентата, която съдържа y и G_2 е другата компонента на $(G - x) - yz$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва, че $y \in D_{-1}(G)$ и $z \in DN(G_2)$, а така също и $y \in D_0(< V(G_1) \cup \{x\}, G >)$. Тогава отново от тези теореми следва, че $z \in DN(G)$.

Теорема 1.5.5 *Нека G е граф , $x \in D_0(G)$, x не е висящ връх и $N(x, G) \subset D_0(G) \cup DK(G)$. Тогава $|N(x, G) \cap D_0(G)| > 1$ и съществува връх $y \in N(x, G) \cap D_0(G)$ такъв, че xy не е мост за G.*

Доказателство: Имаме $A = N(x, G) \cap D_0(G) \neq \emptyset$. Нека тогава $A = \{y_1, y_2, .., y_k\}$. Да допуснем, че $k = 1$. Нека $x \in U \in \mathcal{D}(G)$, Тогава $N[U - \{x\}, G] = V(G) - \{y_1\}$. Така, че $(U - \{x\}) \cup \{y_1\} \in \mathcal{D}(G)$ и $N[U - \{y_1\}, G] = V(G) - \{y_1\}$. Следователно $y_1 \in D_{-1}(G)$, което е в противоречие с $y_1 \in D_0(G)$. Така, че $k > 1$. Да допуснем, че $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове. Тогава измежду $y_1, y_2, .., y_k$ няма висящ връх , което следва от теорема 1.3.4, теорема 1.3.5 и твърдение 1.5.4. Нека $M \in \mathcal{D}(G)$ е такова, че $x \in M$ и $|A \cap M|$ е най- голямо. Очевидно съществува y_i, че $y_i \notin M$. Нека G_i е компонентата на $G - xy_i$, която съдържа y_i. От теорема 3.4 и теорема 3.5 следва, че едно от следните твърдения е вярно:

$(i) x \in D_0(G - V(G_i)) \cup DK_0(G - V(G_i))$, $y_i \in D_0(G_i) \cup DK_0(G_i)$;
$(ii) x \in D_{-1}(G - V(G_i))$, $y_i \in D_{-1}(G_i)$.

Нека е вярно (i) и $y_i \in M_i \in \mathcal{D}(G_i)$. Тогава $Q = (M - V(G_i)) \cup M_i \in \mathcal{D}(G)$, което следва от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5. Следва, че $y_i \in Q$ и тогава $|A \cap Q| > |A \cap M|$, което е в противоречие с избора на множеството M .

Нека е вярно (ii). Да допуснем, че съществува връх y_k, такъв че $y_k \notin M$, $k \neq i$. Както по-горе имаме:

(iii) $x \in D_{-1}(G - V(G_k))$, $y_k \in D_{-1}(G_k)$,

където G_k е компонентата на $G - xy_k$, която съдържа y_k .

Нека $R_i \in \mathcal{D}(G - V(G_i))$ и $N[R_i - \{x\}] = (G - V(G_i)) - \{x\}$. Нека $S_i \in \mathcal{D}(G_i - y_i)$. Тогава $R_i \cup S_i$ доминира G и $|R_i \cup S_i| = \gamma(G - V(G_i)) + \gamma(G_i) - 1$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 имаме $R_i \cup S_i \in \mathcal{D}(G)$. Освен това $A = R_i \cap V(G_k)$ доминира G_k , което следва от избора на R_i. Нека $B \in \mathcal{D}(G_k - y_k)$. Тогава $((R_i - A) \cup B) \cup S_i = C$ доминира G и $|C| < \gamma(G)$ - противоречие.

Следователно $N(x, G) - M = \{y\}$. Тогава $N[(M - V(G_i)) - \{x\}] = V(G - V(G_i))$ и $N[M \cap V(G_i)] = V(G_i - y_i)$. Следва,че
$M \geq \gamma(G - V(G_i)) + \gamma(G_i - y_i) + 1 = \gamma(G - V(G_i)) + \gamma(G_i)$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва $\gamma(G - V(G_i)) + \gamma(G_i) = \gamma(G) + 1$. И така $|M| \geq \gamma(G) + 1$ - противоречие с избора на M .

Следствие 1.5.6 *Нека G е граф , $x \in D_0(G)$, x не е висящ връх и x е инцидентен само с мостове. Тогава $N(x, G) \cap (DN(G) \cup D_{-1}(G)) \neq \emptyset$.*

Твърдение 1.5.7 *Нека G е граф и $x \in DN(G)$.*

1. *Ако $|N(x, G) \cap D(G)| = 1$, то съществува $y \in N(x, G)$ такъв, че $y \in DK_p(G), p \geq 0$ и $N(x, G) - \{y\} \subset DN(G)$.*

2. *Ако $N(x, G) \subset DN(G) \cup D_0(G)$, то $|N(x, G) \cap D_0(G)| \geq 2$.*

Доказателство: 1). Нека $\{y\} = N(x, G) \cap D(G)$. Ако $M \in \mathcal{D}(G)$, то $M \cap N(x, G) \neq \emptyset$, откъдето $M \cap N(x, G) = \{y\}$ и тогава $y \in DK_p(G)$ за някое $p \geq 0$.

2). Следва от 1).

Число на *γ-подразбиване* на графа G се нарича най-малкото число k за което съществуват k ребра на G след 1-подразбиването, на които се променя числото на доминиране. Означава се с $sd_\gamma(G)$. През юни 2000г. *Арумугам* изказа хипотезата, че $sd_\gamma(G) \leq 3$ ([60]). Ще докажем, че за дървета това е така.

Твърдение 1.5.8 *Нека H е дърво с поне три върха. Тогава $sd_\gamma(H) \leq 3$.*

Доказателство: Ще ползваме следния факт от [23] :
(α): Ако H е дърво и $x \in DK_p(H)$ за някое $p \geq 1$, то съществуват два различни върха $y_1, y_2 \in N(x, H) \cap DN(G)$ такива, че ако някой от тях не е висящ, то всичките му съседи, с изключение на x, са от $DN(H)$.

Случай 1. Съществува връх x, $x \in DK_p(H)$, $p \geq 1$.

Нека y_1 и y_2 са както в (α). Ако y_1 е висящ връх, то $sd_\gamma(H) = 1$, което веднага следва от теорема 1.2.6. Нека y_1 не е висящ връх и нека $z \in N(y_1, H) - \{x\}$. Тогава $z \in DN(G)$. Оттук и от теореми 1.3.4 и 1.3.5 следва $\gamma(G - y_1z) = \gamma(G)$ и $y_1, z \in DN(G - y_1z)$. Сега от теорема 1.4.1 имаме, че след 1-подразделяне на реброто y_1z, числото на доминиране ще се промени.

Случай 2. Съществуват съседни върхове x, y такива, че $x \in DN(H)$ и $y \in D_0(H)$.

От теореми 1.3.4 и 1.3.5 следват $x \in DN(H - xy), y \in D_0(H - xy)$ и $\gamma(H) = \gamma(H - xy)$. Тогава от теорема 1.4.1 следват $x \in DN(H_1), y \in DK_1(H_1)$ и $\gamma(H) = \gamma(H_1)$, където H_1 се получава от H след 1-подразделяне на xy. От (α) следва, че съществува $y_1 \in N(y, H_1)$ такъв, че $N[y_1, H_1] - DN(H_1) = \{y\}$. Сега от доказаното в случай 1) следва исканото.

Случай 3. Нека $V(H) = D_0(H) \cup D_{-1}(H)$.

Нека $P : x_1, x_2, .., x_n$ е най-дълга проста верига в H. От твърдение 1.5.4 следват $x_n \in D_{-1}(H)$ и $x_{n-1} \in D_0(H)$, а от лема 1.5.1 - $N(x_{n-1}, G) = \{x_n, x_{n-2}\}$. Сега от теорема 1.4.1 следва $x_{n-2} \in D_0(H)$ и тогава от следствие 1.5.6 имаме, че съществува $y \in N(x_{n-2}, H) \cap D_{-1}(H)$. От теореми 1.3.4 и 1.3.5 следва, че $y \in D_{-1}(H - yx_{n-2}) \cup DK_{-1}(H - yx_{n-2})$, $x_{n-2} \in DN(H - yx_{n-2})$ и $\gamma(H) = \gamma(H - yx_{n-2})$. Тогава от теорема 1.4.1 имаме $x_{n-2} \in DN(H_1)$, $\gamma(H_1) = \gamma(H - yx_{n-2}) = \gamma(H)$, където H_1 се получава от H след 1-подразделяне на реброто yx_{n-2}. Очевидно сега $x_{n-1}, x_n \in D_0(H_1)$. Нека H_2 се получава от H_1 след

1-подразделяне на ребрата $x_{n-2}x_{n-1}$ и $x_{n-1}x_n$. Сега от теорема 1.3.4 следва $\gamma(H_2) = \gamma(H_1) + 1$.

С това всичко е доказано взимайки предвид теореми 1.5.3 и 1.5.5.

1.6 γ-разлагане

Нека G е граф и G_1 е негов собствен подграф. Ако G и G_1 имат едно и също γ-разлагане, то G и G_1 имат равен брой върхове, но не винаги $\gamma(G) = \gamma(G_1)$. Както показват прости примери, ако G и G_1 имат едно и също γ-разлагане и допълнително $\gamma(G) = \gamma(G_1)$, то не винаги $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$. Обратно, нека графът G и собственият му подграф G_1 са такива, че $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$. Тогава веднага следва, че $\gamma(G) = \gamma(G_1)$, но не винаги G и G_1 имат равен брой върхове. С прости примери се вижда също, че ако графът G и собственият му подграф G_1 имат един и същ брой върхове и допълнително $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$, то не винаги γ-разлагането на G съвпада с γ-разлагането на G_1.

Твърдение 1.6.1 *Нека графа G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Нека е вярно едно от следните твърдения:*

(i) $x \in DK_p(G_1)$ *за* $p \geq 1$*;*

(ii) $x \in DK_0(G_1)$ *и* $x \notin DN(G_2)$.

Тогава:

1. $\mathcal{D}(G_1) = \{M \cap V(G_1) : M \in \mathcal{D}(G)\}$.
2. $(DK(G) \cap V(G_1), D_0(G) \cap V(G_1), D_{-1}(G) \cap V(G_1), DN(G) \cap V(G_1))$ *е γ-разлагане на* G_1.

Доказателство: От твърдение 1.1.8 - $x \in DK(G)$.

1). Нека $M_2 \in \mathcal{D}(x, G_2)$ когато $x \notin DN(G_2)$ и $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$ когато $x \in DN(G_2)$. Нека $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$. Тогава $|M_1 \cup M_2| = \gamma(G)$, което следва от твърдение 1.1.7. Тъй като $M_1 \cup M_2$ е доминиращо множество на G, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$.

Нека $M_1 = M \cap V(G_1)$, където $M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава M_1 е доминиращо множество на G_1. Ако $M_1 \notin \mathcal{D}(G_1)$, то нека $M_{11} \subset M_1$ и $M_{11} \in \mathcal{D}(G_1)$. Понеже $x \in DK(G) \cap DK(G_1)$, то $A = M_{11} \cup (M \cap V(G_2))$ е доминиращо множество на G и $|A| < \gamma(G)$, което е невярно.

2) От 1) непосредствено следва, че $D(G) \cap V(G_1) = D(G_1)$ и $DN(G) \cap V(G_1) = DN(G_1)$. Нека $y \in D_{-1}(G_1) \cup D_0(G_1)$. Тогава съществува $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$, че $y \notin M_1$. От 1) следва, че $y \notin DK(G)$, откъдето - $y \in (D_{-1}(G) \cup D_0(G)) \cap V(G_1)$

Нека $z \in (D_{-1}(G) \cup D_0(G)) \cap V(G_1)$ и $z \notin M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $z \notin M \cap V(G_1) \in \mathcal{D}(G_1)$ и още - $z \in D_{-1}(G_1) \cup D_0(G_1)$.

Следователно $D_{-1}(G_1) \cup D_0(G_1) = (D_0(G) \cup D_{-1}(G)) \cap V(G_1)$.

Нека $y \in D_{-1}(G_1)$ и $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ са такива, че $N[M_1 - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$ (твърдение A1). Нека още $M \in \mathcal{D}(G)$ е такова, че $M \cap V(G_1) = M_1$. Тогава $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Така, че $y \in D_{-1}(G) \cap V(G_1)$. Нека сега $z \in D_{-1}(G) \cap V(G_1)$ и $z \in M \in \mathcal{D}(G)$, като $N[M - \{z\}, G] = V(G) - \{z\}$. Следва, че $N[M - \{z\}, G_1] = V(G_1) - \{z\}$ и тогава $z \in D_{-1}(G_1)$. Оттук $D_{-1}(G) \cap V(G_1) = D_{-1}(G_1)$ и следователно $D_0(G) \cap V(G_1) = D_0(G_1)$.

В твърдение 1.6.2 за графа G и неговия подграф G_1 такива, че $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$, са намерени връзки между тяхните γ-разлагания. Намерени са достатъчни условия за това, тези разлагания да съвпадат.

Твърдение 1.6.2 *Нека G е граф, G_1 е негов подграф и нека $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$. Тогава:*

1. *$\gamma(G) = \gamma(G_1)$, $DN(G) = DN(G_1) \cup (V(G) - V(G_1))$ и $D(G) = D(G_1)$.*
2. *$DK(G) = DK(G_1)$ и $D_{-1}(G) \cup D_0(G) = D_{-1}(G_1) \cup D_0(G_1)$.*
3. *Ако $G_1 = G - v$, където $v \in V(G)$, то γ-разлагането на G_1 е $(DK(G), D_0(G), D_{-1}(G), DN(G) - \{v\})$.*
4. *Ако $V(G) = V(G_1)$, то $D_{-1}(G_1) \subseteq D_{-1}(G)$ и $D_0(G) \subseteq D_0(G_1)$.*
5. *Нека $x_1, x_2 \in V(G)$, $x_1x_2 \in E(G)$ и $G_1 = G - x_1x_2$.*

   (i) Ако върхът $u \in V(G) - \{x_1, x_2\}$ е такъв, че $u \in D_{-1}(G) \cap D_0(G_1)$, то $\{x_1, x_2\} \subseteq D(G)$, $\{x_1, x_2\} - N(u, G) \neq \emptyset$ и за някое $s \in \{1, 2\}$: $N[u, G] \subset N[x_s, G]$ и $x_s \in D_0(G) \cap D_0(G - x_1x_2)$.

   (ii)Ако $x_s \in DN(G)$ за някое $s \in \{1, 2\}$, то $\gamma-$разлагането на G е $\gamma-$разлагане на G_1.

Доказателство: 1) Нека $Q \in \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$. Тогава $\gamma(G) = |Q| = \gamma(G_1)$. Нека $x \in D(G)$. Тогава има M, $M \in \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$ такова, че $x \in M$. Следователно $D(G) \subseteq D(G_1)$. Нека $x \in D(G_1)$. Тогава съществува M_1, $M_1 \in \mathcal{D}(G_1) = \mathcal{D}(G)$, че $x \in M$. Следователно $D(G_1) \subseteq D(G)$.

2) От $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$ непосредствено следва $DK(G) = DK(G_1)$. Останалото следва от 1).

3) От 1) и 2) следва, че $DK(G) = DK(G_1)$, $D_0(G) \cup D_{-1}(G) = D_0(G_1) \cup D_{-1}(G_1)$, $v \in DN(G)$ и $DN(G_1) = DN(G) - \{v\}$.

Нека $x \in D_{-1}(G_1)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G_1)$, че $N[M - \{x\}, G_1] = V(G_1) - \{x\} = V(G) - \{v, x\}$. Да допуснем, че $N[M - \{x\}, G] = V(G) - \{v, x\}$. Но $x \in M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $xv \in E(G)$ и следователно - $(M - \{x\}) \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G)$, което е в противоречие с $v \in DN(G)$.

И така, $N[M - \{x\}, G] = V(G) - \{x\}$ и тогава $x \in D_{-1}(G)$. Следователно $D_{-1}(G_1) \subseteq D_{-1}(G)$.

Нека сега $x \in D_{-1}(G)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G)$, че $x \in M$ и $N[M - \{x\}, G] = V(G) - \{x\}$. Тъй като $v \notin M$, то за всеки връх $u \in M$ имаме, че $N[u, G_1] = N[u, G] - \{v\}$. Следователно $N[M - \{x\}, G_1] = V(G_1) - \{x\}$, откъдето $x \in D_{-1}(G)$ и тогава $D_{-1}(G) \subseteq D_{-1}(G_1)$.

С това доказахме, че $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1)$. Оттук и от 2) следва, че $D_0(G) = D_0(G_1)$.

4) Нека $x \in D_{-1}(G_1)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G_1)$ такова, че $N[M - \{x\}, G_1] = V(G_1) - \{x\} = V(G) - \{x\}$. Оттук понеже $M \in \mathcal{D}(G)$ и $x \in M$, то $N[M - \{x\}, G] = V(G) - \{x\}$, откъдето $x \in D_{-1}(G)$. И така, $D_{-1}(G_1) \subseteq D_{-1}(G)$. Оттук и от 2) следва, че $D_0(G) \subseteq D_0(G_1)$.

5) (i) Нека $u \in D_{-1}(G) \cap D_0(G_1)$ и $u \notin \{x_1, x_2\}$. Съществува тогава $M \in \mathcal{D}(G)$, че $N[M - \{u\}, G] = V(G) - \{u\} = V(G_1) - \{u\}$. Ако $|\{x_1, x_2\} \cap M| \neq 1$, то $N[M - \{u\}, G] = N[M - \{u\}, G_1]$ и тогава $u \in D_{-1}(G_1)$ - с което получихме противоречие. Следва, че $|\{x_1, x_2\} \cap M| = 1$. Нека, без загуба на общност, $x_1 \in M$. Тогава $N[M - \{u\}, G_1] = V(G_1) - \{u, x_2\}$. Очевидно, за всеки връх $v \in N(u, G)$ е вярно, че $(M - \{u\}) \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$. Оттук $N[u, G] \subset N[x_2, G]$. От $u \in D_{-1}(G)$ следва, че $x_2 \in D_{-1}(G) \cup D_0(G)$. Да допуснем, че $x_2 \in D_{-1}(G)$. Тогава съществува $Q \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $N[Q - \{x_2\}, G] = V(G) - \{x_2\}$. Следователно, има връх $w \in V(G) - \{x_2\}$ такъв, че $wu \in E(G)$ и $wx_2 \notin E(G)$, с което получихме противоречие с $N[u, G] \subset N[x_2, G]$. И така, $x_2 \in D_0(G)$.

Нека $u \in M \in \mathcal{D}(G - x_1x_2)$. От $N[u, G - x_1x_2] \subseteq N[x_2, G - x_1x_2]$ следва, че $x_2 \notin M$. Тогава $M_1 = (M - \{u\}) \cup \{x_2\}$ е доминиращо множество в графа $G - x_1x_2$ с $|M_1| = |M| = \gamma(G - x_1x_2)$. Следователно $M_1 \in \mathcal{D}(G - x_1x_2)$. Оттук $x_2 \in D_0(G - x_1x_2) \cup D_{-1}(G - x_1x_2)$. Да допуснем, че $x_2 \in D_{-1}(G - x_1x_2)$. Тогава има множество $M \in \mathcal{D}(G - x_1x_2)$ такова, че $x_2 \in M$ и $N[M - \{x_2\}, G - x_1x_2] = V((G - x_1x_2) - \{x_2\})$. Следователно съществува $v \in (M - x_2) \cap N[u, G - x_1x_2]$ - противоречие с $N[u, G - x_1x_2] \subseteq N[x_2, G - x_1x_2]$. И така, $x_2 \in D_0(G - x_1x_2)$.

(ii) Без загуба на общност, нека $x_1 \in DN(G)$. Тогава $x_2 \notin D_{-1}(G)$, което следва от твърдение A2. От 1), 2) и 4) следва, че $DN(G) = DN(G_1), DK(G) = DK(G_1), D_{-1}(G_1) \subseteq D_{-1}(G)$ и $D_0(G) \subseteq D_0(G_1)$. Допускаме, че $D_{-1}(G) \neq D_{-1}(G_1)$. Съществува тогава $u \in D_{-1}(G) - D_{-1}(G_1)$ и $u \neq x_2$. Следователно от 2) - $u \in D_0(G_1)$. Но тогава от (i) следва, че $\{x_1, x_2\} \subset D(G)$, с което получаваме противоречие.

С това доказахме, че $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1)$. Оттук и от 2) и 4) следва, че γ-разлагането на G е γ-разлагане и за G_1.

Твърдение 1.6.3 *Нека G е граф, $x \in V(G)$ и $S_x(G) = \{M \in \mathcal{D}(G-x) : M \cap N(x,G) = \emptyset\}$.*

1. *Ако $x \in D_0(G)$, то $\mathcal{D}(G-x) = (\mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G)) \cup S_x(G)$.*
2. *Ако $x \in DN(G)$, то $\mathcal{D}(G-x) = \mathcal{D}(G) \cup S_x(G)$.*
3. *$\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G-x) = \emptyset \iff x \in DK(G) \cup D_{-1}(G)$.*
4. *$\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G-x) \iff x \in DN(G)$ и $S_x(G) = \emptyset$.*
5. *Ако* $\min\{|M| : M \in MDS(G)$ *и $x \in M\} > \gamma(G) + 1$, то $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G-x)$.*

Доказателство: 1) Нека $M \in \mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G)$. Тогава M доминира $G-x$ и $|M| = \gamma(G) = \gamma(G-x)$. Оттук - $\mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G) \subseteq \mathcal{D}(G-x) \cap \mathcal{D}(G)$.

Нека $M \in \mathcal{D}(G-x) \cap \mathcal{D}(G)$. Тогава $x \notin M$ и следователно $M \in \mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G)$. Оттук $\mathcal{D}(G-x) \cap \mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G)$.

И така, $\mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G) = \mathcal{D}(G-x) \cap \mathcal{D}(G)$.

Нека $M \in \mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G)$. Тогава $N[x,G] \cap M = \emptyset$ и следователно $M \in S_x(G)$. Оттук $\mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G) \subseteq S_x(G)$.

Нека сега $M \in S_x(G)$. Тогава $M \in \mathcal{D}(G-x)$ и $M \notin \mathcal{D}(G)$. Следователно $S_x(G) \subseteq \mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G)$. И така, $S_x(G) = \mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G)$.

От доказаното дотук имаме: $D(G-x) = (\mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G)) \cup (\mathcal{D}(G-x) \cap \mathcal{D}(G) = S_x(G) \cup (\mathcal{D}(G) - \mathcal{D}(x,G)$.

2) В този случай $\gamma(G) = \gamma(G-x)$ и за всяко $M \in \mathcal{D}(G)$ - $x \notin M$. Тогава $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G-x)$. Сега както в 1) получаваме $\mathcal{D}(G-x) - \mathcal{D}(G) = S_x(G)$.

3) Нека $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G-x) = \emptyset$. От 2) - следва, че $x \notin DN(G)$. От 1) - $x \notin D_0(G)$. Следователно $x \in DK(G) \cup D_{-1}(G)$.

Нека сега $x \in ((DK(G) - DK_0(G)) \cup D_{-1}(G))$. Тогава $\gamma(G-x) \neq \gamma(G)$ и следователно $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(G-x) = \emptyset$. Нека $x \in DK_0(G)$ и $M \in \mathcal{D}(G-x)$. Тогава $x \notin M$, откъдето - $M \notin \mathcal{D}(G)$.

4) Непосредствено следва от 1), 2) и 3).

5) В този случай имаме $x \in DN(G)$ и $S_x(G) = \emptyset$. Сега исканото следва от 4).

В теорема 1.6.4 и теорема 1.6.8 са намерени достатъчни условия за това, всеки елемент на γ-разлагането на графа G да бъде обединение на съответните елементи на γ-разлагането на G_1 и G_2, където G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

Теорема 1.6.4 *Нека графа G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Нека е вярно едно от следните твърдения:*

(i) $x \in DK_p(G_1) \cap DK_q(G_2)$, *където* $p \geq 0$ *и* $q \geq 0$.

(ii) $\mathcal{D}(G_j) = \mathcal{D}(G_j - x)$ *за* $j = 1, 2$.

Тогава:

1. $\mathcal{D}(G) = \{M_1 \cup M_2 : M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ *и* $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)\}$.

2. $(DK(G_1) \cup DK(G_2), D_0(G_1) \cup D_0(G_2), D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2), DN(G_1) \cup DN(G_2))$ *е γ-разлагане на G.*

Доказателство: Ако е вярно (i), то исканото следва непосредствено от твърдение 1.6.1.

Нека е вярно (ii).

1) От твърдение 1.6.3 следва, че $x \in DN(G_j)$ и $S_x(G_j) = \emptyset$ за $j = 1, 2$. От теорема 1.1.8 следва, че $x \in DN(G)$ и тогава от твърдение 1.1.7 - $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

Нека $M_j \in \mathcal{D}(G_j), j = 1, 2$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е доминиращо множество за G с $|M| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$. Следователно $M \in \mathcal{D}(G)$.

Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $x \notin M$. Да допуснем, че съществува $m \in \{1, 2\}$, за което $M_m \notin MDS(G_m)$. Без загуба на общност, нека $m = 1$. Тогава от твърдение 1.1.2 имаме, че $M_1 \in MDS(G_1 - x)$ и M_1 не е доминиращо множество за G_1. Но $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq \gamma(G_1 - x) + \gamma(G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Следователно $|M_1| = \gamma(G_1 - x)$, откъдето - $M_1 \in \mathcal{D}(G - x)$. Сега като вземем предвид, че M_1 не е доминиращо множество за G_1, имаме $\mathcal{D}(G_1 - x) \neq \mathcal{D}(G_1)$ с което получихме противоречие.

И така, $M_j = M \cap V(G_j) \in MDS(G_j)$ за $j = 1, 2$. Оттук и от $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, следва, че $M_j \in \mathcal{D}(G_j)$ за $j = 1, 2$.

2) От 1) следва, че $DK(G) = DK(G_1) \cup DK(G_2)$ и $DN(G) = DN(G_1) \cup DN(G_2)$. Следователно

$$D_0(G) \cup D_{-1}(G) = D_0(G_1) \cup D_{-1}(G_1) \cup D_0(G_2) \cup D_{-1}(G_2).$$

Нека $y \in D_{-1}(G_1)$ и $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ са такива, че $N[M_1 - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$ (твърдение A1). Нека още $M \in \mathcal{D}(G)$ е такова, че $M \cap V(G_1) = M_1$. Тогава $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Така, че $y \in D_{-1}(G) \cap V(G_1)$. Нека сега $z \in D_{-1}(G) \cap V(G_1)$ и $z \in M \in \mathcal{D}(G)$, като $N[M - \{z\}, G] = V(G) - \{z\}$. Следва, че $N[M - \{z\}, G_1] = V(G_1) - \{z\}$ и тогава $z \in D_{-1}(G_1)$. Оттук $D_{-1}(G) \cap V(G_1) = D_{-1}(G_1)$ и следователно

$D_0(G) \cap V(G_1) = D_0(G_1)$. Аналогично се доказват $D_0(G) \cap V(G_2) = D_0(G_2)$ и $D_{-1}(G) \cap V(G_2) = D_{-1}(G_2)$.

Оттук веднага следват $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$ и $D_0(G) = D_0(G_1) \cup D_0(G_2)$.

Нека G е граф и x_1, x_2 са негови несъседни върхове. В теорема 1.6.5 са намерени достатъчни условия за това, графа G и графа $G + x_1x_2$ да имат едно и също γ-разлагане.

Твърдение 1.6.5 *Нека G е граф, $x_1, x_2 \in V(G), x_1 \neq x_2, x_1x_2 \notin E(G)$ и $\gamma(G + x_1x_2) = \gamma(G)$. Нека е вярно едно от следните твърдения:*

(i) $x_1 \in DK_p(G)$, $x_2 \in DK_q(G)$, *където* $p \geq 1$ *и* $q \geq 1$

(ii) $x_1 \in DN(G) \cup DK_0(G)$ *и* $x_2 \in DK_1(G) \cap DN(G - x_1)$

(iii) $x_1, x_2 \in DN(G) \cup DK_0(G)$, $x_1 \in DN(G - x_2)$ *и* $x_2 \in DN(G - x_1)$.

Тогава γ-разлагането на $G + x_1x_2$ е γ-разлагане на G.

Доказателство: От твърдение 1.2.9 следва, че $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G + x_1x_2)$, а от твърдение 1.2.5 - $x_1, x_2 \notin D_0(G + x_1x_2)$.

От твърдение 1.6.2 следва, че $DN(G) = DN(G + x_1x_2), DK(G) = DK(G + x_1x_2), D_{-1}(G) \cup D_0(G) = D_{-1}(G + x_1x_2) \cup D_0(G + x_1x_2), D_{-1}(G) \subseteq D_{-1}(G + x_1x_2)$ и $D_0(G + x_1x_2) \subseteq D_0(G)$. Да допуснем, че γ-разлагането на $G + x_1x_2$ не е γ-разлагане на G. Тогава има $u \in D_{-1}(G + x_1x_2) - D_{-1}(G)$. Следователно $u \in D_0(G)$ и тогава от $(i), (ii)$ и (iii) следва - $u \notin \{x_1, x_2\}$. Но от твърдение 1.6.2 в такъв случай ще следва, че $\{x_1, x_2\} \cap D_0(G + x_1x_2) \neq \emptyset$ - получихме противоречие. И така, $D_{-1}(G + x_1x_2) = D_{-1}(G)$. Оттук и $D_0(G + x_1x_2) = D_0(G)$. С това всичко е доказано.

В теорема 1.6.6 е намерено достатъчно условие за това, добавянето на мост към несвързан граф да не променя γ-разлагането и множеството от най-малките доминиращи множества.

Теорема 1.6.6 *Нека G_1 и G_2 са графи без общ връх. Нека $x_1 \in DN(G_1)$, $x_2 \in DN(G_2)$ и $G = (G_1 \cup G_2) + x_1x_2$. Тогава :*

1. $\mathcal{D}(G) = \{M_1 \cup M_2 : M_1 \in \mathcal{D}(G_1), M_2 \in \mathcal{D}(G_2)\}$.

2. $(DK(G_1) \cup DK(G_2), D_0(G_1) \cup D_0(G_2), D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2), DN(G_1) \cup DN(G_2))$ *е γ-разлагане на G.*

3. $DK_p(G) = DK_p(G_1) \cup DK_p(G_2)$ *за всяко* $p = 0, 1, ..., |V(G)| - 2$.

Доказателство: От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва, че $x_1, x_2 \in DN(G)$ и $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

1). Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. Тъй като $x_1, x_2 \notin M$, то $M \cap V(G_i)$ доминира $G_i, i = 1,2$. Следва, че $|M \cap V(G_i)| \geq \gamma(G_i), i = 1, 2$. Тогава $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) \leq |M \cap V(G_1)| + |M \cap V(G_2)| = |M| = \gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Оттук $M \cap V(G_i) \in \mathcal{D}(G_i), i = 1, 2$.

Нека $M_i \in \mathcal{D}(G_i), i = 1, 2$. Тогава $M_1 \cup M_2$ доминира G и $x_1, x_2 \notin M_1 \cup M_2$. Тогава $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$, откъдето - $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$.

2). От 1) следва, че $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G - x_1x_2)$ и тогава исканото е следствие от твърдение 1.6.2.

3). Нека $x \in DK_p(G_1) \cup DK_p(G_2)$ и без загуба на общност - $x \in DK_p(G_1)$. От 2). имаме $x \in DK(G)$. Ако $G_1 - x$ е свързан граф , нека $H = G_1 - x$ и $b = 0$. Ако x е разрязващ връх, то нека H е компонентата на $G_1 - x$, която съдържа x_1 и $b = \gamma(G_1 - V(H))$. Имаме $\gamma(H \cup G_2 + x_1x_2) = \gamma(H) + \gamma(G_2)$, което следва от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5. Следователно $\gamma(G - x) = b + \gamma(H \cup G_2 + x_1x_2) = b + \gamma(H) + \gamma(G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + p = \gamma(G) + p$, т.е. $x \in DK_p(G)$.

Сега, нека $x \in DK_p(G)$ и нека без загуба на общност $x \in V(G_1)$ От 2) - $x \in DK(G_1)$. Нека H и b са определени както преди. Тогава $\gamma(G_1 - x) = \gamma(H) + b = \gamma(H \cup G_2 + x_1x_2) - \gamma(G_2) + b = \gamma(G - x) - \gamma(G_2) = \gamma(G) + p - \gamma(G_2) = \gamma(G_1) + p$. Следователно $x \in DK_p(G_1)$.

Следващите две теореми имат важно значение за резултатите получени в глава 3.

Теорема 1.6.7 *Нека G е свързан граф, $x \in V(G)$, $N(x, G) = \{x_1, .., x_k\}$, $k > 1$ и $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове. Нека G_s е компонентата на $G - x$, която съдържа $y_s, s = 1, 2, .., k$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(i) $y_s \in D_0(G_s)$ за $s = 1, 2, .., k$.

(ii) $y_s \in D_0(G)$ за $s = 1, 2, .., k$ и $x \in DN(G)$.

Нека е вярно едно от (i) и (ii) . Тогава :

1. *$\mathcal{D}(G) = \{\cup_{s=1}^k M_s : M_s \in \mathcal{D}(G_s)$ за $s = 1, .., k$ и $\cup_{s=1}^k M_s \cap N(x, G) \neq \emptyset\}$.*
2. *$\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + .. + \gamma(G_k)$.*
3. *$(\cup_{s=1}^k DK(G_s), \cup_{s=1}^k D_0(G_s), \cup_{s=1}^k D_{-1}(G_s), (\cup_{s=1}^k DN(G_s)) \cup \{x\})$ е γ-разлагане на G.*
4. *$DK_p(G) = \cup_{s=1}^k DK_p(G_s)$ за $p = 0, 1, ..., |V(G)| - 2$.*

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$: Нека за $m = 2,3,...,k$: $H_m =< (\cup_{r=1}^{m} V(G_r)) \cup \{x\}, G >$. От теорема 1.4.1 - $x \in DN(H_2)$. Прилагаме теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 към графите H_j , $j = 3,4,...,k$ и получаваме $x \in DN(H_m)$ и $y_m \in D_0(H_m)$ за $m = 3,4,...,k$. т.е. $y_k \in D_0(G)$ и $x \in DN(G)$. Аналогично - $y_1, y_2, ... y_{k-1} \in D_0(G)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Следва непосредствено от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5.

1). Нека $M_s \in \mathcal{D}(G_s)$ за $s = 1,...k$ и $x \in N(M_j, G)$. Тогава $\cup_{s=1}^{k} M_s$ е доминиращо множество на G. От теорема 1.4.1, теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 имаме:

$\gamma(G) = \gamma(H_k) = \sum_{l=1}^{k} \gamma(G_l) = \sum_{l=1}^{k} |M_l| = | \cup_{l=1}^{k} M_l |$.

Следователно $\cup_{l=1}^{k} M_l \in \mathcal{D}(G)$.

Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. От (ii) - $x \in DN(G)$. Следва, че $M \cap N(x,G) \neq \emptyset$ и $M \cap V(G_s)$ доминира G_s , $s = 1,2,...k$. Ако $M \cap V(G_t) \notin \mathcal{D}(G_t)$ за някое $t \in \{1,2,..,k\}$, то за всяко $M_t \in \mathcal{D}(G_t)$ такова, че $y_t \in M_t$ имаме че $A = (M - V(G_t)) \cup M_t$ доминира G и $|A| < |M|$ - противоречие.

2) Следва непосредствено от 1).

3). От 1) следва, че $D(G) = \cup_{s=1}^{k} D(G_s)$ и $DN(G) = (\cup_{s=1}^{k} DN(G_s)) \cup \{x\}$.

Ще докажем сега, че $D_{-1}(G) = \cup_{s=1}^{k} D_{-1}(G_s)$.

Случай 1. Нека без загуба на общност $u \in D_{-1}(G_1)$. Тогава съществува $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ такова, че $N[M - \{u\}, G_1] = V(G_1 - u)$. Нека $M_s \in \mathcal{D}(G_s), s = 2,3,..,k$ са такива, че $M_s \cap N(x, G_s) \neq \emptyset$. Тогава от 1) - $\cup_{m=1}^{k} M_m \in \mathcal{D}(G)$ и очевидно $N[\cup_{m=1}^{k} M_m - \{u\}, G] = V(G) - \{u\}$. Следователно $u \in D_{-1}(G)$.

Случай 2. Нека, без загуба на общност $u \in D_{-1}(G) \cap V(G_1)$. Нека $M \in \mathcal{D}(G)$ е такова, че $u \in M$ и $N[M - \{u\}, G] = V(G) - \{u\}$. Тогава от 2) - $u \in M \cap V(G_1) \in \mathcal{D}(G_1)$ и очевидно $N[M - \{u\}, G_1] = V(G_1) - \{u\}$, откъдето - $u \in D_{-1}(G_1)$.

Ще докажем сега, че $D_0(G) = \cup_{s=1}^{k} D_0(G_s)$.

Случай 1. Нека, без загуба на общност $u \in D_0(G_1)$. Нека тогава $M_0, M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ са такива, че $u \in M_0$ и $u \notin M_1$. Нека $M_s \in \mathcal{D}(G_s), s = 2,3,..,k$ като $y_2 \in M_2$. От 1) имаме $M_0 \cup (\cup_{m=2}^{k} M_m), \cup_{m=1}^{k} M_m \in \mathcal{D}(G)$ Следователно $u \in D_0(G) \cup D_{-1}(G)$. Сега от $D_{-1}(G) = \cup_{s=1}^{k} D_{-1}(G_s)$ следва $u \in D_0(G)$.

Случай 2. Нека, без загуба на общност $u \in D_0(G) \cap V(G_1)$. Нека $M_1, M_2 \in \mathcal{D}(G)$ са такива, че $u \notin M_1, u \in M_2$ и $u \in V(G_1)$. От 1) имаме $u \in D_0(G_1) \cup D_{-1}(G_1)$. Следователно от $D_{-1}(G) = \cup_{s=1}^{k} D_{-1}(G_s)$ получаваме $u \in D_0(G_1)$.

От дотук доказаното непосредствено следва, че $DK(G) = D(G) - (D_0(G) \cup D_{-1}(G)) = \cup_{s=1}^{k} D(G_s) - ((\cup_{s=1}^{k} D_0(G_s)) \cup (\cup_{s=1}^{k} D_{-1}(G_s)) =$

$\cup_{s=1}^{k}(D(G_s) - (D_0(G_s) \cup D_{-1}(G_s))) = \cup_{s=1}^{k} DK(G_s)$.

4) *Случай 1.* Нека без загуба на общност $u \in DK_p(G) \cap V(G_1)$. От 3) следва, че $u \in DK(G_1)$. От теорема 1.4.1 имаме $\gamma(H_2 - u) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G_2)$ и $x \in D_0(H_2 - u) \cup DN(H_2 - u)$. Сега от теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 получаваме $x \in D_0(H_s - u) \cup DN(H_s - u)$ и $\gamma(H_s - u) = \gamma(H_{s-1} - u) + \gamma(G_s), s = 3, 4, ..., k$. Следователно $\gamma(G - u) = \gamma(H_k - u) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G_2) + .. + \gamma(G_k) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G) - \gamma(G_1) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G - u) - p - \gamma(G_1)$, откъдето $u \in DK_p(G_1)$.

Случай 2: Нека без загуба на общност $u \in DK_p(G_1)$. От 3) следва, че $u \in DK(G)$. Както по-горе имаме $\gamma(G - u) = \gamma(H_k - u) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G_2) + .. + \gamma(G_k) = \gamma(G_1) + .. + \gamma(G_k) + p = \gamma(G) + p$, откъдето $u \in DK_p(G_1)$.

Теорема 1.6.8 *Нека G_1 и G_2 са свързани графи с поне по два върха и нека графът G е x-свчленение на графите G_1 и G_2.*

Тогава следните твърдения са еквивалентни :

(*i*) $x \in D_{-1}(G)$

(*ii*) $x \in D_{-1}(G_1) \cap D_{-1}(G_2)$.

Нека е изпълнено (i) или (ii). Тогава:

1. *Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. Ако $x \in M$, то $M \cap V(G_i) \in \mathcal{D}(G_i), i = 1, 2$. Ако $x \notin M$, то съществуват i, j такива, че $\{i, j\} = \{1, 2\}, M \cap V(G_i) \in \mathcal{D}(G_i)$ и $N[M \cap V(G_j), G_j] = V(G_j - x), (M \cap V(G_j)) \cup \{x\} \in \mathcal{D}(G_j)$.*

2. *Нека $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$. Ако $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$ и $x \in M_1 \cap M_2$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$. Ако $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{D}(G_2 - x)$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$.*

3. *$(DK(G_1) \cup DK(G_2), D_0(G_1) \cup D_0(G_2), D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2), DN(G_1) \cup DN(G_2))$ е γ-разлагане на G.*

4. *$DK_p(G) = DK_p(G_1) \cup DK_p(G_2)$ за всяко $p = 0, 1, .., |V(G)| - 2$.*

Доказателство: (*i*) $\iff$ (*ii*) следва от теорема 1.1.8 и теорема 1.1.9.

1). Нека $x \in M$. Очевидно $M \cap V(G_i)$ е доминиращо множество за $G_i, i = 1, 2$. Тъй като $\gamma(G) = |M \cap V(G_1)| + |M \cap V(G_2)| - 1 \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$ (следва от твърдение 1.1.7) , то имаме, че $M \cap V(G_i) \in \mathcal{D}(G_i), i = 1, 2$.

Нека $x \notin M$, $y \in M$ и $xy \in E(G)$. Без загуба на общност, нека $y \in V(G_1)$. Тогава $N[M \cap V(G_1), G_1] = V(G_1)$. Очевидно $M \cap V(G_1) \in \mathcal{D}(G_1)$. Следователно $|M \cap V(G_2)| = |M| - |M \cap V(G_1)| = \gamma(G) - \gamma(G_1) = \gamma(G_2) - 1$, което следва от твърдение 1.1.7. Тогава $M \cap V(G_2) \in \mathcal{D}(G_2 - x)$ и $(M \cap V(G_2)) \cup \{x\} \in \mathcal{D}(G_2)$.

2). Нека $M_2 \in \mathcal{D}(G_2)$ и $x \in M_1 \cap M_2$. Очевидно $M_1 \cup M_2$ доминира G. Освен това $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - 1 = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$ (следва от твърдение 1.1.7).

Нека $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{D}(G_2 - x)$. В този случай $M_1 \cup M_2$ доминира G и $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - x) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G)$.

3). Нека $y \in D(G) \cap V(G_i)$ за някое $i \in \{1, 2\}$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $y \in M$ и от 1) - $y \in D(G_i)$. Следователно $D(G) \cap V(G_i) \subseteq D(G_i)$. Нека $y \in D(G_i)$. Тогава съществува $M_2 \in \mathcal{D}(G_i)$, че $y \in M_i$. Тогава от 2) следва, че $y \in D(G)$. Оттук $D(G_i) \subseteq D(G) \cap V(G_i)$. И така $D(G_i) = D(G) \cap V(G_i)$ за $i = 1, 2$. С това доказахме, че $D(G) = D(G_1) \cup D(G_2)$.

Следователно $DN(G_i) = DN(G) \cap V(G_i)$ за $i = 1, 2$.

Нека $y \in D_0(G_i) \cup D_{-1}(G_i)$ за някое $i = 1, 2$. Тогава съществуват $M_i \in \mathcal{D}(G_i)$ и $M \in \mathcal{D}(G)$, че $y \notin M_i \subset M$. Следователно $D_0(G_i) \cup D_{-1}(G_i) \subseteq (D_0(G) \cup D_{-1}(G)) \cap V(G_i)$ за $i = 1, 2$.

Нека $y \in D_0(G) \cup D_{-1}(G)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $y \notin M$ и следователно съществува $M_i \in \mathcal{D}(G_i)$ такова, че $y \notin M_i$ и $y \in V(G_i)$ за някое $i \in \{1, 2\}$. И така, $(D_0(G) \cup D_{-1}(G)) \cap V(G_i) \subseteq D_0(G_i) \cup D_{-1}(G_i)$.

Следователно $D_0(G) \cup D_{-1}(G) = D_0(G_1) \cup D_0(G_2) \cup D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$. Оттук и от $D(G_1) \cup D(G_2) = D(G)$ следва, че $DK(G) = DK(G_1) \cup DK(G_2)$.

Ще докажем, че $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$.

Случай 1. Нека $y \in D_{-1}(G) \cap V(G_1 - x)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Ако $M \cap V(G_1) \in \mathcal{D}(G_1)$, то очевидно $N[(M \cap V(G_1)) - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$ откъдето - $y \in D_{-1}(G_1)$. Нека $M \cap V(G_1) \notin \mathcal{D}(G_1)$. Следователно от 1). : $N[M \cap V(G_1), G_1] = V(G_1 - x)$ и $(M \cap V(G_1)) \cup \{x\} \in \mathcal{D}(G_1)$. Очевидно $N[((M \cap V(G_1)) \cup \{x\} - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$ откъдето $y \in D_{-1}(G_1)$. И така, $D_{-1}(G) \subseteq D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$.

Случай 2. Нека $y \in D_{-1}(G_1) - \{x\}$. Нека $M_2 \in \mathcal{D}(G_2 - x)$ и $M_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ е такова, че $y \in M_1$ и $N[M_1 - y, G_1] = V(G_1) - \{y\}$. Тогава $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}(G)$ и $N[(M_1 \cup M_2) - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$, което следва от 2). И така $y \in D_{-1}(G)$. Следователно $D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2) \subseteq D_{-1}(G)$.

С това доказахме, че $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$.

От доказаното дотук следва непосредствено, че $D_0(G) = D_0(G_1) \cup D_0(G_2)$.

4). Нека $u \in DK_p(G_1)$. Тогава от твърдение 1.1.7 следва $\gamma(G - u) = \gamma(G_1 - u) + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G_1) + p + \gamma(G_2) - 1 = \gamma(G) + p$. Оттук и от

3) следва $u \in DK_p(G)$. И така - $DK_p(G_1) \cup DK_p(G_2) \subseteq DK_p(G)$. Сега исканото следва от $DK(G) = DK(G_1) \cup DK(G_2)$.

Завършваме с резултат за разширение на граф:

Твърдение 1.6.9 *Нека G е граф, $v \in V(G)$, $d(v, G) \geq 1$ и $H =< G, v, v' >$ е разширение на G с v' през v.*

1. *$\gamma(H) = \gamma(G)$.*

2. *Ако $v \in DN(G)$, то $(DK(G), D_0(G), D_{-1}(G), DN(G) \cup \{v'\})$ е γ-разлагането на H и $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(G)$.*

3. *Ако $v \in D(G)$, то $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(G) \cup \{(M - \{v\}) \cup \{v'\} | M \in \mathcal{D}(\{v\}, G))\}$ и $(DK(G) - \{v\}, D_0(G) \cup \{v, v'\}, D_{-1}(G) - \{v\}, DN(G))$ е γ-разлагането на H.*

Доказателство: 1). Нека $M \in \mathcal{D}(G)$. Тогава $M \in MDS(H)$. Следователно $\gamma(H) \leq \gamma(G)$.

Обратно, нека $M \in \mathcal{D}(H)$. Ако $v' \notin M \in \mathcal{D}(H)$, то $M \in MDS(G)$ и тогава $\gamma(G) \leq \gamma(H)$. Нека сега $v' \in M \in \mathcal{D}(H)$. Очевидно в този случай $v \notin M$. Тогава $M_1 = (M - \{v'\}) \cup \{v\}$ е доминиращо множество на G с $|M_1| = |M| = \gamma(H)$. И така, и в този случай $\gamma(G) \leq \gamma(H)$.

2). От 1) и от определението за разширение на граф следва, че $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(H)$. От доказателството на 1) следва, че ако $v' \in M \in \mathcal{D}(H)$, то $v \in (M - \{v'\}) \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G)$. Тъй като $v \in DN(G)$, то $v' \in DN(H)$. От съображения за симетрия - $v \in DN(H)$. С това доказахме, че $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(G)$. Сега останалото следва от твърдение 1.6.2.

3). От 1) и от определението за разширение на граф следва, че $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(H)$. Нека $M_1 \in \mathcal{D}(H) - \mathcal{D}(G)$. Тогава $v' \in M_1$ и $v \notin M_1$. Следователно $M = (M_1 - \{v'\}) \cup \{v\} \in \mathcal{D}(v, G)$ и тогава $M_1 = (M - \{v\}) \cup \{v'\}$. И така, $\mathcal{D}(H) - \mathcal{D}(G) \subseteq \{(M - \{v\}) \cup \{v'\} | M \in \mathcal{D}(\{v\}, G))$. Обратното е очевидно.

От доказаното равенство веднага следва, че: $DN(H) = DN(G)$, $DK(H) = DK(G) - \{v\}$ и $D_{-1}(G) - \{v\} \subseteq D_{-1}(H)$. От $N[v, H] = N[v', H]$ следва, че $v \notin D_{-1}(H)$. И така, $v \in D_0(H)$. Аналогично - $v' \in D_0(H)$. С това всичко е доказано.

2 ГЛАВА

НЕЗАВИСИМИ ДОМИНИРАЩИ МНОЖЕСТВА

2.1 Помощни резултати

Резултатите от параграф 2.1 са помощни и се ползуват непрекъснато в тази и в следващита глава. Основен резултат тук е твърдение 2.1.9. В него, при дадена принадлежност на върха x на графа G към елемент на i-разлагането на графа G, се получават резултати за отворената околност $N(x, G)$. Съществена разлика между твърдение 2.1.9 и теорема А1 е тази, че тук i-фиксираните i-критични върхове могат и да не са изолирани и, че i-фиксиран връх може да има за съсед само i-неутрален.

Лема 2.1.1 Нека U е минимално независимо множество за графа G такова, че отстраняването му от G води до намаляването на $i(G)$. Тогава $i(G - U) = i(G) - 1$.

Доказателство: Нека $x \in U$ и $G_1 = G - (U - \{x\})$. Следователно $i(G - U) = i(G_1 - x) < i(G_1) = i(G)$. Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1 - x)$. Тогава $x \notin N[M_1, G_1]$, откъдето $\{x\} \cup M_1$ е независимо и доминиращо множество за графа G_1, т.е. $|\{x\} \cup M_1| = i(G_1 - x) + 1$.

Лема 2.1.2 Нека G е граф, $U \subset V(G)$ и $i(G - U) = i(G) + p$. Тогава $p \leq |V(G)| - i(G) - |U|$.

Доказателство: Имаме $p = i(G - U) - i(G) \leq |V(G - U)| - i(G) = |V(G)| - |U| - i(G)$.

Твърдение 2.1.3 Нека G е граф, $|V(G)| \geq 2, x \in V(G)$ и $i(G - x) = i(G) + p$. Тогава $p \in \{-1, 0, \dots, |V(G)| - 2\}$.

Доказателство: Непосредствено следва от лема 2.1.1 и лема 2.1.2.

Твърдение 2.1.4 Нека G е граф с $n \geq 2$ върха. Тогава

1. $IK(G) = \cup_{p=-1}^{n-2} IK_p(G)$
2. $IK_{-1}(G) \supseteq \{x \in V(G) | d(x, G) = 0\}$

Доказателство: 1. Нека $p \geq 1$ и $x \in IK_p(G)$. Тогава всяко независимо и доминиращо множество A на Gтакова, че $x \notin A$ е независимо и доминиращо множество на $G - x$, т.е. $|A| > i(G)$. Следователно $x \in IK(G)$.

Нека $x \in IK(G) - (IK_{-1}(G) \cup IK_0(G))$. Тогава $i(G-x) > i(G)$ поради твърдение 2.1.3, откъдето $x \in IK_p(G)$ за някое $p \geq 1$.

2. Очевидно, всеки изолиран връх принадлежи на всяко i-множество на G и $i(G-x) = i(G) - 1$.

Твърдение 2.1.5 Нека G е граф и $x \in V(G)$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

(i) $i(G-x) < i(G)$.

(ii) $i(G-x) = i(G) - 1$.

(iii) $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$.

(iv) съществува множество $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $x \in M$ и $M - \{x\} \in \mathcal{I}(G-x)$.

Доказателство: $(i) \iff (ii)$: Следва веднага от лема 2.1.1.

$(ii) \iff (iii)$ Непосредствено следва от определенията на множествата $I_{-1}(G)$ и $IK_{-1}(G)$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G-x)$. Следователно $N[M_1, G] = V(G-x)$. Така, че $M = M_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}(G)$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ $i(G-x) = |M - \{x\}| = |M| - 1 = i(G) - 1$.

От твърдения 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.5 получаваме:

Твърдение 2.1.6 *За всеки граф* G: $I(G) = I_{-1}(G) \cup I_0(G) \cup IK(G)$.

От твърдения 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.6 получаваме:

Твърдение 2.1.7 За всеки граф G: $I^0(G) = IN(G) \cup I_0(G) \cup IK_0(G)$.

От твърдение 2.1.6 имаме:

Твърдение 2.1.8 Нека G е граф и $x \in V(G)$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

(i) Съществуват множества $M_1, M_2 \in \mathcal{I}(G)$ такива, че $x \in M_1$ и $x \notin M_2$.

(ii) $x \in I_{-1}(G) \cup I_0(G)$.

Твърдение 2.1.9 Нека G е свързан граф с $|V(G)| \geq 2$ и $x \in V(G)$

1. Ако $M \cap N(x, G) \neq \emptyset$ за всяко множество $M \in \mathcal{I}(G)$, то $x \in IN(G)$.

2. Ако $IK(G) \cap N(x, G) \neq \emptyset$, то $x \in IN(G)$.

3. Ако $M_1, M_2 \in \mathcal{I}(G)$ и $M_1 \cap N(x,G) = \emptyset \neq M_2 \cap N(x,G)$, то $x \in I_{-1}(G) \cup I_0(G)$.

4. Ако $N(x,G) \subseteq IN(G)$, то $x \in IK(G)$.

5. Нека $M \in \mathcal{I}(G)$ и $N[M-x,G] = V(G-x)$. Тогава $x \in M$, $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$ и $M - \{x\} \in \mathcal{I}(G-x)$.

6. Ако $N(x,G) \subseteq IN(G)$, $M \in \mathcal{I}(G)$ и $N[M-x,G] = V(G-x)$, то $x \in IK_{-1}(G)$.

7. Ако $x \in IK(G)$ и $N(x,G) \neq \emptyset$, то $N(x,G) \subseteq IN(G)$.

8. Ако $x \in I_{-1}(G) \cup I_0(G)$, то $N(x,G) \subseteq IN(G) \cup I_{-1}(G) \cup I_0(G)$.

9. Ако $x \in IN(G)$, то $N(x,G) - IN(G) \neq \emptyset$.

10. Нека $x \in IK_0(G)$ и $M \in \mathcal{I}(G-x)$. Тогава $M \cup \{x\}$ е максимално независимо множество в G с $|M \cup \{x\}| = i(G)+1$.

11. Ако $x \in IN(G)$ и $N(x,G) \cap (IK(G) - IK_{-1}(G)) = \emptyset$, то $|N(x,G) \cap (I_0(G) \cup I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G))| \geq 2$.

12. Ако $x \in IN(G)$ и $N(x,G) \cap I(G) = \{y\}$, то $y \in IK(G) - IK_{-1}(G)$.

Доказателство: 1). Ако $M \in \mathcal{I}(G)$, то $x \notin M$, т.е. $x \in IN(G)$.

2). Следва от 1).

3). Непосредствено следва от твърдение 2.1.8.

4). За всяко множество $M \in \mathcal{I}(G)$: $M \cap N(x,G) = \emptyset$, и следователно $x \in M$, откъдето $x \in IK(G)$.

5). Имаме $i(G-x) \leq |M-x| = i(G)-1$. Тогава от твърдение 2.1.3 следва $i(G-x) = i(G)-1$. Сега от твърдение 2.1.5 : $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$ и $M - \{x\} \in \mathcal{I}(G-x)$.

6). Следва от 4) и 5).

7). Следва от 2).

8). От 7) имаме $N[x,G] \subseteq V(G) - IK(G)$.

9). Непосредствено следва от 4).

10). Понеже $x \in IK_0(G)$ и $M \in \mathcal{I}(G-x)$, то $N[M,G] = V(G-x)$ и $|M| = i(G)$. Следователно $M \cup \{x\}$ е максимално независимо доминиращо множество на графа G с $|M \cup \{x\}| = i(G-x)+1 = i(G)+1$.

11). От 9) - $A = N(x,G) \cap (I_0(G) \cup I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)) \neq \emptyset$. Допускаме, че $\{y\} = A$. Ако $y \in (I_0(G) \cup I_{-1}(G))$, то нека $y \notin M \in \mathcal{I}(G)$. Следователно $M \cap N[x,G] \neq \emptyset$, което е противоречие. Ако $y \in IK_{-1}(G)$, то нека $M \in \mathcal{I}(G)$ и $N[M-\{y\},G] = V(G) - \{y\}$. Следователно $(M - \{y\}) \cap N[x,G] \neq \emptyset$ - противоречие.

12). Следва от 9) , 11) и твърдение 2.1.5.

Определение 2.1.10 Нека G е граф и $x \in V(G)$. С $i(x,G)$ ще означаваме най-малкото число k, за което съществува независимо доминиращо множество в графа G, което има k върха и което съдържа x.

От определенията непосредствено следва:

Твърдение 2.1.11 Нека G е граф и $x \in V(G)$.

1. $i(G) = min\{i(x,G) | x \in V(G)\}$.
2. $i(x,G) = i(G) \iff x \in I(G)$.
3. $i(x,G) > i(G) \iff x \in IN(G)$.
4. Ако $N[x,G] \neq V(G)$, то $i(x,G) = 1 + i(G - N[x,G])$.
5. Ако $x \in I(G)$ и $N[x,G] \neq V(G)$, то $i(G) = 1 + i(G - N[x,G])$.

Както ще видим по-надолу в изложението, от изключително значение е мощността на разликата $i(x,G) - i(G)$.

2.2 Число на независимо доминиране в x-съчленение

В този параграф ще разгледаме операциите x-съчленение и добавяне на мост.

Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. С теорема 2.2.4, при дадена принадлежност на върха x на графа G към елемент на i-разлагането на G_1 и към елемент на i-разлагането на G_2 са намерени:

- принадлежността на върха x към елемент на i-разлагането на G, и

- разликата: $i(G) - (i(G_1) + i(G_2))$.

Показано е също, че тази разлика е не по-малка от -1 и че, в отличие от числото на доминиране, в този случай тя може да бъде строго по-голяма от 0.

Лема 2.2.1 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

1. Ако $x \in I(G_1) \cap I(G_2)$, то $i(G) \leq i(G_1) + i(G_2) - 1$.
2. Ако $x \in IN(G_1) \cap (I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2))$ то $i(G) \leq i(G_1) + i(G_2) - 1$.

3. Ако $x \in IN(G_1) \cap (IN(G_2) \cup I_0(G_2) \cup IK_0(G_2))$, то $i(G) \leq i(G_1) + i(G_2)$.

4. Ако $x \in IN(G_1) \cap IK_p(G_2)$ за някое $p \geq 1$, то $i(G) \leq min\{i(x, G_1) + i(G_2) - 1 \ , \ i(G_1) + i(G_2) + p\}$.

5. $i(x, G) = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

Доказателство: 1). Нека $x \in M_j \in \mathcal{I}(G_j)$ за $j = 1, 2$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество на графа G и $i(G) \leq |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

2). Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество в графа G и $i(G) \leq |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2 - x) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

3). Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество в графа G и $i(G) \leq |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2 - x) = i(G_1) + i(G_2)$.

4). Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$. Тогава $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество в графа G и $i(G) \leq |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2) + p$

Нека M_3 е независимо и доминиращо множество за графа G_1 , $x \in M_3$ и $|M_3| = i(x, G_1)$. Нека $M_4 \in \mathcal{I}(G_2)$. Тогава $M_3 \cup M_4$ е независимо и доминиращо множество за графа G. Следователно $i(G) \leq |M_3| + |M_4| - 1 = i(x, G_1) + i(G_2) - 1$.

5). Нека $x \in M_1 \cap M_2$, където M_k е независимо и доминиращо множество за графа G_k и $|M_k| = i(x, G_k), k = 1, 2$. Тогава $M = M_1 \cup M_1$ е независимо и доминиращо множество на G и $x \in M$. Оттук - $i(x, G) \leq |M_1| + |M_2| - 1 = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

Нека M е независимо и доминиращо множество за графа G , $x \in M$ и $|M| = i(x, G)$. Следователно $M_k = M \cap V(G_k)$ е доминиращо множество за графа $G_k, k = 1, 2$ и $i(x, G) = |M| = |M_1| + |M_2| - 1 \geq i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

Лема 2.2.2 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

1. Ако $x \in I(G)$, то $i(G) = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

2. Нека $x \in IN(G)$, $M \in \mathcal{I}(G)$ и $M_s = M \cap V(G_s)$ за $s = 1, 2$. Тогава е вярно едно от следните твърдения:

   2.1 $N[M_s, G_s] = G_s$ за $s = 1, 2$ и $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2)$.

   2.2 Съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $N[M_j, G] = V(G_j)$, $N[M_k, G] = V(G_k - x)$ и $i(G) \geq i(G_j) + i(G_k - x)$.

3. Ако $x \in IN(G)$, то $i(G) < i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

Доказателство: 1). Нека $x \in M \in \mathcal{I}(G)$. Тогава за $j = 1, 2$: $M_j = M \cap V(G_j)$ е независимо и доминиращо множество за графа G_j . Следователно $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| - 1 \geq i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

Нека M_j е независимо и доминиращо множество за графа G_j , $x \in M_j$ и $|M_j| = i(x, G_j)$ за $j = 1, 2$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество на графа G и $i(G) \leq |M| = |M_1| + |M_2| - 1 = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

2). Без загуба на общност, нека $N[M_1, G_1] = V(G_1)$. Ако $N[M_2, G_2] = V(G_2)$, то $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1) + i(G_2)$. Нека $N[M_2, G_2] \neq V(G_2)$. Тогава $N[M_2, G - 2] = V(G_2 - x)$ и $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1) + i(G_2 - x)$.

3). Нека M_j е независимо и доминиращо множество за графа G_j $x \in M_j$ и $|M_j| = i(x, G_j)$ за $j = 1, 2$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за G и $i(G) < |M| = |M_1| + |M_2| - 1$.

Лема 2.2.3 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Нека $x \in I(G_1) \cap I(G_2)$. Тогава $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

Доказателство: Допускаме, че $x \in IN(G)$. От лема 2.2.2 и твърдение 2.1.11: $i(G) < i(G_1) + i(G_2) - 1$. От лема 2.2.2 и твърдение 2.1.3: $i(G) \geq min\{i(G_1) + i(G_2)\ ,\ i(G_1) + i(G_2 - x), i(G_1 - x) + i(G_2)\} \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$, с което се получи противоречие. Така, че $x \in I(G)$ и отново от лема 2.2.2: $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

Теорема 2.2.4 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

1. Ако $x \in I_{-1}(G_1) \cap (I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2))$, то $x \in I_{-1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

2. Ако $x \in IK_{-1}(G_1) \cap IK_{-1}(G_2)$, то $x \in IK_{-1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

3. Ако $x \in (I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)) \cap IN(G_2)$, то $x \in IN(G)$, $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

4. Ако $x \in (I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)) \cap I_0(G_2)$, то $x \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

5. Ако $x \in (I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)) \cap IK_p(G_2)$, $p \geq 0$, то $x \in IK_p(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

6. Ако $x \in I_0(G_1) \cap I_0(G_2)$, то $x \in IK_1(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$

7. Ако $x \in I_0(G_1) \cap IK_p(G_2)$, $p \geq 0$, то $x \in IK_{p+1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

8. Ако $x \in I_0(G_1) \cap IN(G_2)$ и $x \in I(G)$, то $x \in I_0(G)$, $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $i(x, G_2) = i(G_2) + 1$.

9. Ако $x \in I_0(G_1) \cap IN(G_2)$ и $x \in IN(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, $i(x, G_2) > i(G_2) + 1$ и $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

10. Ако $x \in IK_p(G_1) \cap IK_q(G_2)$, $p, q \geq 0$, то $x \in IK_{p+q+1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

11. Нека $x \in IK_p(G_1) \cap IN(G_2), p \geq 0$ и $x \in I(G)$. Нека $r = i(G_2) + p + 1 - i(x, G_2)$. Тогава $i(G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$ и $r \geq 0$. Ако $r \geq 1$ то $x \in IK_r(G)$. Ако $r = 0$, то $x \in I_0(G)$.

12. Ако $x \in IK_p(G_1) \cap IN(G_2)$, $p \geq 0$ и $x \in IN(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + p$, $i(x, G_2) > i(G_2) + p + 1$ и $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

13. Ако $x \in IN(G_1) \cap IN(G_2)$, то $x \in IN(G)$. $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $i(x, G) = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

14. Ако $x \in I_0(G_1) \cap IN(G_2)$ и $i(x, G_2) = i(G_2) + 1$, то $x \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

15. Ако $x \in I_0(G_1) \cap IN(G_2)$ и $i(x, G_2) > i(G_2) + 1$, то $x \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

16. Нека $x \in IK_p(G_1) \cap IN(G_2)$, $p \geq 0$ и $i(x, G_2) \leq i(G_2) + p + 1$. Тогава $x \in I(G)$.

17. Нека $x \in IK_p(G_1) \cap IN(G_2)$, $p \geq 0$ и $i(x, G_2) > i(G_2) + p + 1$. Тогава $x \in IN(G)$.

Доказателство: 1). Ако x е изолиран връх на G_2, то твърдението е очевидно. Нека сега $d(x, G_2) \geq 1$. От лема 2.2.3 : $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. От твърдение 2.1.5 следва, че съществуват множества $M_k \in \mathcal{I}(G_k), k = 1, 2$ такива, че $x \in M_k$ и $M_k - \{x\} \in \mathcal{I}(G_k - x), k = 1, 2$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M| = |M_1| + |M_2| - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$ откъдето $x \in M \in \mathcal{I}(G)$. Също така $N[M - \{x\}, G] = V(G - x)$, откъдето $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$.

От твърдение 2.1.8 следва, че съществува множество $M_3 \in \mathcal{I}(G_1)$ такова, че $x \notin M_3$ и от твърдение 2.1,5 следва, че съществува множество $M_4 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$ такова, че $\{x\} \cup M_4 \in \mathcal{I}(G_2)$. Следователно

$M_5 = M_3 \cup M_4$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M_5| = |M_3| + |M_4| = i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$, откъдето $M_5 \in \mathcal{I}(G)$. Но $x \notin M_5$. Следователно $x \in I_{-1}(G)$.

2). Както в 1) получаваме, че $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. Да допуснем, че $x \in I_{-1}(G)$. Тогава съществува множество $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $x \notin M$. Нека $M_k = M \cap V(G_k)$ за $k = 1, 2$ и без загуба на общност нека $N[M_1, G_1] = V(G_1)$. Тъй като $x \in IK(G_1)$, то тогава $|M_1| > i(G_1)$. Ако $N[M_2, G_2] = V(G_2)$, то $|M_2| > i(G_2)$, поради $x \in IK(G_2)$. Ако $N[M_2, G_2] = V(G_2 - x)$, то $|M_2| \geq i(G_2 - x) = i(G_2) - 1$ И в двата случая: $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| > i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$, с което получаваме противоречие.

3). Допускаме, че $x \in I(G)$. Нека $x \in M \in \mathcal{I}(G)$. Следователно $M_k = M \cap V(G_k)$ е независимо и доминиращо множество за графа $G_k, k = 1, 2$. Тогава $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| - 1 \geq i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1 \geq i(G_1) + (i(G_2) + 1) - 1 = i(G_1) + i(G_2)$, което е в противоречие с лема 2.2.1.

Така, че $x \in IN(G)$. От лема 2,2.1 и 2.2.2 имаме $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. От лема 2.2.1 следва, че $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

4). От лема 2.2.3 - $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. Също допълнително имаме $i(G - x) = i(G_1 - x) + i(G_2 - x) = i(G_1) - 1 + i(G_2) = i(G)$ откъдето $x \in I_0(G) \cup IK_o(G)$ (с помощта на твърдение 2.1.7). Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1 - x)$ и $x \notin M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$ (от твърдение 2.1.8). Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) - 1 + i(G_2) = i(G)$. Следователно $M \in \mathcal{I}(G)$ и $x \notin M$. Така, че от твърдение 2.1.8 получаваме $y \in I_0(G)$.

5). *Случай 1* $p = 0$. Както в 4) получаваме, че $x \in I(G)$, $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и $x \in I_0(G) \cup IK_0(G)$. Допускаме, че $x \in I_0(G)$. Тогава от твърдение 2.1.8 следва, че съществува множество $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $x \notin M$. Нека $M \cap V(G_s) = M_s$ за $s = 1, 2$. Ако $N[M_k, G_k] = V(G_k)$ за $k = 1, 2$, то $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1) + i(G_2)$ Ако $N[M_1, G_1] = V(G_1)$ и $N[M_2, G_2] = V(G_2 - x)]$, то $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1) + i(G_2 - x) = i(G_1) + i(G_2)$. Ако $N[M_1, G_1] = V(G_1 - x)]$ и $N[M_2, G_2] = V(G_2)$, то $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1 - x) + (i(G_2) + 1) = i(G_1) + i(G_2)$. Следователно $x \in IK_0(G)$.

Случай 2 $p \geq 1$ От лема 2.2.3 : $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. Следователно $i(G - x) = i(G_1 - x) + i(G_2 - x) = (i(G_1) - 1) + i(G_2) + p = i(G) + p$, откъдето $x \in IK_p(G)$.

6). От лема 2,2.3 : $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. Следователно $i(G - x) = i(G_1 - x) + i(G_2 - x) = i(G_1) + i(G_2) = i(G) + 1$ откъдето $x \in IK_1(G)$

7). От лема 2.2.3 : $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$. Следователно $i(G-x) = i(G_1-x) + i(G_2-x) = i(G_1) + i(G_2) + p = i(G) + p + 1$ откъдето $x \in IK_{p+1}(G)$.

8). От лема 2.2.2 следва, че $i(G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$ и тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2)$. Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$, $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G, $x \notin M$ и $i(G) \leq |M| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2)$. Следователно $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $i(x, G_2) = i(G_2) + 1$. Тъй като $x \notin M$, то имаме $x \in I_0(G) \cup I_{-1}(G)$. Но $i(G-x) = i(G_1-x) + i(G_2-x) = i(G_1) + i(G_2-x) = i(G_1) + i(G_2) = i(G)$. Следователно $x \in I_0(G)$.

9). От лема 2.2.2 : $i(G) \geq min\{i(G_1) + i(G_2)$, $i(G_1) + +i(G_2-x)$, $i(G_1-x)+i(G_2)\} = i(G_1)+i(G_2)$. Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$, $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G . Следователно $i(G) \leq |M| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2)$. Тогава $i(G) = i(G_1)+i(G_2)$. От лема 2.2.2 имаме: $i(G) < i(x, G_1)+i(x, G_2)-1 = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$ и тогава $i(G_2) + 1 < i(x, G_2)$. От лема 2.2.1 сега следва, че $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

10). От лема 2.2.3 : $x \in I(G)$ и $i(G) = i(G_1)+i(G_2)-1$. Също така имаме и $i(G-x) = i(G_1-x)+i(G_2-x) = i(G_1)+p+i(G_2)+q = i(G)+p+q+1$. Следователно $x \in IK_{p+q+1}(G)$.

11). От лема 2.2.2 : $i(G) = i(x, G_1)+i(x, G_2)-1 = i(G_1)+i(x, G_2)-1$. От лема 2.2.1 : $i(G) \leq \min\{\mathrm{i(G_1)+i(x,G_2)-1, i(G_1)+i(G_2)+p}\}$. Тогава $i(G_1)+i(x, G_2)-1 \leq i(G_1)+i(G_2)+p$. Следователно $r \geq 0$. Освен това имаме и $i(G-x) = i(G_1-x)+i(G_2-x) = i(G_1)+p+i(G_2) = i(G)+r$ Ако $r > 0$, то $x \in IK_r(G)$. Нека $r = 0$. Тогава $i(G-x) = i(G)$ и от лема 2.2.3 - $x \in I_0(G) \cup IK_0(G)$. Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1-x)$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. Следователно $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M| = |M_1|+|M_2| = i(G_1)+p+i(G_2) = i(G_1)+i(x, G_2)-1 = i(G)$. Следва, че $M \in \mathcal{I}(G)$ и $x \notin M$, откъдето - $x \in I_0(G)$.

12). Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1-x)$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $i(G) \leq |M| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) + p + i(G_2)$.

Нека $M \in \mathcal{I}(G)$ и $M_k = M \cap V(G_k)$ за $k = 1,2$. Тогава или $N[M_s, G_s] = V(G_s)$ за $s = 1,2$ или съществуват j, k такива, че $\{j, k\} = \{1,2\}$, $N[M_j, G] = V(G_j)$ $N[M_k, G] = V(G_k - x)$. И в двата случая имаме $|M_1| \geq i(G_1) + p$ и $|M_2| \geq i(G_2)$. Следователно $i(G) = |M| = |M_1| + |M_2| \geq i(G_1) + i(G_2) + p$.

Оттук получаваме $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + p$.

От лема 2.2.2 имаме $i(G_2) + p + 1 = i(G) - i(G_1) + 1 < i(x, G_2)$. От лема 2.2.1 следва, че $i(x, G) = i(G_1) + i(x, G_2) - 1$.

13). Нека $M_k \in \mathcal{I}(G_k)$ за $k = 1,2$. Тогава $M = M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $i(G) \leq |M| = |M_1|+|M_2| =$

$i(G_1) + i(G_2)$. Да допуснем, че $x \in I(G)$. Тогава от лема 2.2.2 ще следва, че $i(G) = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1 \geq i(G_1) + i(G_2) + 1$, с което получаваме противоречие. Така, че $x \in IN(G)$. От лема 2.2.2 имаме $i(G) \geq min\{i(G_1)+i(G_2), i(G_1)+i(G_2-x), i(G_1-x)+i(G_2)\} = i(G_1)+i(G_2)$ Следователно $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$. От лема 2.2.1 сега следва, че $i(x, G) = i(x, G_1) + i(x, G_2) - 1$.

14). Следва от 8) и 9).

15). Следва от 8) и 9).

16). Следва от 11) и 12).

17). Следва от 11) и 12).

От теорема 2.2.4 получаваме:

Теорема 2.2.5 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2.

1. Ако $x \in I_{-1}(G)$, то $i(G) = i(G_1)+i(G_2)-1$ и $x \in (I_{-1}(G_1) \cap I_{-1}(G_2)) \cup (I_{-1}(G_1) \cap IK_{-1}(G_2)) \cup (IK_{-1}(G_1) \cap I_{-1}(G_2))$.

2. Ако $x \in IK_{-1}(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и $x \in IK_{-1}(G_1) \cap IK_{-1}(G_2)$.

3. Нека $x \in I_0(G)$. Тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то $x \in ((I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)) \cap I_0(G_2)) \cup (I_0(G_1) \cap (I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2))$. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $x \in IN(G_j) \cap (I_0(G_k) \cup IK_0(G_k))$ и $i(x, G_j) = i(G_j)+1$. Ако $i(G) = i(G_1)+i(G_2)+p$, $p \geq 1$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}, x \in IN(G_j) \cap IK_p(G_k)$ и $i(x, G_j) = i(G_j) + p + 1$.

4. Ако $x \in IK_0(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in (I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)) \cap IK_0(G_k)$.

5. Нека $x \in IK_1(G)$. Тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то е вярно едно от следните твърдения:

   (i) съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in (I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)) \cap IK_1(G_k)$.

   (ii) $x \in (I_0(G_1) \cup IK_0(G_1)) \cap (I_0(G_2) \cup IK_0(G_2)$.

   Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1 + p$, $p \geq 1$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $x \in IK_p(G_j) \cap IN(G_k)$ и $i(x, G_k) = i(G_k) + p$.

6. Нека $x \in IK_r(G)$, $r \geq 2$. Тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$.

   Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то едно от следните твърдения е вярно:

   (i) Съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in (I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)) \cap IK_r(G_k)$.

   (ii) Съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in I_0(G_j) \cap IK_{r-1}(G_k)$

   (iii) Съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in IK_p(G_j) \cap IK_{r-p-1}(G_k)$, където $0 \leq p \leq r - 1$.

   Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + m$, $m \geq 0$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $i(G) = i(G_j) + i(x, G_k) - 1$ и $x \in IK_{r+m}(G_j) \cap IN(G_k)$.

7. Нека $x \in IN(G)$. Тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$ и $x \in (I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)) \cap IN(G_k)$. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ то е вярно едно от следните твърдрния:

   (i) $x \in IN(G_1) \cap IN(G_2)$

   (ii) Съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $i(x, G_k) > i(G_k) + 1$ и $x \in (I_0(G_j) \cup IK_0(G_j)) \cap IN(G_k)$.

   Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + p$, $p \geq 1$, то съществуват числа j, k такива, че $\{j, k\} = \{1, 2\}$, $x \in IK_p(G_j) \cap IN(G_k)$ и $i(x, G_k) > i(G_k) + p + 1$.

Следствие 2.2.6 Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Тогава $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$. Ако $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2)$, то $x \in IN(G_1) \cup IN(G_2)$.

Твърдение 2.2.7 Нека G е граф с поне 2 върха. Нека $y \in V(G)$ и $N(y, G) = \{x\}$.

1. Ако $x \in IK_{-1}(G - y) \cup I_{-1}(G - y)$, то $x, y \in I_0(G)$ и $i(G - y) = i(G)$

2. Ако $x \in IK_p(G - y)$, $p \geq 0$, то $i(G - y) = i(G)$, $x \in IK_{p+1}(G)$, $y \in IN(G)$ и $i(y, G) = i(G) + p + 1$.

3. Ако $x \in I_0(G - y)$, то $i(G - y) = i(G)$, $x \in IK_1(G)$, $y \in IN(G)$ и $i(y, G) = i(G) + 1$.

4. Ако $x \in IN(G-y)$ и $i(x, G-y) > i(G-y)+1$, то $i(G-y) = i(G)-1$ $x \in IN(G)$ и $y \in IK_{-1}(G)$.

5. Ако $x \in IN(G-y)$ и $i(x, G-y) = i(G-y)+1$, то $i(G-y) = i(G)-1$ $x \in I_0(G)$ и $y \in I_{-1}(G)$.

6. $y \notin IK(G) - IK_{-1}(G)$.

7. $x \notin IK_{-1}(G) \cup I_{-1}(G) \cup IK_0(G)$.

Доказателство: Да отбележим, че G е x-съчленение на $G-y$ и $(\{x,y\}, xy) = A$ и още - $V(A) = \{x,y\} = I_0(A)$ и $i(A) = 1$.

1) От теорема 2.2.4 - $x \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G-y)+i(A)-1 = i(G-y)$, откъдето $y \in I^0(G)$. От $x \in I_0(G)$ следва, че съществува $M \in \mathcal{I}(G)$, че $x \notin M$. Тогава $y \in M$ и следователно $y \in I_0(G) \cup IK_0(G)$. Но съществува $M_1 \in \mathcal{I}(G)$, че $x \in M_1$ и тогава $y \notin M_1$. Следователно $y \in I_0(G)$.

2) От теорема 2.2.4 - $x \in IK_{p+1}(G), i(G) = i(G-y)+i(A)-1 = i(G-y)$ и тогава от твърдение 2.1.9 следва, че $y \in IN(G)$.

3) От теорема 2.2.4 - $x \in IK_1(G), i(G) = i(G-y)+i(A)-1 = i(G-y)$ и от твърдение 2.1.9 - $y \in IN(G)$.

4) От теорема 2.2.4 - $x \in IN(G), i(G) = i(G-y)+i(A) = i(G-y)+1$. Сега от твърдение 2.1.9 - $y \in IK_{-1}(G)$.

5) От твърдение 2.2.4 - $x \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G-y)+i(A) = i(G-y)+1$, откъдето $y \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Сега от твърдение 2.1.9 следва $y \in I_{-1}(G)$.

6) и 7): - следват от 1) $\div$ 5).

Нека x_1x_2 е мост на графа G и G_1, G_2 са компонентите на $G-x_1x_2$. В теорема 2.2.8, при дадена принедлежност на x_1 и x_2 съответно към i-разлаганията на G_1 и G_2 е намерена принадлежността им към i-разлагането на G. Във всеки конкретен случай е намерена разликата $i(G) - (i(G_1) + i(G_2))$, като е показано, че тя е винаги не по-малка от -1.

Теорема 2.2.8 Нека x_1x_2 е мост за графа G . Нека G_1 и G_2 са компонентите на графа $G - x_1x_2$ и $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$.

1. Ако $x_1 \in IN(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_2)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $x_1, x_2 \in IN(G)$.

2. Ако $x_1 \in I_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$ и $i(x_2, G_2) > i(G_2) + 1$, то $x_1 \in I_{-1}(G)$, $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

3. Ако $x_1 \in IK_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$ и $i(x_2.G_2) > i(G_2) + 1$, то $x_1 \in IK_{-1}(G)$, $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

4. Ако $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$ и $i(x_2.G_2) = i(G_2) + 1$, то $x_1 \in I_{-1}(G)$, $x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

5. Ако $x_1 \in I_0(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$, то $x_1 \in I_0(G)$, $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

6. Ако $x_1 \in IK_p(G_1), p \geq 0$ и $x_2 \in IN(G_2)$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

7. Ако $x_j \in I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)$ за $j = 1, 2$, то $x_1, x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

8. Ако $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_2) \cup IK_0(G_2)$, то $x_1 \in IN(G)$ $x_2 \in IK_1(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

9. Ако $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$ и $x_2 \in IK_p(G_2)$,$p \geq 1$, то $x_1 \in IN(G)$ $x_2 \in IK_{p+1}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

10. Ако $x_1 \in I_0(G_1)$, $x_2 \in I_0(G_2) \cup IK_0(G_2)$, то $x_1, x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

11. Ако $x_1 \in I_0(G_1)$ и $x_2 \in IK_p(G_2)$, $p \geq 1$, то $x_1 \in IN(G)$, $x_2 \in IK_p(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

12. Ако $x_i \in IK_p(G_j)$ за $j = 1, 2$, то $x_1, x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + p$.

13. Ако $x_1 \in IK_p(G_1)$, $x_2 \in IK_q(G_2)$ и $p > q \geq 0$, то $x_1 \in IK_{p-q}(G)$, $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + q$.

14. $i(G) \geq i(G_1) + i(G_2) - 1$.

15. Ако $x_k \in IN(G_k)$ за някое k , $k \in \{1, 2\}$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

Доказателство: Нека $G_3 =< V(G_1) \cup \{x_2\}, G >$ и $G_4 = V(G_2) \cup \{x_1\}, G >$

1). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1) + 1$ и $x_2 \in I_{-1}(G_3) \cup IK_{-1}(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) - 1 = i(G_1) + i(G_2)$.

2). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$. От твърдение 2.2.7 : $x_1 \in IK_{-1}(G_4))$. Тогава от теорема 2.2.4 : $x_1 \in I_{-1}(G)$.

3). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$. От твърдение 2.2.7 - $x_1 \in IK_{-1}(G_4)$ и от теорема 2.2.4 - $x_1 \in IK_{-1}(G)$.

4). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$. От твърдение 2.2.7 - $x_1 \in I_{-1}(G_4)$ и от теорема 2.2.4 - $x_1 \in I_{-1}(G)$.

5). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_3)+i(G_2) = i(G_1)+i(G_2)$. От твърдение 2.2.7 - $x_1 \in IK_{-1}(G_4) \cup I_{-1}(G_4)$. Тогава от теорема 2.2.4 - $x_1 \in I_0(G)$.

6). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IN(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$. Имаме $i(G - x_1) = i(G_1 - x_1) + i(G_2) = i(G_1) + p + i(G_2) = i(G) + p$. Следователно, ако $p \geq 1$, то $x_1 \in IK_p(G)$. Нека $p = 0$. Да допуснем, че $x_1 \in I_0(G) \cup IN(G)$. Нека $x_1 \notin M \in \mathcal{I}(G)$ и $M_j = M \cap V(G_j)$ за $j = 1, 2$. Следователно M_j е независимо и доминиращо множество за графа G_j , $j = 1, 2$. Оттук $i(G) = |M_1| + |M_2| > i(G_1) + i(G_2)$, с което получаваме противоречие.

7). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1$.

8). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IK_1(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1$. От твърдение 2.1.9 - $x_1 \in IN(G)$.

9). От твърдение 2.2.7 : $i(G_3) = i(G_1)$ и $x_2 \in I_0(G_3)$. От теорема 2.2.4 : $x_2 \in IK_{p+1}(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1$. От твърдение 2.1.9 - $x_1 \in IN(G)$.

10). От твърдение 2.2.7 : $x_1 \in IK_1(G_3)$, $x_2 \in IN(G_3)$ и $i(G_3) = i(G_1)$. Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1 - x_1)$. Тогава $M_1 \cup \{x_2\}$ е независимо и доминиращо множество за графа G_3 и $|M \cup \{x_2\}| = i(G_1 - x_1) + 1 = i(G_1) + 1 = i(G_3) + 1$, откъдето $i(x_2, G_3) = i(G_3) + 1$. Ако $x_2 \in I_0(G_2)$, то от теорема 2.2.4 следва, че $x_2 \in I_0(G)$ и $i(G) = i(G_3) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$ Нека $x_2 \in IK_0(G_2)$. От теорема 2.2.4 - $x_2 \in I_0(G)$.

Ако $x_2 \in I_0(G_2)$, то от съображения за симетрия следва, че $x_1 \in I_0(G)$. Нека $x_2 \in IK_0(G_2)$. Тогава от твърдение 2.2.7 : $x_2 \in IK_1(G_4)$, $x_1 \in IN(G_4)$ и $i(G_4) = i(G_2)$ Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x_2)$. Тогава $M_3 = \{x_1\} \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G_4 и $|M_3| = 1 + i(G_2 - x_2) = 1 + i(G_2) = 1 + i(G_4)$. Следователно $i(x_1, G_4) = 1 + i(G_4)$. Сега от теорема 2.2.4 - $x_1 \in I_0(G)$.

11). Както в 10) получаваме $i(G_1) = i(G_3)$, $x_2 \in IN(G_3)$ и $i(x_2, G_3) = i(G_3)+1$. От теорема 2.2.4 - $x_2 \in IK_p(G)$ и $i(G) = i(G_2)+i(x_2, G_3)-1 = i(G_2) + i(G_3) = i(G_1) + i(G_2)$. От твърдение 2.1.9 - $x_1 \in IN(G)$.

12). От твърдение 2.2.7 следва, че $i(G_3) = i(G_1)$, $x_2 \in IN(G_3)$ $x_1 \in IK_{p+1}(G_3)$ и $i(x_2, G_3) = i(G_3) + p + 1$. Тогава от теорема 2.2.4 - $x_2 \in I_0(G)$. Допълнително имаме и $i(G) = i(G_2) + i(x_2, G_3) - 1 = i(G_2) + i(G_3) + p = i(G_1) + i(G_2) + p$. От съображения за симетрия имаме и $x_1 \in I_0(G)$.

13). От твърдение 2.2.7 : $i(G_4) = i(G_2)$, $x_1 \in IN(G_4)$, $x_2 \in IK_{q+1}(G_4)$ и $i(x_1, G_4) = i(G_4) + q + 1$. Следователно $r = i(G_4) + p + 1 - i(x_1, G_4) = p - q > 0$. От теорема 2.2.4 : $x_1 \in IK_{p-q}(G)$ и $i(G) = i(G_1) + i(x_1, G_4) - 1 = i(G_1) + i(G_2) + q$. От твърдение 2.1.9 - $x_2 \in IN(G)$

14). Следва от 1), .. , 13).

15). Следва от 1),..,5).

От теорема 2.2.8 непосредствено получаваме:

Теорема 2.2.9 Нека x_1x_2 е мост на графа G . Нека G_1 и G_2 са компонентите на графа $G - x_1x_2$ и нека $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$.

1. Ако $x_1, x_2 \in IN(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, $x_1 \in IN(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_2)$.

2. Ако $x_1 \in IK_{-1}(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, $x_1 \in IK_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G) \cap IN(G_2)$ и $i(x_2, G_2) > i(G_2) + 1$.

3. Нека $x_1 \in I_{-1}(G)$. Тогава $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $x_2 \in IN(G) \cup I_0(G)$. Ако $x_2 \in IN(G)$, то $x_1 \in I_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$ и $i(x_2, G_2) > i(G_2) + 1$ Ако $x_2 \in I_0(G)$, то $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$, $x_2 \in IN(G_2)$ и $i(x, G_2) = i(G_2) + 1$.

4. Ако $x_1 \in I_0(G)$ и $x_2 \in IN(G)$, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, $x_1 \in I_0(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_2)$.

5. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то $x_k \in I_{-1}(G_k) \cup IK_{-1}(G_k)$ за някое число $k \in \{1, 2\}$.

6. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и $x_1 \in I_0(G)$, то $x_2 \in I_0(G)$ и $x_j \in I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)$, $j = 1, 2$.

7. Нека $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$ и $x_1 \in IN(G)$. Тогава $x_2 \in IK_s(G)$ за някое $s \geq 1$. Ако $s = 1$, то $x_2 \in I_0(G_2) \cup IK_0(G_2)$. Ако $s > 1$ то $x_2 \in IK_{s-1}(G_2)$.

8. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, то или $x_1, x_2 \in I_0(G)$ или съществуват числа m, n такива, че $\{m, n\} = \{1, 2\}$ и $x_m \in IN(G)$, $x_n \in IK_s(G)$ за някое $s \geq 1$.

9. Нека $x_1 \in IK_0(G)$. Тогава $x_1 \in IK_0(G_1)$, $x_2 \in IN(G) \cap IN(G_2)$ и $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

10. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $x_1 \in IK_p(G)$, $p \geq 1$, то $x_1 \in IK_p(G_1)$ и $x_2 \in IN(G) \cap I^0(G_2)$.

11. Ако $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$ и $x_1, x_2 \in I_0(G)$, то $x_k \in IK_0(G_k) \cup I_0(G_k)$ за $k = 1, 2$.

12. Нека $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + k$, $k \geq 1$. Тогава или $x_1, x_2 \in I_0(G)$ и $x_j \in IK_k(G_j)$, $j = 1, 2$ или съществуват m, n такива, че $\{m, n\} = \{1, 2\}$ и $x_m \in IN(G) \cap IK_k(G_m)$, $x_n \in IK_s(G) \cap IK_{s+k}(G_n)$ за някое $s \geq 1$.

Теорема 2.2.10 Ако върхът x на графа G е инцидентен само с мостове. то $x \notin IK_0(G)$.

Доказателство: Ако $d(x, G) = 1$, то $x \notin IK_0(G)$, което следва от твърдение 2.2.7. Така, че нека $d(x, G) = k > 1$ и нека $T_1, T_2, ..., T_k$ са компонентите на графа $G - x$. Нека за $i = 1, 2, ..., k$: $G_i =< V(T_i) \cup \{x\} >$. Очевидно x е висящ връх за всеки от графите $G_1, ..., G_k$. Следователно $x \notin IK_0(G_i)$ за всяко $i = 1, 2, ..., k$. (следва от твърдение 2.2.7). Сега прилагаме теорема 2.2.4 за графите $H_2 = G_1 \cup G_2, H_3 = H_2 \cup G_3, .., H_k = H_{k-1} \cup G_k$ и получаваме, че $x \notin IK_0(H_i)$, $i = 1, 2, ..., k$. С това всичко е доказано поради $H_k = G$.

Следствие 2.2.11 За всяко дърво T , $IK_0(T) = \emptyset$.

2.3 Висящи вериги

При дадена принадлежност на върховете на висящо ребро към елементи на i-разлагането на графа G е намерена принадлежността им и тази на подразбиващите това ребро върхове, към елементите на i-разлагането на получения граф.

В този пункт ще считаме, че:
(i) $P_s = (\{x_1, x_2, .., x_s\}, \{x_1x_2, x_2x_3, .., x_{s-1}x_s\})$, $s \geq 2$.
(ii) $P_s(i, j) =< \{x_i, x_{i+1}, .., x_j\}, P_s >$ за $1 \leq i \leq j \leq s$.
(iii) $P_s(k) = \{x_i | i \equiv k (mod\ 3), s \geq i \geq k\}$, $1 \leq k \leq s$.
(iv) n е цяло положително число, $n \geq 3$ и $m = [n/3]$.
(v) H е свързан граф с поне два върха.
(vi) $V(P_n) \cap V(H) = \{x_1\}$.
(vii) $G = H \cup P_n$.

Добре известен факт е, че:

Лема 2.3.1 $i(P_s) = [(s + 2)/3]$, $s \geq 2$ и $i(C_r) = [(r + 2)/3], r \geq 3$.

Твърдение 2.3.2 1. Ако $y \in IN(P_n)$, то $i(y.P_n) = i(P_n) + 1$.

2. Ако $n = 3m$, то $V(P_n) = IK_1(P_n) \cup IN(P_n)$ и $IK_1(P_n) = \{x_k | k \equiv 2(\ mod\ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$.

3. Ако $n = 3m + 1$, то $V(P_n) = I_0(P_n) \cup I_{-1}(P_n)$ и $I_{-1}(P_n) = \{x_k | k \equiv 1(mod\ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$.

4. Ако $n = 3m + 2$, то $V(P_n) = I_0(P_n) \cup IN(P_n)$ и $IN(P_n) = \{x_k | k \equiv 0(mod\ 3),\ 1 \leq k \leq n\}$.

Доказателство: 1). Нека $y = x_1$. Тогава от твърдение 2.1.11 следва, че $i(y, P_n) \leq 1 + i(P_n(3, n)) = 1 + [n/3] \leq i(P_n) + 1$. Нека $y = x_2$. Тогава $i(y, P_n) \leq 1 + [(n-1)/3] = i(P_n)$, откъдето $x_2 \in I(P_n)$. Аналогично получаваме $i(x_n, P_n) \leq i(P_n) + 1$ и $x_{n-1} \in I(P_n)$. Нека $y = x_s$, $3 \leq s \leq n-2$. Следва, че $i(x_s, P_n) \leq i(P_n(1, s-2)) + 1 + i(P_n(s+2, n)) = [s/3] + 1 + [(n-s+1)/3] \leq i(P_n) + 1$.

2) , 3) и 4): Ще проведем индукция по n. Резултатът е тривиално верен за $n = 3$. Така, че ще приемем верността на твърдението за $P_k, k < n, n \geq 4$.

От индукционната хипотеза следва, че:
$x_2 \in IN(P_n(2, n))$, когато $n = 3m + 1$;
$x_2 \in I_{-1}(P_n(2, n))$, когато $n = 3m + 2$;
$x_2 \in I_0(P_n(2, n))$, когато $n = 3m, m > 1$.

Тогава от твърдение 2.2.7 следва, че:
$x_1 \in I_{-1}(P_n), x_2 \in I_0(P_n)$, когато $n = 3m + 1$;
$x_1, x_2 \in I_0(P_n)$, когато $n = 3m + 2$;
$x_1 \in IN(P_n), x_2 \in IK_1(P_n)$, когато $n = 3m, m \geq 2$.

От съображения за симетрия:
$x_n \in I_{-1}(P_n), x_{n-1} \in I_0(P_n)$, когато $n = 3m + 1$;
$x_{n-1}, x_n \in I_0(P_n)$ когато $n = 3m + 2$;
$x_n \in IN(P_n), x_{n-1} \in IK_1(P_n)$ когато $n = 3m, m \geq 2$.

Сега прилагаме индукционната хипотеза и теорема 2.2.4 към графите:
$P_n(1, k) \cup P_n(k, n)$, където $k = 3, .., n-2$, с което доказваме 2),3) и 4).

Твърдение 2.3.3 Нека C_n е прост цикъл с n върха и нека $m \geq 1$.

1. $V(C_n) = I_0(C_n)$ когато $n \in \{3m, 3m+2\}$.

2. $V(C_{3m+1}) = I_{-1}(C_{3m+1})$.

Доказателство: Очевидно $I(C_n) = I_0(C_n) \cup I_{-1}(C_n)$. Нека $x \in V(C_n)$. Тогава $i(C_n - x) = i(P_{n-1}) = [(n+1)/3] = i(C_n) - s_n$, където $s_n = 0$ за $n = 3m$ или $n = 3m + 2$ и $s_n = 1$ когато $n = 3m + 1$.

Твърдение 2.3.4 Нека $x_1 \in IK_p(H)$ и $p \geq 1$.

1. Ако $n = 3m$ или $n = 3m + 1$, то $x_1 \in IK_p(G)$.
2. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IK_{p+1}(G)$.
3. $i(G) = i(H) + [n/3]$.
4. $x_2 \in IN(G)$ и $i(x_2, G) = i(G) + p + [(n + 2)/3] - [n/3]$.
5. Ако $n = 3$. то $x_3 \in IK_{-1}(G)$.
6. Ако $n = 3m$, $m > 1$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(4) \cup P_n(5) \subseteq I_0(G)$.
7. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.
8. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(4) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
9. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_3, ..., x_n\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

Доказателство: 1) и 2): - следват непосредствено от твърдение 2.3.2 и теорема 2.2.4.

3). От лема 2.3.1, твърдение 2.3.2 и теорема 2.2.4 имаме: $i(G) = i(H) + i(P_n) + s_n$, където $s_n = 0$ за $n = 3m$ и $s_n = -1$ за $n = 3m+1$ или $n = 3m+2$. Следователно $i(G) = i(H) + [(n+2)/3] + s_n = i(H) + [n/3]$.

4). Ако $n = 3$, то $i(x_2, G) = i(H - x_1) + 1 = i(H) + p + 1 = i(G) + p$.

Нека $n > 3$. Тогава $i(x_2, G) = i(H - x_1) + i(P_n(4, n)) + 1 = i(H) + p + [(n - 1)/3] + 1 = i(G) + p + 1 + [(n - 1)/3] - [n/3]$.

5). От твърдение 2.2.7 приложено към графа $G - x_3$ имаме $x_2 \in IN(G - x_3)$ и $i(x_2, G - x_3) > i(G - x_3) + 1$. Следователно от твърдение 2.2.7 - $x_3 \in IK_{-1}(G)$.

Сега ще докажем 6) , 7), 8) и 9). Ще процедираме чрез индукция по n. Нека $G_{n,s} = H \cup P_n(1, s)$, $2 \leq s \leq n$.

Нека $n = 4$. Тогава от 5) и твърдение 2.2.7 имаме $x_3, x_4 \in I_0(G)$.

Затова можем да считаме, че резултатът е верен за $k < n$, $n \geq 5$. От индукционната хипотеза и твърдение 2.2.7 следват:

$x_{n-1}, x_n \in I_0(G)$, когато $n = 3m + 1$, $m \geq 2$;

$x_{n-1} \in I_0(G)$, $x_n \in I_{-1}(G)$ когато $n = 3m$, $m \geq 2$;

$x_{n-1} \in IK_1(G)$, $x_n \in IN(G)$ и $i(x_n, G) = i(G) + 1$, когато $n = 3m + 2$.

Сега прилагаме твърдение 2.3.2, теорема 2.2.4 и индукционната хипотеза за графите $G_{n,i} \cup P_n(i, n)$, $i = 3, .., n - 2$ и получаваме 6), 7) и 8).

Нека $x_s \in IN(G)$, $2 < s \leq n$. Ако $s = n$, то $n = 3m + 2$ и $i(x_n, G) = i(G - \{x_n, x_{n-1}\}) + 1 = i(H) + m + 1 = i(G) + 1$. Нека $2 < s < n$

Тогава $[(n-1)/3] = m$ и $i(x_s, G) = 1+i(G_{n,s-2})+i(P_n(s+2,n)) = 1+i(H)+[(s-2)/3]+[(n-s+1)/3] \leq 1+i(H)+[(n-1)/3] = 1+i(H)+[n/3] = i(G)+1$.

Аналогично се доказват и следните твърдения:

Твърдение 2.3.5 Нека $x_1 \in IK_0(H)$.

1. $i(G) = i(H) + [n/3]$.
2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y,G) = i(G) + 1$.
3. Ако $n = 3m$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.
4. Ако $n = 3m+1$, то $x_1 \in IK_0(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.
5. Ако $n = 3m+2$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

Твърдение 2.3.6 Нека $x_1 \in I_0(H)$.

1. $i(G) = i(H) + [n/3]$.
2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y,G) = i(G) + 1$.
3. Ако $n = 3m$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.
4. Ако $n = 3m+1$, то $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.
5. Ако $n = 3m+2$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

Твърдение 2.3.7 Нека $x_1 \in I_{-1}(H) \cup IK_{-1}(G)$.

1. $i(G) = i(H) + [(n-1)/3]$.
2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y,G) = i(G) + 1$.
3. Ако $n = 3m$, то $P_n(2) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
4. Ако $n = 3m+1$, то $P_n(1) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.
5. Ако $n = 3m+2$, то $P_n(3) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

Твърдение 2.3.8 Нека $x_1 \in IN(H)$ и $i(x_1, H) = i(H) + 1$.

1. $i(G) = i(H) + [(n+1)/3]$.
2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y,G) = i(G) + 1$.

3. Ако $n = 3m$, то $P_n(1) \subseteq IN(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

4. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(3) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq IN(G)$.

5. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(2) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

Твърдение 2.3.9 Нека $x_1 \in IN(H)$ и $i(x_1, H) > i(H) + 1$.

1. $i(G) = i(H) + [(n + 1)/3]$.

2. $i(x_1, G) = i(x_1, H) + [n/3]$.

3. Ако $n = 3m$, то $P_n(1) \subseteq IN(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

4. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(3) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq IN(G)$.

5. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IN(G)$, $P_n(2) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

6. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n(2, n))$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

Доказателство: на теореми 2.3.5 $\div$ 2.3.9

Нека $G_{n,s} = H \cup P_n(1, s)$, $2 \leq s \leq n$. От лема 2.3.1, твърдение 2.3.2 и теорема 2.2.8 следва, че $i(G) = i(H) + [(n+1)/3] + p_1$, където (i) $p_1 = -1$, ако или $(x_1 \in I_{-1}(H))\&(n = 3m)$ или $(x_1 \notin IN(H))\&(n = 3m + 2)$; (ii) $p_1 = 0$ - иначе.

От (i) и (ii) следва 1) на доказваните теореми.

Имаме от твърдение 2.1.11, че $i(x_1, G) = i(x_1, H) + i(P_{n-2}) = i(x_1, H) + [n/3]$ и още $i(x_2, G) = i(H - x_1) + 1 + [(n - 1)/3] = i(H) + [(n + 2)/3] + q_1$, където $q_1 = -1$ за $x_1 \in I_{-1}(H)$ и $q_1 = 0$ - иначе. Оттук $i(x_2, G) \leq i(G) + 1$. Имаме още $i(x_n, G) = i(G_{n,n-2}) + 1 \leq i(G) + 1$ и при $n > 3$: $i(x_{n-1}, G) = i(G_{n,n-3}) + 1 \leq i(G) + 1$. Нека $3 \leq s \leq n - 2$. Тогава $i(x_s, G) = i(G_{n,s-2}) + 1 + i(P_{n-s-1}) = i(G_{n,s-2}) + 1 + [(n - s + 1)/3]$. Оттук чрез индукция - $i(x_s, G) = i(H) + [(s + r)/3] + 1 + [(n - s + 1)/3] \leq i(G) + 1$, където $r = 0$ при $x_1 \in IK_0(H) \cup I_0(H)$; $r = 1$ при $x_1 \in IN(H)$ и $r = -1$ при $x_1 \in I_{-1}(H) \cup IK_{-1}(H)$. С това доказахме 2) и 6).

От теорема 2.2.8, приложена към графите H и $P_n(2, n)$, намираме принадлежността на x_1 и x_2 към някое от множествата $I_{-1}(G)$, $I_0(G)$, $IK_p(G)$ и $IN(G)$. Същото за x_{n-1} и x_n получаваме от твърдение 2.2.7. Останалото следва от теорема 2.2.8, приложена за графите $G_{n,i}$ и $P_n(i + 1, n)$, ползвайки теорема 2.3.2.

2.4 Вериги от мостове

Получени са резултати аналогични на тези в параграф 2.3, но за подразбиване на мост, който е невисящо ребро.

В този пункт ще считаме, че:
(i) G_1 и G_2 са графи без общи върхове;
(ii) $P_s = (\{x_1, x_2, .., x_s\}, \{x_1x_2, x_2x_3, .., x_{s-1}x_s\})$, $s \geq 2$;
(iii) $P_s(k) = \{x_i | i \equiv k (mod\ 3), s \geq i \geq k\}$, $1 \leq k \leq s$;
(iv) $P_s(i,j) = < \{x_i, x_{i+1}, .., x_j\}, P_s >$ за $1 \leq i \leq j \leq s$;
(v) n е цяло положителни число, $n \geq 3$ и $[n/3] = m$
(vi) $V(P_n) \cap V(G_1) = \{x_1\}$;
(vii) $V(P_n) \cap V(G_2) = \{x_n\}$;
$(viii)$ $G = G_1 \cup G_2 \cup P_n$.

Теорема 2.4.1 Нека $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$ и $x_n \in IN(G_2)$.

1. Ако $n = 3m$, то $P_n(3) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.
2. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(2) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
3. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(1) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(2) - \{x_n\}) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.
4. Ако $n = 3m + 2$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$, то $x_n \in I_0(G)$.
5. Ако $n = 3m + 2$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2) + 1$, то $x_n \in IN(G)$.
6. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.
7. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_2, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.
8. Ако $n = 3m + 1$, то $i(x_1, G) = i(G) + 1$.
9. Ако $n = 3m+2$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2)+1$, то $i(x_n, G) = i(G)+i(x_n, G_2) - i(G_2) - 1$.
10. Ако $n \in \{3m, 3m + 1\}$, то $i(x_n, G) = i(G) + i(x_n, G_2) - i(G_2)$.

Доказателство: Нека $G_{1,j} = G_1 \cup P_n(1, j)$ за $j = 2, .., n$ и $G_{2,k} = G_2 \cup P_n(k, n)$ за $k = 1, 2, .., n-1$. От твърдение 2.3.8 и твърдение 2.3.9 имаме:
$x_1 \in I_0(G_{2,1})$, когато $n = 3m$;
$x_1 \in IN(G_{2,1})$, когато $n = 3m + 1$;
$x_1 \in I_{-1}(G_{2,1})$, когато $n = 3m + 2$.
Сега от теорема 2.2.4, приложена към графите G_1 и $G_{2,1}$, имаме:
$x_1 \in I_0(G)$, когато $n = 3m$;

$x_1 \in IN(G)$. когато $n = 3m + 1$;

$x_1 \in I_{-1}(G)$. когато $n = 3m + 2$.

Аналогично. ползвайки твърдение 2.3.7 и теорема 2.2.4, имаме:

$x_n \in IN(G)$. когато $n \in \{3m, 3m+1\}$;

$x_n \in I_0(G)$. когато $n = 3m + 2$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$;

$x_n \in IN(G)$. когато $n = 3m + 2$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2) + 1$;

Ако $n = 3$. то от твърдение 2.2.7 и теорема 2.2.4, приложени към графите $G_{1,2}$ и $G_{2,2}$, имаме, че $x_2 \in I_0(G)$.

Нека $n > 3$. Сега прилагаме твърдение 2.2.7, твърдение 2.3.7, твърдение 2.3.8, твърдение 2.3.9 и теорема 2.2.4 към графите $G_{1,i}$ и $G_{2,i}$. където $i \in \{2, 3, .., n-1\}$, с което доказваме 1), 2),3),4) и 5).

6). От теорема 2.2.4, твърдение 2.3.8 и твърдение 2.3.9 имаме:
$i(G) = i(G_1) + i(G_{2,1}) - 1 = i(G_1) + i(G_2) + [(n+1)/3] - 1 =$
$i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.

7). Нека $y = x_s$. Тогава $n \neq 3m + 2$ и $s \neq 2$ поради 1)...5).

Нека $s \neq n - 1$. Следователно от твърдение 2.1.11, твърдение 2.3.7, твърдение 2.3.8 и твърдение 2.3.9: $i(x_s, G) = 1 + i(G_{1,s-2}) + i(G_{2,s+2}) \le 1 + i(G_1) + [(s-3)/3] + i(G_2) + [(n-s)/3] \leq i(G_1) + i(G_2) + m = i(G) + 1$.

Нека $y = x_{n-1}$. Следователно $n = 3m + 1$ и както по-горе получаваме : $i(y, G) = 1 + i(G_{1,n-3}) + i(G_2 - x_n) = 1 + i(G_1) + [(n-4)/3] + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2) + m = i(G) + 1$.

8). $i(x_1, G) = i(x_1, G_{1,2}) + i(G_{2,3}) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-1)/3] = i(G) + 1$.

9). $i(x_n, G) = i(G_{1,n-2}) + i(x_n, G_{2,n-1}) = i(G_1) + [(n-3)/3] + i(x_n, G_2) = i(G) - i(G_2) - [(n-2)/3] + [(n-3)/3] + i(x_n, G_2) = i(G) + i(x_n, G_2) - i(G_2) - 1$.

10). Доказателството е както в 9).

Аналогично получаваме следващите теореми:

Теорема 2.4.2 Нека $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$, $x_n \in I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-4)/3]$.
2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.
3. Ако $n = 3m$, то $P_n(2) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
4. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(1) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.
5. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(3) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.3 Нека $x_1 \in IN(G_1)$ и $x_n \in IN(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [n/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_2, ... x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. $i(x_1, G) = i(x_1, G_1) + i(G_2) + [(n-1)/3]$.

4. $i(x_n, G) = i(x_n, G_2) + i(G_1) + [(n-1)/3]$.

5. Ако $n = 3m$, $i(x_1, G_1) = i(G_1) + 1$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$, то $P_n(2) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

6. Нека $n = 3m$, $i(x_1, G_1) > i(G_1) + 1$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$. Ако $n > 3$, то $x_1 \in IN(G)$, $P_n(2) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$. Ако $n = 3$, то $x_1 \in IN(G), x_2 \in I_{-1}(G)$ и $x_3 \in I_0(G)$.

7. Нека $n = 3m$, $i(x_1, G_1) > i(G_1)+1$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2)+1$. Ако $n > 3$, то $x_1, x_n \in IN(G)$, $P_n(2) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(3) - \{x_n\}) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$. Ако $n = 3$, то $x_1, x_3 \in IN(G)$ и $x_2 \in IK_{-1}(G)$.

8. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(1) \subseteq IN(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

9. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(3) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq IN(G)$.

Теорема 2.4.4 Нека $x_1 \in I_0(G_1)$, $x_n \in I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-3)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. Ако $n = 3m$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

4. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

5. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

Теорема 2.4.5 Нека $x_1 \in I_0(G_1)$, $x_n \in IN(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-1)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_2, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. $i(x_n, G) = i(G_1) + i(x_n, G_2) + [(n-2)/3]$.

4. Ако $n = 3m$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

5. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(1) - \{x_n\}) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

6. Ако $n = 3m + 1$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$, то $x_n \in I_0(G)$.

7. Ако $n = 3m + 1$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2) + 1$, то $x_n \in IN(G)$.

8. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

9. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-1)/3]$.

10. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_2, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

11. $i(x_n, G) = i(G_1) + i(x_n, G_2) + [(n-2)/3]$.

Теорема 2.4.6 Нека $x_1 \in IK_0(G_1)$, $x_n \in IN(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-1)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_2, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. $i(x_n, G) = i(G_1) + i(x_n, G_2) + [(n-2)/3]$.

4. Ако $n = 3m$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

5. Ако $n = 3m+1$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(1) - \{x_n\}) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

6. Ако $n = 3m + 1$ и $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$, то $x_n \in I_0(G)$.

7. Ако $n = 3m + 1$ и $i(x_n, G_2) > i(G_2) + 1$, то $x_n \in IN(G)$.

8. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IK_0(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.7 Нека $x_1 \in I_0(G_1)$ и $x_n \in I_0(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. Ако $n = 3m$, то $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(3) \subseteq I_0(G)$.

4. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

5. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.8 Нека $x_1 \in IK_p(G_1), p \geq 1$ и $x_n \in IN(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + (G_2) + [(n-1)/3]$.

2. $i(x_2, G) = \begin{cases} i(G) + p + 1 & \textit{за} \quad n \in \{3m, 3m+2\} \\ i(G) + p & \textit{за} \quad n = 3m + 1 \end{cases}$

3. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_3, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

4. $i(x_n, G) = i(x_n, G_2) + i(G_1) + [(n-2)/3]$.

5. Нека $n = 3m$. Тогава $x_1 \in IK_{p+1}(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$. Ако $n > 3$, то $P_n(4) \subseteq IK_1(G)$.

6. Нека $n = 3m + 1$. Тогава:

   (*i*) $x_1 \in IK_p(G)$ и $x_2 \in IN(G)$.

   (*ii*) Ако $i(x_n, G_2) = i(G_2) + 1$, то $x_3 \in I_{-1}(G)$ и $x_n \in I_0(G)$.

   (*iii*) Нека $i(x_n, G_2) > i(G_2) + 1$. Тогава $x_n \in IN(G)$. Ако $n = 4$, то $x_3 \in IK_{-1}(G)$.

   (*iv*) Нека $n > 4$. Тогава $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(4) - \{x_n\}) \cup P_n(5) \subseteq I_0(G)$.

7. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.9 Нека $x_1 \in IK_p(G_1), p \geq 0, x_n \in I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-3)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap \{x_3, x_4, ..., x_n\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. $i(x_2, G) = \begin{cases} i(G) + p + 1 & \textit{за} \quad n \in \{3m+1, 3m+2\} \\ i(G) + p & \textit{за} \quad n = 3m \end{cases}$

4. Ако $n = 3, p \geq 1$ и $x_n \in I_{-1}(G_2)$, то $x_1 \in IK_p(G), x_2 \in IN(G)$, $x_3 \in I_{-1}(G)$.

5. Ако $n = 3, p \geq 1$ и $x_n \in IK_{-1}(G_2)$, то $x_1 \in IK_p(G), x_2 \in IN(G)$, $x_3 \in IK_{-1}(G)$.

6. Ако $n = 3m > 3$ и $p \geq 1$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $x_2 \in IN(G)$, $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(4) \cup P_n(5) \subseteq I_0(G)$.

7. Ако $n = 3m$ и $p = 0$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

8. Ако $n = 3m + 1$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

9. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IK_{p+1}(G)$,$P_n(4) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

Теорема 2.4.10 Нека $x_1 \in IK_0(G_1)$ и $x_n \in I_0(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. Ако $n = 3$, то $x_1 \in IK_0(G), x_2 \in IN(G), x_3 \in I_0(G)$.

4. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1 \in IK_0(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

5. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

6. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.11 Нека $x_1 \in IK_p(G_1), p \geq 1$ и $x_n \in I_0(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.

2. Ако $n > 3$ и $y \in IN(G) \cap \{x_3, .., x_{n-1}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. $i(x_2, G) = \begin{cases} i(G) + p + 1 & \text{за} \quad n \in \{3m, 3m+1\} \\ i(G) + p & \text{за} \quad n = 3m + 2 \end{cases}$

4. Ако $n = 3$, то $x_1 \in IK_p(G), x_2 \in IN(G), x_3 \in I_0(G)$.

5. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $P_n(3) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

6. Ако $n = 3m + 1$, то $x_1 \in IK_{p+1}(G)$, $P_n(4) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

7. Ако $n = 3m + 2$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $x_2 \in IN(G)$, $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(4) \cup P_n(5) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.12 Нека $x_1 \in IK_0(G_1)$ и $x_n \in IK_0(G_2)$.

1. $i(G) = i(G_1) + (G_2) + [(n-2)/3]$.

2. Ако $y \in IN(G) \cap V(P_n)$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

3. Ако $n = 3$, то $x_1, x_3 \in IK_0(G)$, $x_2 \in IN(G)$.

4. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1, x_n \in IK_0(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $(P_n(3) - \{x_n\}) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

5. Ако $n = 3m + 1$, то $P_n(1) \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

6. Ако $n = 3m + 2$, то $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $P_n(1) \cup P_n(2) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.13 Нека $x_1 \in IK_0(G_1), x_n \in IK_p(G_2), p \geq 1$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.
2. $i(x_{n-1}, G) = \begin{cases} i(G) + p & \text{за} \quad n = 3m + 2 \\ i(G) + p + 1 & \text{за} \quad n \in \{3m, 3m + 1\} \end{cases}$
3. Ако $n > 3$ и $y \in IN(G) \cap \{x_2, .., x_{n-2}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.
4. Ако $n = 3$, то $x_1 \in IK_0(G), x_2 \in IN(G), x_3 \in IK_p(G)$.
5. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1 \in IK_0(G), x_n \in IK_p(G), P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $(P_n(3) - \{x_n\}) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.
6. Ако $n = 3m + 1$, то $x_n \in IK_{p+1}(G)$, $P_n(1) - \{x_n\} \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
7. Ако $n = 3m + 2$, то $x_{n-1} \in IN(G), x_n \in IK_p(G)$, $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(1) - \{x_{n-1}\}) \cup (P_n(2) - \{x_n\}) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.14 Нека $x_1 \in IK_p(G_1), x_n \in IK_p(G_2), p \geq 1$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.
2. Ако $n = 3$, то $i(x_2, G) = i(G) + 2p + 1$.
3. $i(x_2, G) = i(x_{n-1}, G) = \begin{cases} i(G) + p & \text{за} \quad n = 3m + 2 \\ i(G) + p + 1 & \text{за} \quad n \in \{3m, 3m + 1\}, n \neq 3 \end{cases}$
4. Ако $n > 5$ и $y \in IN(G) \cap \{x_3, .., x_{n-2}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.
5. Ако $n = 3$, то $x_1, x_3 \in IK_p(G)$ и $x_2 \in IN(G)$.
6. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1, x_n \in IK_p(G)$, $P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $(P_n(3) - \{x_n\}) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.
7. Ако $n = 3m + 1$, то $x_1, x_n \in IK_{p+1}(G)$, $P_n(4) - \{x_n\} \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.
8. Ако $n = 5$, то $x_1, x_5 \in IK_p(G)$, $x_2, x_4 \in IN(G)$ и $x_3 \in IK_{-1}(G)$.
9. Ако $n = 3m + 2$ и $m \geq 2$, то $x_1, x_n \in IK_p(G)$, $x_2, x_{n-1} \in IN(G)$, $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(4) - \{x_{n-1}\}) \cup (P_n(5) - \{x_n\}) \subseteq I_0(G)$.

Теорема 2.4.15 Нека $x_1 \in IK_p(G_1), x_n \in IK_q(G_2)$ и $p > q \geq 1$.

1. $i(G) = i(G_1) + i(G_2) + [(n-2)/3]$.

2. $i(x_2, G) = \begin{cases} i(G) + p + q + 1 & \text{за} \quad n = 3 \\ i(G) + p + 1 & \text{за} \quad n \in \{3m, 3m+1\}, n \neq 3 \\ i(G) + p & \text{за} \quad n = 3m+2 \end{cases}$

3. $i(x_{n-1}, G) = \begin{cases} i(G) + q + 1 & \text{за} \quad n \in \{3m, 3m+1\}, n \neq 3 \\ i(G) + q & \text{за} \quad n = 3m+2 \end{cases}$

4. Ако $n > 5$ и $y \in IN(G) \cap \{x_3, .., x_{n-2}\}$, то $i(y, G) = i(G) + 1$.

5. Ако $n = 3$, то $x_1 \in IK_p(G), x_2 \in IN(G), x_3 \in IK_q(G)$.

6. Ако $n = 3m > 3$, то $x_1 \in IK_p(G), x_n \in IK_q(G), P_n(2) \subseteq IN(G)$ и $(P_n(3) - \{x_n\}) \cup P_n(4) \subseteq I_0(G)$.

7. Ако $n = 3m + 1$, то $x_1 \in IK_{p+1}(G), x_n \in IK_{q+1}(G)$, $P_n(4) - \{x_n\} \subseteq IK_1(G)$ и $P_n(2) \cup P_n(3) \subseteq IN(G)$.

8. Ако $n = 5$, то $x_1 \in IK_p(G)$, $x_2, x_4 \in IN(G)$, $x_3 \in IK_{-1}(G)$, $x_5 \in IK_q(G)$.

9. Ако $n = 3m + 2 > 5$, то $x_1 \in IK_p(G), x_n \in IK_q(G)$, $x_2, x_{n-1} \in IN(G)$ $P_n(3) \subseteq I_{-1}(G)$ и $(P_n(4) - \{x_{n-1}\}) \cup (P_n(5) - \{x_n\}) \subseteq I_0(G)$.

Доказателство: на теореми 2.4.2 ÷ 2.4.15:

Нека $G_{1,j} = G_1 \cup P_n(1, j)$ за $j = 2, .., n$ и $G_{2,k} = G_2 \cup P_n(k, n)$ за $k = 1, 2, .., n$. От теореми 2.3.4 ÷ 2.3.9 следва, че:
(i) $i(G_{1,n-1}) = i(G_1) + [(n+r)/3]$, където:
$r = 0$ за $x_1 \in I(G_1) - (IK_{-1}(G_1) \cup I_{-1}(G))$
$r = -1$ за $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$
$r = 1$ за $x_1 \in IN(G_1)$.
(ii) $x_{n-1} \in I_{-1}(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 1$ и $x_1 \in IK_0(G_1)$
(iii) $x_{n-1} \in I_0(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 2$ и $x_1 \in IK_0(G_1)$
(iv) $x_{n-1} \in IN(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 3$ и $x_1 \in IK_0(G_1)$
(v) $x_{n-1} \in I_{-1}(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 1$ и $x_1 \in I_0(G_1)$
(vi) $x_{n-1} \in I_0(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 2$ и $x_1 \in I_0(G_1)$
(vii) $x_{n-1} \in IN(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 3$ и $x_1 \in I_0(G_1)$
$(viii)$ $x_{n-1} \in IN(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 1$ и $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$
(ix) $x_{n-1} \in I_{-1}(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 2$ и $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$
(x) $x_{n-1} \in I_0(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 3$ и $x_1 \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$
(xi) $x_{n-1} \in I_0(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 1$ и $x_1 \in IN(G_1)$

(xii) $x_{n-1} \in IN(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 2$ и $x_1 \in IN(G_1)$

$(xiii)$ $x_{n-1} \in I_{-1}(G_{1,n-1})$ за $n = 3m + 3$ и $x_1 \in IN(G_1)$

Оттук и от теорема 2.2.8 получаваме 1) на доказваните теореми, а така също и принадлежността на x_{n-1} и x_n към някое от множествата $IK(G), IN(G), I_0(G)$ и $I_{-1}(G)$.

Аналогично намираме и принадлежността на x_1 и x_2 към някое от множествата $IK(G), IN(G), I_0(G)$ и $I_{-1}(G)$.

От $i(x_1, G) = i(G_1 - x_1) + i(G_{2,n-3})$ и теореми $2.3.4 \div 2.3.9$ следва исканото за $i(x_1, G)$.

От $i(x_2, G) = i(G_1 - x_1) + 1 + i(G_2 - x_2)$ за $n = 3$, $i(x_2, G) = i(G_1 - x_1) + 1 + i(G_2)$ за $n = 4$, и $i(x_2, G) = i(G_1 - x_1) + 1 + i(G_{2,4})$ за $n > 4$, от теореми $2.3.4 \div 2.3.9$ следва исканото за $i(x_2, G)$.

Аналогично - за $i(x_{n-2}, G)$.

Нека сега $3 \leq s \leq n-2$. Следва, че $i(x_s, G) = i(G_{1,s-2}) + 1 + i(G_{2,s+2})$. $(G_{1,1} := G_1, G_{2,n} := G_2)$. Тогава от теореми $2.3.4 \div 2.3.9$ следва исканото за $i(x_s, G)$.

Нека $3 \leq s \leq n-2$. От теореми $2.3.4 \div 2.3.9$ намираме принадлежността на x_s към някое от множествата $I_{-1}(G_{1,s}), I_0(G_{1,s}), IN(G_{1,s})$ и $IK_p(G_{1,s})$, както и принадлежността на x_{s+1} към някое от множествата $I_{-1}(G_{2,s+1}), I_0(G_{2,s+1}), IN(G_{2,s+1})$ и $IK_p(G_{2,s+1})$. Оттук и от теорема 2.2.8 следва исканото.

2.5 Околности

Получени са резултати за инцидентни само с мостове върхове.

Нека x е инцидентен само с мостове невисящ връх на графа G. В твърдение 2.5.2 е доказано, че $N[x, G] - I_0(G) \neq \emptyset$. Оттук като следствие е получено, че за графа G от $V(G) = I(G)$ следва, че $|V(G)| \leq |E(G)|$.

Лема 2.5.1 Нека G е свързан граф, $|V(G)| \geq 2$, $x \in V(G)$ и $A = \{y \in N(x, G) | d(y, G) = 1\}$.

(i) Ако $A \neq \emptyset$, то $x \notin I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G) \cup IK_0(G)$.

(ii) Нека $|A| \geq 2$. Тогава $A \cap I_0(G) = \emptyset$. Ако $x \notin IK(G) \cup IN(G)$ то $x \in I_0(G)$ и $A \subseteq I_{-1}(G)$.

Доказателство: Следва непосредствено от твърдение 2.2.7.

Теорема 2.5.2 Нека върхът x на графа G е инцидентен само с мостове и нека x не е висящ връх. Тогава $N[x, G] - I_0(G) \neq \emptyset$.

Доказателство: Допускаме, че $N[x,G] \subseteq I_0(G)$.

Случай 1: $d(x,G) = 2$. Нека $\{y_1, y_2\} = N(x,G)$ и G_j е компонентата на $G - xy_j$, която не съдържа $y_j, j = 1, 2$.

а) Нека $y_1 \in I_{-1}(G-x) \cup IK_{-1}(G-x)$. От твърдение 2.2.7 - $x \in I_0(G_2)$, а от теорема 2.2.8 - $y_2 \in I_0(G-x) \cup IK_0(G-x)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in IN(G_1)$ и $i(x,G_1) = i(G_1)+1$. Сега от теорема 2.2.8 - $y_1 \notin I_0(G)$, с което получихме противоречие.

б) Нека $y_1 \in I_0(G-x) \cup IK_0(G-x)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in IN(G_2)$ и $i(x,G_2) = i(G_2)+1$. От теорема 2.2.8 - $\{x, y_2\} - I_0(G) \neq \emptyset$.

в) Нека $y_1 \in IK_p(G)$, $p \geq 1$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in IN(G_2)$ и $i(x,G_2) = i(G_2)+p+1$. От теорема 2.2.8 - $\{x, y_2\} - I_0(G) \neq \emptyset$.

г) Нека $y_1 \in IN(G-x)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$. Следователно, от теорема 2.2.8 имаме (за да е вярно, че $\{x, y_2\} \subset I_0(G)$), $y_2 \in I_{-1}(G-x) \cup IK_{-1}(G-x)$. Тогава, както в а), стигаме до противоречие.

Случай 2: $d(x,G) > 2$. Нека F е множество от ребра инцидентни с x такива, че : (i) за всяко подмножество $Q \subseteq F$: $N[x, G-Q] \subseteq I_0(G-Q)$ и (ii) за всяко ребро f инцидентно с x в $G-F$: $N[x,G_f] - I_0(G_f) \neq \emptyset$, където G_f е компонентата на $G - F - \{f\}$, която съдържа x.

Нека $U = G - F$ и $N(x,U) = \{y_1, .., y_k\}, k \geq 3$. От твърдение 2.2.7 и теорема 2.2.8 следва, че $x \in I_{-1}(U_i) \cup I_0(U_i) \cup IK(U_i)$ за всяко $i = 1, 2, .., k,$, където U_i е компонентата на $U - xy_i$, която съдържа x . Нека H_s е компонентата на $G - xy_s$, която съдържа y_s , $s = 1, 2, .., k$. Ако някой от върховете $y_1, y_2, .., y_k$ е висящ връх, нека, без загуба на общност, y_1 е такъв връх. Следователно нито един от върховете $y_2, y_3, .., y_k$ не е висящ връх, което следва от лема 2.5.1.

Нека за $s = 2, 3, .., k : T_s =< (\cup_{i=1}^{s} V(H_i)) \cup \{x\}, U >$. Ако y_1 е висящ връх, то от твърдение 2.2.7 следва, че $x \in I_{-1}(U_1) \cup IK_{-1}(U_1)$. Така, че без загуба на общност ще считаме, че $x \in I_{-1}(U_1) \cup IK_{-1}(U_1)$. Ако y_1 е висящ връх, то от теорема 2.2.9 следва $y_1 \in I_{-1}(H_1) \cup IK_{-1}(H_1)$. Допълнително от същата теорема имаме и , че $y_m \in IN(H_m)$ за $m = 2, 3, .., k$. Да отбележим, че $x \in I_0(T_2)$. (Последното следва от твърдение 2.2.7 и теорема 2.2.8 .) Сега прилагаме теорема 2.2.8 последователно към графите $T_3, T_4, .., T_k$, откъдето получаваме $x \in I_0(T_s)$ и $y_s \in DN(T_s)$ за $s = 3, 4, .., k$. Тъй като $T_k = U$, то $y_k \in IN(U)$ с което получаваме противоречие.

И така, за всяко $s = 1, 2, .., k : x \in I_0(U_s) \cup IK_{p_s}(U_s)$, $p_s \geq 1$ ($p_s \neq 0$ - поради теорема 2.2.10) и y_s не е висящ връх. Следователно за всяко $s = 1, 2, .., k$, или (i) $x \in I_0(U_s)$ и $y_s \in I_0(H_s) \cup IK_0(H_s)$, или

(ii) $x \in IK_{p_s}(U_s)$ и $y_s \in IK_{p_s}(H_s)$, където $p_s \geq 1$. (Следва от теорема 2.2.8).

От твърдение 2.2.7 следва, че $x \in IN(< V(H_1) \cup \{x\}, U >)$ и тогава от теорема 2.2.8 - $x \in IN(T_2)$. От теорема 2.2.8 също следва и $x \in IN(T_s)$, за $s \geq 3$. Тъй като $T_k = U$, то имаме, че $x \in IN(U)$ с което получихме противоречие.

Следствие 2.5.3 Нека G е свързан граф с поне три върха и $V(G) = I_0(G)$. Тогава $|V(G)| \leq |E(G)|$.

Следващата теорема е основна за параграф 3.4 и дава достатъчно условие за запазване на i-разлагането на граф.

Теорема 2.5.4 Нека G е свързан граф, $x \in V(G)$ и $N(x, G) = \{y_1, .., y_k\}$, $k > 1$. Нека $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове и G_s е компонентата на $G - x$, която съдържа y_s, $s = 1, 2, ..., k$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

(i) $y_s \in I_0(G_s)$ за $s = 1, 2, .., k$.

(ii) $y_s \in I_0(G)$ за $s = 1, 2, .., k$ и $x \in IN(G)$.

Нека е изпълнено едно от твърденията (i) и (ii). Тогава:

1. Нека $M_s \in \mathcal{I}(G_s)$ за $s = 1, 2, .., k$ и $(\cup_{s=1}^{k} M_s) \cap N(x, G) \neq \emptyset$. Тогава $\cup_{s=1}^{k} M_s \in \mathcal{I}(G)$.

2. Ако $M \in \mathcal{I}(G)$, то $M \cap N(x, G) \neq \emptyset$ и $M \cap V(G_s) \in \mathcal{I}(G_s)$ за всяко $s = 1, 2, .., k$.

3. $i(G) = \Sigma_{s=1}^{k} i(G_s)$.

4. $I(G) = \cup_{s=1}^{k} I(G_s)$.

5. $IN(G) = \{x\} \cup (\cup_{s=1}^{k} IN(G_s))$.

6. $I_{-1}(G) = \cup_{s=1}^{k} I_{-1}(G_s)$.

7. $I_0(G) = \cup_{s=1}^{k} I_0(G_s)$.

8. $IK(G) = \cup_{s=1}^{k} IK(G_s)$.

9. $IK_p(G) = \cup_{s=1}^{k} IK_p(G_s)$, $p = -1, 0, .., |V(G)| - 2$.

10. $i(x, G) = i(G) + 1$.

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$: Нека за $m = 2, 3, .., k$: $H_m =< (\cup_{r=1}^{m} V(G_r)) \cup \{x\}, G >$. От твърдение 2.2.7 следва, че $x \in IN(< V(G_1) \cup \{x\}, G)$ и тогава от теорема 2.2.8 - $x \in IN(H_2)$ и $y_2 \in I_0(H_2)$. Аналогично -

$y_1 \in I_0(H_2)$. Нека $k > 2$. Сега прилагаме теорема 2.2.8 към графите H_j , $j = 3, 4..., k$ и получаваме, че $x \in IN(H_m)$ и $y_m \in I_0(H_m)$ за $m = 3, 4, .., k,$, откъдето $y_k \in I_0(G)$ и $x \in IN(G)$. Аналогично получаваме, че $y_1, y_2, ... y_{k-1} \in I_0(G)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Следва веднага от теорема 2.2.9.

1). Очевидно $\cup_{s=1}^{k} M_s$ е доминиращо множество за G. От твърдение 2.2.7 - $i(< V(G_1) \cup \{x\}, G >) = i(G_1)$, а от теорема 2.2.8 имаме $i(H_2) = i(< V(G_1) \cup \{x\}, G >) + i(G_2) = i(G_1) + i(G_2)$. Когато $k > 2$, от теорема 2.2.8 следва $i(H_m) = i(G_m) + i(H_{m-1})$ за $2 < m \leq k$. Следователно $i(G) = i(H_k) = \sum_{l=1}^{k} i(G_l) = \sum_{l=1}^{k} |M_l| = | \cup_{l=1}^{k} M_l|$. Оттук $\cup_{l=1}^{k} M_l \in \mathcal{I}(G)$.

2). От (ii) следва $x \in IN(G)$. Тогава $M \cap N(x, G) \neq \emptyset$ и $M \cap V(G_s)$ доминира G_s за $s = 1, 2, .., k$. Ако $M \cap V(G_t) \notin \mathcal{I}(G_t)$ за някое $t \in \{1, 2, .., k\}$, то нека $M_t \in \mathcal{I}(G_t)$ е такова, че $y_t \in M_t$. Сега имаме , че $A = (M - V(G_t)) \cup M_t$ е независимо и доминиращо множество на G и $|A| < |M|$, с което се получава противоречие.

3). Следва от 1) и 2).

4). Следва от 1) и 2).

5). Следва от 4).

6). *Случай 1.* Нека, без загуба на общност, $u \in I_{-1}(G_1)$. Следователно съществува $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ такова, че $N[M_1 - \{u\}, G_1] = V(G_1 - u)$. Нека $M_s \in \mathcal{I}(G_s), s = 2, 3, .., k$ е такова, че $M_s \cap N(x, G) \neq \emptyset$. Тогава от 1) следва, че $\cup_{m=1}^{k} M_m \in \mathcal{I}(G)$ и очевидно $N[(\cup_{m=1}^{k} M_m) - \{u\}] = V(G) - \{u\}$. Следователно $u \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Нека $u \notin M_0 \in \mathcal{I}(G_1)$. Тогава от 1): $A = M_0 \cup (\cup_{m=2}^{k} M_m) \in \mathcal{I}(G)$ и $x \notin A$. Следователно $x \in I_{-1}(G)$.

Случай 2. Нека, без загуба на общност, $u \in I_{-1}(G) \cap V(G_1)$. От твърдение 2.1.5 и от твърдение 2.1.8 следва, че съществуват $M, M_1 \in \mathcal{I}(G)$ такива, че $u \notin M_1$, $u \in M$ и $N[M - \{u\}, G] = V(G) - \{u\}$. Тогава от 2) следва, че $u \in M \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$, $u \notin M_1 \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$ и очевидно $N[(M \cap V(G_1)) - \{u\}, G_1] = V(G_1) - \{u\}$, откъдето $u \in I_{-1}(G_1)$.

7). *Случай 1.* Нека без загуба на общност $u \in I_0(G_1)$. Нека тогава $M_0, M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ са такива, че $u \in M_0$ и $u \notin M_1$. Нека $M_s \in \mathcal{I}(G_s), s = 2, 3, .., k$ са такива, че $M_s \cap N(x, G) \neq \emptyset$. От 1) имаме, че $M_0 \cup (\cup_{m=2}^{k} M_m), \cup_{m=1}^{k} M_m \in \mathcal{I}(G)$. Следователно $u \in I_0(G) \cup I_{-1}(G)$. Сега от 6) получаваме - $u \in I_0(G)$.

Случай 2. Нека, без загуба на общност, $u \in I_0(G) \cap V(G_1)$. Нека $M_1, M_2 \in \mathcal{I}(G)$ са такива, че $u \notin M_1, u \in M_2$. От 2) имаме, че $u \in I_0(G_1) \cup I_{-1}(G_1)$. Сега, вземайки предвид 6), получаваме - $u \in I_0(G_1)$.

8). Следва непосредствено от 4),5),6) и 7).

9). *Случай 1.* Нека без загуба на общност $u \in IK_p(G) \cap V(G_1)$. От 8) следва $u \in IK(G_1)$. Означаваме $Q = < V(G_1 - u) \cup \{x\}, G >$.

а) Нека $y_1 \in I_{-1}(G_1 - u) \cup IK_{-1}(G_1 - x)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in I_0(Q)$ и $i(Q) = i(G_1 - u)$. От теорема 2.2.8 - $x \in I_0(H_2 - u)$ и $i(H_2 - u) = i(Q) + i(G_2) = i(G_1 - u) + i(G_2)$.

б) Нека $y_1 \in (IK(G_1 - u) - IK_{-1}(G_1 - u)) \cup I_0(G_1 - u)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in IN(Q)$ и $i(Q) = i(G_1 - u)$. От теорема 2.2.8 - $x \in IN(H_2 - u)$ и $i(H_2 - u) = i(Q) + i(G_2) = i(G_1 - u) + i(G_2)$.

в) Нека $y_1 \in IN(G_1 - u)$. Тогава от твърдение 2.2.7 - $x \in I_{-1}(Q) \cup IK_{-1}(Q)$ и $i(Q) = i(G_1 - u) + 1$. От теорема 2.2.8 - $x \in IN(H_2 - u)$ и $i(H_2 - u) = i(Q) + i(G_2) - 1 = i(G_1 - u) + i(G_2)$.

И така получихме, че $x \in (IN(H_2 - u) \cup I_0(H_2 - u))$ и $i(H_2 - u) = i(G_1 - u) + i(G_2)$.

Ако $k = 2$, то $i(G-u) = i(H_2-u) = i(G_1-u)+i(G_2) = i(G_1)+p+i(G_2) = i(G) + p$.

Нека $k > 2$. Взимайки предвид теорема 2.2.8 имаме: $x \in IN(H_s - u) \cup I_0(H_s - u)$ и $i(H_s - u) = i(H_{s-1} - u) + i(G_s), s = 3, 4, .., k$. Следователно $i(G - u) = i(H_k - u) = i(G_1 - u) + \Sigma_{s=2}^{k} i(G_s) = i(G_1 - u) + i(G) - i(G_1) = i(G_1 - u) + i(G - u) - p - i(G_1)$, откъдето $u \in IK_p(G_1)$.

Случай 2. Нека без загуба на общност $u \in IK_p(G_1)$. От 8) имаме, че $u \in IK(G)$. Както по-горе получаваме $i(G - u) = i(H_k - u) = i(G_1 - u) + i(G_2) + .. + i(G_k) = i(G_1) + .. + i(G_k) + p = i(G) + p$, откъдето $u \in IK_p(G)$.

10). $i(x, G) = 1 + \Sigma_{s=1}^{k} i(G_s - \{y_s\}) = 1 + \Sigma_{s=1}^{k} i(G_s) = 1 + i(G)$.

Твърдение 2.5.5 Нека G е свързан граф с поне три върха. Нека $x, y \in V(G)$ са такива, че $N(x, G) = \{y\}$ и $x \in I_0(G)$. Тогава $y \in I_0(G) \cap (I_{-1}(G - x) \cup IK_{-1}(G - x))$. Ако zy е мост на графа G и $z \neq x$, то $z \in IN(G)$.

Доказателство: От твърдение 2.2.7 следва, че $y \in I_0(G)$ и $y \in I_{-1}(G - x) \cup IK_{-1}(G - x)$. Нека $z \neq x$ и zy е мост.

Случай 1: $N(y, G) = \{x, z\}$. От твърдение 2.2.7, приложено за графа $G - x$, следва, че $z \in IN(G - \{x, y\})$. Тогава от теорема 2.2.8, приложена към графите $G - \{x, y\}$ и $(\{x, y\}, xy)$, получаваме $z \in IN(G)$.

Случай 2: $d(y, G) > 2$. Нека G_1 е компонентата на $(G - x) - yz$, която съдържа y, и нека G_2 е другата компонента на $(G - x) - yz$. Тогава от теорема 2.2.9 получаваме, че $y \in (I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$, и $z \in IN(G_2)$. От твърдение 2.2.7 следва, че $y \in I_0(< V(G_1) \cup \{x\}, G >)$. Тогава от теорема 2.2.8 следва $z \in IN(G)$.

2.6 IN - i - мост

С теорема 2.6.2 е намерено достатъчно условие за това, добавянето на мост към несвързан граф да запазва i-разлагането.

В този пункт ще считаме, че: G_1 и G_2 са свързани графи без общ връх. $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$ и $G = (G_1 \cup G_2) + x_1x_2$. Ще казваме, че мостът x_1x_2 е $IN - i-$*мост*, ако $x_1, x_2 \in IN(G)$.

Твърдение 2.6.1 *1). x_1x_2 е $IN - i-$ мост, тогава и само тогава, когато $x_1 \in IN(G_1)$ и $x_2 \in IN(G_2)$.*

2). Ако x_1x_2 е $IN - i-$мост, то $i(G) = i(G_1) + i(G_2)$.

Доказателство: Следва непосредствено от теорема 2.2.8 и теорема 2.2.9.

Теорема 2.6.2 *Нека x_1x_2 е $IN - i-$мост. Тогава:*

1. *Ако $M \in \mathcal{I}(G)$, то $M \cap V(G_k) \in \mathcal{I}(G_k), k = 1, 2$.*
2. *Ако $M_k \in \mathcal{I}(G_k), k = 1, 2$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$.*
3. *$I(G) = I(G_1) \cup I(G_2)$.*
4. *$IN(G) = IN(G_1) \cup IN(G_2)$.*
5. *$IK(G) = IK(G_1) \cup IK(G_2)$.*
6. *$IK_p(G) = IK_p(G_1) \cup IK_p(G_2)$, $p = -1, 0, 1, .., |V(G)| - 2$.*
7. *$I_{-1}(G) = I_{-1}(G_1) \cup I_{-1}(G_2)$.*
8. *$I_0(G) = I_0(G_1) \cup I_0(G_2)$.*
9. *$i(x_1, G) = i(x_1, G_1) + i(G_2)$ и $i(x_2, G) = i(x_2, G_2) + i(G_1)$.*

Доказателство: 1). Нека $M \in \mathcal{I}(G)$. Тъй като $x_1, x_2 \notin M$, то $M \cap V(G_k)$ доминира $G_k, k = 1, 2$. Следователно $|M \cap V(G_k)| \geq i(G_k), k = 1, 2$. Тогава $i(G_1) + i(G_2) \leq |M \cap V(G_1)| + |M \cap V(G_2)| = |M| = i(G) = i(G_1) + i(G_2)$, което следва от твърдение 2.6.1. Следователно $M \cap V(G_k) \in \mathcal{I}(G_k). k = 1, 2$.

2). Нека $M_k \in \mathcal{I}(G_k), k = 1, 2$. Следва, че $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество на графа G. Понеже $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2) = i(G)$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$.

3). Нека $x \in I(G)$ и $x \in M \in \mathcal{I}(G)$. От 1) имаме $x \in I(G_1) \cup I(G_2)$. Следователно $I(G) \subseteq I(G_1) \cup I(G_2)$.

Нека $x \in I(G_1) \cup I(G_2)$ и без загуба на общност, нека $x \in I(G_1)$. Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$ и $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ са такива, че $x \in M_1$. От 2) имаме $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$. Следователно $I(G_1) \cup I(G_2) \subseteq I(G)$.

4). $IN(G) = V(G) - I(G) = (V(G_1) \cup V(G_2)) - (I(G_1) \cup I(G_2)) = IN(G_1) \cup IN(G_2)$.

5). Нека $x \in IK(G)$ и без загуба на общност, нека $x \in V(G_1)$. Допускаме, че $x \notin IK(G_1)$. Тогава съществува $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ такова, че $x \notin M_1$. Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. Тогава от 2) следва, че $x \notin M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$, с което получаваме противоречие. Следователно $IK(G) \subseteq IK(G_1) \cup IK(G_2)$.

Нека $x \in IK(G_1) \cup IK(G_2)$ и без загуба на общност, нека $x \in V(G_1)$ Допускаме, че $x \notin IK(G)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $x \notin M$. От 1) сега ще следва, че $x \notin M \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$, с което получаваме противоречие. Следователно $IK(G_1) \cup IK(G_2) \subseteq IK(G)$.

6). Нека $x \in V(G) - \{x_1, x_2\}$ и без загуба на общност, нека $x \in V(G_1)$. Ако $G_1 - x$ е свързан граф, нека $H = G_1 - x$ и $b = 0$. Ако x е висящ връх, то нека H е тази компонента на графа $G_1 - x$, която съдържа x_1 и нека $b = i(G_1 - (V(H) \cup \{x\}))$. Имаме сега $i(H \cup G_2 + x_1x_2) = i(H) + i(G_2)$, което следва от теорема 2.2.8 и твърдение 2.2.7.

Нека $x \in IK_p(G_1)$. От 5) следва, че $x \in IK(G)$. Следователно $i(G-x) = b+i(H \cup G_2+x_1x_2) = b+i(H)+i(G_2) = (i(G_1)+p)+i(G_2) = i(G)+p$, откъдето - $x \in IK_p(G)$.

Сега, нека $x \in IK_p(G)$. От 5) следва, че $x \in IK(G_1)$. Тогава $i(G_1 - x) = i(H) + b = i(H \cup G_2 + x_1x_2) - i(G_2) + b = i(G - x) - i(G_2) = i(G) + p - i(G_2) = i(G_1) + p$. Следователно $x \in IK_p(G_1)$.

7). Нека $x \in I_{-1}(G_1) \cup I_{-1}(G_2)$ и нека без загуба на общност $x \in I_{-1}(G_1)$. Тогава съществува $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ такова, че $N[M_1 - \{x\}, G_1] = V(G_1 - x)$. Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$. От 2) следва, че $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$ и очевидно - $N[M_1 \cup M_2 - \{x\}, G] = V(G - x)$, откъдето $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Сега от 5) следва, че $x \in I_{-1}(G)$.

Нека $x \in I_{-1}(G)$ и без загуба на общност, нека $x \in V(G_1)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $N[M - \{x\}] = V(G - x)$. От 1) следва, че $M \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$ и очевидно, че $N[M \cap V(G_1 - \{x\}), G_1] = V(G_1 - x)$, откъдето $x \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$. Сега от 5) следва, че $x \in I_{-1}(G_1)$.

8). Следва непосредствено от 3) $\div$ 7).

9). $i(x_1, G) = i(x_1, G_1) + i(G_2 - x_2) = i(x_1, G_1) + i(G_2)$ и аналогично - $i(x_2, G) = i(x_2, G_2) + i(G_1 - x_1) = i(x_2, G_2) + i(G_1)$

3 ГЛАВА

СПЕЦИАЛНИ РАЗЛАГАНИЯ

3.1 Нови определения

Някой от елементите на γ-разлагането на даден граф G може да бъде празното множество. Поради това за графа G дефинираме, вземайки предвид твърдение $A2$:

Определение 3.1.1 *G е $D-\gamma-$граф, ако $V(G) = D(G)$.*

Определение 3.1.2 *G е $D_0-\gamma-$граф, ако $V(G) = D_0(G)$.*

Определение 3.1.3 *G е $D_{-1}-\gamma-$граф, ако $V(G) = D_{-1}(G)$.*

Определение 3.1.4 *G е $DK-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G)$.*

Определение 3.1.5 *G е $(DK, DN)-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G) \cup DN(G)$ и $DN(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.6 *G е $(DK, D_0)-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G) \cup D_0(G)$ и $DK(G) \neq \emptyset$, $D_0(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.7 *G е $(D_0, DN)-\gamma-$граф, ако $V(G) = D_0(G) \cup DN(G)$ и $DN(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.8 *G е $(D_0, D_{-1})-\gamma-$граф, ако $V(G) = D_0(G) \cup D_{-1}(G)$ и $D_0(G) \neq \emptyset$, $D_{-1}(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.9 *G е $(DK, D_{-1})-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G) \cup D_{-1}(G)$ и $DK(G) \neq \emptyset$, $D_{-1}(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.10 *G е $(DK, DN, D_0)-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G) \cup DN(G) \cup D_0(G)$ и $DK(G) \neq \emptyset$, $DN(G) \neq \emptyset$, $D_0(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.11 *G е $(DK, D_0, D_{-1})-\gamma-$граф, ако $V(G) = DK(G) \cup D_0(G) \cup D_{-1}(G)$ и $DK(G) \neq \emptyset$, $D_0(G) \neq \emptyset$, $D_{-1}(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.12 *G е $(DN, D_0, D_{-1})-\gamma-$граф, ако $V(G) = DN(G) \cup D_0(G) \cup D_{-1}(G)$ и $DN(G) \neq \emptyset$, $D_0(G) \neq \emptyset$, $D_{-1}(G) \neq \emptyset$.*

Определение 3.1.13 *G е $(DK, DN, D_0, D_{-1})-\gamma-$граф, ако $DK(G) \neq \emptyset$, $DN(G) \neq \emptyset$, $D_0(G) \neq \emptyset$ и $D_{-1}(G) \neq \emptyset$.*

Нека $p_1, p_2, .., p_k$ са цели числа и $-1 \leq p_1 < p_2 < ... < p_k$.

Определение 3.1.14 *G е $(DK_{p_1}, .., DK_{p_k}, DN) - \gamma-$граф, ако $V(G) = DN(G) \cup DK_{p_1}(G) \cup ... \cup DK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $DN(G), DK_{p_1}(G), ..., DK_{p_k}(G)$ не е празно.*

Определение 3.1.15 *G е $(DK_{p_1}, .., DK_{p_k}, D_0) - \gamma-$граф, ако $V(G) = D_0(G) \cup DK_{p_1}(G) \cup ... \cup DK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $D_0(G), DK_{p_1}(G), .., DK_{p_k}(G)$ не е празно.*

Определение 3.1.16 *G е $(DK_{p_1}, .., DK_{p_k}, DN, D_0) - \gamma-$граф, ако $V(G) = DN(G) \cup D_0(G) \cup DK_{p_1}(G) \cup ... \cup DK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $DN(G), D_0(G), DK_{p_1}(G), ..., DK_{p_k}(G)$ не е празно.*

Определение 3.1.17 *G е $(DK_{p_1}, .., DK_{p_k}, D_0, D_{-1}) - \gamma-$граф, ако $V(G) = D_0(G) \cup D_{-1}(G) \cup DK_{p_1}(G) \cup ... \cup DK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $D_0(G), D_{-1}(G), DK_{p_1}(G), .., DK_{p_k}(G)$ не е празно.*

Определение 3.1.18 *G е $(DK_{p_1}, .., DK_{p_k}, DN, D_0, D_{-1}) - \gamma-$граф,ако $V(G) = DN(G) \cup D_0(G) \cup D_{-1}(G) \cup DK_{p_1}(G) \cup ... \cup DK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $DN(G), D_0(G), D_{-1}(G), DK_{p_1}(G), .., DK_{p_k}(G)$ не е празно.*

Да отбележим, че:

1) [1] G е $DK - \gamma$-граф $\iff$ G няма ребра.

2) [18] G е върхово-$\gamma-$критичен $\iff$ G е $DK - \gamma-$граф или G е $(DK, D_{-1}) - \gamma-$граф или G е $D_{-1} - \gamma-$граф.

3) [1] Графът G има единствено γ-множество $\iff$ G е $DK - \gamma$-граф или G е $(DK, DN) - \gamma$-граф.

4) K_n при $n \geq 2$ е $D_0 - \gamma$-граф.

5) $K_{1,n}$ при $n \geq 2$ е $(DK, DN) - \gamma$-граф.

6) $K_{m,n}$ при $m > 2$ и $n > 2$ е $D_0 - \gamma$-граф.

7) $K_{2,2}$ е $D_{-1} - \gamma$-граф.

8) $K_{2,n}$ при $n > 2$ е $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-граф.

9) P_{3m} е $(DK, DN) - \gamma-$граф, $m \geq 1$.

10) P_{3m+1} е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$граф, $m \geq 1$.

11) P_{3m+2} е $(D_0, DN) - \gamma-$граф, $m \geq 1$.

12) C_{3m} и C_{3m+1} са $D_0 - \gamma-$графи, $m \geq 1$.

13) C_{3m+1} е $D_{-1} - \gamma-$ граф, $m \geq 1$.

Някой от елементите на i-разбиването на даден граф G може да бъде празното множество. Поради това за графа G дефинираме, вземайки предвид твърдение 2.1.9:

Определение 3.1.19 G е $I-i-$ граф, ако $V(G) = I(G)$.

Определение 3.1.20 G е I_0-i- граф, ако $V(G) = I_0(G)$.

Определение 3.1.21 G е $I_{-1}-i-$ граф, ако $V(G) = I_{-1}(G)$.

Определение 3.1.22 G е $IK-i-$ граф, ако $V(G) = IK(G)$.

Определение 3.1.23 G е $(IK, IN)-i-$граф, ако $V(G) = IK(G) \cup IN(G)$ и $IN(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.24 G е $(I_0, IN)-i-$граф, ако $V(G) = I_0(G) \cup IN(G)$ и $IN(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.25 G е $(I_{-1}, IN)-i-$граф, ако $V(G) = I_{-1}(G) \cup IN(G)$ и $IN(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.26 G е $(I_0, I_{-1})-i-$граф, ако $V(G) = I_0(G) \cup I_{-1}(G)$ и $I_0(G) \neq \emptyset$, $I_{-1}(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.27 G е $(IK, IN, I_0)-i-$граф, ако $V(G) = IK(G) \cup IN(G) \cup I_0(G)$ и $IK(G) \neq \emptyset$, $IN(G) \neq \emptyset$, $I_0(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.28 G е $(IK, IN, I_{-1})-i-$граф, ако $V(G) = IK(G) \cup IN(G) \cup I_{-1}(G)$ и $IK(G) \neq \emptyset$, $IN(G) \neq \emptyset$, $I_{-1}(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.29 G е $(IN, I_0, I_{-1})-i-$граф, ако $V(G) = IN(G) \cup I_0(G) \cup I_{-1}(G)$ и $IN(G) \neq \emptyset$, $I_0(G) \neq \emptyset, I_{-1}(G) \neq \emptyset$.

Определение 3.1.30 G е $(IK, IN, I_0, I_{-1})-i-$граф, ако $IK(G) \neq \emptyset$, $IN(G) \neq \emptyset$, $I_0(G) \neq \emptyset$ и $I_{-1}(G) \neq \emptyset$.

Нека $p_1, p_2, .., p_k$ са цели положителни числа и $-1 \leq p_1 < p_2 < ... < p_k$.

Определение 3.1.31 G е $(IK_{p_1}, .., IK_{p_k}, IN)-i-$граф, ако $V(G) = IN(G) \cup IK_{p_1}(G) \cup ... \cup IK_{p_k}(G)$ и нито едно от множествата $IN(G)$, $IK_{p_1}(G), .., IK_{p_k}(G)$ не е празното множество.

Определение 3.1.32 G е $(IK_{p_1}, .., IK_{p_k}, IN, I_0)-i-$граф, ако $V(G) = IN(G) \cup I_0(G) \cup IK_{p_1}(G) \cup ... \cup IK_{p_k}(G)$ и нито едно от следните множества $IN(G), I_0(G), IK_{p_1}(G), ..., IK_{p_k}(G)$ не е празното множество.

Определение 3.1.33 G е $(IK_{p_1}, .., IK_{p_k}, IN, I_{-1})-i-$граф, ако $V(G) = IN(G) \cup I_{-1}(G) \cup IK_{p_1}(G) \cup ... \cup IK_{p_k}(G)$ и нито едно от следните множества $IN(G), I_{-1}(G), IK_{p_1}(G), ..., IK_{p_k}(G)$ не е празното множество.

Определение 3.1.34 G е $(IK_{p_1},..,IK_{p_k},IN,I_0,I_{-1})-i-$граф, ако $V(G) = IN(G)\cup I_0(G)\cup I_{-1}(G)\cup IK_{p_1}(G)\cup...\cup IK_{p_k}(G)$ и нито едно от следните множества $IN(G), I_0(G). I_{-1}(G), IK_{p_1}(G),.., IK_{p_k}(G)$ не е празното множество.

Да отбележим, че:

1) G е $IK - i$-граф $\iff$ G няма ребра.

2) [6] G е върхово$-i-$критичен $\iff$ G е $IK - i-$граф или G е $(IK, I_{-1}) - i-$граф или G е $I_{-1} - i-$граф.

3) Графът G има единствено i-множество $\iff$ G е $IK - i$-граф или G е $(IK, IN) - i$-граф.

4) K_n при $n\geq 2$ е $I_0 - i$-граф.

5) $K_{1,n}$ при $n\geq 2$ е $(IK, IN) - i$-граф.

6) $K_{m,n}$ при $m>2$ и $n>2$ е $I_0 - i$-граф.

7) $K_{2,2}$ е $I_{-1} - i$-граф.

8) $K_{2,n}$ при $n>2$ е $(I_0, I_{-1}) - i$-граф.

9) P_{3m} е $(IK, IN) - i-$граф, $m\geq 1$.

10) P_{3m+1} е $(I_0, I_{-1}) - i-$граф, $m\geq 1$.

11) P_{3m+2} е $(I_0, IN) - i-$граф, $m\geq 1$.

12) C_{3m} и C_{3m+1} са $I_0 - i-$графи, $m\geq 1$.

13) C_{3m+1} е $I_{-1} - i-$ граф, $m\geq 1$.

3.2 $(D_0, DN) - \gamma$-графи

Дадена е конструктивна характеризация на $(D_0, DN) - \gamma$-дърветата: от копие на P_5 след прилагане на дефинираните по-долу операции от тип $\alpha 1, \alpha 2$ и $\alpha 3$, се получава всяко $(D_0, DN) - \gamma$-дърво.

Показано е, че за всяко $(D_0, DN) - \gamma$-дърво T: (i) $|D_0(T)| = 2\gamma(T)$ и (ii) всяка компонента на графа $< D_0(T), T >$ е изоморфна на K_2. (следствие 3.2.6 и следствие 3.2.7). В твърдение 3.2.8 е намерено множеството на броя на върховете, които може да има едно $(D_0, DN) - \gamma$-дърво.

Доказано е, че за $(D_0, DN) - \gamma$-дърво:

(i) $2(|V(T)|+1)\leq |D_0(T)\leq |V(T)|-1$ (твърдение 3.2.11)

(ii) $1\leq |DN(T)|\leq (|V(T)|-2)/3$ (твърдение 3.2.10)

(iii) $(|V(T)|+1)/3\leq \gamma(T(\leq (|V(T)|-2)/2$ (следствие 3.2.12)

И в трите случая са намерени екстремалните графи.

Твърдение 3.2.1 *Нека* T_1 *и* T_2 *са графи без общ връх. Нека* $x_1\in DN(T_1)$, $x_2\in DN(T_2)$ *и* $T = (T_1\cup T_2) + x_1x_2$. *Тогава :*

1. T *е* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дърво тогава и само тогава, когато* T_1 *и* T_2 *са* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дървета.*

2. *Ако* T *е* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дърво , то* $DN(T) = DN(T_1) \cup DN(T_2)$ *и* $D_0(T) = D_0(T_1) \cup D_0(T_2)$.

3. $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G - x_1x_2)$.

Доказателство: Твърдението следва непосредствено от теорема 1.6.6 и твърдение 1.2.9.

Твърдение 3.2.2 *Нека* T *е* $(D_0, DN)-\gamma$ *- дърво ,* $x \in DN(T)$ *и* $N(x,T) = \{y_1, y_2, .., y_k\}$. *Нека* T_i *е компонентата на* $T - x$ *която съдържа* y_i, $i = 1, 2, \ldots k$. *Тогава :*

1. $|N(x,T) \cap D_0(T)| \geq 2$.

2. T_i *е* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дърво или е изоморфно с* $K_2, i = 1, 2, .., k$.

3. $DN(T) = \{x\} \cup (\cup_{s=1}^{k} DN(T_s))$.

4. $D_0(T) = \cup_{s=1}^{k} D_0(T_s)$.

Доказателство: 1) Ако $M \in \mathcal{D}(T)$, то $M \cap N(x,T) \neq \emptyset$ поради $x \in DN(T)$. От $DK(T) = \emptyset$ следва, че за всеки връх $u \in N(x,T)$, съществува $M_u \in \mathcal{D}(G)$ такова, че $u \notin M_u$.

2), 3) и 4) следват от теорема 1.6.7 и твърдение 3.2.1.

Твърдение 3.2.3 *Нека* T_1 *е* $(D_0, DN)-\gamma-$ *дърво и нека* T_2 *е* $(D_0, DN)-\gamma-$ *дърво или* $T_2 \cong K_2$ *. Нека* T_1 *и* T_2 *са без общи върхове ,* $x_1 \in DN(T_1)$ *,* $x_2 \in D_0(T_2)$ *и* $T = T_1 \cup T_2 + x_1x_2$. *Тогава* T *е* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дърво и* $D_0(T) = D_0(T_1) \cup D_0(T_2)$, $DN(T) = DN(T_1) \cup DN(T_2)$.

Доказателство: Нека $N(x_1, T_1) = \{y_1, y_2, .., y_k\}$. От твърдение 3.2.2 следва, че $|N(x, T_1) \cap D_0(T_1)| \geq 2$. Така, без загуба на общност нека $N(x_1, T_1) \cap D_0(T_1) = \{y_1, y_2, .., y_m\}$, $m \geq 2$. Нека Q е компонентата на $T_1 - \{x_1y_{m+1}, .., x_1y_k\}$ която съдържа x_1 и нека $R = T_1 - V(Q)$. От твърдение 3.2.1 следва, че $DN(Q) = DN(T_1) \cap V(Q)$, $D_0(Q) = D_0(T_1) \cap V(Q)$ и $DN(R) = DN(T_1) \cap V(R)$, $D_0(R) = D_0(T_1) \cap V(R)$. Сега от теорема 1.6.7 следва, че графът $H = Q \cup T_2 + x_1x_2$ е $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво, $DN(H) = DN(Q) \cup DN(T_2)$, $D_0(H) = D_0(Q) \cup D_0(T_2)$. Ако $H = T$, то всичко е доказано. Нека $H \neq T$. Сега от твърдение 3.2.1: $D_0(T) = D_o(H) \cup D_0(R) = D_0(R) \cup D_0(Q) \cup D_0(T_2) = D_0(T_1) \cup D_0(T_2)$. Аналогично имаме $DN(T) = DN(T_1) \cup DN(T_2)$.

Твърдение 3.2.4 *Нека T е $(D_0, DN)-\gamma-$ дърво и $P : x_1, x_2, .., x_n$ е най-дълга проста верига в T. Тогава:*

1. $N(x_1,T) = \{x_2\}$, $N(x_n,T) = \{x_{n-1}\}$, $N(x_2,T) = \{x_1, x_3\}$, $N(x_{n-1},T) = \{x_{n-2}, x_n\}$, $\{x_1, x_2, x_{n-1}, x_n\} \subseteq D_0(T)$ *и* $x_3, x_{n-2} \in DN(T)$.

2. $n \geq 5$.

3. $|V(T)| \geq 5$. *При това* $|V(T)| = 5$ *тогава и само тогава, когато* $T \cong P_5$.

4. *Ако* $|N(x_3,T) \cap D_0(T)| \geq 3$, *то графът* $T_1 = T - \{x_1, x_2\}$ *е* $(D_0, DN)-\gamma-$ *дърво ,* $D_0(T_1) = D_0(T) - \{x_1, x_2\}$ *и* $DN(T_1) = DN(T)$.

5. *Ако* $d(x_3,T) = 2$ *и* $|V(T)| > 5$, *то* $x_4 \in D_0(T)$ *и графът* $T_2 = T - \{x_1, x_2, x_3\}$ *е* $(D_0, DN)-\gamma-$ *дърво, такова че* $D_0(T_2) = D_0(T) - \{x_1, x_2\}$ *и* $DN(T_2) = DN(T) - \{x_3\}$.

6. *Нека* $|N(x_3,T) \cap D_0(T)| = 2$ *и* $d(x_3,T) \geq 3$. *Тогава* $d(x_3,T) = 3$ *и* $x_4 \in DN(T)$. *Нека компонентите на* $G - x_3x_4$ *са* T_1 *и* T_2, *и нека* $x_3 \in V(T_1)$. *Тогава* $T_1 \cong P_5$, $DN(T) = DN(T_1) \cup DN(T_2)$ *и* $D_0(T) = D_0(T_1) \cup D_0(T_2)$.

Доказателство: 1). От изборът на P имаме, че x_1 и x_n са висящи върхове . От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 - $x_1, x_n \in D_0(T)$ и от твърдение 1.5.4 - $x_2, x_{n-1} D_0(T)$ и $x_3, x_{n-2} \in DN(T)$.

2). Следва от 1).

3). От 2) следва, че $|V(G)| \geq 5$. Непосредствената проверка показва, че между дърветата с 5 върха само P_5 е $(D_0, DN) - \gamma$-дърво.

4) Следва от твърдение 3.2.2 и от 1).

5). Следва от твърдение 1.5.7, твърдение 3.2.2 и от 1).

6). Да допуснем, че $x_4 \notin DN(T)$. Нека $y_1 \in N(x_3) \cap DN(T)$. Нека Q е компонентата на $T - x_3y_1$ за която $y_1 \in V(Q)$. От твърдение 3.2.1. и 1). - Q е $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво . Нека $S : y_1, y_2, .., y_k$ е най-дългата проста верига в Q с y_1 като краен връх. От 2). имаме , че $k \geq 3$. Следва, че $y_k, y_{k-1}, .., y_1, x_3, x_4, .., x_n$ е проста верига по-дълга от P - противоречие. Следователно $x_4 \in DN(T)$.

Да допуснем, че има $z_1 \in N(x_3,T) \cap DN(T)$ такова, че $z_1 \neq x_4$. Нека M е компонентата на $T - x_3z_1$, която съдържа z_1. От твърдение 3.2.1 и от 1) - M е $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво. Тогава от 2). следва, че има проста верига $S_1 : z_m, z_{m-1}, .., z_1$, с $m \geq 3$. Следва, че $z_m, .., z_1, x_3, x_4, .., x_n$ е проста верига , по-дълга от P - противоречие. Следователно $d(x_3, T) = 3$.

От твърдение 3.2.1 имаме , че T_1 е $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво. Нека $S_2 : t_1 = x_1, t_2, \dots t_p$ е най- дълга проста верига T_1 с x_1 като краен връх. Очевидно $t_2 = x_2, t_3 = x_3$ и от 2) - $p \geq 5$. Ако $p > 5$, то простата верига $S_3 : t_p, t_{p-1}, .., t_3 = x_3, x_4, .., x_n$ е по-дълга от P. И така $p = 5$. Тогава $T_1 \cong P_5$. което следва от избора на S_2 и от лема 1.5.1.

От твърдение 3.2.4 имаме :

Теорема 3.2.5 *За всяко* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дърво* T *съществува редица* $T_1, T_2, .., T_k$ *от поддървета на* T *такава, че :*

1. $T_1 \cong P_5$.
2. $T_k = T$.
3. $T_1, T_2, .., T_k$ *са* $(D_0, DN) - \gamma-$ *дървета.*
4. $DN(T_i) \subseteq DN(T)$ *и* $D_0(T_i) \subseteq D_0(T)$ *за* $i = 1, 2, .., k$.
5. *За всяко* $i = 2, 3, .., k$ *съществува ребро* $e_i \in E(T_i)$ *такова, че една от компонентите на* $T_i - e_i$ *е* T_{i-1} *, а другата е изоморфна с някой от графите* P_2, P_3 *и* P_5.
6. *Нека* $Q_i = < V(T_i) - V(T_{i-1}) >$ *и нека* $e_i = x_{i-1}y_i$*, където* $x_{i-1} \in V(T_{i-1})$ *и* $y_i \in V(Q_i)$ *за* $i = 2, .., k$. *Ако* $Q_i \cong P_2$*, то* $x_{i-1} \in DN(T_{i-1})$ *и* $V(Q_i) \subset D_0(T_i)$. *Ако* $Q_i \cong P_3$*, то* $x_{i-1} \in D_0(T_{i-1})$*,* y_i *е висящ връх за* Q_i*,* $y_i \in DN(T_i)$ *и* $V(Q_i) - \{y_i\} \subset D_0(T_i)$. *Ако* $Q_i \cong P_5$*, то* $x_{i-1} \in DN(T_{i-1}), \{y_i\} = DN(Q_i), y_i \in DN(T_i)$ *и* $V(Q_i) - \{y_i\} \subset D_0(T_i)$.

Доказателство: Ако G е $(D_0, DN) - \gamma-$граф, то от твърдение 3.2.4 следва, че съществува негово ребро x_1x_2 такова, че:

(i) G_1 е $(D_0, DN) - \gamma-$граф, а G_2 е изоморфен на някой от графите P_2, P_3 и P_5, където G_1 и G_2 са компонентите на графа $G - x_1x_2$, като при това $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$.

(ii) $DN(G_1) \subseteq DN(G)$ и $D_0(G_1) \subseteq D_0(G)$

(iii) Ако $G_2 \cong P_2$, то $x_1 \in DN(G_1)$ и $V(G_2) \subset D_0(G)$. Ако $G_2 \cong P_3$, то $x_1 \in D_0(G_1)$, x_2 е висящ връх за G_2, $x_2 \in DN(G)$ и $V(G_2) - \{x_2\} \subset D_0(G)$. Ако $G_2 \cong P_5$, то $x_1 \in DN(G_1)$, $\{x_2\} = DN(G_2)$, $x_2 \in DN(G)$ и $V(G_2) - \{x_2\} \subset D_0(G)$.

От $(i), (ii), (iii)$ и от твърдение 3.2.4 по индукция следва исканото.

От твърдение 3.2.5 получаваме:

Следствие 3.2.6 *Нека* $T, T_1, \dots T_k, Q_2, \dots Q_k$ *са определени както в твърдение 3.2.5. Нека* $q_2 = |\{i \in \{2, .., k\} | Q_i \cong P_2\}|$, $q_3 = |\{i \in \{2, .., k\} | Q_i \cong P_3\}|$ *и* $q_5 = |\{i \in \{2, .., k\} | Q_i \cong P_5\}| + 1$. *Тогава:*

1. $q_2 + q_3 + q_5 = k$

2. $|DN(T)| = q_3 + q_5$

3. $|D_0(T)| = 2q_2 + 2q_3 + 4q_5$

4. $\gamma(T) = q_2 + q_3 + 2q_5$

5. $|D_0(T)| = 2\gamma(T)$.

Следствие 3.2.7 *Нека T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво. Тогава:*

1. Всяка компонента на графа $< D_0(T), T >$ е изоморфна на K_2.

2. Ако $M \in \mathcal{D}(T)$, то M е независимо множество.

3. $\gamma(T) = i(T)$.

Твърдение 3.2.8 *За всяко $m \in \{5\} \cup \{7, 8, ..\}$ има $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво с m върха.Ако $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, то не съществува $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво с k върха.*

Доказателство: Нека T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво. От твърдение 3.2.4 следва, че има $(D_0, DN) - \gamma-$дърво с $|V(T)| + 2$ върха, а от теорема 1.6.7 следва, че съществува $(D_0, DN) - \gamma-$дърво с $|V(T)| + 3$ върха. Ако $|V(T)| = 6$, то от твърдение 3.2.4 4), 5), 6) следва съществуването на $(D_0, DN) - \gamma-$ дърво с по-малко от 5 върха, с което получаваме противоречие с твърдение 3.2.4 3). С това всичко е доказано.

Твърдение 3.2.9 *За всеки граф G съществува $(D_0, DN) - \gamma-$ граф H такъв, че $< DN(H), H > \cong G$.*

Доказателство: Нека $V(G) = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Нека графът $H = (V(H), E(H))$ е такъв, че : $V(H) = V(G) \cup (\cup_{i=1}^n \{y_{i1}, y_{i2}, z_{i1}, z_{i2}\})$ и $E(H) = E(G) \cup (\cup_{i=1}^n \{x_i y_{i1}, x_i z_{i1}, y_{i1} y_{i2}, z_{i1} z_{i2}\})$. Очевидно $V(G) = DN(H)$ и $V(H) - V(G) = D_0(H)$.

Твърдение 3.2.10 *Нека T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво. Тогава $1 \leq |DN(T)| \leq (|V(T)| - 2)/3$. Ако $|DN(T)| = 1$, то T е изоморфен на графа $H = (\{x\} \cup \{y_1, y_2, .., y_l\} \cup \{z_1, z_2, .., z_l\}, \cup_{i=1}^l \{xy_i, y_i z_i\})$ за някое $l \geq 2$. Ако $|V(T)| > 5$ и $|DN(T)| = (|V(T)| - 2)/3$, то $Q_i \cong P_3$ за $i = 2, .., k$, където $Q_2, .., Q_k$ са дефинирани както в теорема 3.2.5.*

Доказателство: Следва непосредствено от теорема 3.2.5.

Твърдение 3.2.11 *Нека T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво. Тогава $2(|V(T)| + 1)/3 \leq |D_0(T)| \leq |V(T)| - 1$. Ако $|D_0(T)| = |V(T)| - 1$, то T е изоморфен на графа $H = (\{x\} \cup \{y_1, y_2, .., y_l\} \cup \{z_1, z_2, .., z_l\}, \cup_{i=1}^{l}\{xy_i, y_iz_i\})$ за някое $l \geq 2$. Ако $|V(T)| > 5$ и $|D_0(T)| = 2(|V(T)|+1)/3$, то $Q_i \cong P_3$ за $i = 2, .., k$, където $Q_2, .., Q_k$ са дефинирани както в теорема 3.2.5.*

Доказателство: Следва от твърдение 3.2.10.

Следствие 3.2.12 *Нека T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво. Тогава $(|V(T)|+1)/3 \leq \gamma(T) \leq (|V(T)| - 1)/2$. Ако $\gamma(T) = (|V(T)| - 1)/2$, то T е изоморфно на графа $H = (\{x\} \cup \{y_1, y_2, .., y_l\} \cup \{z_1, z_2, .., z_l\}, \cup_{i=1}^{l}\{xy_i, y_iz_i\})$ за някое $l \geq 2$. Ако $2 < \gamma(T) = (|V(T)| + 1)/3$, то $Q_i \cong P_3$ за $i = 2, .., k$, където $Q_2, .., Q_k$ са дефинирани както в твърдение 3.2.10.*

Доказателство: Следва от следствие 3.2.6 и твърдение 3.2.11.

Определение 3.2.13 *Нека T е дърво и P_n е копие на проста верига с n върха, където $n \in \{2, 3, 5\}$, като T и P_n нямат общ връх. Всеки връх на T е номериран с точно едно от числата 1 и 2; върховете на P_2 са номерирани с 2; един от висящите върхове на P_3 е номериран с 1, а останалите върхове - с 2; висящите върхове на P_5 и съседите им - с 2, и останалия връх на P_5 - с 1.*

Операция от тип $\alpha 1$ ще наричаме добавянето на реброто vx към графа $T \cup P_2$, където $v \in V(T)$ е номериран с 1, а $x \in V(P_2)$.

Операция от тип $\alpha 2$ ще наричаме добавянето на реброто vx към графа $T \cup P_3$, където $v \in V(T)$ е номериран с 2, а $x \in V(P_3)$ е номериран с 1.

Операция от тип $\alpha 3$ ще наричаме добавянето на реброто vx към графа $T \cup P_5$, където $v \in V(T)$ и $x \in V(P_3)$ са номерирани с 1.

От резултатите в този пункт непосредствено получаваме следната:

Конструктивна характеризация на $(D_0, DN) - \gamma-$дърветата:

Всяко $(D_0, DN) - \gamma-$дърво може да бъде получено от копие на P_5, номерирано както в определение 3.2.13, след прилагането на краен брой операции от тип $\alpha 1, \alpha 2$ и $\alpha 3$. При това резултатът след всяка такава операция е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво, чиито върхове, номерирани с 1 са неутралните му върхове, а тези, номерирани с 2 - свободните му върхове.

Тъй като в дърветата няма γ-фиксирани некритични върхове (следствие 1.1.12) и няма γ-свободен γ-некритичен невисящ връх , който да е инцидентен само с мостове (следствие 1.5.6), то следва, че необходимо и достатъчно условие едно дърво T с поне 3 върха да бъде (UVR)-граф е T да бъде $(D_0, DN) - \gamma$-дърво. Оттук следва, че е *получена констуктивна характеризация на свързаните* (UVR)*-графи с минимален брой ребра.*

3.3 $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-графи

Дадена е конструктивна характеризация на $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърветата. С помоща на дефинираните по-долу понятия *просто* $(D_0, D_{-1}) - \gamma$*-дърво* и D_{-1}*-съчленение* е показано (теорема 3.3.9), че всяко $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво е или просто $(D_o, D_{-1}) - \gamma$-дърво или е D_{-1}-съчленение на прости $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дървета. Показано е още, че за всяко $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво T е изпълнено: $\gamma(T) \geq [(|V(T)| + 2)/3]$, като равенството е вярно тогава и само тогава, когато T е D_{-1}-съчленение на копия на P_4. В следствие 3.3.10 е намерено множеството на броя на върховете, които може да има $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво.

В следствие 3.3.12 е получено, че ако T $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво,то:
(i) $D_{-1}(T)$ е съвършен код.
(ii) $D_0(T)$ е тотално доминиращо множество.
(iii) $D_{-1}(T)$ и $D_0(T)$ T образуват доматично разлагане на T.
(iv) $\gamma(T) = \gamma_l(T) = \gamma_p(T) = \gamma_r(T) = i(T) = |D_{-1}(T)|$.

С помоща на една теорема на L. A. Sanchis е намерен най-големият брой ребра, който може да има $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-граф с n върха и число на доминиране d, където $3 \leq d \leq n/2$. Намерени са и екстремалните графи.

Твърдение 3.3.1 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2, всеки от които е свързан и с поне два върха. Нека е вярно някое от следните твърдения:*
(i) $x \in D_{-1}(G)$
(ii) $x \in D_{-1}(G_1) \cap D_{-1}(G_2)$.

1. *Ако G_1 е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф и G_2 е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф или $D_{-1} - \gamma -$ граф , то G е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф и $D_0(G) = D_0(G_1) \cup D_0(G_2)$, $D_{-1}(G) = D_{-1}(G_1) \cup D_{-1}(G_2)$.*

2. *Ако G е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф , то съществуват i, j такива, че $\{i, j\} = \{1, 2\}$, G_i е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф и G_j е или $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ граф , или $D_{-1} - \gamma -$ граф .*

3. *G е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ дърво тогава и само тогава, когато G_1 и G_2 са $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ дървета.*

4. *[19] G е $D_{-1} - \gamma-$ граф тогава и само тогава, когато G_1 и G_2 са $D_{-1} - \gamma-$ графи.*

Доказателство: Непосредствено следва от теорема 1.6.8.

Следствие 3.3.2 *Нека G е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво и x е висящ връх на G. Тогава $x \in D_{-1}(G)$.*

Доказателство: В противен случай се получава противоречие, което следва от твърдение 1.5.4.

Следствие 3.3.3 *Нека G е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$ дърво. Ако $x \in D_0(G)$, то $|N(x, G) \cap D_{-1}(G)| = 1$.*

Доказателство: Да допуснем, че $d = |N(x, G) \cap D_{-1}(G)| \neq 1$. Тогава $d > 1$, което следва от теорема 1.5.2. Нека $N(x, G) \cap D_{-1}(G) = \{y_1, .., y_q\}, q > 1$. Нека Q е компонентата на $G - \{y_1, y_2\}$, която съдържа x и нека $H =< V(Q) \cup \{y_1, y_2\}, G >$. От твърдение 3.3.1 имаме, че H е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$ дърво. Това обаче е в противоречие с лема 1.5.1.

Определение 3.3.4 *$(D_0, D_{-1}) - \gamma-$ дървото T ще наричаме просто $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$ дърво, ако $D_{-1}(T) = \{x \in V(T) | x$ е висящ връх $\}$.*

Определение 3.3.5 *Нека G е граф с $V(G) = \{v_1, .., v_n\}$. Графът G^+ се дефинира така: [71] прибавяме към $V(G)$ n върха $u_1, .., u_n$ два по два различни един от друг и непринадлежащи на $V(G)$. Прибавяме n ребра $u_i v_i$, $i = 1, 2, .., n$ към $E(G)$. Графът G^+ е с множество от върхове $V(G) \cup \{u_1, .., u_n\}$ и множество от ребра $E(G) \cup \{u_1 v_1, .., u_n v_n\}$.*

Твърдение 3.3.6 *Нека G е дърво с поне 4 върха. G е просто $(D_0, D_{-1})-$ $\gamma-$дърво тогава и само тогава, когато съществува дърво T такова, че $G = T^+$.*

Доказателство: 1) Нека G е просто $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво, x е негов невисящ връх и A_x е множеството на съседните с x висящи вирхове на G. От лема 1.5.1 следва, че $|A_x| \leq 1$. Да допуснем, че $A_x = \emptyset$. От теорема 1.5.2 следва тогава, че $N[x, G] \cap D_{-1}(G) \neq \emptyset$ - противоречие с това, че G е просто $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво.

2) Нека $G = T^+$. Тогава $\gamma(G) = |V(G)|/2$. За всеки висящ връх $x \in V(G)$, нека $M_x = V(T) - N(x, G)$. Тогава $M_x \cup \{x\} \in \mathcal{D}(G)$ и $N[M_x, G] = V(G) - \{x\}$, откъдето $x \in D_{-1}(G)$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5 следва, че $V(T) = D_0(G)$.

Определение 3.3.7 *Нека $T_1, T_2, .., T_k$, $(k \geq 2)$, са дървета такива, че:*

(i) $T_1, T_2, .., T_k$ са прости $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$ дървета

(ii) За всяко s, $2 \leq s \leq k$, графите T_s и $H_{s-1} = \cup_{j=1}^{s-1} T_j$ имат само един общ връх

(iii) Нека x_s е общият връх на T_s и H_{s-1}, $2 \leq s \leq k$. Тогава за всяко j, $1 \leq j \leq s$, ако $x_s \in V(T_j)$, то x_s е висящ връх в T_j.
Тогава дървото $T = \cup_{m=1}^{k} T_m$ ще наричаме D_{-1}-съчленение на дърветата $T_1, T_2, .., T_k$.

Следствие 3.3.8 *Нека дървото T е D_{-1}-съчленение на дърветата T_1, $T_2, .., T_k$. Тогава T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma$ -дърво. При това $D_{-1}(T) = \{x \in V(T) :$ x е висящ връх на някой от графите $T_1, T_2, .., T_k\} = \cup_{s=1}^{k} D_{-1}(T_s)$.*

Доказателство: Следва непосредствено от твърдение 3.3.6 и твърдение 3.3.1.

Теорема 3.3.9 *Нека T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво и T не е просто $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво. Тогава:*

1. *Съществуват дървета $T_1, T_2, .., T_k$, че T е тяхно D_{-1}-съчленение.*

2. *Ако T е $D_{-1}-$съчленение на дърветата $T_1, T_2, .., T_k$ и T е $D_{-1}-$съчленение на дърветата $U_1, U_2, .., U_r$, то $k = r$ и $T_1, T_2, .., T_k$ е пермутация на $U_1, U_2, .., U_r$.*

3. *[18] $\gamma(T) = \gamma(T_1) + \gamma(T_2) + .. + \gamma(T_k) + 1 - k$.*

4. *$|V(T)| = 2\gamma(T) + k - 1$*

5. *$\gamma(T) \geq [(|V(T)| + 2)/3]$ като равенството е в сила тогава и само тогава, когато T е $D_{-1}-$съчленение на копия от P_4.*

Доказателство: 1). Нека за всеки граф G: $R(G) = \{x \in D_{-1}(G) | d(x, G) > 1\}$. Ще приложим индукция по $|R|$. Нека $R(T) = \{x\}$ и $W_1, W_2, .., W_k$ са компонентите на $T - x$. Тогава $T_j = < W_j \cup \{x\}, T >$, $j = 1, 2, .., k$ и останалото следва от теорема 1.6.8.

Нека $R(T) > 1$. Нека H е дърво с $V(H) = R(T)$ и ако $u, v \in V(H)$ $u \neq v$, то $uv \in E(H)$ тогава и само тогава, когато съществува $u - v$ проста верига в $T - (R(T) - \{u, v\})$. Нека x_k е висящ връх на H. Нека $W_1, W_2, .., W_m$ са всички компоненти на $T - x_k$, за които $|V(W_j) \cap R(T)| = 0$, $j = 1, 2, .., m$. Нека $T_{k-i+1} = < V(W_i) \cup \{x_k\}, T >$, когато $i = 1, 2, .., m$.

Тогава резултатът се получава от индукционната хипотеза, теорема 1.6.8 и следствие 1.1.7.

2). Следва непосредствено от 1) и от твърдение 3.3.8.

3). От твърдение 1.1.7 и от 1) следва исканото.

4). Имаме от 3): $\gamma(T) = \Sigma_{s=1}^{k}\gamma(T_s) - k + 1 = \Sigma_{s=1}^{k}|V(T_s)|/2 - k + 1 = (|V(T)| + k - 1)/2 - k + 1$

5) От 4) следва, че: $\gamma(T) = (|V(T)| - k + 1)/2$. От друга страна $|V(T)| \geq |V(T_1)| + (k-1)3 \geq 3k + 1$. Тогава $\gamma(T) \geq (|V(T)| + (1 - |V(T)|)/3 + 1)/2 = (|V(T)| + 2)/3$.

Следствие 3.3.10 *За всяко $m \in \{4\} \cup \{6, 7, 8, ..\}$ съществува $(D_0, D_{-1})-\gamma-$ дърво с m върха. Ако $k \in \{1, 2, 3, 5\}$, то не съществува $(D_0, D_{-1})-\gamma-$дърво с k върха.*

Доказателство: Ако T е дърво с $|V(T)| \geq 2$ върха, то T^+ е $(D_0, D_{-1})-\gamma-$ дърво с $2|V(T)|$ върха.(твърдение 3.3.2). Нека T е дърво с четен брой върхове и Q е x-съчленение на T и P_4, като x е висящ врЪх и на T и на P_4. Тогава Q е $(D_0, D_{-1})-\gamma-$дърво с нечетен брой върхове. С непосредствена проверка се доказва втората част на следствието.

Твърдение 3.3.11 *Нека T е дърво. Тогава T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво тогава и само тогава, когато $D_{-1}(T) \in \mathcal{D}(T)$.*

Доказателство: Нека T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво. Тогава взимайки предвид теорема 3.3.9, съществува $D_{-1}-$съчленение $T_1, .., T_k$ на T и $\gamma(T) = \gamma(T_1) + .. + \gamma(T_k) + 1 - k$. Но $\gamma(T_s) = |D_{-1}(T_s)|$ за всяко $s = 1, 2, .., k$ Следователно $\gamma(T) = |D_{-1}(T_1)| + .. + |D_{-1}(T_k)| + 1 - k$. От следствие 3.3.8 имаме: $|D_{-1}(T)| = |\cup_{s=1}^{k} D_{-1}(T_s)| = \Sigma_{s=1}^{k}|D_{-1}(T_s)| + 1 - k$. И така, $\gamma(T) = |D_{-1}(T)|$. От друга страна всеки връх на $D_0(T)$ е съседен с връх на $D_{-1}(T)$ (следствие 3.3.3). И така, $D_{-1}(T)$ е доминиращо множество в T с $\gamma(T)$ върха. Оттук - $D_{-1}(T) \in \mathcal{D}(T)$.

Обратно, нека $D_{-1}(T) \in \mathcal{D}(T)$. От теорема 1.3.4 и теорема 1.3.5. следва, че за всяко $x \in D_{-1}(T)$ е изпълнено: $N(x, T) \subset D_0(T)$. Следователно T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво.

Следствие 3.3.12 *Нека T е (D_0, D_{-1})-$\gamma-$дърво. Тогава:*

1. *$D_{-1}(T)$ е съвършен код.*
2. *$\gamma(T) = \gamma_L(T) = \gamma_p(T) = \gamma_r(T) = i(T) = |D_{-1}(T)|$*
3. *$D_0(T)$ е тотално доминиращо множество*
4. *$\gamma_t \leq |D_0(T)|$*

5. *множествата* $D_{-1}(T)$ *и* $D_0(T)$ *образуват доматично разлагане на дървото* T.

Доказателство: 1) От теорема 3.3.9 следва, че разстоянието между два различни върха от $D_{-1}(T)$ е не по-малко от 3. Оттук и от твърдение 3.3.11 следва, че $D_{-1}(T)$ е съвършен код.

2) Следва непосредствено от 1).

3) От теорема 3.3.9 следва, че всеки връх от $D_0(T)$ е съседен с връх от $D_0(T)$. От твърдение 3.3.11 и 1) следва, че $D_0(T)$ е тотално доминиращо множество на T.

4) Непосредствено следва от 3).

5) Следва от твърдение 3.3.11 и от 3).

Ще отбележим, че:

(i) В [5] е доказано, че: $i(G) + \gamma_t(G) \leq |V(G)|$ за всеки граф G. От следствие 3.3.12 следва, че за всяко $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво имаме равенство.

(ii) В [36] е доказано, че $\gamma_r(T) \geq [(|V(T)| + 2)/3]$ за всяко дърво T. От следствие 3.3.12 и теорема 3.3.9 имаме, че всеки $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$граф, който е D_{-1}-съчленение от копия на P_4 е такъв, че е изпълнено равенството.

(iii) графи, за които някои параметри на доминиране са равни, са характеризирани в [53], [54], [55], [77], [78], [96].

Следващото твърдение дава екстремални графи за класа (UER).

Твърдение 3.3.13 *Нека* T *е* (D_0, D_{-1})-$\gamma-$*дърво. Тогава за всяко ребро* $e \in E(T)$ *е изпълнено* $\gamma(T - e) = \gamma(T)$.

Доказателство: Резултатът е непосредствено следствие от теорема 1.3.1 и теорема 1.3.2.

Да отбележим, че:

В [40] е доказано, че ако G е граф с $|V(G)| \leq 3\gamma(G) - 2$ и $\gamma(G) \geq 2$, то $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. От твърдение 3.3.9 следва, че за всяко $(D_0, D_{-1}) - \gamma-$дърво е изпълнено равенство.

Нека n и d са цели положителни числа и $3 \leq d \leq n/2$.

С $S^1_{n,d}$ ще означаваме граф с n върха определен по следният начин: Множеството от върховете му се състои от $(n - d)-$клика и независимо множество с d върха, като всеки връх на кликата е свързан с точно един връх на независимото множество и всеки връх на независимото множество е свързан с поне един връх на кликата.

С $S^2_{n,3}$ ще означаваме граф с $n \geq 7$ върха такъв, че множеството от върховете му се състои от $(n-5)-$ клика и още пет върха x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Всеки връх на кликата е съседен с x_4 и x_5 и само с един от x_1 и x_3. При това поне един връх от кликата е съседен с x_1 и поне един с x_3 . Ребра на този граф са и x_1x_3, x_4x_2 и x_5x_2.

ТеоремаA5 *(Л. А. Санчис)* [84] Нека G е свързан граф с n върха и число на доминиране d, където $3 \leq d \leq n/2$. Тогава броят на ребрата на G е най-много $(n-d+1)(n-d)/2$. Ако графът G е с $(n-d+1)(n-d)/2$ ребра, то той е изоморфен на $S^1_{n,d}$ или на $S^2_{n,3}$.

Твърдение 3.3.14 *Нека G е свързан $(D_0, D_{-1})-\gamma-$граф с n върха и число на доминиране d, където $3 \leq d \leq n/2$. Тогава броят на ребрата на G е най-много $(n-d+1)(n-d)/2$. Ако графът G е с $(n-d+1)(n-d)/2$ ребра, то той е изоморфен на $S^1_{n,d}$ или на $S^2_{n,3}$. При това, ако $d = 3$ и G е изоморфен на $S^2_{n,3}$, то $n \geq 8$.*

Доказателство: В графът $S^1_{n,d}$ върховете на $(n-d)$-кликата са елементите на $D_0(S^1_{n,d})$, а върховете на независимото множество са елементите на $D_{-1}(S^1_{n,d})$. И така $S^1_{n,d}$ е $(D_0, D_{-1})-\gamma$-граф и е с възможно най-голям брой ребра. За $n \geq 8$ в графът $S^2_{n,3}$, множеството на критичните върхове се състои от x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и евентуално един връх от $n-5$-кликата. Един връх от $n-5$-кликата е от $D_{-1}(S^2_{n,3})$ точно тогава когато неговата затворена околност не съвпада със затворената околност на някой друг връх на графа $S^2_{n,3}$. Останалите върхове на графа $S^2_{n,3}$ са от $D_0(S^2_{n,3})$. Остава да отбележим, че всеки връх на $S^2_{7,3}$ е критичен, откъдето $S^2_{7,3}$ е $D_{-1}-\gamma$-граф.

3.4 $(I_0, IN) - i-$графи

Основният резултат е, че едно дърво T е $(I_0, IN) - i$-дърво тогава и само тогава, когато е $(D_0, DN) - \gamma$-дърво. При това $DN(T) = IN(T)$, $D_0(T) = I_0(T)$, $\gamma(T) = i(T)$ и $\mathcal{D}(T) = \mathcal{I}(T)$.

Твърдение 3.4.1 *Нека G_1 и G_2 са графи без общ връх, $x_1 \in V(G_1)$, $x_2 \in V(G_2)$ и $G = G_1 \cup G_2 + x_1x_2$. Нека x_1x_2 е $IN - i-$ мост на G.*

1. *G е $(I_0, IN) - i-$граф, тогава и само тогава, когато G_1 и G_2 са $(I_0, IN) - i-$графи.*

2. *Ако G е $(I_0, IN) - i-$граф, то $IN(G) = IN(G_1) \cup IN(G_2)$ и $I_0(G) = I_0(G_1) \cup I_0(G_2)$.*

Доказателство: Твърдението следва непосредствено от теорема 2.6.2 и твърдение 2.6.1.

Твърдение 3.4.2 *Нека G е граф, $x \in V(G)$, $N(x,G) = \{y_1, y_2, .., y_k\}$, $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове на G и за $s = 1,2,..,k$: G_s е онази компонента на $G - x$, която съдържа y_s . Нека за $s = 1,2,..,k$, G_s е $(I_0, IN) - i-$граф или е $I_0 - i-$граф и нека $y_j \in I_0(G_j)$. $j = 1,2$. Тогава G е $(I_0, IN) - i-$граф, $I_0(G) = \cup_{s=1}^{k} I_0(G_s)$, $IN(G) = \{x\} \cup (\cup_{s=1}^{k} IN(G_s))$ и $i(G) = \Sigma_{s=1}^{k} i(G_s)$.*

Доказателство: Нека, без загуба на общност, $N(x,G) \cap (\cup_{s=1}^{k} I_0(G_s)) = \{y_1, .., y_r\}$. Означаваме $T =< (\cup_{s=1}^{r} V(G_s)) \cup \{x\}, G >$. От теорема 2.5.4 следва $IN(T) = \{x\} \cup (\cup_{s=1}^{r} IN(G_s))$, $I_0(T) = \cup_{s=1}^{r} I_0(G_s)$. Ако $T = G$, то всичко е доказано. Нека сега $T \neq G$ и $H_{r+j} =< V(T) \cup (\cup_{m=r+1}^{r+j} V(G_m)), G >$, $j = 1, .., k-r$. Тогава от твърдение 3.4.1 следва, че за всяко $j = 1, .., k-r$: $IN(H_{r+j}) = \{x\} \cup (\cup_{t=1}^{r+j} IN(G_t))$ и $I_0(H_{r+j}) = \cup_{t=1}^{r+j} I_0(G_t)$. Но $H_k = G$. С това твърдението е доказано.

Твърдение 3.4.3 *Нека G е $(I_0, IN) - i-$граф и $x \in IN(G)$. Тогава $|N(x,G) \cap I_0(G)| \geq 2$. Нека $N(x,G) = \{y_1, y_2, .., y_k\}$ и $xy_1, xy_2, .., xy_k$ са мостове. Нека $y_1, y_2 \in I_0(G)$ и за $s = 1,2,..,k$: G_s е компонентата на графа $G - x$, която съдържа върха y_s . Тогава:*

1. *За всяко $s = 1,2,..,k$, или G_s е $(I_0, IN) - i-$граф, или G_s е $I_0 - i-$граф.*
2. *$H_F = G - \cup_{j \in F} V(G_j)$ е $(I_0, IN) - i-$ граф за всяко $F \subseteq \{3,4,..,k\}$, когато $k \geq 3$.*
3. *$I_0(G) = \cup_{s=1}^{k} I_0(G_s)$ и $IN(G) = (\cup_{s=1}^{k} IN(G_s)) \cup \{x\}$.*
4. *$I_0(H_F) = \cup_{m \in R} I_0(G_m)$ и $IN(H_F) = (\cup_{m \in R} IN(G_m)) \cup \{x\}$, където $R = \{1,2,..,k\} - F$.*

Доказателство: От твърдение 2.1.9 - $|N(x,G) \cap I_0(G)| \geq 2$. Нека, без загуба на общност, $N(x,G) \cap I_0(G) = \{y_1, .., y_r\}$. Ако $r = k$, то исканото следва от теорема 2.5.4. Нека сега $r < k$. Тогава за всяко цяло число m, $1 \leq m \leq k$ е изпълнено: $DN(G_m) = DN(G) \cap V(G_m)$ и $D_0(G_m) = D_0(G) \cap V(G_m)$, което следва от твърдение 3.4.1 и теорема 2.5.4. Сега исканото следва от предните две твърдения.

Твърдение 3.4.4 *Нека T е $(I_0, IN) - i-$дърво и $P : x_1, x_2, .., x_n$ е най-дълга проста верига в T. Тогава:*

1. $N(x_1,T)=\{x_2\}$, $N(x_n,T)=\{x_{n-1}\}$, $N(x_2,T)=\{x_1,x_3\}$, $N(x_{n-1},T)=\{x_{n-2},x_n\}$. $\{x_1,x_2,x_{n-1},x_n\}\subseteq I_0(T)$ *и* $x_3,x_{n-2}\in IN(T)$.

2. $n\geq 5$.

3. $|V(T)|=5$ *тогава и само тогава, когато* $T\cong P_5$.

4. *Ако* $|N(x_3,T)\cap I_0(T)|\geq 3$, *то графът* $T_1=T-\{x_1,x_2\}$ *е* $(I_0,IN)-i-$*дърво,* $I_0(T_1)=I_0(T)-\{x_1,x_2\}$, $IN(T_1)=IN(T)$ *и* $i(T)=i(T_1)+1$.

5. *Ако* $d(x_3,T)=2$ *и* $|V(T)|>5$, *то* $x_4\in I_0(T)$ *и графът* $T_2=T-\{x_1,x_2,x_3\}$ *е* $(I_0,IN)-i-$*дърво такова, че* $I_0(T_2)=I_0(T)-\{x_1,x_2\}$ $IN(T_2)=IN(T)-\{x_3\}$ *и* $i(T)=i(T_2)+1$.

6. *Нека* $|N(x_3,T)\cap I_0(T)|=2$ *и* $d(x_3,T)\geq 3$. *Тогава* $d(x_3,T)=3$ *и* $x_4\in IN(T)$. *Нека компонентите на графа* $T-x_3x_4$ *са* T_3 *и* T_4, *и нека* $x_3\in V(T_3)$. *Тогава* $T_3\cong P_5$, $IN(T)=IN(T_3)\cup IN(T_4)$, $I_0(T)=I_0(T_3)\cup I_0(T_4)$ *и* $i(T)=i(T_4)+2$.

Доказателство: 1). От избора на веригата P следва, че x_1 и x_n са висящи върхове. От твърдение 2.2.7 следва, че $x_1,x_2,x_{n-1},x_n\in I_0(T)$, а от твърдение 2.5.5 - $x_3,x_{n-2}\in IN(T)$. Накрая от лема 2.5.1 следва, че $N(x_2,T)=\{x_1,x_3\}$ и $N(x_{n-1},T)=\{x_{n-2},x_n\}$.

2). Следва от 1).

3). P_5 е $(D_0,DN)-\gamma-$граф. Останалото следва от 2).

4). Следва непосредствено от твърдение 3.4.2 и твърдение 3.4.3.

5). От твърдение 3.4.3 - $x_4\in I_0(T)$ и следователно от 1) и пак от твърдение 3.4.3 - $I_0(T_2)=I_0(T)-\{x_1,x_2\}$, $IN(T_2)=IN(T)-\{x_3\}$. От теорема 2.5.4 - $i(T)=i(T_2)+1$.

6). Да допуснем, че $x_4\notin IN(T)$. Нека $y_1\in N(x_3,T)\cap IN(T)$. Нека Q е онази компонента на графа $T-x_3y_1$, че $y_1\in V(Q)$. От твърдение 3.4.1 и от 1) следва, че Q е $(I_0,IN)-i-$дърво и $y_1\in IN(Q)$. Нека $S: y_1,y_2,..,y_k$ е най-дългата проста верига в графа Q имаща y_1 за начален връх. Очевидно $k\geq 3$. Следователно простата верига $y_k,y_{k-1},..,y_1,x_3,x_4,..,x_n$ има по-голяма дължина от P, което е в противоречие с избора на веригата P. Следователно $x_4\in IN(T)$.

Да допуснем, че има връх $z_1\in N(x_3,T)\cap IN(T)$ такъв, че $z_1\neq x_4$. Нека M е компонентата на графа $T-x_3z_1$, която съдържа върха z_1. От твърдение 3.4.1 следва, че M е $(I_0,IN)-i-$дърво и $z_1\in IN(M)$. Тогава има проста верига $S_1: z_m,z_{m-1},..,z_1$ в M с $m\geq 3$. Следователно $z_m,..,z_1,x_3,x_4,..,x_n$ е проста верига с по-голяма дължина от тази на веригата P, с което получаваме противоречие. Следователно $d(x_3,T)=3$.

От твърдение 3.4.1 имаме, че T_3 е $(I_0, IN)-i-$дърво , $x_1, x_2 \in I_0(T_3)$ и $x_3 \in IN(T_3)$. Нека $S_2 : t_1 = x_1, t_2, .., t_p$ е най-дълга проста верига в графа T_3, имаща x_1 за първи връх. Очевидно $t_2 = x_2, t_3 = x_3$ и от твърдение 2.2.7 следва $p \geq 5$. Ако $p > 5$, то простата верига $S_3 : t_p, t_{p-1}, .., t_3 = x_3, x_4, .., x_n$ ще бъде по-дълга от P. Следователно $p = 5$. Тогава $T_3 \cong P_5$, което следва от избора на S_2 и от лема 2.5.1. Останалата част следва от твърдение 2.6.1, теорема 2.6.2 и от твърдение 3.4.1.

От твърдение 3.4.4 следва:

Твърдение 3.4.5 *За всяко $(I_0, IN) - i-$дърво T съществува редица T_1, $T_2, .., T_k$ от поддървета на T такава, че:*

1. $T_1 \cong P_5$.
2. $T_k = T$.
3. $T_1, T_2, .., T_k$ *са* $(I_0, IN) - i-$*дървета.*
4. $IN(T_s) \subseteq IN(T)$ *и* $I_0(T_s) \subseteq I_0(T)$ *за* $s = 1, 2, .., k$.
5. *За всяко $s = 2, 3, .., k$ съществува ребро $e_s \in E(T_s)$ такова, че една от компонентите на графа $T_s - e_s$ е графа T_{s-1}, а другата е изоморфна на някой от графите P_2, P_3 и P_5.*
6. *Нека $Q_s =< V(T_s) - V(T_{s-1}) >$ и нека $e_s = x_{s-1}y_s$, където $x_{s-1} \in V(T_{s-1})$ и $y_s \in V(Q_s)$ за $s = 2, .., k$. Ако $Q_s \cong P_2$, то $x_{s-1} \in IN(T_{s-1})$, $V(Q_s) \subset I_0(T_s)$ и $i(T_s) = i(T_{s-1}) + 1$. Ако $Q_s \cong P_3$, то $x_{s-1} \in I_0(T_{s-1})$, y_s е висящ връх на графа Q_s, $y_s \in IN(T_s)$, $V(Q_s) - \{y_s\} \subset I_0(T_s)$ и $i(T_s) = i(T_{s-1}) + 1$. Ако $Q_s \cong P_5$. то $x_{s-1} \in IN(T_{s-1}), \{y_s\} = IN(Q_s), y_s \in IN(T_s)$, $V(Q_s) - \{y_s\} \subset I_0(T_s)$ и $i(T_s) = i(T_{s-1}) + 2$.*

От твърдения 3.4.1 $\div$ 3.4.5 и от характеризацията на $(D_0, DN) - \gamma-$дърветата следват:

Теорема 3.4.6 *Нека T е дърво. Тогава T е $(D_0, DN) - \gamma-$дърво тогава и само тогава, когато T е $(I_0, IN) - i-$дърво.*

Следствие 3.4.7 *Нека T е $(I_0, IN) - i-$дърво. Тогава:*

1. $\mathcal{I}(T) = \mathcal{D}(T)$
2. $I_0(T) = D_0(T)$
3. $IN(T) = DN(T)$
4. $i(T) = \gamma(T)$

3.5 $(I_0, I_{-1}) - i-$ графи

Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. С помоща на теорема 3.5.1 . в случая когато x е критичен връх на графа G, е намерена връзка между множествата $\mathcal{I}(G_1), \mathcal{I}(G_2)$ и $\mathcal{I}(G)$.

С помоща на дефинираните по-долу понятия *просто* $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво и I_{-1}-*съчленение*, в теорема 3.5.12 са характеризирани всички $(I_0. I_{-1}) - i$-дървета. Доказано е, че всяко $(D_0, D_{-1}) - \gamma$-дърво е $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво. Обратното не е вярно.

Показано е. че за всяко $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво T е изпълнено: $i(T) \geq [(|V(T)+2)/3]$, като са намерени всички $(I_0, I_{-1}) - i$-дървета с $[(|V(T)|+2)/3]$ върха.

Ако G е граф, то $\gamma(G) \leq |V(G)|/2$, докато $i(G)$ може да бъде поголямо от $|V(G)|/2$. За дървета, обаче $i(G) \leq |V(G)|/2$. Характеризацията на графите, за които $\gamma(G) = |V(G)|/2$ е направена в [78], [54]. Тук е дадена характеризация на дърветата T, за които $i(T) = |V(T)|/2$. Оказва се, че това са простите $(I_0, I_{-1}) - i$-дървета.

Theorem 3.5.1 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*
(i) $x \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$
(ii) $x \in (I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)) \cap (I_{-1}(G_2) \cup IK_{-1}(G_2))$.
Нека е вярно някое от твърденията (i) или (ii). Тогава:

1. *Нека $M \in \mathcal{I}(G)$. Ако $x \in M$, то $M \cap V(G_m) \in \mathcal{I}(G_m), m = 1, 2$. Ако $x \notin M$, то съществуват s, j такива, че $\{s, j\} = \{1, 2\}, M \cap V(G_s) \in \mathcal{I}(G_s)$, $M \cap V(G_j) \in \mathcal{I}(G_j - x)$ и $(M \cap V(G_j)) \cup \{x\} \in \mathcal{I}(G_j)$.*

2. *Нека $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$. Ако $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$ и $x \in M_1 \cap M_2$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$. Ако $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$.*

3. $I(G) = I(G_1) \cup I(G_2)$.

4. $IN(G) = IN(G_1) \cup IN(G_2)$.

5. $I_{-1}(G) - \{x\} = (I_{-1}(G_1) - \{x\}) \cup (I_{-1}(G_2) - \{x\})$.

6. $I_0(G) = I_0(G_1) \cup I_0(G_2)$.

7. $IK(G) - \{x\} = (IK(G_1) - \{x\}) \cup (IK(G_2) - \{x\})$.

8. $IK_p(G) = IK_p(G_1) \cup IK_p(G_2)$ *за* $p \geq 0$.

9. $IK_{-1}(G) - \{x\} = (IK_{-1}(G_1) - \{x\}) \cup (IK_{-1}(G_2) - \{x\})$

Доказателство: $(i) \iff (ii)$ - поради теорема 2.2.4 и теорема 2.2.5.

1). Нека $x \in M$. Очевидно $M \cap V(G_s)$ е независимо и доминиращо множество за $G_s, s = 1, 2$. Следователно $|M \cap V(G_s)| \geq i(G_s)$, $s = 1, 2$. Тъй като $i(G) = |M \cap V(G_1)| + |M \cap V(G_2)| - 1 \geq i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$ (следва от лема 2.2.3), то имаме, че $M \cap V(G_s) \in \mathcal{I}(G_s), s = 1, 2$.

Нека $x \notin M$. Тогава съществува връх $y \in M$ такъв, че $xy \in E(G)$. Без загуба на общност, нека $y \in V(G_1)$. Тогава $N[M \cap V(G_1), G_1] = V(G_1)$. Очевидно $M \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$. Следователно $|M \cap V(G_2)| = |M| - |M \cap V(G_1)| = i(G) - i(G_1) = i(G_2) - 1$ - поради лема 2.2.3. Следва, че $M \cap V(G_2) \in \mathcal{I}(G_2 - x)$ и $(M \cap V(G_2)) \cup \{x\} \in \mathcal{I}(G_2)$.

2). Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2)$ и $x \in M_1 \cap M_2$. Очевидно $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество на графа G. Допълнително $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - 1 = i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$ (следва от лема 2.2.3).

Нека $x \notin M_1$ и $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$. В този случай $M_1 \cup M_2$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| = i(G_1) + i(G_2 - x) = i(G_1) + i(G_2) - 1 = i(G)$.

3). Непосредствено следва от 1) и 2).

4). Следствие е от 3).

5). *Случай 1:* Нека $y \in I_{-1}(G) \cap V(G_1 - x)$. Тогава съществува $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Ако $M \cap V(G_1) \in \mathcal{I}(G_1)$, то очевидно $N[(M \cap V(G_1)) - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$, откъдето $y \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$. Нека $M \cap V(G_1) \notin \mathcal{I}(G_1)$. Следователно от 1) - $N[M \cap V(G_1), G] = V(G_1 - x)$ и $(M \cap V(G_1)) \cup \{x\} \in \mathcal{I}(G_1)$. Очевидно $N[((M \cap V(G_1) \cup \{x\}) - \{y\}, G_1] = V(G_1) - \{y\}$, откъдето $y \in I_{-1}(G_1) \cup IK_{-1}(G_1)$.

От твърдение 2.1.9 следва, че $N(y, G) - IN(G) \neq \emptyset$. Тогава от 4) следва - $N(y, G_1) - IN(G_1) = N(y, G) - IN(G) \neq \emptyset$. Сега от твърдение 2.1.9 - $y \notin IK(G_1)$.

Случай 2: Нека $y \in I_{-1}(G_1) - \{x\}$. Нека $M_2 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$ и $M_1 \in \mathcal{I}(G_1)$ е такова, че $y \in M_1$ и $N[M_1 - y, G_1] = V(G_1) - \{y\}$. Тогава $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{I}(G)$ и $N[(M_1 \cup M_2) - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$ - поради 2). Следователно $y \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Тъй като $N(y, G_1) - IN(G_1) \neq \emptyset$, то от 4)следва $N(y, G) - IN(G) \neq \emptyset$ и от твърдение 2.1.9 - $x \notin IK(G)$.

6). *Случай 1:* Нека $y \in I_0(G_1)$. Тогава съществуват $M_1, M_2 \in \mathcal{I}(G_1)$ такива, че $y \in M_1$ и $y \notin M_2$. Нека $M_3 \in \mathcal{I}(G_2 - x)$. Следва, че $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cup M_3 \in \mathcal{I}(G)$ - поради 2). Тогава $y \in I_0(G) \cup I_{-1}(G)$. Сега от 5) следва $x \in I_0(G)$.

Случай 2: Нека $y \in I_0(G)$ и без загуба на общност, нека $y \in I_0(G) \cap V(G_1)$. Нека $M \in \mathcal{I}(G)$ и $y \notin M$. Допускаме, че $M \cap V(G_1) \notin \mathcal{I}(G_1)$. Тогава от 1) имаме $(M \cap V(G_1)) \cup \{x\} \in \mathcal{I}(G_1)$. Следва, че $y \notin IK(G_1)$. Сега от 3) и 5) следва $y \in I_0(G_1)$.

7). Неосредствено следва от 1) $\div$ 6).

8) и 9) : Нека $u \in DK_q(G_1)$, $q \geq -1$, $u \neq x$. Тогава от теорема 2.2.4: $i(G-u) = i(G_1-u)+i(G_2)-1 = i(G_1)+q+i(G_2)-1 = i(G)+q$ и тогава от 7) : $u \in IK_q(G)$. Следователно $(IK_{-1}(G_1)-\{x\}) \cup (IK_{-1}(G_2)-\{x\}) \subseteq (IK_{-1}(G)-\{x\})$, и за $p \geq 0$: $IK_p(G_1) \cup IK_p(G_2) \subseteq IK_p(G)$. Сега от 7) се получава исканото.

Следствие 3.5.2 *Нека графът G е x-съчленение на графите G_1 и G_2 и и $d(x, G_j) \geq 1$ за $j = 1, 2$.*

1. *Нека G_1 е $(I_0, I_{-1}) - i-$граф и G_2 е или $(I_0, I_{-1}) - i-$граф, или $I_{-1} - i-$граф. Нека $x \in I_{-1}(G_1) \cap I_{-1}(G_2)$. Тогава G е $(I_0, I_{-1}) - i-$граф, $I_0(G) = I_0(G_1) \cup I_0(G_2)$ и $I_{-1}(G) = I_{-1}(G_1) \cup I_{-1}(G_2)$.*

2. *Нека $x \in I_{-1}(G)$. Ако G е $(I_0, I_{-1}) - i-$граф, то съществуват s, j такива, че $\{s, j\} = \{1, 2\}$, G_s е $(I_0, I_{-1})-i-$граф и G_j е или $(I_0, I_{-1})-i-$граф, или $I_{-1} - i-$граф.*

3. *Нека $x \in (I_{-1}(G) \cup (I_{-1}(G_1) \cap I_{-1}(G_2))$. G е $(I_0, I_{-1})-i-$дърво тогава и само тогава, когато G_1 и G_2 са $(I_0, I_{-1}) - i-$дървета.*

4. *G е $I_{-1} - i-$граф, тогава и само тогава, когато G_1 и G_2 са $I_{-1} - i-$графи.*

Доказателство: 1) От теорема 2.2.4 - $x \in I_{-1}(G)$. Останалото следва от теорема 3.5.1.

2) От теорема 3.5.1 - $x \in I_{-1}(G_j) \cup IK_{-1}(G_j)$ за $j = 1, 2$. Да допуснем, че $x \in IK_{-1}(G_s)$ за някое $s \in \{1, 2\}$. Тогава от твърдение 2.1.9 имаме $N(x, G_s) \subseteq IN(G_s)$, а от теорема 3.5.1 - $N(x, G_s) \subseteq IN(G)$, с което стигнахме до противоречие. И така, $x \in I_{-1}(G_j)$ за $j = 1, 2$. Оттук и от теорема 3.5.1 следва исканото.

3) Ако T е дърво, то от теорема 2.2.8 следва, че $I_{-1}(T)$ е независимо множество. Сега исканото следва от 1), 2) и теорема 2.2.5.

4) Нека G е $I_{-1} - i$-граф. Както в 2) доказваме, че $x \in I_{-1}(G_1) \cap I_{-1}(G_2)$. Тогава от теорема 3.5.1 следва, че G_j е $I_{-1} - i$-граф за $j = 1, 2$.

Нека G_j е $I_{-1} - i-$граф за $j = 1, 2$. Тогава от теорема 2.2.4 следва, че $x \in I_{-1}(G)$ и поради теорема 3.5.1 - G е $I_{-1} - i-$граф.

Твърдение 3.5.3 *Нека T е $(I_0, I_{-1}) - i-$дърво. Тогава $I_{-1}(T)$ е независимо и доминиращо множество за графа T и $\{x \in V(T) | d(x, T) = 1\} \subseteq I_{-1}(T)$.*

Доказателство: Ако x е висящ връх и $x \in I_0(T)$, то имаме противоречие поради твърдение 2.5.5. От теорема 2.5.2 имаме, че ако $y \in I_0(T)$, то $N(y,T) \cap I_{-1}(T) \neq \emptyset$. От теорема 2.2.8 следва, че $I_{-1}(T)$ е независимо множество. Оттук следва исканото.

Добре известен факт е, че:

Лема 3.5.4 *Нека T е дърво с поне два върха, $x \in V(T)$ и $\alpha_x = \{y \in V(T) | \rho_T(x,y)$ е четно число $\} \cup \{x\}$. Тогава α_x и $V(T) - \alpha_x$ са независими и доминиращи множества на T и образуват единственото минимално хроматично разлагане на T.*

За всяко дърво T, имащо поне два върха, с σ_T и τ_T ще означаваме елементите на единственото му хроматично разлагане.

Теорема 3.5.5 *Нека G е свързан граф с поне три върха, A_G е множеството от висящите му върхове, $H = G - A_G$, $|V(H)| > 1$ и A_G е доминиращо множество за G. За всяко множество $U \subseteq V(H)$ дефинираме $g_H(U) = |N(U,G) \cap A_G| - |U|$.*

1. *Нека $M \in \mathcal{I}(G), F = \{y \in M \cap A_G | N[M - \{y\}, G] \cap N(y,G) = \emptyset\}$ и Q е независимо и доминиращо множество за графа $< N(F,G), G >$. Нека $M_1 = (M - N(Q)) \cup Q$. Тогава:*

   (i) $M_1 \in \mathcal{I}(G)$;

   (ii) $M_1 \cap V(H)$ е независимо и доминиращо множество за графа H и $M \cap V(H) \subseteq M_1 \cap V(H)$;

   (iii) Нека $y \in M_1 \cap A_G$ и $\{z\} = N(y,G)$. Тогава $N[M_1 - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$ и $y \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Ако $y \in IK_{-1}(G)$, то $z \in IN(G)$. Ако $y \in I_{-1}(G)$, то $z \in I_0(G)$;

   (iv) $i(G) = |A_G| - g_H(M_1 \cap V(H))$.

2. *$i(G) = |A_G| - \max\{g_H(U) | U$ е независимо и доминиращо множество за графа $H\}$*

3. *Нека G е $(I_0, I_{-1}) - i-$ граф. Тогава:*

   (i) $V(H) = I_0(G)$ и $A_G = I_{-1}(G)$;

   (ii) Съществуват независими и доминиращи множества $U_1, .., U_k$ за графа H такива, че $\cup_{s=1}^{k} U_s = V(H)$ и $g_H(U_s) = |A_G| - i(G)$ за всяко $s = 1, ... k$.

4. *Нека съществуват независими и доминиращи множества* $U_1, .., U_k$ *на* H *такива, че* $\cup_{s=1}^{k} U_s = V(H)$ *и* $g_H(U_s) = |A_G| - i(G)$ *за всяко* $s = 1, ..., k$. *Тогава* G *е* $(I_0, I_{-1}) - i-$*граф. Ако* G *е дърво, то* $g_H(U_s) = g_H(\tau_H) = g_H(\sigma_H) = g_H(V(H))/2$ *за всяко* $s = 1, .., k$.

Доказателство: 1). Ако $F = \emptyset$, то $M_1 = M$. Нека $F \neq \emptyset$. От определението на F следва, че ако $y \in F$, то $A_G \cap N(N(y, G), G) = \{y\}$ и също, че $N(Q.G) \cap M \subseteq F$. Следователно M_1 е независимо и доминиращо множество за графа G и $|M_1| = |M|$. С това доказахме (i) .

Поради това, че $F_1 = \{y \in M_1 \cap A_G | N[M_1 - \{y\}, G] \cap N(y, G) = \emptyset\} = \emptyset$ имаме, че $M_1 \cap V(H)$ е независимо и доминиращо множество за графа H. От определението на M_1 имаме, че $M \cap V(H) \subseteq M_1 \cap V(H)$. С това доказахме и (ii) .

(iii) От (i) и (ii) следва, че $N[M_1 - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$, откъдето - $y \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$. Останалото следва от твърдение 2.2.7.

(iv) $i(G) = |M_1 \cap V(H)| + |A_G - N(M_1, G)| = |M_1 \cap V(H)| + |A_G| - |N(M_1 \cap V(H), G) \cap A_G| = |A_G| - g_H(M_1 \cap V(H))$.

2). Нека S е независимо и доминиращо множество за графа H. Тогава множеството $B = S \cup (A_G - N(S, G))$ е независимо и доминиращо множество за графа G. Следователно $i(G) \leq |B| = |S| + |A_G - N(S, G)| = |A_G| - g_H(S)$. Оттук и от 1) следва исканото.

3). (i) Нека $y \in A_G$, $\{x\} = N(y, G)$ и $z \in N(x, G) - A_G$. Поради това, че $z \in I(G)$ съществува $M \in \mathcal{I}(G)$ такова, че $z \in M$. Тогава $x \notin M$ и следователно $y \in M$. Сега очевидно $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Така, че $y \in I_{-1}(G)$. От твърдение 2.2.7 следва, че $x \in I_0(G)$.

(ii) Тъй като $V(H) = I_0(G)$, то за всеки връх $z, z \in V(H)$ съществува независимо и доминиращо множество M_z на графа G такова, че $z \in M_z$. От 1) следва, че M_z може да бъде избрано така, че $M_z \cap V(H)$ е независимо и доминиращо множество за графа H и $g_H(M_z \cap V(H)) = |A_G| - i(G)$.

4). Нека $x \in V(H)$. Тогава съществува s такова, че $1 \leq s \leq k$ и $x \in U_s$. Сега $B = U_s \cup (A_G - N(U_s, G))$ е независимо и доминиращо множество за графа G и $|B| = |U_s| + |A_G| - |N(U_s, G) \cap A_G| = |A_G| - g_H(U_s) = i(G)$, откъдето $B \in \mathcal{I}(G)$. Така, че $x \in I(G)$ и $V(H) \subseteq I(G)$. Предвид $|V(H)| > 1$ от твърдение 2.1.9 ще следва $V(H) \subseteq I_0(G) \cup I_{-1}(G)$. Освен това от твърдение 2.2.7 следва, че $V(H) \subseteq I_0(G)$. Нека $y \in A_G$, $\{x_1\} = N(y, G)$ и $x \in N(x_1, G) - A_G$. Понеже $x \in I_0(G)$, то съществува $M \in \mathcal{I}(G)$, че $x \in M$. Очевидно $y \in M$ и $N[M - \{y\}, G] = V(G) - \{y\}$. Следователно $y \in I_{-1}(G) \cup IK_{-1}(G)$ и от твърдение 2.1.9 ще следва, че $y \in I_{-1}(G)$. Тогава $A_G = I_{-1}(G)$ и $V(H) = I_0(G)$.

Сега, нека G е дърво. Ще процедираме по индукция спрямо $|H|$

Резултатът е тривиално верен за $|H| = 2$. Затова, нека приемем верността му за $|H|$, $2 \leq |H| < n$. Сега, нека $|H| = n$.

Нека T е дърво, $|V(T)| > 3$, и $P : y_1, .., y_m$ е най-дълга проста верига в T. Ако $d(y_{m-1}, T) \neq 2$, то очевидно всеки връх от $N(y_{m-1}, T) - \{y_{m-2}, y_m\}$ е висящ връх на T.

Така, че ще разгледаме следните два случая:

Случай 1: Съществуват върхове $x_1, x_2, x_3 \in V(H)$ такива, че $x_1 \neq x_3$ и $N(x_1, H) = N(x_3, H) = \{x_2\}$.

Нека $N(x_3, G) = \{x_2, y_1, .., y_k\}$. Нека G_3 е такъв граф, че: $V(G_3) = V(G) - \{x_3, y_k\}$ и $E(G_3) = E(G - x_3) \cup ((\cup_{s=1}^{k-1}\{x_1 y_s\})$, когато $k > 1$ и $E(G_3) = E(G - x_3)$, когато $k = 1$. Нека $H_3 = H - x_3$, $A_3 = A_G - \{y_k\}$ и нека $g_3(U) = |N(U, G_3) \cap A_3| - |U|$ за всяко $U \subseteq V(H_3)$. Следователно $g_3(\{x\}) = g_H(\{x\})$ за всеки връх $x \in V(H_3 - x_1)$ и $g_3(\{x_1\}) = g_H(\{x_1\}) + g_H(\{x_3\})$. Така, че $g_3(V(H_3)) = g_H(V(H))$.

Да отбележим, че ако $x_3 \in U_s$ за някое $s = 1, .., k$, то $x_1 \in U_s$ и $x_2 \notin U_s$. Следователно $U_1 - \{x_3\}, .., U_k - \{x_3\}$ са независими и доминиращи множества в графа H_3 , $\cup_{s=1}^{k}(U_s - \{x_3\}) = V(H_3)$ и $g_3(U_s - \{x_3\}) = g_H(U_s)$ за всяко $s = 1, .., k$. Имаме още и $g_3(\tau_H - \{x_3\}) = g_H(\tau_H)$ и $g_3(\sigma_H - \{x_3\}) = g_H(\sigma_H)$. Да отбележим също, че $\sigma_H - \{x_3\}$ и $\tau_H - \{x_3\}$ са класовете на минималното хроматично разлагане на графа H_3.

Сега, нека M е независимо и доминиращо множество за графа H_3 Ако $x_2 \in M$, то M е независимо и доминиращо множество за графа H. Следователно $g_3(M) = g_H(M) \leq g_H(U_1) = g_3(U_1 - \{x_3\})$. Ако $x_2 \notin M$, то $x_1 \in M$ и $M_1 = M \cup \{x_3\}$ е независимо и доминиращо множество за графа H с $g_3(M) = g_H(M_1) \leq g_H(U_1) = g_3(U_1 - \{x_3\})$. От индукционната хипотеза следва, че $g_3(U_s - \{x_3\}) = g_3(\tau - \{x_3\}) = g_3(\sigma - \{x_3\}) = g_3(V(H_3))/2 \geq g_3(M)$, за всяко $s = 1, .., k$. Следователно $g_H(U_s) = g_H(\sigma) = g_H(\tau) = g_H(V(H))/2$.

Случай 2: Съществуват върхове $x_1, x_2, x_3 \in V(H)$ такива, че $x_1 \neq x_3$ $N(x_3, H) = \{x_2\}$, $N(x_2, H) = \{x_1, x_3\}$ и $N(x_1, H) \neq \{x_2\}$.

Допускаме, че съществува m , $m \in \{1, .., k\}$ такова, че $x_3 \in U_m$ и $x_1 \notin U_m$. Имаме $g_H(U_m) \geq g_H((U_m - \{x_3\}) \cup \{x_2\})$ и тогава $g_H(\{x_3\}) \geq g_H(\{x_2\})$. Допускаме, че $g_H(\{x_3\}) > g_H(\{x_2\})$. Нека $x_2 \in U_r$. Ако съществува $y \in U_r \cap (N[x_1, H] - \{x_2\})$, то $g_H(U_r) \geq g_H((U_r - \{x_2\}) \cup \{x_3\})$ и тогава $g_H(\{x_2\}) \geq g_H(\{x_3\})$, с което получихме противоречие. Така, че $N[x_1, H] \cap U_r = \{x_2\}$. Тогава $g_H((U_r - \{x_2\}) \cup \{x_1, x_3\}) \leq g_H(U_r)$ и тогава $g_H(\{x_2\}) \geq g_H(\{x_1\}) + g_H(\{x_3\}) \geq g_H(\{x_3\})$, с което стигнахме до противоречие. Следователно $g_H(\{x_3\}) = g_H(\{x_2\})$.

Сега, за всяко $j \in \{1, .., k\}$ дефинираме множеството R_j по следния начин:

(i) Ако $x_3 \in U_j$ и $x_1 \notin U_j$, то $R_j = (U_j - \{x_3\}) \cup \{x_2\}$;

(ii) Ако $|\{x_1, x_3\} \cap U_j| \neq 1$, то $R_j = U_j$;

Да отбележим, че ако $x_1 \in U_j$, то $x_3 \in U_j$.

От определението имаме, че множествата $R_1, ..., R_k$ са независими и доминиращи в графа H, $\cup_{s=1}^{k} R_s = V(H)$ и за всяко $s = 1, .., k$: $g_H(R_s) = g_H(U_s)$ (поради $g_H(\{x_2\}) = g_H(\{x_3\})$ в (i)) . Също така за всяко $s = 1, ... k$: или $\{x_1, x_3\} \subseteq R_s$, или $x_1, x_3 \notin R_s$.

Нека $N(x_3, G) = \{x_2, y_1, .., y_k\}$. Нека G_3 е такъв граф, че: $V(G_3) = V(G) - \{x_3, y_k\}$ и $E(G_3) = E(G - x_3) \cup ((\cup_{s=1}^{k-1}\{x_1 y_s\})$, когато $k > 1$, и $E(G_3) = E(G - x_3)$, когато $k = 1$. Нека $H_3 = H - x_3$, $A_3 = A_G - \{y_k\}$ и нека $g_3(U) = |N(U, G_3) \cap A_3| - |U|$ за всяко $U \subseteq V(H_3)$. Следователно $g_3(\{x\}) = g_H(\{x\})$ за всеки връх $x \in V(H_3 - x_1)$ и $g_3(\{x_1\}) = g_H(\{x_1\}) + g_H(\{x_3\})$. Така, че $g_3(V(H_3)) = g_H(V(H))$. Също така $R_j - \{x_3\}, j = 1, .., k$ са независими и доминиращи множества в H_3 , $\cup_{s=1}^{k}(R_s - \{x_3\}) = V(H_3)$ и $g_3(R_j - \{x_3\}) = g_H(R_j)$.

Нека M е независимо и доминиращо множество за графа H_3. Ако $x_2 \in M$, то M е независимо и доминиращо множество за графа H и $g_3(M) = g_H(M) \leq g_H(U_1) = g_H(R_1) = g_3(R_1 - \{x_3\})$. Нека $x_2 \notin M$. Тогава $x_1 \in M$ и $M_1 = M \cup \{x_3\}$ е независимо и доминиращо множество за графа H. Имаме $g_3(M) = g_H(M_1) \leq g_H(U_1) = g_H(R_1) = g_3(R_1 - \{x_3\})$. Да отбележим също, че $\sigma_H - \{x_3\}$ и $\tau_H - \{x_3\}$ са класовете на минималното хроматично разлагане на графа H_3 и $g_3(\tau_H - \{x_3\}) = g_H(\tau_H)$, $g_3(\sigma_H - \{x_3\}) = g_H(\sigma_H)$. Сега от индукционната хипотеза следва, че $g_3(R_j - \{x_3\}) = g_3(\sigma_H - \{x_3\}) = g_3(\tau_H - \{x_3\}) = g_3(V(H_3))/2$. Следователно $g_H(R_j) = g_H(\sigma_H) = g_H(\tau_H) = g_H(V(H))/2$.

Определение 3.5.6 *Дървото T ще наричаме просто $(I_0, I_{-1}) - i-$дърво, ако $I_{-1}(T) = \{x \in V(T) | d(x, T) = 1\}$.*

Лема 3.5.7 *За всяко дърво T имащо поне два върха: $i(T) \leq |V(T)|/2$*

Доказателство: Резултатът следва от лема 3.5.4.

Характеризирането на графи с $\gamma(G) = |V(G)|/2$ е извършено в [43], [54], [101]. Тук ще разгледаме случая $i(G) = |V(G)|/2$.

Теорема 3.5.8 *Нека G е дърво с поне три върха, A_G е множеството от висящите му върхове, $H = G - A_G$ и $|V(H)| > 1$. За всяко множество $U \subseteq V(H)$ дефинираме $g_H(U) = |N(U, G) \cap A_G| - |U|$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(i) G е просто $(I_0, I_{-1}) - i-$дърво;

(*ii*) $N[A_G, G] = V(G)$ *и съществуват независими и доминиращи множества* $U_1, .., U_k$ *на* H *такива, че* $\cup_{s=1}^{k} U_s = V(H)$ *и* $g_H(U_s) = |A_G| - i(G)$ *за всяко* $s = 1, .., k$.

(*iii*) $N[A_G, G] = V(G)$ *и* $g_H(V(H))/2 = |A_G| - i(G)$.

(*iv*) $N[A_G, G] = V(G)$ *и* $g_H(\tau_H) = g_H(\sigma_H) = |A_G| - i(G)$.

(*v*) $N[A_G, G] = V(G)$ *и* $\tau_H \cup (A_G - N(\tau_H, G))$, $\sigma_H \cup (A_G - N(\sigma_H, G)) \in \mathcal{I}(G)$.

(*vi*) $i(G) = |V(G)|/2$.

Доказателство: $(i) \to (ii)$ От твърдение 3.5.3 следва, че $N[A_G, G] = V(G)$. Сега от теорема 3.5.5 следва (ii) .

$(ii) \to (i)$, $(ii) \to (iii)$ и $(ii) \to (iv)$ следват непосредствено от теорема 3.5.5.

$(iii) \to (vi)$ $|A_G| - i(G) = g_H(V(H))/2 = (|A_G| - |V(H)|)/2 = (2|A_G| - |V(G)|)/2 = |A_G| - |V(G)|/2$

$(iv) \to (vi)$ $2(|A_G| - i(G)) = g_H(\tau_H) + g_H(\sigma_H) = |A_G| - |V(H)| = 2|A_G| - |V(G)|$.

$(iv) \to (v)$ От определенията следва, че $\tau_H \cup (A_G - N(\tau_H, G))$ е независимо и доминиращо множество за G. Освен това $|\tau_H \cup (A_G - N(\tau_H, G))| = |\tau_H| + |A_G| - |A_G \cap N(\tau_H, G)| = |A_G| - g_H(\tau_H, G) = i(G)$. Следователно $\tau_H \cup (A_G - N(\tau_H, G)) \in \mathcal{I}(G)$. Аналогично - $\sigma_H \cup (A_G - N(\sigma_H, G)) \in \mathcal{I}(G)$.

$(v) \to (iv)$ $i(G) = |\tau_H \cup (A_G - N(\tau_H, G))| = |A_G| - g_H(\tau_H, G)$. Аналогично получаваме $i(G) = |A_G| - g_H(\sigma_H)$.

$(vi) \to (i)$: Тъй като $|\tau_G| + |\sigma_G| = |V(G)|$, $|\tau_G| \geq i(G)$ и $|\sigma_G| \geq i(G)$ то $|\tau_G| = |\sigma_G| = |V(G)|/2$. Следователно G е $I - i-$дърво. От твърдение 2.1.9 следва, че $I(G) = I_{-1}(G) \cup I_0(G)$. От теорема 2.5.2 следва, че $I_{-1}(G) \neq \emptyset$, а от теорема 2.2.9 - $I_0(G) \neq \emptyset$. Следва, че G е $(I_0, I_{-1}) - i-$дърво.

Допускаме, че съществува разрязващ връх $x \in I_{-1}(G)$. Нека $G_1 =< V(U_1) \cup \{x\}, G >$ и $G_2 =< (\cup_{p=2}^{r} V(U_p)) \cup \{x\}, G >$, където $U_1, U_2, .., U_r$ са компонентите на $G - x$. Тогава G е x-съчленение на графите G_1 и G_2. От теорема 2.2.5 - $i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1$, а от лема 3.5.7 - $i(G_1) \leq |V(G_1)|/2$ и $i(G_2) \leq |V(G_2)|/2$. Тогава: $|V(G)|/2 = i(G) = i(G_1) + i(G_2) - 1 \leq |V(G_1)|/2 + |V(G_2)|/2 - 1 \leq |V(G)|/2 - 1$, с което получихме противоречие.

Следователно графът G е просто $(I_0, I_{-1}) - i-$дърво.

Следствие 3.5.9 *Нека* G *е просто* $(I_0, I_{-1}) - i-$*дърво. Тогава* $|V(G)| \equiv 0(mod\ 2)$.

Определение 3.5.10 *Нека $T_1, T_2, .., T_k$, $(k \geq 2)$, са дървета такива, че:*

(i) *$T_1, T_2, .., T_k$ са прости $(I_0, I_{-1}) - i-$ дървета*

(ii) *За всяко s, $2 \leq s \leq k$, графите T_s и $H_{s-1} = \cup_{j=1}^{s-1} T_j$ имат само един общ връх*

(iii) *Нека x_s е общият връх на T_s и H_{s-1}, $2 \leq s \leq k$. Тогава за всяко j, $1 \leq j \leq s$, ако $x_s \in V(T_j)$, то x_s е висящ връх в T_j.*
Тогава дървото $T = \cup_{m=1}^{k} T_m$ ще наричаме I_{-1}-счленение на дърветата $T_1, T_2, .., T_k$.

Следствие 3.5.11 *Нека дървото T е I_{-1}-счленение на дърветата T_1, $T_2, .., T_k$. Тогава T е $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво. При това $I_{-1}(T) = \{x \in V(T) : x$ е висящ връх на някой от графите $T_1, T_2, .., T_k\} = \cup_{s=1}^{k} I_{-1}(T_s)$.*

Доказателство: Следва непосредствено от твърдение 3.5.8 и твърдение 3.5.2.

Теорема 3.5.12 *Нека T е $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво и T не е просто $(I_0, I_{-1}) - i$-дърво. Тогава:*

1. *Съществуват дървета $T_1, T_2, .., T_k$, че T е тяхно I_{-1}-счленение.*
2. *Ако T е $I_{-1}-$счленение на дърветата $T_1, T_2, .., T_k$ и T е $I_{-1}-$счленение на дърветата $U_1, U_2, .., U_r$, то $k = r$ и $T_1, T_2, .., T_k$ е пермутация на $U_1, U_2, .., U_r$.*
3. *$i(T) = i(T_1) + i(T_2) + .. + i(T_k) + 1 - k$.*
4. *$|V(T)| = 2i(T) + k - 1$*
5. *$i(T) \geq [(|V(T)| + 2)/3]$ като равенството е в сила тогава и само тогава, когато T е $I_{-1}-$счленение на копия от P_4.*

Доказателство: 1). Нека за всеки граф G: $R(G) = \{x \in D_{-1}(G) | d(x, G) > 1\}$. Ще приложим индукция по $|R|$. Нека $R(T) = \{x\}$ и $W_1, W_2, .., W_k$ са компонентите на $T - x$. Тогава $T_j =< W_j \cup \{x\}, T >$, $j = 1, 2, .., k$ и останалото следва от теорема 3.5.1.

Нека $R(T) > 1$. Дефинираме дърво H по следния начин: $V(H) = R(T)$ и ако $u, v \in V(H)$ $u \neq v$, то $uv \in E(H)$ тогава и само тогава, когато съществува $u - v$ проста верига в $T - (R(T) - \{u, v\})$. Нека x_k е висящ връх на H. Нека $W_1, W_2, .., W_m$ са всичките компоненти на $T - x_k$ за които $|V(W_j) \cap R(T)| = 0$, $j = 1, 2, .., m$. Нека

$T_{k-i+1} =< V(W_i) \cup \{x_k\}, T >$, когато $i = 1, 2, .., m$. Тогава резултатът се получава от индукционната хипотеза и теорема 3.5.1.

2). Следва непосредствено от 1) и от следствие 3.5.11.

3). От теорема 2.2.4 и от 1) следва исканото.

4). Имаме от 3): $i(T) = \Sigma_{s=1}^{k} i(T_s) - k + 1 = \Sigma_{s=1}^{k} |V(T_s)|/2 - k + 1 = (|V(T)| + k - 1)/2 - k + 1$

5) От 4) следва, че: $i(T) = (|V(T)| - k + 1)/2$. От друга страна $|V(T)| \geq |V(T_1)| + (k-1)3 \geq 3k + 1$. Тогава $i(T) \geq (|V(T)| + (1 - |V(T)|)/3 + 1)/2 = (|V(T)| + 2)/3$.

Твърдение 3.5.13 *Нека T е $(D_0, D_{-1}) - \gamma -$дърво. Тогава:*

1. *T е $(I_0, I_{-1}) - i -$дърво.*
2. *$I_0(T) = D_0(T)$.*
3. *$I_{-1}(T) = D_{-1}(T)$.*
4. *$I_{-1}(T) \in \mathcal{I}(T)$.*
5. *$i(T) = \gamma(T)$.*

Доказателство: Непосредствено следва от резултатите в секция 3.3, теорема 3.5.9 и теорема 3.5.11.

Твърдение 3.5.14 *За всяко $m \in \{4\} \cup \{6, 7, 8, ..\}$ съществува $(I_0, I_{-1}) - i -$дърво с m върха. Ако $k \in \{1, 2, 3, 5\}$, то не съществува $(I_0, I_{-1}) - i -$дърво с k върха.*

Доказателство: Непосредствената проверка показва, че не съществува $(I_0, I_{-1}) - i -$граф с m върха, където $m \in \{1, 2, 3, 5\}$. Останалото следва от следствие 3.3.10 и твърдение 3.5.11.

Литература

[1] B.D.Acharya and H.B.Walikar, On graphs having unique minimum dominating sets. *Graph Theory Newsletter*, 8 (5)(1979) 1.

[2] Y.Alavi, J.Liu,J.Wang and Z.Zhang, On total covers of graphs, *Discr. Math.*, 100(1992), pp. 229-233.

[3] R.B.Allan and R.Laskar, On domination and independent domination numbers of graph, *Discrxete Math.* , 23(1978) pp. 73-76.

[4] R.B.Allan and R.Laskar, On domination and some related topics in graph theory, in: *Proceedings Ninth S.E. Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1978)43-58.

[5] R.B.Allan. R.Laskar and St. Hedetniemi, A note on total domination, *Discrxete Math.* , 49(1984) pp. 7-13.

[6] S.Ao and G. MacGillivray Hamiltonian properties in independent domination critical graphs, Preprint,(1996).

[7] S. Arumugan, On three domination related parameters of a graph, *Proceedings of the conference*, Cochin, India, 1998, pp.41-43.

[8] S.Arumugam and J.Paulraj Joseph, on graphs with equal domination and connected domination numbers, *Discrete Math.*, 206(1999), pp.45-49.

[9] S. Arumugam and S. Velammal, Edge domination in graphs, *Taiwanese J. Math.*, no. 2, (1998), pp.173-179.

[10] S. Arumugam and S. Velammal, maximum size of a connected graph with given domination parameters, *Ars Comb.*, 52(1999), pp.221-227. *Taiwanese J. Math.*, no. 2, (1998), pp.173-179.

[11] D.W.Bange, A.E.Barkauskas and P.J.Slater, fficient dominating sets in graphs, in: R.D.Ringeisen and F.S.Roberts, eds., *Applications of Discrete Mathematics* , SIAM (SIAM, Philadelphia,PA,1988), pp. 189-199.

[12] D.Bauer, F.Harary, J.Neiminen and C.L.Suffel, Domination alteration sets in graphs, *Discrete Math.* , 47(2-3)(1983) pp.153-161.

[13] C.Berge, *Graphs and Hypergraphs* (North- Holland, Amsterdam,1973) pp.303-324.

[14] C.Berge, *Theory of Graphs and its Applications* (Methuen,London,1962) pp.40-51.

[15] T.Beyer, A.Proskurowski. S.Hedetniemi and S.Mitchell, Independent domination in trees, in: *Proceedings Eighth S.E.Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1977) pp.321-328.

[16] Б. Болобаш, Теория на графите, София 1989г.

[17] R.C.Brigham, G.Chartrend,R.D.Dutton and P.Zhang, Full domination in graphs. *Discussiones Math. Graph Theory*, No. 1, 21(2001), pp. 43-62.

[18] R.C.Brigham, P.Z.Chlnn and R.D.Dutton, A study of vertex domination critical graphs, *Tehnical Report M-2* , University of Central Florida, 1984

[19] R.C.Brigham, P.Z.Chinn and R.D.Dutton, Vertex domination-critical graphs, *Networks*, 18(3)(1988) pp.173-179.

[20] R.C.Brigham and R.D.Dutton, Factor domination in graphs,*Discrete Math.* , 86(1990) pp.127-136.

[21] R.C.Brigham and R.D.Dutton, Neighborhood numbers, new invariants of undirected graphs, *Congr.Number.* 53(1986) pp.121-132.

[22] Y.Caro, W.Klostermeyer and J.L.Goldwasser, Odd and residue domination numbers of a graph, *Discussiones Math. Graph Theory*, No.1, 21(2001), pp.119-136.

[23] J.R.Carrington, F.Harary and T.W.Haynes. Changing and unchanging the domination number of a graph. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 9(1991) pp. 57-63.

[24] G.J.Chang and G.L.Nemhauser, R-domination in graphs, *Oper,Res.Letters*, 1(6)(1982), pp.214-218.

[25] G.Chartrend, L.Eroh, F.Haraty and P.Zhang, How large can the domination number of a graph be?, *Australas. J. Combin.*, 21(2000), pp.23-35.

[26] G.Chartrend, F.Harary. M.Hossain and K.Schultz, Exact 2-step domination in graphs, *Math. Bohem.* No. 2, 120(1995), pp.125-134.

[27] G.Chartrend, F.Harary, H.C.Swart and P.Zhang, Geodomonation in graphs, *Bull. Inst. Comb. Appl.*, 31(2001), pp. 51-59.

[28] E.J.Cockayne. R.M.Dawes and S.T.Hedetniemi, Total domination in graphs, *Networks*, 10(1980) pp.211-219.

[29] E.J.Cockaine, O.Favaron, C.M.Mynhardt and J.Puech, An inequality chain of domination parameters for trees, *Discussiones Math. Graph Theory*, 18(1) (1998), pp. 127-142.

[30] E.J.Cockaine, S.E.Goodman and S.T.hedetniemi, A linear algorithm for the domination number oe a tree, *Inform. Process. Lett.*, 4(1975), pp. 41-44.

[31] E.J.Cockayne, B.L.Hartnell, S.T.Hedetniemi and R.Laskar. Perfect domination in graphs. *J.Combin.Information System Sci.*, 18(1993) pp.136-148.

[32] E.J.Cockayne and S.T.Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, *Networks*, 7(1977) pp.247-261.

[33] E.J.Cockaine , S.T.Hedetniemi and D.J.Miller, Properties of hereditary hypergraphs and midlle graphs, *Canad. Math. Bull.* 21(4) (1978), pp. 461-468.

[34] P.Damaschke, Minus domination in small-degree graphs, *Discrete Applied Mathematics* , No. 1-2, 108(2001) pp.53-64.

[35] G.Domke, J.Hattingh, S.T.Hedetniemi, R.Laskar, L.Markus, Restrained domination in graphs, *Discrete nathematics* 303(1999), pp. 61-69.

[36] G.Domke, J. Hatting, M.Henning, L.Markus, Restrained domination in trees, *Discrete mathematics* 211(2000) pp. 1-9.

[37] J.E.Dunbar, W,Goddard, S.T.Hedetniemi,M.A.Henning and A.A. McRae, The algorithmic complexity of minus domination in graphs, *DIscrete Appl. Mathematics.* 68(1996), pp.73-84.

[38] J.E.Dunbar, S.T.Hedetniemi,M.A.Henning and P.J.Slater. Signed domination in graphs, In Y.Alavi and A.J.Swenk, editors, *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer science*, pp. 311-322. (Kalamazoo, MI 1984), 1985, Wiley.

[39] J.E.Dunbar, D.G.Hoffman, R.C.Laskar and L.R.Markus, α-domination, *Discrete* , 211(2000) pp.11-26.

[40] R.D.Dutton and R.C.Brigham, An extremal problem for the edge domination insensitive graphs. *Discrete Applied Mathematics* , 20(1988) pp.113-125.

[41] M.Farber, Domination and duality in weighted trees, *Congr.Numer.*, 33(1981), pp.3-13.

[42] O.Favaron. D, Sumner and E, Wojcicka. The diameter of domination-critical graphs. *J. Graph Theory*, 18(1994) pp. 723-734.

[43] J.F.Fink, M.S.Jacobson, L.F.Kinch and J.Roberts, On graphs having domination number half their order, *Period.Math.Hungar.*, 16(4)(1985) pp.287-293.

[44] J.F.Fink, M.S.Jacobson, L.F.Kinch and J.Roberts, The bondage number of a graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1990) pp.47-57.

[45] J.F.Fink and M.S.Jacobsen, n-domination in graphs. In Y.Alavi and A.J.Swenk, editors, *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer science*, pp. 283-300. (Kalamazoo, MI 1984), 1985, Wiley.

[46] P.Fraisse, Dominating cliqes and paths, Notices Amer. Math. Soc., 5:231. 1984.

[47] S.Fujita, T.Kameda and M. Yamashita, A resource assignment problems on graphs, In *Proc. 6th Internat. Symp. on Algorithms and Computation*, pp.418-427, Cairns, Australia, 1995.

[48] T.Gallai, Uber extreme Punkt- und Kantenmengen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math.* 2(1959), pp. 133-138.

[49] M.R.Garey and D.S.Jonson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP Complectedness*, Freeman, New York, 1979.

[50] P.J.Grobler and C.M.Mynhardt, Domination parameters and edge-removal critical graphs, *Discrete Math.* 231(2001), pp. 221-239.

[51] F. Harary, Changing and unchanging invariants for graphs, *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 5(1982), pp. 73-78.

[52] F.Harary and T,W.Haynes, Double domination in graphs, *Ars Combinatoria*, pp. (199).

[53] F.Harary and M.Livingston, Characterization of trees with equal domination numbers, *Congr.Number.*, 55(1986) pp.121-150.

[54] B.Hartnell and D.F.Rall, A characterization of graphs with some minimum dominating set covers all the edges. *Czechoslovak Math. J.* , 45(120) , 1995, pp. 221-230.

[55] J.H.Hatting and M.A.Henning. Characterization of trees with equal domination parameters. *J. Graph Theory*, No.2, 34(2000) pp.142-153.

[56] J.Haviland. On minimum maximal independent sets of graphs, *Discr. Math.* , 94(1991), pp.95-101.

[57] T.W.Hayness, S.M.Hedetniemi and S.T.Hedetniemi, Domination and independence subdivision numbers of graphs, *Discussiones Math. Graph Theory*, No.1, 20(2000), pp.271-280.

[58] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[59] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Domination in graphs (Advanced topics)*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[60] T.W.Haynes and M.A.Henning, Path-free domination, *Comb. Math. Comb.Comput.* 33(2000), pp.9-21.

[61] S.M.Hedetniemi, S.T.Hedetniemi and D.P.Jacobs, Total irredundance in graphs: theory and algorithms, *Ars Combinatoria*, 35(1993) , pp.271-184.

[62] S.M.Hedetniemi, S.T.Hedetniemi and D.F.Rall, Aciclic domination, *Discrete mathematics*, No. 1-3, 222(2000),pp. 151-165 5, pp.271-184.

[63] S.T.Hedetniemi and R.Laskar, Connected domination in graphs, in: B.Bollobas, ed., *Graph Theory and Combinatorics* (Academic Press,London,1984) pp.209-218.

[64] S.T.Hedetniemi and R.Laskar, Recent results and open problems in domination theory, *Applications of Discrete Mathematics* (SIAM, Philadelphia, PA,1988) pp.205-218.

[65] M.A.Henning and Swart, Bounds relating generalized domination parameters, *Discrete Mathematics* 20(1993). pp. 93-105.

[66] L.L.Kelleher and M.B.Cozzens, Dominating sets in social network theory, *Math.Social Sci.*, 16(1988), pp.267-279.

[67] J.Kok and C.M.Minhardt. Reinforcement in grapfs, *Congr. Numer.* 79(1990) pp.167-175.

[68] D.Kratsch, Finding dominating cliques efficientliy in strongly chordal graphs and undirected parh graphs, *Discrete Mathematics*, 86(1990), pp.225-238.

[69] D.Kratsch. P.Damaschke and A. Lubiv, Dominating cliques in chordal graphs , *Discrete Mathematics*, 128(1994), pp.269-275.

[70] V.R.Kulli and B.Janakiram, The cobondage number of a graph, *Discussiones Math. Graph Theory*, No.2, 16(1996), pp.111-117.

[71] R.Laskar and H.B.Walikar, On domination related concepts in graph theory,in: *Combinatorics and graph theory* (Calcuta,1980), *Lecture Notes in Mathematics* 885, (Springer,Berlin,1981) pp.308-320.

[72] D. Marcu, A note on the domination number of a graph and its complement, *Math. Bohem.* 126(2001), pp. 63-65.

[73] S.L.Mitchell and S.T. Hedetniemi, Edge domination in trees, *Congr. Numer.*, 19(1977), pp.489-509.

[74] C.M.Mynhardt, Vertices contained in every minimum dominating set of a tree, *J. Graph Theory* 31(1999), pp.163-177.

[75] K.S.Natarajan and L.J.Whine, Optimum domination in weighted trees, *Inform. Process.Lett.*, 7(1978), pp. 261-265.

[76] O.Ore, *Theory of Graphs*, Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.38 (Amer.Math.Soc.,Providence,RI,1962)206-212.

[77] C. Payan, N.H.Xuong, Domination balanced graphs, *J. Graph theory* 6(1982), pp.23-32.

[78] B.Randerath, L.Volkman, Characterization of graphs with equal domination and covering number, *Discrete mathematics*, 191(1998), pp. 159-169.

[79] D.Rautenbach, Bounds on the strong domination number, *Discrete Mathematics* , 215(2000) pp.201-212.

[80] E.Sampathkumar, The least point covering and domination numbers of a graph, *Discr.Math.*, 86(1990), pp.137-142.

[81] E. Sampathkumar, Domination parameters of a graph,in: T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, New York. 1998.

[82] E. Sampathkumar and P.S.Neerlagi, Domination and neighborhood critical, fixed , free and totally free points, *Sankhya*, 54(1992), pp.403-407.

[83] E.Sampathkumar and L.Pushpa Lathha, Strong weak domination and domination balance in a graph, *Discrete mathematics*, 161(1966), pp.235-242.

[84] L.A.Sanchis, Maximum number of edges in connected graphs with a given domination number, *Discrete Mathematics*, 87(1991) pp.65-72.

[85] W.J.Selig and P.J.Slater, Minimum dominating, optymally independent vertex sets in graphs, In Y.Alavi and A.J.Swenk, editors, *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer science*, pp. 1061-1073. (Kalamazoo, MI 1984), 1985, Wiley.

[86] P.J.Slater, Domination and location in aciclic graphs. *Networks*, 17(1987) pp. 55-64.

[87] P.J.Slater, Maximum matching among minimum dominating sets, *Ars Combinatoria*, 35(1993), pp.239-249.

[88] C.B.Smart and P.J.Slater, Minimum coverage by dominating sets in graphs, *J.Combin. Math. Combin. Comput.* 35(1993), pp, 239-249.

[89] P.J.Slater, V. Smithdorrf and H.Swart, Domination and coverig - forsing sets of graphs, Preprint, 1995.

[90] D.P.Sumner, Critical concepts in domination, *Discrete Math.*, 86(1990) pp.33-46.

[91] D.P.Sumner and P.Blitch, Domination critical graphs, *J.Combin.Theory Ser. B*, 34(1)(1983) pp.65-76.

[92] D.Sumner, E. Wojcicka, Cut-vertices in k-edge-domination-critical graphs, *Preprint* (1996).

[93] D.P. Sumner and E. Wojcicka, Graphs Critical with Respect to the Domination Number, in: T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Domination in graphs (Advanced topics)*, Marcel Dekker, New York, 1998 p. 497.

[94] U.Teschner, New reslts about the bondige number of a graph, *Discrete Mathematics*, 171(1997) pp.249-259.

[95] J.Topp and L.Volkmann, Characterization of unicyclic graphs with equal domination and independence numbers, submitted.

[96] J.Topp and L.Volkmann. On graphs with equal domination and independent domination numbers, *Discrete mathematics*, 96(1990) pp.75-80.

[97] P.D.Vestergaard and B.Zelinka, *Mathematica Bohemica*, 120(1995) pp.135-143.

[98] H.B.Walikar and B.D.Acharya, Domination critical graphs, *Nat.Acad.Sci.Lett.*, 2(2)(1979) pp.70-72.

[99] H.B.Walikar, B.D.Acharya and E.Sampathkumar, Recent developments in the theory of domination in graphs, Mehta Research Institute, Allahabad, *MRI Lecture Notes in Math.*, 1(1979).

[100] H.B.Walikar, B.D.Acharya and E.Sampathkumar, On an extremal problem, concerning a Nodhaus-Gaddum type result in the theory of domination in graphs, Preprint. in the theory of domination in graphs, Mehta Research Institute, Allahabad, *MRI Lecture Notes in Math.*, 1(1979).

[101] Xu,B., Cockayne,E., Haynes,T., Hedetniemi, St., Zhou,S., Extremal graphs for involving domination parameters, *Discrete mathematics* , No. 1-3, 216(2000), pp. 1-10.

[102] B.Zelinka, Total edge-domatic number of a graph, *Math. Bohem.*, (1991), pp. 95-100.

[103] B.Zelinka, Signed total domination number of a graph, *Czech. Math. J.*, (2001), pp. 225-229.

Списък на публикациите по дисертацията

1. V.D.Samodivkin, *Domination in graphs I* , *Годишник на УАСГ* , 38(1995). pp. 103-114.

2. V.D.Samodivkin, *Domination in graphs II. Годишник на УАСГ*, 38(1995). pp. 115-128.

3. V.D.Samodivkin, *Domination in graphs* , *Годишник на УАСГ*, 39(1996-1997), pp.115-128.

4. V.D.Samodivkin, *Minimal dominating sets*, *Годишник на УАСГ* 40(2001)

5. V.D.Samodivkin, *i-fixed not i-critical graphs*, Математика и математическо образование, Докл. на 31 прол. конф. на СМБ, 2002г. (приета за публикуване).

6. V.D.Samodivkin, Domination fixed, free and totally free vertices, *Indian Journal of Pure and Appl.Math.*, (submitted).