УАСГ
Катедра "Математика"

Владимир Стефанов Никифоров

Задачи за устойчивост в теорията на екстремалните графи

Дисертационен труд, представен за присвояване на образователна и научна степен "**доктор**" по научната специалност 01.01.12

Научен консултант:
Доц. Владимир Тодоров

София, 2003

Предговор

Настоящият материал обобщава резултатите от няколко изследователски проекта по екстремални и Ремзи проблеми в теорията на графите. Въпреки, че първоначалните цели на тези изследвания бяха различни, на определен етап от разработката, връзката помежду им стана очевидна. При изследването на концептуалната им общност стана ясно, че подобни проблеми са изучавани преди 40 години от Ердьош и Шимонович под името *задачи за устойчивост*. Тези автори обаче изследват доста общи закономерности, като пропускат да получат някои по-силни и по-конкретни резултати. Именно такива резултати се оказаха особено важни за изследваните от нас случаи. Продължавайки да ги наричаме теореми за устойчивост ние си поставихме за цел да открием и други задачи, които могат да бъдат разгледани от същата гледна точка.

В резултат от проучването си оказа, че множество привидно несвързани задачи са в действителност до голяма степен родствени. Практически във всички случаи разглеждането им като задачи устойчивост позволява да се опрости подхода към задачата и свежда решението до въпрос на чиста техника. В частност, съчетаването на концепцията за устойчивост с равномерностната лема на Семереди се оказва удивително ефективен инструмент.

Задачите за устойчивост възникват в теорията на екстремалните графи, но могат лесно да се приложат и при Ремзи проблеми, по-специално, когато числото на Ремзи се определя от пълен r-частен граф. В това отношение сме изследвали само клики, книги и обобщени книги, но възможностите на подхода в никакъв случай не изчерпват с тези случаи.

Въпреки че ще избягваме да формулираме теореми за устойчивост в най-общ вид, ние вярваме, че резултатите ни демонстрират убедително вътрешното единство на редица направления в теорията на графите.

Нашите изследвания имат връзки с някои приложни проблеми, които са типични за информатиката, но развитието на това направление ще е предмет на последващи разработки.

Авторът изказва благодарност на на проф. Николай Хаджииванов, който го въведе в теорията на екстремалните графи, на проф. Стефан Додунеков за интересните идеи, довели до подобряване на първоначалния ръкопис и на научния си консултант доц. Владимир Тодоров за цялостното му съдействие.

Съдържание

Увод и обзор

За фиксиран граф H да означим с $\mathcal{F}(n, H)$ семейството от графи G с n върха, такива, че G не съдържа копие на H, и нека да положим

$$ex(n, H) = \max_{G \in \mathcal{F}(n,H)} e(G). \tag{1}$$

Да се намери или оцени $ex(n, H)$ и да се определят графите G, за които е в сила равенството (1), са двете класически задачи в теорията на екстремалните графи. След като знаем $ex(n, H)$ с достатъчна точност, естествено е да изследваме и структурата на графите $G \in \mathcal{F}(n, H)$, когато $e(G)$ е относително близко до $ex(n, H)$. Ердьош и Шимонович наричат този род задачи *задачи за устойчивост (stability problems)* и ги изследват в [21], [22], [51] и [52].

Нека опишем накратко техния подход. За фиксиран граф H с хроматично число $\chi(H) = r+1$, от теоремата на Ердьош и Стоун ([31]) следва, че

$$ex(n, H) = \frac{r-1}{2r} n^2 + o\left(n^2\right).$$

Типичната теорема за устойчивост гласи, че за всяко $\delta > 0$, съществува ε такова, че, ако за някой граф $G \in \mathcal{F}(n, H)$ е изпълнено

$$e(G) \geq \left(\frac{r-1}{2r} - \varepsilon\right) n^2,$$

то можем да премахнем δn^2 ребра от G по такъв начин, че останалият граф да е r-хроматичен.

Не е трудно да се покаже, че този общ резултат е най-добрия възможен. Въпреки че в [51], стр. 282, Шимонович разглежда и други резултати за устойчивост, той очевидно е пропуска да забележи, че за някои конкретни графи H, при същите условия, G съдържа в действителност *индуциран* r-хроматичен подграф с повече от $(1-\delta)\,n$ върха. Оказва се, че този на пръв поглед незначителен детайл води до много по-широка приложимост на концепцията за устойчивост.

Като начало ще поставим цялата задача в по-широк контекст. Под *семейство графи* ще разбираме редица $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, където всяко F_n е множество от графи. Вместо да фиксираме графа H, нека $\{F_n\}$ е семейство графи и нека $\mathfrak{F}(n, F_n)$ е множеството графи от ред n, несъдържащи копие на H за никое $H \in F_n$. Полагайки

$$\mathfrak{ex}(n, F_n) = \max_{G \in \mathfrak{F}(n, F_n)} e(G), \tag{2}$$

получаваме трите основни екстремални задачи за редицата $\{F_n\}$:

(i) да се намери или оцени $\mathfrak{ex}(n, F_n)$;

(ii) да се определи за кои $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$ има равенство в (2);

(iii) да се определи структурата на $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$, когато $e(G)$ е близо до $\mathfrak{ex}(n, F_n)$.

Оказва се, че за някои редици $\{F_n\}$ задачата *(iii)* има просто решение, подходящо за практически приложения. Ще дадем общо описание на такъв случай.

Нека $r \geq 2$ е цяло число. Едно семейство графи $\{F_n\}$ се нарича *r-устойчиво*, ако за всяко $\delta > 0$ съществуват ε и n_0 такива, че при $n \geq n_0$, всеки граф $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$, удовлетворяващ

$$e(G) \geq \left(\frac{r-1}{2r} - \varepsilon\right) n^2,$$

съдържа индуциран r-хроматичен граф G_0 с повече от $(1-\delta)\,n$ върха.

В глава 2 ще докажем, че ако семейството графи $\{F_n\}$ е r-устойчиво, то графът G_0 може да се избере така, че класовете му да са с равен брой елементи и степента на всеки връх $u \in V(G_0)$ да удовлетворява

$$\left(\frac{r-1}{r}-\delta\right)v(G_0) < d_{G_0}(u) \le \frac{r-1}{r}v(G_0),$$

т.е., графът G_0 да е почти регулярен.

Следователно, доказвайки, че дадено семейство графи е устойчиво, получаваме частично, но практически приложимо решение на задача *(iii)* за това семейство.

Доколкото ни е известно, дефиницията на r-устойчивост и свързания с нея подход са нови.

Когато всички графи от едно устойчиво семейство са изоморфни на фиксиран граф H, ще казваме, донякъде нестрого, че графът H е устойчив.

Като правило, ще избягваме твърде общи формулировки на теореми за устойчивост - вместо това ще дефинираме и доказваме специална теорема за устойчивост за всяко конкретна редица $\{F_n\}$, от което ще се интересуваме. Причината за това е, че основната ни мотивация идва от приложението на концепцията за устойчивост, а не изучаването на устойчивостта сама по себе си.

Ще изброим няколко известни примера на устойчиви графи. Пълният граф K_{r+1} е r-устойчив - това е доказано от Никифоров и Русо в [45]; версия на това доказателство е представена в Глава 3.

Доста изненадващо се оказва, че съществуват устойчиви семейства графи $\{F_n\}$, за които редът на графите в F_n е пропорционален на n - най-простото такова семейство семейството на книгите $F_n = \left\{B_{\lceil n/6\rceil}\right\}$. Известно е, че всеки граф $G(n, \lfloor n^2/4\rfloor + 1)$ съдържа книга $B_{\lceil n/6\rceil}$. Нещо повече - оказва се, че семейство $\left\{B_{\lceil n/6\rceil}\right\}$ е 2-устойчиво и, че константата $1/6$ е най-добрата възможна. Този резултат е установен от Болобаш и Никифоров в [10] и е представен в Глава 4.

По-нататък, r-книгите $B^{(r)}_{\lceil cn\rceil}$ се оказват също r-устойчиви за някое $c = c(r) > 1/4r$, както е показано в Глава 6, въпреки че за $r > 2$ можем само да оценим точната стойност на $c(r)$.

Най-сложните r-устойчиви графи, които са ни известни са от вида графи наречени *сглобки.* Сглобките се разглеждат в Глава 8.

Оказва се, че далеч не всяко семейство графи е устойчиво - в Глава 2 привеждаме необходими условия за r-устойчивост, от които се вижда, че в действителност устойчиви са само малка част от всички графи.

Ще продължим с резюме на съдържанието на отделните глави.

Използваните означения се въвеждат в Глава 1, където, за справка на читателя е приведен и набор от добре известни резултати и факти.

Глава 2 е посветена на общи свойства на устойчивите семейства графи. В частност, в Раздел 2.2 се установява, че индуцираният граф G_0, имплициран от устойчивостта на семейство графи може да се избере с доста регулярна структура. В Раздел 2.3 се установяват строги необходими условия за r-устойчивост.

В Раздел 2.4 се изследва какъв брой ребра на един граф без K_{r+1} гарантира съществуване на индуциран r-хроматичен подграф от значителен ред. Прилагайки резултат от [43], с който бе решена една стара задача на Ердьош, ние показваме, че във всеки плътен граф без K_{r+1} има множество от $\lfloor n/2 \rfloor$ върха, индуциращо съществено по-малко от средния брой ребра.

Глава 3 е посветена на r-устойчивостта на графа K_{r+1}. В Раздел 3.1 най-напред даваме доказателство на известна теорема на Андрашфаи, Ердьош и Шош, което е много по-прозрачно и кратко от оригиналното. След това тази теорема се прилага в доказателството на r-устойчивостта на K_{r+1}.

На свой ред този резултат се прилага към една задача на Ремзи от теорията на графите, чието изучаване е започнато от Русо и Шиихан през 1978 [49]. Тя принадлежи към т. нар. "добри задачи на Ремзи".

По-точно, с помощта на равномерностната лема на Семереди доказваме един общ резултат от който следва, че за всеки $l \geq 2$, $r \geq 3$, съществува $q_0(l,r)$ такова, че при $q > q_0(l,r)$, числото на Ремзи $r\left(K_r, B_q^{(l)}\right)$ се задава чрез

$$r\left(K_r, B_q^{(l)}\right) = (q+l-1)(r-1)+1.$$

В допълнение даваме оценката за $q_0(l,r)$, което се оказва суперполиномиална функция от r и l.

В раздел 3.3 ще обобщим това по следния начин: за всеки фиксиран p-хроматичен граф H е в сила следното равенство

$$r(H, B_q^{(l)}) = (p-1)q + o(q)$$

за всички $p \geq 3$ и достатъчно голямо q.

Тези резултати са получени в съвместна разработка със С. Русо.

В Раздел 3.4 r-устойчивостта на K_{r+1} се преформулира в термините на максималната собствена стойност на граф. Използува се резултат от [44], с който бе доказана една хипотеза на Едуардс и Елфик от 1983 [15]. Полученият резултат показва връзката между спектралните характеристики на един граф и класическата теория на екстремалните графи. Идеята за този раздел бе подсказана от проф. Ст. Додунеков.

В Раздел 3.5 се опровергава едно предположение на Ердьощ от 1962, с което се доказва невъзможността r-устойчивостта на K_{r+1} да се формулира чрез броя на k-кликите на допълнителния граф, когато k е достатъчно голямо.

В Глава 4 първо се доказва, че всеки граф $G(n, \lfloor n^2/4 \rfloor + 1)$ съдържа $B_{\lceil n/6 \rceil}$ - един резултат, получен частично от самия Ердьош, и по-късно потвърден от Едуардс в непубликуван ръкопис, и независимо установен от Хаджииванов и Никифоров в [37]. След това се доказва, че семейството $\left\{B_{\lceil n/6 \rceil}\right\}$ е устойчиво, като този резултат се използва, за да се решат две задачи на Ердьош относно книговото число на графите

$$G = G\left(n, \frac{n^2}{4} - f(n)\,n\right),$$

такива, че всяко ребро на G се съдържа в триъгълник и $0 < f(n) \leq n^{2/5-\varepsilon}$. Тези резултати са съвместна разработка с Б. Болобаш.

В Глава 5 използваме устойчивостта на $\left\{B_{\lceil n/6 \rceil}\right\}$, за да докажем доста изненадващия факт, че за

$$p \leq \frac{1}{6}q + o(q)$$

числата на Ремзи $r(B_p, B_q)$ се задават чрез

$$r(B_p, B_q) = 2q + 3.$$

Оказва се,че константата $1/6$ е най-добра възможна - този факт се доказва в раздел 5.3 чрез полудетерминистична конструкция и вероятностен аргумент.

Този резултат завършва серия от предишни изследвания от [49], [34] и [45]. Доказателството отново се основава на равномерностната лема на Семереди и е съвместна разработка със С. Русо.

В Глава 6 доказваме, че за всяко $r \geq 2$ семейството $\left\{B^{(r)}_{\lfloor cn \rfloor}\right\}$ е устойчиво за някое $c = c(r) \geq 1/4r$. Този резултат има приложение в теорията на екстремалните графи и потенциални приложения в теорията на графите на Ремзи.

Глава 7 е посветена на един универсален спомагателен резултат, който има приложение в теорията на екстремалните графи. Дава се решение на следната задача на Болобаш и Ердьош, поставена през 1976 [6].

Ако граф с n върха има поне $t_r(n)$ ребра, то той съдържа r-клика такава, че средната степен на нейните върхове е по-голяма или равна на средната степен на графа.

Едуардс в [12] и [13] решава някои частни случаи на тази задача, а Фодри в [32] решава и общия случай с едно минимално ограничение. Тук ние представяме едно независимо решение без никакви ограничения. Този резултат е съвместна разработка с Б. Болобаш.

В Глава 8 се въвежда нов вид графи, наречени *сглобки*, които обобщават книгите. Изследването на сглобките е започнато от Ердьош през

1969, въпреки че той не дава специално име на тези графи. Теоремите за съществуване и устойчивост на сглобки се оказват гъвкави инструменти за оценка на броя на кликите в графи - самият Ердьош е направил такова приложение в [23], получавайки точни и приближени резултати.

За един вид практически важни сглобки ние подобряваме значително оценката на Ердьош и доказваме съответна теорема за устойчивост.

Глава 1

Означения и предварителни бележки

Използваните означения и терминология са, като правило, стандартни (виж например [2]).

1.1 Обща терминология

С $G(n)$ ще означаваме граф с n върха, а с $G(n,m)$ ще означаваме граф с n върха и m ребра. До края на главата с G ще означаваме произволен граф.

С $V(G)$ означаваме множеството от върхове на G, а с $v(G)$ означаваме броя на върховете на G, т.е., $v(G) = |V(G)|$.

С (G) означаваме множеството от ребра на G, а с $e(G)$ означаваме броя на ребрата на G, т.е., $e(G) = |E(G)|$. Реброто, свързващо върховете u и v означаваме с uv или vu.

Ако $u \in V(G)$, с $\Gamma_G(u)$ ще означаваме множеството от съседните на u върхове, а с $d_G(u) = |\Gamma_G(u)|$ - степента на u. Когато G се подразбира еднозначно, ще използваме $\Gamma(u)$ вместо $\Gamma_G(u)$ и $d(u)$ вместо $d_G(u)$.

Ще дефинираме обаче

$$\Gamma(U) = \bigcap_{x \in U} \Gamma(x), \text{ and } d(U) = |\Gamma(U)|,$$

което се различава от обичайното определение.

Във всички случаи, когато не е изрично посочено обратното, ще считаме, че графите са дефинирани върху множеството от върхове $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

Казваме, че един граф H е *подграф* на G (и означаваме с $H \subset G$), ако $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$.

Казваме, че H е *индуциран подграф* на G, ако $V(H) \subset V(G)$ и $E(H)$ се състои от всички ребра на G, свързващи върхове от $V(H)$. При фиксирани G и $M \subset V(G)$ съществува единствен H, който е индуциран подграф на G и такъв, че $V(H) = M$. В този случай казаваме, че H е индуциран от множеството M и го означаваме с $G[M]$.

Допълнителният граф на един граф G се означава с $\overline{G}$ и се дефинира по следния начин: $\overline{G}$ има същото множество от върхове като G, а два върха са съседни в $\overline{G}$ точно, когато не са съседни в G.

Ако $X, Y \subset V(G)$, то:

- $E(X)$ е множеството от ребра индуцирани от X;

- $E(X, Y)$ е множеството от ребра (u, v) такива, че $u \in X$, $v \in Y$.

Както обикновено,

- $\chi(G)$ е хроматичното число,

- $\delta(G)$ е минималната степен,

- $\Delta(G)$ е максималната степен на G.

Пътека P_k е граф, състоящ се от k върха $v_1, ..., v_k$ такива, че v_i е съседен на v_{i+1} за всяко $i = 1, ...k - 1$.

Пълния граф K_p е граф с p върха, съдържащ всички възможни ребра.

Пълен подграф с s върха ще наричаме *s-клика.* С $k_s(G)$ означаваме броя на s-кликите на G.

Едно множество от върхове се нарича *независимо*, ако не индуцира нито едно ребро. *Числото на независимост* $\alpha(G)$ се дефинира като мощността на най-голямото независимо множество в G.

Един граф се нарича r *– ч а с т е н* (или *r-хроматичен*), ако върховете му могат да се подразделят на r подмножества (които ще наричаме *части* или *класове*), така че в никое множество да няма ребра.

Един граф се нарича *пълен* r *– ч а с т е н* , ако е r-частен и съдържа всички ребра, свързващи върхове, принадлежащи на различни класове.

С $K_r(s_1, ..., s_r)$ означаваме пълен r-частен граф, частите на който са съответно имат съответно $s_1, ..., s_r$ елемента.

Аналогично, с $K_r^+(s_1, ..., s_r)$ ще означаваме граф, получен от $K_r(s_1, ..., s_r)$ с добавяне на ребро към частта с мощност s_1

С $K_r(q)$ означаваме пълен r-частен граф, всяка част на който има точно q върха.

Както обикновено, с $r(H_1, H_2)$ ще означаваме минималното число n, за което за всеки граф $G = G(n)$ е в сила или $H_1 \subset G$, или $H_2 \subset \overline{G}$. Величината $r(H_1, H_2)$ се нарича *число на Ремзи* за двойката (H_1, H_2).

Ако G_1 и G_2 са графи без общ връх, с $G_1 + G_2$ ще означаваме графа, който се състои от обединението на G_1 и G_2 заедно с всички ребра, които свързват върхове от G_1 с върхове от G_2.

За всеки $q \geq 1$, $r \geq 1$, *r-книга* се наричаме графа $B_q^{(r)}$, определен чрез

$$B_q^{(r)} = K_r + \overline{K_q}.$$

K_r ще наричаме *основа*, а q - *ред* на r-книгата; с $bk^{(r)}(G)$ ще означаваме реда на най-голямата r-книга в графа G. За простота 2-книгите ще наричаме само книги, а вместо $bk^{(2)}(G)$ ще използуваме $bk(G)$, като последното ще наричаме *книгово число* на G.

Ще използваме често и следното просто наблюдение. Нека $M_1, ..., M_k$ са подмножествата на едно (крайно) множество V. Тогава

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\overline{M_i}\right| \geq \left|\bigcup_{i=1}^{k} \overline{M_i}\right|$$

и така

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} M_i\right| \geq \sum_{i=1}^{k} |M_i| - (k-1)|V|. \tag{1.1}$$

1.2 Теорема на Туран

Да припомним някои от основните факти, свързани с теоремата на Туран. Нека $n \geq r \geq 2$ са цели числа. Графът $T_r(n)$ е пълен r-частен граф, класовете на който имат възможно най-близък брой елементи, а $t_r(n)$ е броя на ребрата на $T_r(n)$. Графът $T_r(n)$ се нарича граф на Туран и е свързан със следната фундаментална теорема на Туран [54].

Теорема 1.1 *Нека G е граф с n върха и без K_{r+1}. Тогава*
(i) $e(G) \leq t_r(n)$.
(ii) ако $e(G) = t_r(n)$, то $G = T_r(n)$.

Да обърнем внимание, че ако $n = rs + t$ $(0 \leq t \leq r-1)$, то графът $T_r(n)$ съдържа t класа с $\lceil n/r \rceil$ върха и $r - t$ класа с $\lfloor n/r \rfloor$ върха. В частност, след прости алгебрични преобразувания се вижда, че

$$t_r(n) = \frac{r-1}{2r}\left(n^2 - t^2\right) + \binom{t}{2}. \tag{1.2}$$

Следователно, валидни са следните равенства

$$\delta(T_r(n)) = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor, \qquad \Delta(T_r(n)) = n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \tag{1.3}$$

$$t_r(n) = t_r(n-1) + \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = t_r(n-1) + \delta(T_r(n)). \tag{1.4}$$

Също така от (1.2) лесно могат да се получат следните практически полезни оценки

$$\frac{r-1}{2r}n^2 \geq t_r(n) \geq \frac{r-1}{2r}n^2 - \frac{n}{4}. \tag{1.5}$$

1.3 Теорема на Ердьош-Стоун

Теоремата на Ердьош и Стоун [31] гласи в оригиналната си формулировка следното.

Теорема 1.2 *За всеки $p \geq 3$, $q \geq 1$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $n_0 = n_0(p, q, \varepsilon)$ такова, че всеки граф G с $n > n_0$ върха, удовлетворяващ*

$$e(G) > \left(\frac{p-1}{2p} + \varepsilon\right) n^2,$$

съдържа графа $K_{p+1}(q)$.

От тази теорема се непосредствено се получава, че за всеко $\varepsilon > 0$ и за всеки фиксиран граф H с $\chi(H) \leq p+1$, ако G е граф от достатъчно висок ред и удовлетворява

$$e(G) > \left(\frac{p-1}{2p} + \varepsilon\right) n^2,$$

то G съдържа H.

1.4 Собствени стойности на граф

Ако G е граф от ред n, то *матрицата на съседство (adjacency matrix)* $A(G) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ е $n \times n$, симетрична, $(0,1)$-матрица, такава че $a_{ij} = 1$ точно когато ij е ребро на G.

Собствените стойности на $A(G)$ ще означаваме с $\mu_i(G)$, $i = 1, ..., n$ и ще наричаме наричаме *собствени стойности* на G. Ще предполагаме, че $\mu_i(G)$ са индексирани така, че

$$\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq ... \geq \mu_n(G).$$

Ако G има поне едно ребро, то е известно, че $\mu_1(G) > 0$ и $\mu_n(G) < 0$.

Глава 2

Общи свойства на устойчиви семейства графи

Основната цел на тази глава е да даде въведение в концепцията за устойчивост. Тя започва с няколко прости наблюдения. В раздел 2.2 се показва, че ако $\{F_n\}$ е r-устойчиво семейство, тогава $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$.

В раздел 2.3 се получава необходимо условие за r-устойчивост.

2.1 Две прости свойства

Нека $\{F_n\}$ и $\{F_n'\}$ са две семейства от графи такива, че за достатъчно голямо n за всяко $H \in F_n$ съществува $H' \in F_n'$ такова, че $H \subset H'$. Тогава, ако $\{F_n\}$ е r-устойчиво, то $\{F_n'\}$ е също r-устойчиво. По-специално, ако графът H е r-устойчив и $H \subset H'$, тогава H' е също r-устойчив.

Ако $\{F_n\}$ е r-устойчиво, то то е r'-устойчиво за всяко $r' > r$.

Последното твърдение, което следва непосредствено от дефиницията за устойчивост, изисква известно пояснение. Досега не ни е известен пример за $(r+1)$-устойчиво семейство от r-хроматични графи, което не е r-устойчиво. В действителност, подобни семейства не могат да се състоят от фиксирани графи. Освен това, възможно е да се покаже, че ако $\{F_n\}$ е семейство, такова, че за достатъчно големи n, F_n съдържа само

$(r+1)$-хроматични графи най-много с $c \log n$ върха, където $c > 0$, тогава F_n е r-устойчиво.

2.2 Регуляризиране на индуцирания граф

В този раздел ще покажем, че индуцираният граф, определен от r-устойчивостта на семейство графи може да бъде избран така, че да има добре определена структура, и по-специално, да е почти регулярен. Фактически, до голяма степен, точно този факт прави приложима концепцията за устойчивостта.

Теорема 2.1 *Да допуснем, че $r \geq 2$ и $\{F_n\}$ е r-устойчиво семейство графи. За всяко $\delta > 0$ съществуват $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ и $n_0 = n_0(\delta)$ такива, че за $n \geq n_0$ всеки граф $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$ за който*

$$e(G) \geq \left(\frac{r-1}{2r} - \varepsilon\right) n^2,$$

съдържа индуциран r-частен граф G_0 такъв, че:

(i) *G_0 има повече от $(1-\delta)n$ върха;*

(ii) *частите на G_0 са равни;*

(iii) *за всеки връх $u \in V(G_0)$,*

$$\left(\frac{r-1}{r} - \delta\right) v(G_0) \leq d_{G_0}(u) < \frac{r-1}{r} v(G_0).$$

Доказателство. Доказателството се основава на следната проста стратегия: първо се избира G_0, какъвто е гарантиран от самата дефиниция за устойчивост, и после постепенно го подобряваме, докато бъдат удовлетворени изискванията (i)-(iii).

Да фиксираме $0 < \delta < 1$ и нека

$$\eta = \frac{1}{4.25}\left(\frac{\delta}{3r^2}\right)^2.$$

По дефиниция, съществуват $\varepsilon = \varepsilon(\eta) = \varepsilon(\delta) > 0$ и $n_0 = n_0(\eta) = n_0(\delta)$, такива, че за $n \geq n_0(\eta)$ всеки граф $G \in \mathfrak{F}(n, F_n)$, за който

$$e(G) > \left(\frac{r-1}{2r} - \varepsilon\right) n^2,$$

съдържа индуциран r-хроматичен граф G_2 с $l > (1-\eta)n$ върха. Можем без ограничение да приемем, че $\varepsilon \leq \eta$. Тогава имаме

$$e(G_2) > e(G) - \eta n^2 > \left(\frac{r-1}{2r} - \eta - \varepsilon\right) n^2 \geq \left(\frac{r-1}{2r} - 2\eta\right) l^2.$$

Да положим $\gamma = \sqrt{4.25\eta}$ и да означим с M_γ множеството от върховете на G_2 за което

$$d_{G_0}(u) \leq \left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) l.$$

Първо ще покажем, че $|M_\gamma| < 2\gamma l$. Наистина, да допуснем обратното и да изберем произволно $M_1 \subset M_\gamma$ за което

$$\frac{1}{2}\gamma l < |M_1| < \frac{3}{2}\gamma l. \tag{2.1}$$

Това може да се направи за достатъчно голямо n тъй като $l > (1-\eta)n$. Да означим $V_1 = V(G_2) \backslash M_1$ и нека $G_1 = G_2[V_1]$. Тогава

$$\begin{aligned} e(G_2) &= e(G_1) + E(M_1, V_1) + e(G_2[M_1]) \leq e(G_1) + \sum_{u \in M_1} d(u) \\ &\leq e(G_1) + |M_1| \left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) l \end{aligned}$$

и оттук

$$e(G_1) \geq -|M_1| \left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) l + \left(\frac{r-1}{2r} - 2\eta\right) l^2.$$

Ще докажем, че

$$-|M_1| \left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) l + \left(\frac{r-1}{2r} - 2\eta\right) l^2 > \frac{r-1}{2r} (l - |M_1|)^2 \tag{2.2}$$

а от това неравенство и теоремата на Туран следва, че $K_{r+1} \subset G_1$, което е противоречие, тъй като G_1 е r-частен. Да допуснем, че (2.2) не е в сила и да означим $x = |M_1|/l$. Тогава

$$\frac{r-1}{2r}(1-x)^2 + x\left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) - \left(\frac{r-1}{2r} - 2\eta\right) \geq 0.$$

и оттук

$$x^2 - 2\gamma x + 4\eta \geq 0$$

откъдето следва или

$$|M_1| \geq \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}\right) l = \frac{\gamma}{2} l$$

или

$$|M_1| < \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}\right) l = \frac{3\gamma}{2} l,$$

което е противоречие с (2.1). По този начин имаме $|M_\gamma| < 2\gamma l$.

Очевидно, от $\eta < \gamma$, имаме

$$v(G_1) = l - |M_\gamma| \geq (1-2\gamma)\, l \geq (1-2\gamma)(1-\eta)\, n > (1-3\gamma)\, n. \tag{2.3}$$

Също така

$$\begin{aligned} \delta(G_1) &> \left(\frac{r-1}{r} - \gamma\right) l - |M_\gamma| \geq \left(\frac{r-1}{r} - 3\gamma\right) l \\ &\geq \left(\frac{r-1}{r} - 3\gamma\right) v(G_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Нека $U_1, ..., U_r$ са класовете на G_1. За всяко $i \in [r]$ и всяко $u \in U_i$, имаме

$$d_{G_1}(u) \leq v(G_1) - |U_i|.$$

Лесно се вижда, че за всяко $i \in [r]$,

$$|U_i| \leq v(G_1) - \delta(G_1) \leq \left(\frac{1}{r} + 3\gamma\right) v(G_1). \tag{2.5}$$

Нека $|U_s| = \min\{|U_i| : s \in [r]\}$. Оттук получаваме, че

$$|U_s| \geq \left(\frac{1}{r} - 3(r-1)\gamma\right) v(G_1). \tag{2.6}$$

Да изберем за всяка част U_i множество U_i^* от точно $|U_s|$ върха и нека

$$V_0 = \bigcup_{i\in[r]} U_i^*, \qquad G_0 = G_1[V_0].$$

Ще покажем, че r-частния граф G_0 удовлетворява (i)-(iii). Наистина, (ii) е изпълнено поради начина на конструиране. Освен това лесно се вижда, че за всяко $u \in V_0$,

$$d_{G_0}(u) \leq \frac{r-1}{r}|V_0|. \tag{2.7}$$

От (2.5) и (2.6) имаме

$$|V_0| > v(G_1) - (r-1)(|U_i| - |U_s|) \geq (1 - 3r(r-1)\gamma)\, v(G_1)$$

и от (2.3),

$$|V_0| > (1 - 3r(r-1)\gamma)(1-3\gamma)n > \left(1 - 3r^2\gamma\right)n = (1-\delta)n,$$

така че (i) е също удовлетворено. Накрая, за всяко $u \in V_0$, от (2.4),

$$\begin{aligned} d_{G_0}(u) &\geq \delta(G_1) - 3r(r-1)\gamma v(G_1) > \left(\frac{r-1}{r} - 3r^2\gamma\right) v(G_1) \\ &\geq \left(\frac{r-1}{r} - 3r^2\gamma\right)|V_0| = \left(\frac{r-1}{r} - \delta\right)|V_0|, \end{aligned}$$

оттук и от (2.7) следва (iii). С това доказателството е завършено. ■

2.3 Едно необходимо условие за r-устойчивост

В този раздел ще дадем необходимо условие за r-устойчивост на семейство от графи. Това условие е доста ограничително и, поне в случая на семейство от фиксирани графи, изглежда също и достатъчно, но тук няма да изследваме тази хипотеза.

Дефиниция 2.2 *За всяко $r \geq 2$, нека $\mathfrak{K}_{r+1}$ е семейството от $(r+1)$-хроматични графи H, за които съществува подразделяне*

$$V(H) = V_1 \cup ... \cup V_r$$

такова, че $V_1, ..., V_{r-1}$ са независими множества, а графът, индуциран от V_r не съдържа пътека с три върха.

Дефиниция 2.3 *Да фиксираме един граф на Туран $T_r(n)$ с класове $V_1, ..., V_r$ и да добавим максимално множество дизюнктни ребра във V_r. Полученият граф ще означаваме с $\mathcal{T}_r(n)$.*

От начина на конструкция следва, че V_r индуцира в $\mathcal{T}_r(n)$ множество от дизюнктни ребра, което покрива всички освен най-много един от върховете на V_r. Нека V_r' е максималното независимо множество в $\mathcal{T}_r(n)[V_r]$ и нека означим $V_r'' = V_r \backslash V_r'$. Ясно е, че $|V_r'| \geq \lceil |V_r|/2 \rceil$, и че V_r'' е също независимо.

Очевидно, от (1.5),

$$e(\mathcal{T}_r(n)) \geq t_r(n) + \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right\rfloor = \frac{r-1}{2r} n^2 + o(n^2). \tag{2.8}$$

Твърдение 2.4 *$\mathcal{T}_r(n)$ не съдържа индуциран r-хроматичен граф с повече от $(1 - 1/3r)n$ върха.*

Доказателство. Да допуснем противното; нека G_0 е един индуциран r-хроматичен подграф на $\mathcal{T}_r(n)$ и нека $U_1, ..., U_r$ са хроматичните класове на G_0.

Очевидно нито един клас U_k не пресича две множества V_i и V_j, $1 \leq i < j \leq r$, тъй като всички $V_i - V_j$ ребра са налице и U_k е независимо множество. Следователно, всяко от множествата U_k се съдържа изцяло в някое V_i.

От друга страна, всяко V_k трябва да съдържа най-малко едно U_j, защото в противен случай броят на върховете в G_0 ще е не по-голям от

$n - \lfloor n/r \rfloor < (1 - 1/3r)\, n$. Следователно V_r съдържа някакъв U_k, и, тъй като максималното независимо подмножество във V_r има не повече от $\lceil |V_r| /2 \rceil$ елемента, виждаме, че

$$|V_r \backslash U_k| = |V_r| - \lceil |V_r| /2 \rceil \geq \lfloor |V_r| /2 \rfloor \geq \lfloor \lfloor n/r \rfloor /2 \rfloor \geq n/3r.$$

По този начин най-малко $n/3r$ върха на $\mathcal{T}_r(n)$ не са в G_0, и следователно броят на върховете в G_0 е не по-голям от $(1 - 1/3r)\, n$, с което доказателството е завършено. ■

Лема 2.5 *Да допуснем, че семейството графи* $\{F_n\}$ *е* r*-устойчиво. Тогава за достатъчно голямо* n, $\min \{\chi(H) : H \in F_n\} \leq r + 1$.

Доказателство. Наистина, да допуснем, че $\{F_n\}$ е r-устойчиво семейство графи такова, че за произволно голямо n множеството F_n съдържа само графи H, за които $\chi(H) \geq r + 2$. Тъй като $\chi(\mathcal{T}_r(n)) = r + 1$ графът $\mathcal{T}_r(n)$ е без H за всяко $H \in F_n$ и

$$e(\mathcal{T}_r(n)) = \left(\frac{r-1}{2r} + o(1)\right) n.$$

Следователно, $\mathcal{T}_r(n)$ трябва да съдържа индуциран r-хроматичен подграф с брой на върховете $(1 + o(1))\, n$, което противоречи на Твърдение 2.4. ■

Теорема 2.6 *Да допуснем, че семейството графи* $\{F_n\}$ *е* r*-устойчиво. Ако за достатъчно голямо* n *множеството* F_n *съдържа само* $(r+1)$*-хроматични графи, то* $F_n \subset \mathfrak{K}_{r+1}$.

Доказателство. Да допуснем, че H е $(r+1)$-хроматичен граф и $H \notin \mathfrak{K}_{r+1}$. Това значи, че при всяко подразделяне

$$V(H) = U_1 \cup ... \cup U_r,$$

където $U_1, ..., U_{r-1}$ са независими множества, графът, индуциран от U_r съдържа P_3.

Нека $V(H) = W_1 \cup ... \cup W_{r+1}$ е оцветяване на върховете на H.

От Твърдение 2.4 следва, че графът $\mathcal{T}_r(n)$ не съдържа индуциран r-хроматичен граф с брой на върховете, по-голям от $(1 - 1/3r)n$, а от (2.8) - че неговият размер удовлетворява

$$e(\mathcal{T}_r(n)) = \left(\frac{r-1}{2r} + o(1)\right) n.$$

От тези две условия следва, че $\{F_n\}$ не е устойчиво, ако графът $\mathcal{T}_r(n)$ е без H. Затова, за да завършим доказателството, ще докажем, че $\mathcal{T}_r(n)$ е без H.

Да допуснем, че $H \subset \mathcal{T}_r(n)$. На първо място ще отбележим, че никое W_k не може да пресича две множества V_i и V_j за $1 \leq i < j \leq r$, тъй като всички $V_i - V_j$ ребра са налице и W_k е независимо. Следователно, всяко W_k се съдържа изцяло в някое V_i.

По-нататък, никое V_k, $1 \leq k < r$, не може да съдържа две отделни множества W_i и W_j. Наистина, в противен случай не съществуват $W_i - W_j$ ребра в H, и следователно, H е r-хроматичен, което е противоречие.

Сега ще покажем, че всяко V_k, $1 \leq k < r$, съдържа някое W_i. Да допуснем, че това не е вярно; например нека V_1 не съдържа нито едно W_i. Тогава независимите множества $V_2, ..., V_{r-1}, V_r', V_r''$ индуцират оцветяване на $V(H)$ в r-цвята, което е противоречие.

Следователно, за $1 \leq i \leq r-1$ всяко V_i съдържа точно едно W_k и оттук, V_r съдържа точно две множества W_k, $1 \leq k \leq r+1$. Но тогава множествата $X_i = V(H) \cap V_i$, $1 \leq i \leq r$, са такова подразделяне на $V(H)$, че X_r не индуцира P_3, което противоречи на нашето допускане. С това доказателството е завършено. ■

2.4 Област на устойчивост

Когато знаем, че едно семейство графи $\{F_n\}$ е r-устойчиво, естествен въпрос е да запитаме, каква може да е структурата на един граф $G \in$

$\mathfrak{F}(n, F_n)$, когато $e(G)$ не е много близо до $(r-1)n^2/2r$, в частност, какво е числото на независимост на G. Ние ще отговорим на този въпрос в най-добре изучения от нас частен случай - при $F_n = K_{r+1}$.

Да припомним следните два резултата от теорията на Ремзи-Туран.

Теорема 2.7 (Erdős и Sós [30]) *Съществува графи $G = G(n)$ без K_{2r+1} такъв,че $\alpha(G) = o(n)$ и*

$$e(G) > \frac{r-1}{2r}n^2 + o\left(n^2\right).$$

Теорема 2.8 (Erdos, Hajnal, Sos и Szemerédi [28]) *Съществува граф $G = G(n)$ без K_{2r} такъв,че $\alpha(G) = o(n)$ и*

$$e(G) > \frac{3r-5}{6r-4}n^2 + o\left(n^2\right).$$

От тези два резултата следва, че дори при

$$e(G) \geq \frac{3r-7}{6r-2}n^2$$

не може да има характеризация на граф G без K_{r+1} в термините на индуциран r-хроматичен подграф от значителен ред.

Оказва се обаче, че, в един по-общ смисъл, структурна информация за графи без K_{r+1} може да се получи.

Нека $G = G(n,m)$. Да дефинираме следната функция

$$\Phi(G,k) = \min\left\{\frac{e(U)}{k} + \frac{e(V\backslash U)}{n-k} - \frac{m}{n}\right\},$$

където минимумът е взет върху всички собствени помножества $U \subset V$ с k върха.

В работата [43] е доказана следната теорема, която дава частична характеризация на плътни графи без K_{r+1}.

Теорема 2.9 *Нека $r \geq 2$ е цяло, $c > 0$ е реално и $G = G(n,m)$ е граф без K_{r+1}, удовлетворяващ $m \geq cn^2$. Съществува константа $\beta = \beta(c,r)$ такава, че за достатъчно големи n е в сила*

$$\Phi\left(G, \lfloor n/2 \rfloor\right) \leq -\beta n.$$

В частност, G може да бъде направен двучастен с премахването на по-малко от

$$\frac{e}{2} - \beta\frac{n^2}{2}$$

ребра.

Нека отбележим, че прилагайки Теорема 2.9 получаваме решение на следната задача на Ердьош, спомената в [3] (стр. 363, задача 25) като нерешена.

Нека $c > 0$ и нека графът $G = G(n, \lfloor cn^2 \rfloor)$ е такъв, че

$$e\left(G\left[W\right]\right) \geq c\left(n/2\right)^2\left(1 + o(1)\right)$$

за всяко $W \subset V$, $|W| = \lfloor n/2 \rfloor$. Тогава за всяко фиксирано r и достатъчно голямо n графът G съдържа K_r.

Глава 3

Графи без K_p

Да припомним понятието за добри задачи на Ремзи, въведено от Бър и Ердьош в [7].

Казваме, че един свързан граф H е p-добър, ако числото на Ремзи $r(K_p, H)$ се задава чрез

$$r(K_p, H) = (p-1)\,(v(H)-1)+1.$$

В раздел 3.1 ще докажем, че пълните графи са устойчиви, и ще използваме този резултат, за да докажем, че графът $B_q^{(l)}$ е p-добър, когато q е достатъчно голямо. Това е доста изненадващ факт, при положение, че $B_q^{(l)}$ съдържа K_l като подграф, а порядъкът на $r\left(K_p, K_l\right)$ е $\min\left\{p^l, l^p\right\}$.

Исторически първият резултат от този тип е получен от Русо и Шихан в [49], които доказват, че

$$r(K_3, B_q) = 2q+3$$

за $q > 1$. В раздел 3.3 ние ще обобщим това до

$$r(K_p, B_q^{(l)}) = (p-1)(q+l-1)+1$$

за всички $p \geq 3$, $l \geq 2$ и достатъчно голямо q.

Този резултат ще получим основно като следствие от един резултат за устойчивост от Ремзи тип, получен в раздел 3.2. От същия този резултат освен това следва, че за всеки фиксиран p-хроматичен граф H е в сила следното общо равенство

$$r(H, B_q^{(l)}) = (p-1)q + o(q).$$

В Раздел 3.4 p-устойчивостта на K_{p+1} се преформулира в спектрални термини.

В Раздел 3.5 се опровергава едно преположение на Ердьош, с което се доказва невъзможността да се формулира p-устойчивостта на K_{p+1} чрез $k_s\left(\overline{G}\right)$ за достатъчно големи s.

Резултатите от тази глава са публикувани в [47], [44] и [42].

3.1 Устойчивост на K_p

Устойчивостта на пълните графи се доказва в Теорема 3.2. В нашето доказателство и по-късно ще имаме нужда и от следната гъвкава теорема на Андрашфаи, Ердьош и Шош [1], чието оригинално доказателство е доста дълго и сложно. За пълнота тук ще дадем едно значително по-късо и по-прозрачно доказателство.

Теорема 3.1 *Ако $G = G(n)$ е граф без K_{p+1}, и минималната му степен удовлетворява*

$$\delta(G) > \left(1 - \frac{3}{3p-1}\right)n,$$

то G е p-хроматичен.

Доказателство. Ще използваме индукция по p. За $p = 1$ твърдението е тривиално, тъй като G няма ребра; да допуснем, че това е вярно за всяко $p' < p$. Очевидно можем да приемем, че G е максимален граф без K_{p+1}, т.е. за всеки два несъседни $u, v \in V$ съществува $(p-1)$-клика в $\Gamma(uv)$. Да изберем връх u за който

$$d(u) = \delta(G) = \delta.$$

Ще покажем че графът $G_u = G[\Gamma(u)]$ е $(p-1)$-хроматичен. За $p=2$, това е очевидно, тъй като $\Gamma(u)$ е независимо множество.

За $p > 2$, имаме за всяко $w \in \Gamma(u)$,

$$d_{G_u}(w) = d(uv) \geq d(u) + d(v) - n \geq 2\delta - n > \left(1 - \frac{3}{3p-4}\right)\delta.$$

Тъй като G_u не съдържа K_p, по индукционното предположение, G_u е $(p-1)$-хроматичен.

По-нататък ще докажем, че множеството $V \setminus (\Gamma(u) \cup \{u\})$ е независимо. С това доказателството ще бъде завършено, тъй като G може да бъде оцветен с p цвята, като първо G_u се оцвети с $p-1$ цвята, а после върховете в $V \setminus \Gamma(u)$ се оцветят с p-тия цвят.

Да допуснем, че $V \setminus (\Gamma(u) \cup \{u\})$ индуцира ребро vw и да изберем две $(p-1)$-клики $R \subset \Gamma(uv)$ и $Q \subset \Gamma(uw)$. Да забележим, че при $r < p$ за всяка r-клика P имаме

$$\begin{aligned} d(P) &\geq \sum_{y \in P} d(y) - (r-1)n \\ &> r\left(1 - \frac{3}{3p-1}\right)n - (r-1)n = n\left(1 - \frac{3r}{3p-1}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Оттук в частност намираме, че

$$d(R) \geq \frac{2n}{3p-1}, \qquad d(Q) \geq \frac{2n}{3p-1}.$$

Тъй като G не съдържа K_{p+1}, имаме

$$|\Gamma(v) \cup \Gamma(u)| \subset V \setminus (\Gamma(R)),$$

откъдето се получава

$$\begin{aligned} d(uv) &\geq d(u) + d(v) - |V \setminus (\Gamma(R))| \geq 2\delta - |V \setminus (\Gamma(R))| \\ &\geq 2\delta - n + \frac{2}{3p-1}n > \left(1 - \frac{1}{3p-4}\right)\delta. \end{aligned}$$

Аналогично получаваме

$$d(uw) > \left(1 - \frac{1}{3p-4}\right)\delta$$

и оттук,

$$d(vw) \geq d(uv) + d(uw) - d(u) > \frac{3p-6}{3p-4}\delta > \frac{3p-6}{3p-1}n. \qquad (3.2)$$

От (3.1) следва, че всяка клика на G се съдържа в p-клика. Да изберем p-клика S, която съдържа реброто vw и да приложим (3.1) към $(p-2)$-кликата $S_1 = S \backslash \{v, w\}$. Получаваме

$$d(S_1) > \left(1 - \frac{3p-6}{3p-1}\right)n = \frac{6n}{3p-1}$$

и оттук, заедно с (3.2), следва, че S се съдържа в $(p+1)$-клика, което е противоречие. ■

Сега ще представим и основния резултат в настоящия раздел.

Теорема 3.2 *За всяко $p \geq 2$ съществува $c > 0$ такова, че за всяко $\alpha \leq c$, ако един граф $G = G(n, m)$ е без K_{p+1} и удовлетворява*

$$m \geq \left(\frac{p-1}{2p} - \alpha\right)n^2,$$

то G съдържа индуциран p-хроматичен граф G_0 с повече от $\left(1 - \alpha^{1/3}\right)n$ върха и с минимална степен

$$\delta(G_0) > \left(1 - \frac{1}{p} - 4\alpha^{1/3}\right)n.$$

Доказателство. Нека c е най-малкия положителен корен на уравнението

$$2x + \left(1 + \frac{3}{3p-1}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2\right)x^{1/3} - \frac{1}{(3p-1)p} = 0.$$

За всяко $x \leq c$ лесно се вижда, че

$$2x + \left(1 + \frac{3}{3p-1}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2\right) x^{1/3} \leq \frac{1}{(3p-1)\,p}. \tag{3.3}$$

Понеже G е граф без K_{p+1} от теоремата на Туран следва, че

$$m \leq t_p\,(n) \leq \frac{p-1}{2p} n^2.$$

Първо ще докажем, че

$$\sum_{i=1}^{n} d^2\,(i) \leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right) mn. \tag{3.4}$$

Наистина, нека $k_3\,(G)$ е броят на всички триъгълници в G. Лесно може да се докаже следното неравенство (виж напр. [3], стр. 302)

$$3k_3\,(G) \geq \sum_{i=1}^{n} d^2\,(i) - nm.$$

Тъй като графът индуциран от съседите на всеки връх i е без K_p, от теоремата на Туран виждаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p-2}{2\,(p-1)} d^2\,(i) \geq 3k_3\,(G)\,,$$

и оттук следва (3.4).

От неравенството на Коши и от (3.4) получаваме

$$\frac{4m^2}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} d^2\,(i) \leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right) mn = (1+\alpha)\,\frac{4m^2}{n}$$

и следователно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(d\,(i) - \frac{2m}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} d^2\,(i) - \frac{4m^2}{n} = \alpha\frac{4m^2}{n} \leq \alpha\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 n^3. \tag{3.5}$$

Нека M_ε е множеството от всички $u \in V$, за които

$$d(u) < \frac{2m}{n} - \varepsilon n. \tag{3.6}$$

За всяко $\varepsilon > 0$ от неравенството (3.5) виждаме, че

$$|M_\varepsilon| \varepsilon^2 n^2 < \sum_{i \in M} \left(d(u) - \frac{2m}{n} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(d(i) - \frac{2m}{n} \right)^2 \leq \alpha \left(\frac{p-1}{p} \right)^2 n^3$$

и следователно,

$$|M_\varepsilon| < \varepsilon^{-2} \alpha \left(\frac{p-1}{p} \right)^2. \tag{3.7}$$

Полагайки $G_\varepsilon = G[V \backslash M_\varepsilon]$ за всяко $u \in V(G_\varepsilon)$ получаваме

$$d_{G_\varepsilon}(u) \geq d(u) - |M_\varepsilon| \geq \frac{2m}{n} - \varepsilon n - |M_\varepsilon| = \frac{p-1}{p} n - 2\alpha n - \varepsilon n - |M_\varepsilon|. \tag{3.8}$$

Ще докажем, че за $\varepsilon = \alpha^{1/3}$ имаме

$$\frac{p-1}{p} n - 2\alpha n - \varepsilon n - |M_\varepsilon| > \frac{3p-4}{3p-1}(n - |M_\varepsilon|) = \frac{3p-4}{3p-1} v(G_\varepsilon). \tag{3.9}$$

Наистина, ако допуснем противното, виждаме, че

$$\left(\frac{1}{(3p-1)p} - 2\alpha - \alpha^{1/3} \right) n \leq \frac{3}{3p-1} |M_{\alpha^{1/3}}| < \frac{3}{3p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right)^2 \alpha^{1/3} n$$

и следователно,

$$2\alpha + \left(1 + \frac{3}{3p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right)^2 \right) \alpha^{1/3} - \frac{1}{(3p-1)p} > 0,$$

което е противоречие с (3.3).

Полагайки $G_0 = G_{\alpha^{1/3}}$, предвид (3.9), от Теорема 3.1 виждаме, че G_0 е p-хроматичен. Накрая, от (3.7) и (3.8), имаме

$$\delta(G_0) \geq \frac{p-1}{p} n - 2\alpha n - \alpha^{1/3} n - \left(\frac{p-1}{p} \right)^2 \alpha^{1/3} n > \left(1 - \frac{1}{p} - 4\alpha^{1/3} \right) n,$$

с което доказателството е завършено. ■

3.2 Едно свойство от Ремзи тип на графи без K_p

В този раздел ще използваме устойчивостта на K_p, за да докажем следната теорема.

Теорема 3.3 *Нека $r \geq 2$, $p \geq 2$ са фиксирани. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $n_0 = n_0(p, r, \varepsilon)$ такова, че всеки граф G с $n \geq n_0$ върха и без K_{p+1}, удовлетворява поне едно от следните условия*

(i) $bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right) > n/p$,

(ii) *G съдържа индуциран p-хроматичен граф G_0 с повече от $(1-\varepsilon)\,n$ върха и минимална степен*

$$\delta(G_0) > \left(1 - \frac{1}{p} - 2\varepsilon\right) n.$$

За краткост множествата с мощност p ще наричаме p-множества.

Основен инструмент в доказателството ни на Теорема 3.3 ще бъде равномерностната лема на Семереди; за свързаните с нея означения и дефиниции виж напр. [38]. Ще са ни нужни и някои технически резултати; първият от тях е едно основно свойство на ε-равномерните двойки (виж [38], Факт 1.4).

Лема 3.4 *Да допуснем, че $0 < \varepsilon < d \leq 1$ и (A, B) е ε-равномерна двойка с $e(A, B) = d|A||B|$. Ако $Y \subset B$ и $(d-\varepsilon)^{r-1}|Y| > \varepsilon|B|$, $(r > 1)$ то съществуват най-много $\varepsilon r\,|A|^r$ r-множества $R \subset A$ за които*

$$\left|\left(\bigcap_{i\in R}\Gamma(i)\right)\cap Y\right| \leq (d-\varepsilon)^r\,|Y|.$$

□

Следващата лема позволява да се получи долна граница за броя r-клики в даден граф, който се състои от няколко плътни ε-равномерни двойки, които имат обща част.

Лема 3.5 *Да допуснем, че $0 < \varepsilon < d \leq 1$ и нека $(d-\varepsilon)^{r-2} > \varepsilon$. Нека H е граф и $V(H) = A \cup B_1 \cup ... \cup B_k$ е негово подразделяне такова, че $|A| = |B_1| = ... = |B_k|$ и за всяко $i \in [k]$ двойката (A, B_i) е ε-равномерна и $e(A, B_i) \geq d|A||B_i|$. Ако m е броят на r-кликите в A, то съществуват най-малко*

$$t|A|(m - \varepsilon r|A|^r)(d-\varepsilon)^r$$

$(r+1)$-клики в H, точно r върха от които са в A.

Доказателство. Нека

$$|A| = |B_1| = ... = |B_k| = t;$$

Да фиксираме B_i и да приложим Лема 3.4 към двойката (A, B_i) с $Y = B_i$. Тъй като съществуват най-много $\varepsilon r a^{r-1}$ r-множества $R \subset A$, за които

$$\left|\left(\bigcap_{u\in R}\Gamma(u)\right)\cap B_i\right| \leq (d-\varepsilon)^r t,$$

лесно е да се види, че съществуват най-малко $(m - \varepsilon r a^r)$ r-клики $R \in M$, за които

$$\left|\left(\bigcap_{u\in R}\Gamma(u)\right)\cap B_i\right| > (d-\varepsilon)^r t.$$

Следователно съществуват най-малко

$$(d-\varepsilon)^r(m - \varepsilon r a^r)t$$

$(r+1)$-клики в H, точно r от върховете на които са в A и един от върховете - в B_i. Сумирайки това неравенство за $i = 1, ..., k$ получаваме желания резултат. ■

Следващата лема е непосредствено следствие от известната теорема на Ремзи и е доказана от Ердьош в [18], стр. 460.

Лема 3.6 *За всички цели числа $p \geq 2$, $r \geq 2$ съществува такава константа $c_{p,r} > 0$, че ако G е без K_{p+1} и има $n \geq r(K_{p+1}, K_r)$ върха, то G съдържа най-малко $c_{p,r}n^r$ независими r-множества.* □

Ще ни е нужен и още един резултат, свързан с равномерностната лема на Семереди - така наречената Основна Лема (виж напр. [38], Теорема 2.1). В нашият случай се използва опростена версия на Основната Лема, която гласи следното.

Теорема 3.7 *Да допуснем, че $0 < \varepsilon < d < 1$ и m е положително цяло число. Нека G е граф с $(p+1)t$ върхове и $V(G) = V_1 \cup ... \cup V_{p+1}$ е подразделен на $p+1$ множества с мощност t такива, че всяка от двойките (V_i, V_j) е ε-равномерна и с плътност най-малко d. Ако $\varepsilon \leq (d-\varepsilon)^p / (p+2)$, то $K_{p+1} \subset G$.* $\square$

Доказателство на Теорема 3.3. Доказателството на теоремата не е сложно, но тъй като съдържа много технически детайли, първо ще го резюмираме накратко. За някое подходящо избрано ε, от равномерностната лема следва, че всички освен εn върха на G могат да бъдат подразделени на k множества $V_1, ..., V_k$ с еднаква мощност такива, че почти всички двойки (V_i, V_j) да са ε-равномерни. Броят на плътните ε-равномерни двойки (V_i, V_j) не може да бъде по-голям от $\frac{p-1}{2p}k^2$, тъй като от Теорема 3.7 и теоремата на Туран следва, че G ще съдържа K_{p+1}; Следователно, съществуват най-малко

$$\left(\frac{1}{2p} + o(1)\right) k^2$$

неплътни ε-равномерни двойки (V_i, V_j). От Лема 3.6, броят на независимите r-множества във всяко от множествата $V_1, ..., V_k$ е $\Theta(n^r)$. Да разгледаме реда на $(r+1)$-книгата в $\overline{G}$, базата на която е случайно избрано независимо r-множество във V_i: за всяка неплътна ε-равномерна двойка (V_i, V_j) почти всеки връх във V_j е страница от такава книга. Също така всяка ε-равномерна двойка (V_i, V_j), плътността на която не е много близка до 1, добавя значително количество допълнителни страници към тези книги. По-точните пресмятания показват, че или

$$bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right) > \frac{n}{p}$$

или броят на всички ε-равномерни двойки (V_i, V_j) с плътност близка до 1 е

$$\left(\frac{p-1}{2p} + o(1)\right) k^2.$$

Следователно, броят на ребрата в G е

$$\left(\frac{p-1}{2p} + o(1)\right) n^2$$

и следователно, според Теорема 3.2, G съдържа желания индуциран p-хроматичен подграф с изискваната минимална степен.

Подробно доказателство. Нека $0 < \delta < 1$ е фиксирано и $c_{p,r}$ е константата от Лема 3.6; да положим

$$d = \min\left\{\delta^{r+1}\frac{1}{2^{r+2}p}\left(\frac{r}{c_{p,r}} + 2r + 1 + 4p\right)^{-1}, \frac{p\delta}{1+p\delta}\left(\frac{r}{c_{p,r}} + 2r + 1\right)^{-1}\right\}$$

и нека $\varepsilon = d^p/2\,(p+1)$. Целесъобразността на тези дефиниции се проявява на по-късните етапи от доказателството. Тъй като $c_{p,r} < (r!)$ лесно е да се види, че

$$0 < 2\varepsilon < d < \delta < 1.$$

Следователно, от неравенството на Бернули, имаме

$$(d-\varepsilon)^p \geq d^p - p\varepsilon d^{p-1} > d^p - p\varepsilon = 2\,(p+1)\,\varepsilon - p\varepsilon = (p+2)\,\varepsilon.$$

От равномерностната лема на Семереди следва, че съществува такова подразделяне

$$[n] = V_0 \cup V_1 \cup ... \cup V_k,$$

че

$$|V_0| < \varepsilon n, \qquad |V_1| = ... = |V_k|$$

и всички освен εk^2 двойки (V_i, V_j) са ε-равномерни. Без загуба на общност можем да приемем, че $|V_i| > r\,(K_{p+1}, K_r)$ и $k \geq 1/\varepsilon$.

Ще разгледаме графите H_{irr}, H_{lo}, H_{mid} и H_{hi}, определени върху множеството от върхове $[k]$ по следния начин:

(i) $(i,j) \in E(H_{irr})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) не е ε-равномерна;

(ii) $(i,j) \in E(H_{lo})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$e(V_i, V_j) \le d\,|V_i|\,|V_j|\,;$$

(iii) $(i,j) \in E(H_{mid})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$d\,|V_i|\,|V_j| < e(V_i, V_j) \le (1-\delta)\,|V_i|\,|V_j|\,;$$

(iv) $(i,j) \in E(H_{hi})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$e(V_i, V_j) > (1-\delta)\,|V_i|\,|V_j|\,.$$

Ясно е, че никои два от тези графи нямат общи ребра и следователно

$$e(H_{irr}) + e(H_{lo}) + e(H_{mid}) + e(H_{hi}) = \binom{k}{2}.$$

Оттук виждаме, че

$$e(H_{lo}) + e(H_{mid}) + e(H_{hi}) \ge \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > (1-2d)\,k^2. \tag{3.10}$$

Тъй като G е без K_{p+1} и

$$\varepsilon \le \frac{(d-\varepsilon)^p}{p+2},$$

прилагайки Теорема 3.7, заключаваме, че $H_{mid} \cup H_{hi}$ е без K_{p+1}. Следователно, от теоремата на Туран, имаме

$$e(H_{mid}) + e(H_{hi}) \le \left(\frac{p-1}{2p}\right) k^2,$$

и по този начин за H_{lo} получаваме

$$e(H_{lo}) \ge \left(\frac{1}{2p} - 2d\right) k^2. \tag{3.11}$$

По-нататък ще оценим $bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right)$ отдолу. За тази цел ще преброим независимите $(r+1)$-множества с точно r върха в някое V_i и един връх извън V_i. Да фиксираме един връх $i \in [k]$ и нека m е броят на независимите r-множества във V_i; от Лема 3.6 имаме $m \geq c_{p,r} |V_i|^r$.

Да означим първо $L = \Gamma_{H_{lo}}(i)$; и да приложим Лема 3.5 при $A = V_i$, $B_j = V_j$ $(j \in L)$ и граф

$$H = \overline{G}\left[A \cup \left(\bigcup_{i \in M} B_i\right)\right].$$

Тъй като двойките $H(V_i, V_j)$ са ε-равномерни и

$$e_H(V_i, V_j) \geq (1-d)|V_i||V_j|,$$

можем да заключим, че съществуват най-малко

$$d_{H_{lo}}(i)|V_i|(m - \varepsilon r |V_i|^r)(1-d-\varepsilon)^r$$

независими $(r+1)$-множества в G, точно r от върховете на които са във V_i и един връх е в $\bigcup_{j \in L} B_j$.

Да положим сега $M = N_{H_{mid}}(i)$ и да приложим отново Лема 3.5 с

$$A = V_i, \quad B_j = V_j \quad (j \in M)$$

и

$$H = \overline{G}\left[A \cup \left(\bigcup_{j \in M} B_j\right)\right].$$

Тъй като двойките $H(V_i, V_j)$ са ε-равномерни и

$$e_H(V_i, V_j) \geq \delta |V_i||V_j|,$$

можем да заключим, че в G съществуват най-малко

$$d_{H_{mid}}(i)|V_i|(m - \varepsilon r |V_i|^r)(\delta - \varepsilon)^r$$

независими $(r+1)$-множества, точно r от върховете на които са във V_i и един е в $\bigcup_{i \in M} B_i$. Тъй като

$$\left(\bigcup_{i \in L} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{i \in M} B_i\right) = \varnothing,$$

то в G съществуват най-малко

$$d_{H_{lo}}(i)\,|V_i|\,(m-\varepsilon r\,|V_i|^r)\,(1-d-\varepsilon)^r+d_{H_{mid}}(i)\,|V_i|\,(m-\varepsilon r\,|V_i|^r)\,(\delta-\varepsilon)^r$$

независими $(r+1)$-множества, точно r от върховете на които са във V_i и един е извън V_i. Следователно, ако вземем средната стойност за всички m независими r-множества във V_i можем да заключим, че

$$\begin{aligned}
bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right) &\geq |V_i|\left(1-\frac{\varepsilon r}{c_{p,r}}\right)\left(d_{H_{lo}}(i)\,(1-d-\varepsilon)^r+d_{H_{mid}}(i)\,(\delta-\varepsilon)^r\right)\\
&\geq n\left(\frac{1-\varepsilon}{k}\right)\left(1-\frac{\varepsilon r}{c_{p,r}}\right)\left(d_{H_{lo}}(i)\,(1-d-\varepsilon)^r+d_{H_{mid}}(i)\,(\delta-\varepsilon)^r\right).
\end{aligned}$$

Като сумираме това неравенство за всички $i=1,...,k$ и изчислим средната стойност, получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right)}{n} &\geq (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon r}{c_{p,r}}\right)\left(\frac{2e\,(H_{lo})}{k^2}(1-d-\varepsilon)^r+\frac{2e\,(H_{mid})}{k^2}(\delta-\varepsilon)^r\right)\\
&> \left(1-\left(\frac{r}{c_{p,r}}+1\right)d\right)\left(\frac{2e\,(H_{lo})}{k^2}(1-2rd)+\frac{2e\,(H_{mid})}{k^2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^r\right)\\
&> \left(1-\left(\frac{r}{c_{p,r}}+2r+1\right)d\right)\frac{2e\,(H_{lo})}{k^2}\\
&\quad+\left(1-\left(\frac{r}{c_{p,r}}+1\right)d\right)\left(\frac{\delta}{2}\right)^r\frac{2e\,(H_{mid})}{k^2}.
\end{aligned}$$

Да допуснем, че твърдението на теоремата не е вярно и, че е в сила

$$bk^{(r+1)}\left(\overline{G}\right)\leq\frac{n}{p}.$$

Оттук имаме

$$e\,(H_{lo})<\frac{k^2}{2p}\left(1-\left(\frac{r}{c_{p,r}}+2r+1\right)d\right)^{-1}\leq\left(\frac{1}{2p}+\frac{\delta}{2}\right)k^2.$$

Като вземем предвид (3.11), получаваме

$$\begin{aligned}
e\,(H_{mid})\left(\frac{\delta}{2}\right)^r &< \left(\frac{1}{2p}-\left(1-\left(\frac{r}{c_{p,r}}+2r+1\right)d\right)\left(\frac{1}{2p}-2d\right)\right)k^2\\
&\leq\frac{1}{2p}\left(\frac{r}{c_{p,r}}+2r+1+4p\right)dk^2,
\end{aligned}$$

и следователно от начина, по който е избрано d, виждаме, че

$$e\left(H_{mid}\right) < \frac{\delta k^2}{2}.$$

От (3.10) следва

$$e\left(H_{hi}\right) > \left(1 - \frac{\delta}{2} - \left(\frac{1}{2p} + \frac{\delta}{2}\right)\right) k^2 > \left(\frac{p-1}{2p} - \delta\right) n^2,$$

и следователно, от дефиницията на H_{hi}, получаваме

$$\begin{aligned} e\left(G\right) \geq e\left(H_{hi}\right) \left(\frac{\left(1-\varepsilon\right)n}{k}\right)^2 \left(1-\delta\right) > \left(\frac{p-1}{2p} - \delta\right)\left(1-2\varepsilon\right)\left(1-\delta\right)n^2 \\ > \left(\frac{p-1}{2p} - 4\delta\right) n^2. \end{aligned}$$

Оттук и от Теорема 3.2 желаният резултат следва. ■

Следвайки същата основна идея, както при доказателството на Теорема 3.3, но прилагайки вместо Теорема 3.7 пълната сила на Основната Лема (Key Lemma), можем да получим и един по-общ резултат, чието доказателство обаче е доста по-лесно от това на Теорема 3.3.

Теорема 3.8 *Нека H е фиксиран $(p+1)$-хроматичен граф. За всеки граф G с n върха и без H,*

$$bk^{(r)}\left(\overline{G}\right) > \left(\frac{1}{p} + o\left(1\right)\right) n.$$

□

Да забележим, че графът $K_p\left(q+r-1\right)$ е p-хроматичен и допълнителният му граф не съдържа $B_q^{(r)}$, така че за всеки $(p+1)$-хроматичен граф H и всички r, q имаме

$$r\left(H, B_q^{(r)}\right) \geq p\left(q+r-1\right) + 1.$$

Оттук и Теорема 3.8 непосредствено получаваме следната теорема.

Теорема 3.9 *За всеки фиксиран $(p+1)$-хроматичен граф H и фиксирано цяло число $r > 1$, числото на Ремзи $r\left(H, B_q^{(r)}\right)$ се задава чрез*

$$r\left(H, B_q^{(r)}\right) = pq + o\left(q\right).$$

□

Нека отбележим, че не е възможно да се избегне члена $o\left(q\right)$ в Теорема 3.9 без да се направят допълнителни допускания за H, тъй като, както Фодри, Русо и Шиихан доказват в [33], неравенството

$$r\left(C_4, B_q^{(3)}\right) \geq q + 2\sqrt{q}$$

е в сила за безкрайно много стойности на q.

Обаче за $H = K_{p+1}$ и достатъчно голямо q може да се докаже точен резултат.

3.3 Числата на Ремзи $r\left(K_p, B_q^{(l)}\right)$

В този раздел ще определим $r\left(K_p, B_q^{(r)}\right)$ при фиксирани $p \geq 3$, $r \geq 2$ и достатъчно големи стойности на q.

Теорема 3.10 *При фиксирани $p \geq 2$ и $r \geq 2$ е в сила*

$$r(K_{p+1}, B_q^{(r)}) = p(q + r - 1) + 1$$

за достатъчно големи стойности на q.

Доказателство. Тъй като $K_p(q + r - 1)$ не съдържа K_{p+1}, а допълнителният му граф не съдържа $B_q^{(r)}$, имаме

$$r(K_{p+1}, B_q^{(r)}) \geq p(q + r - 1) + 1.$$

Нека G е граф без K_{p+1} с брой на върховете

$$n = p(q + r - 1) + 1.$$

Тъй като $n/p > q$, или доказателствоте ще е завършемо, или G съдържа индуциран p-хроматичен подграф G_0 с $pq + o(q)$ върха и минимална степен

$$\delta(G_0) \geq \left(1 - \frac{1}{p} + o(1)\right) n.$$

Използвайки тази граница за $\delta(G_0)$, можем да докажем с индукция по p, че G_0 съдържа $K_p(r)$ - това следва също и от теоремата на Ердьош и Стоун [31].

Да фиксираме едно копие на $K_p(r)$ в G_0 и нека $A_1, \ldots, A_p$ са неговите класове. Да положим

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_p, \quad B = V(G) \backslash A.$$

Ако някой връх $u \in B$ е съседен за поне един връх във всяка от частите $A_1, A_2, \ldots, A_p$, то G съдържа K_{p+1}. В противен случай за всеки връх $i \in B$ съществува най-малко едно j такова, че i е съседен в $\overline{G}$ на всички членове на A_j. От принципа на Дирихле следва, че $bk^{(r)}(\overline{G}) = s$ където

$$s \geq \left\lceil \frac{n - pr}{p} \right\rceil = \left\lceil q - 1 + \frac{1}{p} \right\rceil = q,$$

и доказателството е завършено. ■

Прилагането на равномерностната лема в доказателството на

$$r(K_p, B_q^{(r)}) = (p-1)(q+r-1) + 1$$

за достатъчно големи q наистина изисква q да нараства доста бързо като функция на останалите параметри p и r. Това повдига въпроса за скоростта на нарастване на q.

Приведените по-долу изчисления показват, че q трябва да нараства по-бързо от степен на p.

Теорема 3.11 *За произволно k,*

$$\frac{r(K_m, B_{m^k}^{(r)})}{m^{k+r-1}} \to \infty$$

когато $m \to \infty$.

Доказателство. Ще докажем, че

$$r(K_m, B_{m^k}) > \frac{cm^{k+r}}{(\log m)^r}$$

за всички достатъчно големи m. Нека

$$n = \left\lfloor c\frac{m^{k+r}}{(\log m)^r} \right\rfloor$$

където c предстои да бъде избрано, и нека

$$p = \frac{C \log m}{m}$$

където $C = 2(k + r - 1)$.

Нека G е случайният граф $G = G(n, 1 - p)$. Вероятността да е в сила $K_m \subset G$ удовлетворява

$$P(K_m \subset G) \leq \binom{n}{m}(1-p)^{\binom{m}{2}} \leq \binom{n}{m}e^{-pm(m-1)/2}$$
$$< \left(\frac{ne^{1+p/2}m^{-(k+r-1)}}{m}\right)^m = o(1).$$

За да ограничим вероятността $P\left(B^{(r)}_{m^k} \subset \overline{G}\right)$, използваме следното следствие от неравенството на Чернов: ако $X_1, ..., X_n$ са независими случайни величини, $X_i = 1$ с вероятност p и $X_i = 0$ с вероятност $1-p$, то за $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ е в сила

$$P(X \geq M) \leq \left(\frac{npe}{M}\right)^M$$

за всяко $M \geq np$. Така намираме, че

$$P(B_{m^k} \subset \overline{G}) \leq \binom{n}{r}p^{r(r-1)/2}\left(\frac{(n-r)p^r e}{m^k}\right)^{m^k}.$$

Тъй като произведението на първите два множителя нараства полиномиално по m, за да е в сила $P(B^{(r)}_{m^k} \subset \overline{G}) = o(1)$ е достатъчно да вземем

$$c = \frac{1}{3C^r}$$

така че

$$\frac{(n-r)p^r e}{m^k} \leq \frac{np^r e}{m^k} \leq \frac{(cm^{k+r}/(\log m)^r)((C/m)\log m)^r e}{m^k} = \frac{e}{3},$$

и следователно множителят

$$\left(\frac{(n-r)p^r e}{m^k}\right)^{m^k}$$

ще се стреми към 0 експоненциално. Следователно вероятността $P\left(B^{(r)}_{m^k} \subset \overline{G}\right)$ се стреми към 0 и значи съществува граф $G = G(n)$ такъв, че $K_m \nsubseteq G$ и $B^{(r)}_{m^k} \nsubseteq \overline{G}$. ■

3.4 Спектрална устойчивост на K_p

В този раздел ще изложим резултата за p-устойчивост на K_{p+1} в спектрални термини. Това направление изглежда много перспективно и предстои тепърва да се развива.

Ще започнем с един екстремален резултат за максималната собствена стойност на графи без K_{p+1}, получен в [44].

Нека $G = G(n,m)$ е граф без K_{p+1}. Добре известният резултат на Моцкин и Щраус [16] гласи, че за всеки n-вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ такъв, че $x_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ и $x_1 + ... + x_n = 1$, е в сила

$$\sum_{i,j \in E(G)} x_i x_j \leq \frac{p-1}{p}. \tag{3.12}$$

Нека μ е най-голямата собствена стойност на G и нека $(y_1, ..., y_n)$ е съответен собствен вектор с дължина 1. Прилагайки неравенството на Коши получаваме

$$\mu^2 = \left(\sum_{i,j \in E(G)} y_i y_j\right)^2 \leq 2m \sum_{i,j \in E(G)} y_i^2 y_j^2.$$

От друга страна, $y_1^2 + ... + y_n^2 = 1$ и следователно, от (3.12),

$$\sum_{i,j \in E(G)} y_i^2 y_j^2 \leq \frac{p-1}{p}.$$

Оттук,

$$\mu^2 \leq 2m\frac{p-1}{p}$$

и получаваме следното твърдение, което както изглежда е предположено за пръв път от Едуардс и Елфик в 1983 [15].

Теорема 3.12 *За всеки граф $G = G(n, m)$ без K_{p+1} е в сила*

$$\mu(G) \leq \sqrt{2\frac{p-1}{p}m}. \tag{3.13}$$

Неравенството (3.13) е точно за всеки граф G, състоящ се от пълен p-хроматичен граф със равни хроматични класове и произволен брой изолирани върхове ([11], стр. 73-74). Интересно е, че при $p = 2$ това неравенство е точно за някои съществено нерегулярни графи като например пълни двучастни графи със 0 или повече изолирани върхове.

Трябва да отбележим, че простотата на горното доказателство се дължи изключително на силата на метода на Моцкин и Щраус и неравенството (3.13) въобще не е тривиален резултат. Не само, че Едуардс и Елфик признават в [15], че не могат да го докажат, но това неравенство усилва редица известни резултати. Например през 1986 Уилф [17], използувайки същия резултат на Моцкин и Щраус, се приближава плътно до доказването на (3.13), но по необяснима причина не го забелязва и доказва само някои по-слаби резултати.

В работата [44] са изследвани подробно други следствия на (3.13), но тук ние ще разгледаме едно твърдение, което показва, че устойчивостта може да се разглежда в спектрален контекст.

Теорема 3.13 *За всяко $p \geq 2$ съществува $c > 0$ такова, че за всяко $\alpha \leq c$, ако един граф $G = G(n, m)$ е без K_{p+1} и удовлетворява*

$$\mu(G) \geq \left(\frac{p-1}{p} - \alpha\right) n, \tag{3.14}$$

то G съдържа индуциран p-хроматичен граф G_0 с повече от $\left(1 - \alpha^{1/3}\right) n$ върха и с минимална степен

$$\delta(G_0) > \left(1 - \frac{1}{p} - 4\alpha^{1/3}\right) n.$$

Доказателство. Наистина, от (3.14) и Теорема 3.12 следва

$$2\frac{p-1}{p} e(G) \geq \mu^2(G) > \left(\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 - 2\alpha\frac{p-1}{p}\right) n^2$$

и оттук

$$e(G) \geq \left(\frac{p-1}{2p} - \alpha\right) n^2.$$

Налице са условията на Теорема 3.2, откъдето твърденията следват непосредсвено. ■

3.5 Опровержение на едно предположение на Ердьош

На базата на Теорема 3.2 е просто упражнение да се охарактеризира p-устойчивостта на K_{p+1} чрез $e\left(\overline{G}\right)$. В този раздел ще покажем, че подобна характеризация не е възможна чрез $k_s\left(\overline{G}\right)$ за достатъчно големи s.

Да дефинирима функцията

$$f(n, s, p) = \min\{k_s(\overline{G})| : v(G) = n,\ k_{p+1}(G) = 0\}.$$

Тази функция е въведена от Ердьош в [18] in 1962. От графа $T_p(n)$ се вижда, че

$$f(n, s, p) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{\lfloor (n+i)/p \rfloor}{s}. \tag{3.15}$$

Понеже тази оценка е точна за $s = 3$, $p = 2$ и достатъчно голямо n, Ердьош предполага, че тя е вярна за всички $s \geq 3$, $p \geq 2$ и достатъчно голямо n. Наскоро в [42] бе доказана, че предположението на Ердьош може да е вярно само за краен брой стойности на s и p. По-точно, доказано е, че съществува $c > 0$ такава,че с изключение на краен брой стойности на s и p, е в сила

$$\begin{aligned} f(n,s,p) &< c^{s-1}\frac{(p2^{s-1}-p+1)(\log p)^{s-1}}{p^{2s-2}}\binom{n}{s} \\ &\ll k_s(\overline{T_p(n)}). \end{aligned}$$

Оттук следва, че има граф $G = G(n)$ без K_{p+1} такъв, че

$$f(n,s,p) = k_s(\overline{T_p(n)})$$

и G е съществено различен от $T_p(n)$.

Глава 4

Съществуване и устойчивост на книги

През 1962 Ердьош [19] започва да изследва книговото число на графи. От 1962 насам книгите са обект на значителен интерес в теория на графите както в задачите от Туранов тип, (виж напр.[37], [27] и [26]) така и в задачите на Ремзи (виж напр. [49], [33] и [34]).

В статията си [27] Ердьош, Фодри и Русо дефинират функцията

$$\beta(n,m) = \min\{bk(G) \mid G = G(n,m)\}.$$

В настоящата глава ще изучаваме функцията $\beta(n,m)$ и някои нейни варианти. Ще докажем едно неравенство за книговото число, с помощта на което ще получим оценки за $\beta(n,m)$ и ще отговорим на два въпроса, поставени от Ердьош.

Главата е организирана по следния начин: в раздел 4.1 с метода на Хаджииванов и Никифоров [37] се доказва една оценка за $\beta(n,m)$, изразена чрез последователността от степени и други параметри на графа. От този резултат в частност следва, че

$$\beta\left(n, \left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor + 1\right) > \frac{n}{6},$$

както е предположено от Ердьош и по-късно доказано от Едуардс. Допълнително определяме и $\beta(n, cn^2)$ за безкрайно много стойности на c в интервала $1/4 < c < 1/3$. В раздел 4.2 доказваме, че големите книги са устойчиви. По-точно, всеки граф

$$G = G\left(n, \left(\frac{1}{4} - \alpha\right) n^2\right)$$

при $0 < \alpha < 17^{-3}$ или съдържа книга с ред, близък до $n/6$, или съдържа голям индуциран двучастен граф с минимална степен, близка до $n/2$. В последния раздел използваме това структурно свойство, за да отговорим на два въпроса на Ердьош относно книговото число на графите $G\left(n, n^2/4 - f(n)\, n\right)$, всяко ребро на които принадлежи на триъгълник и за които е в сила $0 < f(n) \leq n^{2/5-\varepsilon}$.

4.1 Оценка отдолу на книговото число на граф

През 1962 Ердьош [19] изказва предположение, че книговото число на граф G с n върха и брой на ребрата, по-голям от $\lfloor n^2/4 \rfloor$, е не по-малко от $\lfloor n/6 \rfloor$, т.е.,

$$\beta\left(n, \lfloor n^2/4 \rfloor + 1\right) \geq n/6$$

Това е доказано от Едуардс в непубликуван ръкопис и независимо от него от Хаджииванов и Никифоров в [37].

Нека за $r \geq 3$ и $0 \leq j < r$ означим с $K_r^{(j)}$ графа, който се състои от пълния граф K_{r-1} плюс един допълнителен връх, свързан с точно $r-j-1$ от върховете на K_{r-1}. С $k_r^{(j)}(G)$ ще означим броя индуцирани подграфи на G, които са изоморфни на $K_r^{(j)}$, така например $k_4^{(3)}(G)$ означава броя индуцирани подграфи на G, които са изоморфни на триъгълник с един изолиран връх.

Теорема 4.1 *Нека $G = G(n, m)$ е граф с последователност от степени $d(1), ..., d(n)$. Тогава,*

$$\left(6k_3(G) - \sum_{i=1}^{n} d^2(i) + nm\right) bk(G) \geq nk_3(G) + 8k_4(G) + 2k_4^{(3)}(G).$$

Доказателство. В доказателството ще използваме някои от аргументите в [37]. Да положим $\beta = bk(G)$. Очевидно G съдържа точно $(n-3)\,k_3(G)$ двойки (v,T), където $v \in V(G)$ и T е триъгълник в G. Също така, един K_4 подграф на G съдържа точно 4 такива двойки; един $K_4^{(j)}$ подграф съдържа две такива двойки, ако $j=1$, и една такава двойка, ако $j=2$ или 3. Следователно,

$$(n-3)\,k_3(G) = 4k_4(G) + 2k_4^{(1)}(G) + k_4^{(2)}(G) + k_4^{(3)}(G). \tag{4.1}$$

Имаме

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \binom{d(uv)}{2} = 6k_4(G) + k_4^{(1)}(G),$$

откъдето

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \left(d^2(uv) - d(uv)\right) = 12k_4(G) + 2k_4^{(1)}(G).$$

Тъй като

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d(uv) = 3k_3(G), \tag{4.2}$$

виждаме, че

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d^2(uv) = 12k_4(G) + 2k_4^{(1)}(G) + 3k_3(G).$$

Като извадим (4.1) от последното равенство и пренаредим членовете, получаваме

$$nk_3(G) = \sum_{(u,v)\in E(G)} d^2(uv) - 8k_4(G) + k_4^{(2)}(G) + k_4^{(3)}(G). \tag{4.3}$$

За да елиминираме $k_4^{(2)}(G)$ от (4.3) за всяко $u \in V(G)$ полагаме $\Gamma'(u) = V(G)\backslash\Gamma(u)$. В сумата

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d(uv)\,|\Gamma'(i)\cap\Gamma'(j)|$$

всеки елемент $K_4^{(2)}$ се брои веднаж, а всеки елемент $K_4^{(3)}$ - три пъти, така че получаваме

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d(uv)\left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right| = k_4^{(2)}(G) + 3k_4^{(3)}(G). \tag{4.4}$$

Като извадим (4.4) от (4.3), виждаме, че

$$\begin{aligned} nk_3(G) &= \sum_{(u,v)\in E(G)} d^2(uv) + \sum_{(u,v)\in E(G)} d(uv)\left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right| - 8k_4(G) - 2k_4^{(3)}(G) \\ &= \sum_{(u,v)\in E(G)} d(uv)\left(d(uv) + \left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right|\right) - 8k_4(G) - 2k_4^{(3)}(G). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Като вземем предвид, че $d(uv) \leq \beta$ за всяко ребро uv и припомним (4.2), от неравенството (4.5) следва, че

$$\begin{aligned} nk_3(G) &\leq \beta \sum_{(u,v)\in E(G)} \left(d(uv) + \left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right|\right) - 8k_4(G) - 2k_4^{(3)}(G) \\ &= \beta\left(3k_3(G) + \sum_{(u,v)\in E(G)} \left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right|\right) - 8k_4(G) - 2k_4^{(3)}(G) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Тъй като

$$\left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right| = n - d(u) - d(v) + d(uv).$$

намираме, че

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v)\in E(G)} \left|\Gamma'(u)\cap\Gamma'(v)\right| &= \sum_{(u,v)\in E(G)} \left(n - d(u) - d(v) + d(uv)\right) \\ &= 3k_3(G) + nm - \sum_{i=1}^{n} d^2(i). \end{aligned}$$

Замествайки горното в (4.6) виждаме, че

$$nk_3(G) + 8k_4(G) + 2k_4^{(3)}(G) \leq 6\beta k_3(G) + \beta\left(-\sum_{i=1}^{n} d^2(i) + nm\right),$$

което и трябваше да докажем. ■

Следствие 4.2 *За всеки граф* $G = G(n, m)$, *ако* $m > n^2/4$, *то*

$$bk(G) \geq \frac{2m}{n} - \frac{n}{3}. \tag{4.7}$$

Доказателство. Полагайки $\beta = bk(G)$, от Теорема 4.1 следва, че

$$\left(6k_3(G) - \sum_{i=1}^{n} d^2(i) + nm\right)\beta \geq nk_3(G) + 8k_4(G) + 2k_4^{(3)}(G) \geq nk_3(G),$$

и следователно

$$(6\beta - n)\, k_3(G) \geq \beta \left(\sum_{i=1}^{n} d^2(i) - nm\right). \tag{4.8}$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$, имаме

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(i) \geq \frac{4m^2}{n} > nm; \tag{4.9}$$

и по-специално,

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(i) - nm > 0.$$

Оттук и (4.8) следва, че $6\beta > n$. Освен това, тъй като $3k_3(G) \leq \beta m$, от (4.8) и (4.9) виждаме, че

$$\frac{1}{3}(6\beta - n)\beta m \geq \beta\left(\frac{4m^2}{n} - nm\right),$$

откъдето следва (4.7). ■

В хода на горното доказателство доказахме и резултата на Едуардс, споменат във въведението; този резултат следва непосредствено и от Следствие 4.2.

Следствие 4.3 *За всеки граф* $G(n, \lfloor n^2/4 \rfloor + 1)$ *е в сила* $bk(G) > n/6$. □

Показаният по-долу граф $H_{s,t}$, конструиран от Ердьош, Фодри и Русо в [27], показва, че оценката в Следствие 4.2 е съществено най-добрата възможна.

Пример 4.4 *Нека $t \geq 1$, $s > 3$ са фиксирани цели числа. Нека множеството от върхове $V = [n]$ за $n = 3st$ е разделено на $3s$ множества V_{ij} $(i \in [3]\,,\ j \in [r])$ с мощност t. Два от върховете $v \in V_{ij}$ и $u \in V_{kl}$ са свързани с ребро тогава и само тогава, когато $i \neq k$ и $j \neq l$.*

С просто преброяване се вижда, че

$$e\left(H_{s,t}\right) = 3s\left(s-1\right)t^2 = 3s\left(s-1\right)\left(\frac{n}{3s}\right)^2 = \frac{s-1}{3s}n^2,$$

и

$$bk\left(H_{s,t}\right) = \left(s-2\right)t = \frac{\left(s-2\right)n}{3s}.$$

От друга страна, от Следствие 4.2 имаме

$$bk\left(H_{s,t}\right) \geq \frac{2e\left(H_{s,t}\right)}{n} - \frac{n}{3} = \frac{2\left(s-1\right)n}{3s} - \frac{n}{3} = \frac{\left(s-2\right)n}{3s},$$

оттук се вижда, че оценката в Следствие 4.2 е точна за n, m, удовлетворяващи $3s|n$, $s > 8$, и $m = \left(s-1\right)n^2/3s$.

Един друг пример за екстремален граф, приведен в [37], може да се дефинира по следния начин.

Пример 4.5 *Нека $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}$ са дизюнктни множества за които $|A_{11}| = |A_{12}| = |A_{13}| = k-1$ и $|A_{21}| = |A_{22}| = |A_{23}| = k+1$. Нека $V\left(G\right)$ е обединението на тези множества. За всяко $1 \leq j < k \leq 3$ да свържем всеки връх от A_{ij} с всеки връх на A_{ik}, а за $j = 1,2,3$ да свържем всеки връх на A_{1j} с всеки връх на A_{2j}.*

Лесно може да се провери, че полученият граф има $n = 6k$ върха,

$$9k^2 + 3 > \frac{n^2}{4}$$

ребра и книговото му число е точно $k + 1 = n/6 + 1$.

4.2 Устойчивост на семейството $\left\{B_{(1/6+o(1))n}\right\}$

В този раздел ще докажем, че семейството $\left\{B_{(1/6+o(1))n}\right\}$ е устойчиво в следния смисъл.

Теорема 4.6 *Нека* $0 < \alpha < 10^{-5}$. *За всеки граф* $G = G(n,m)$, *удовлетворяващ*

$$m \geq \left(\frac{1}{4} - \alpha\right) n^2 \tag{4.10}$$

е в сила или

$$bk(G) > \left(\frac{1}{6} - 2\alpha^{1/3}\right) n, \tag{4.11}$$

или G *съдържа индуциран двучастен граф* G_0 *с най-малко* $\left(1 - \alpha^{1/3}\right) n$ *върха и минимална степен*

$$\delta(G_0) > \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n. \tag{4.12}$$

Доказателство. Ако $m > n^2/4$, то от Следствие 4.3 следва, че $bk(G) > n/6$, което е по-силно от (4.11), така че можем да допуснем, че $m \leq n^2/4$. По-нататък, ако

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(i) > nm,$$

то от Теорема 4.1 следва, че

$$(6bk(G) - n)\, k_3(G) > 0$$

и така отново $bk(G) > n/6$. Следователно, можем да допуснем

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(i) \leq nm.$$

Очевидно, че от (4.10) следва

$$\frac{4m^2}{n} \geq m(n - 4\alpha n) = nm - 4\alpha nm$$

и следователно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(d\left(i\right)-\frac{2m}{n}\right)^{2}=\sum_{i=1}^{n}d^{2}\left(i\right)-\frac{4m^{2}}{n}\leq 4\alpha nm\leq\alpha n^{3}. \tag{4.13}$$

Да положим

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\alpha^{1/3},\\ M&=\{u\in V(G):\ d\left(u\right)<\frac{2m}{n}-\varepsilon n\},\\ G_0&=G\left[V\backslash M\right].\end{aligned}$$

Твърдим, че G_0 има исканите свойства.

Първо ще покажем, че $\delta\left(G_0\right)$ удовлетворява (4.12). От (4.13),

$$|M|\,\varepsilon^{2}n^{2}\leq\sum_{v\in M}\left(d\left(v\right)-\frac{2m}{n}\right)^{2}<\sum_{i=1}^{n}\left(d\left(i\right)-\frac{2m}{n}\right)^{2}\leq\alpha n^{3}.$$

Следователно,

$$|M|<\left(\alpha/\varepsilon^{2}\right)n=\alpha^{1/3}n,$$

т.е.,

$$v\left(G_0\right)>\left(1-\alpha^{1/3}\right)n.$$

Също така, за всяко $v\in V\backslash M$, имаме

$$\begin{aligned}d_{G_0}\left(v\right)&\geq d\left(v\right)-|M|>\left(\frac{2m}{n}-\varepsilon n\right)-|M|=\frac{n}{2}-2\alpha n-\alpha^{1/3}n-|M|\\ &>\left(\frac{1}{2}-2\alpha n-2\alpha^{1/3}\right)n\geq\left(\frac{1}{2}-4\alpha^{1/3}\right)n.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Остава да докажем, че G_0 е двучастен. Да допуснем първо, че G_0 съдържа триъгълник с върхове например u, v, w. Тъй като

$$n\geq d\left(u\right)+d\left(v\right)+d\left(w\right)-d\left(uv\right)-d\left(uw\right)-d\left(vw\right),$$

намираме, че

$$\begin{aligned} d(uv) + d(uw) + d(vw) &\geq d(u) + d(v) + d(w) - n \\ &\geq 3\left(\frac{1}{2} - \alpha - \alpha^{1/3}\right) n - n. \end{aligned}$$

Следователно

$$bk(G) \geq \left(\frac{1}{6} - \alpha n - \alpha^{1/3}\right) n \geq \left(\frac{1}{6} - 2\alpha^{1/3}\right) n$$

и (4.12) е в сила.

Накрая да допуснем, че G_0 е без триъгълник. Тъй като $\alpha < 10^{-5}$, виждаме, че

$$\delta(G_0) \geq \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n > \frac{2}{5} v(G_0).$$

Оттук, като приложим Теорема 3.1 за $p = 2$, получаваме, че G_0 е наистина двучастен, с което доказателството е завършено. ■

Лесно е да се види, че с малко повече внимание при доказателството на $\delta(G_0) > 2v(G_0)/5$, условието за α може да бъде отслабено до $0 < \alpha < 17^{-3}$.

4.3 Две задачи на Ердьош

Ердьош и Ротшилд започват да изучават книговото число на графи, всяко ребро на които се съдържа в триъгълник. В [24] и [25] сам Ердьош дава някои резултати за такива графи.

Да допуснем, че $f(n)$ е фиксирана положителна функция на n, и нека с $TG(n, f)$ означим множеството от всички графи $G = G(n, m)$, за които всяко ребро на G се съдържа в триъгълник и освен това

$$m > \max\left\{n^2/4 - f(n)\, n, 0\right\}.$$

Нека означим

$$\gamma(n, f) = \min\left\{bk(G) \mid G \in TG(n, f)\right\}.$$

В [24], стр. 91, Ердьош доказва, че за всяко $c > 0$ съществува $c_1 > 0$ такова, че

$$\gamma(n, c) \geq c_1 n$$

за достатъчно голямо n. Оттук, ако означим

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\gamma(n, c)}{n} = \sigma(c),$$

виждаме, че $\sigma(c) > 0$ за всяко $c > 0$. Ердьош поставя въпроса колко голямо е $\sigma(c)$. Следващата теорема дава един отговор, който е асимптотично точен, когато c се стреми към 0.

Теорема 4.7 *За всяка функция* $f(n)$, *удовлетворяваща* $0 < f(n) < n/4$, *е в сила*

$$\gamma(n, f) > \frac{n}{12f(n) + 6}.$$

Доказателство. От Теорема 4.7 за $\beta = bk(G)$ имаме

$$\left(6k_3(G) - \sum_{i=1}^{n} d^2(i) + nm\right)\beta \geq nk_3(G),$$

и следователно,

$$(6\beta - n)\, k_3(G) \geq \beta \left(\sum_{i=1}^{n} d^2(i) - nm\right).$$

Като приложим неравенството на Коши към $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(i) \geq 4m^2/n,$$

и оттук

$$(6\beta - n)\, k_3(G) \geq \beta \left(\frac{4m^2}{n} - nm\right) > -4f(n)\,\beta m.$$

Очевидно $3k_3 \geq m$; оттук, ако допуснем, че $6\beta \leq n$, виждаме, че

$$12f(n)\,\beta m > (n - 6\beta)\, k_3(G) \geq (n - 6\beta)\, m,$$

и желаният резултат следва. ■

Ако приложим Теорема 4.7 за $f(n) = c$, получаваме

$$\sigma(c) \geq \frac{1}{12c+6}. \tag{4.15}$$

От друга страна, с лека модификация на графите, описани в Пример 4.4 може да се получи такъв граф

$$G = G\left(n, \frac{n^2}{4} - O(1)\right),$$

че всяко ребро на G се съдържа в триъгълник и

$$bk(G) \leq \frac{n}{6},$$

откъдето, заедно с (4.15), следва

$$\lim_{c \to 0} \sigma(c) = \frac{1}{6}.$$

За големи c обаче Теорема 4.7 не е достатъчно точна. Преди да получим оценка отдолу на $\gamma(n, f)$, валидна за по-общ вид функции f, ще припомним графа, приведен от Ердьош в [25].

Пример 4.8 *Да предположим, че $f(n)$ е избрана така, че $0 < f(n) < n/4$ и $f(n)$ се стреми към безкрайност с нарастването на n и да положим $l_n = f(n)^{1/2}$. Ще дефинираме графа G по следния начин:*

Нека

$$\begin{aligned} V(G) &= [n] = A \cup B \cup C, \\ |A| &= l_n^2, \qquad |B| = |C| = \left(n - l_n^2\right)/2. \end{aligned}$$

Съединяваме всеки връх на B с всеки връх на C. След това разделяме B и C на l_n приблизително еднакви дизюнктни множества B_i и C_i. Накрая свързваме всеки връх $x_{ij} \in A$ с всеки връх на B_i и C_j.

Лесно е да се види, че

$$e(G) = n^2/4 - f(n)\,n,$$

и всяко ребро на G се съдържа в триъгълник и $bk(G) = o(n)$.

За да получим точна оценка на $bk(G)$, ще опишем по-точно графа G. Да положим

$$k = \left\lfloor (2f(n))^{1/2} \right\rfloor,$$

така че

$$k^2 \leq 2f(n) < (k+1)^2.$$

Нека $n = 2kt + s$, където $0 \leq s < 2k$. Да означим $V(G) = [n]$ и да разделим $[n]$ на $2s+2$ множества

$$A, B_1, ..., B_k, C_1, ..., C_k, S$$

такива, че

$$|A| = k^2, \; |B_1| = ... = |B_k| = |C_1| = ... = |C_k| = t, \; |S| = s.$$

Да съединим всеки връх от $\cup_{i=1}^k B_i$ с всеки връх $\cup_{i=1}^k C_i$; и означим членовете на A с a_{ij} $(i, j \in [k])$, и за всяко $i, j \in [k]$, да съединим a_{ij} с всички върхове на $B_i \cup C_j$. С елементарни изчисления получаваме

$$\begin{aligned} e(G) &= \frac{(n-s-k^2)^2}{4} + k^2 \frac{2(n-s-k^2)}{2k} \geq \frac{(n-2k-k^2)^2}{4} + k\left(n-2k-k^2\right) \\ &\geq \frac{n^2}{4} - \frac{k^2 n}{2} + \frac{k^4 - 4k^2}{4} > \frac{n^2}{4} - f(n)\,n \end{aligned}$$

и

$$bk(G) \leq \frac{n-s-k^2}{2k} < \frac{n}{2k} \leq \frac{n}{2\sqrt{2f(n)}}.$$

Тъй като очевидно $G \in TG(n, f)$, веднага получаваме оценката

$$\gamma(n, f) < \frac{n}{2\sqrt{2f(n)}}. \tag{4.16}$$

Следващата ни цел е да покажем, че за широк клас от функции f, (4.16) е по същество точна.

Теорема 4.9 *Нека* $0 < c < 2/5$ *и* $0 < \varepsilon < 1$ *са константи и* $0 < f(n) < n^c$. *Тогава, за* n *достатъчно голямо е в сила*

$$\gamma(n, f) > (1 - \varepsilon) \frac{n}{2\sqrt{2f(n)}}.$$

Доказателство. Ще започнем с кратко резюме на нашето доказателство. Да предположим, че графът G представлява контрапример на нашето твърдение. Тогава, от Теорема 3.3 следва, че G съдържа индуциран двучастен граф G_0 с най-малко $n - \alpha^{1/3}n$ върха и минимална степен пропорционална на n. Ще покажем, че всяка част на G_0 е с мощност близка до $n/2$ и после ще разгледаме прозволно ребро от G_0; според допускането то се съдържа в триъгълник, чийто трети връх w не е в G_0. Ще оценим отгоре степента на w, а след това отдолу броя на всички такива върхове. Като премахнем внимателно подбрано множество от такива върхове, ще получим граф с n_1 върха и повече от $n_1^2/4$ ребра, такъв, че n_1 е близко до n. Тогава, от Следствие 4.3, следва, че този граф съдържа книга с ред $n_1/6$, с което доказателството ще е завършено.

Сега ще дадем и пълното доказателство. Да положим $\beta = bk(G)$ и $\alpha = f(n)/n$. Да допуснем, че твърдението не е вярно, т.е. съществува някакво $\varepsilon > 0$ такова, че за всяко F и всяко N съществува $n > N$ за което $f(n) > F$ и граф $G = G(n, m)$, удовлетворяващи условията на теоремата и

$$\beta \leq (1 - \varepsilon) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}. \qquad (4.17)$$

Тогава, тъй като $\beta < n/8$, от Теорема 3.3 следва, че G съдържа индуциран двучастен граф G_0 с най-малко $n - \alpha^{1/3}n$ върха и

$$\delta(G_0) > \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n = \frac{n}{2} - 4\alpha^{1/3}n. \qquad (4.18)$$

Нека B и C са класовете на G_0 и нека положим $A = V(G) \setminus V(G_0)$. От

(4.18),

$$|B| \geq \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n, \ |C| \geq \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n, \tag{4.19}$$

$$e(G_0) = e(B, C) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \alpha^{1/3}\right) n \left(\frac{1}{2} - 4\alpha^{1/3}\right) n$$
$$= \frac{n^2}{4}\left(1 - \alpha^{1/3}\right)\left(1 - 8\alpha^{1/3}\right) > \frac{n^2}{4}\left(1 - 9\alpha^{1/3}\right).$$

Да разгледаме множеството T от триъгълници, които съдържат ребро от G_0. Тъй като всяко ребро на G_0 се съдържа в триъгълник и G_0 е двучастен, виждаме, че

$$|T| \geq e(G_0) > \frac{n^2}{4}\left(1 - 9\alpha^{1/3}\right). \tag{4.20}$$

Нека $D \subset A$ е множеството от върхове на A, които се съдържат в някакъв триъгълник на T. Твърдим, че за всяко $w \in D$, и n достатъчно голямо,

$$d(w) < \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}. \tag{4.21}$$

Наистина, по дефиниция всеки връх $w \in D$ е свързан с някакво $u \in B$ и някои $v \in C$. Тогава

$$\begin{aligned} \beta &\geq |\Gamma(uw)| \geq |\Gamma(uw) \cap C| \geq d_C(w) + d_C(u) - |C| \\ &\geq d_C(w) + \delta(G_0) - |C| \end{aligned}$$

и аналогично

$$\beta \geq |\Gamma(vw)| \geq |\Gamma(vw) \cap B| \geq d_B(w) + \delta(G_0) - |B|.$$

Оттук, като сумираме последните две неравенства и вземем предвид (4.18), получаваме

$$\begin{aligned} 2\beta &\geq d_B(w) + d_C(w) + 2\delta(G_0) - n + |A| \\ &\geq d_B(w) + d_C(w) + |A| - 8\alpha^{1/3} n \geq d(w) - 8\alpha^{1/3} n. \end{aligned}$$

За да завършим доказателството (4.21), ще отбележим, че от (4.17) имаме

$$2\beta \leq (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{2\alpha}}.$$

За всяко $w \in D$, нека $t(w)$ е броят на триъгълниците в T, които съдържат w. Очевидно имаме

$$t(w) = \frac{1}{2}\sum_{u\in\Gamma(w)} |\Gamma(u)\cap\Gamma(w)| \leq \frac{1}{2}d(w)\beta \leq \frac{1}{4}d(w)(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{2\alpha}}.$$

Това, заедно с (4.21), дава

$$t(w) < (1-\varepsilon)\frac{n}{8\alpha}. \tag{4.22}$$

Сумирайки (4.22) за всички $w \in D$ и като вземем предвид (4.20), получаваме:

$$\frac{n^2}{4}\left(1-9\alpha^{1/3}\right) < |T| = \sum_{w\in D} t(w) < |D|\frac{n(1-\varepsilon)}{8\alpha}.$$

Оттук

$$|D| > 2\alpha\frac{\left(1-9\alpha^{1/3}\right)n}{(1-\varepsilon)}.$$

Да забележим, че тъй от $\alpha = f(n)/n < n^{c-1}$ и $c < 2/5$, имаме $\lim_{n\to\infty}\alpha^{1/3} = 0$. Тогава за достатъчно големи n,

$$|D| > 2(1+\varepsilon)\alpha n.$$

Да изберем множество $D_0 \subset D$, за което

$$(2+\varepsilon)\alpha n < |D_0| < (2+2\varepsilon)\alpha n. \tag{4.23}$$

Тъй като за всеки връх $w \in D_0$ и достатъчно голямо n, от (4.21) имаме

$$d(w) < \sqrt{\frac{n}{2\alpha}},$$

то графът $G[V \backslash D_0]$ има повече от

$$e(G) - |D_0| \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}$$

ребра.

Ще докажем, че ако n е достатъчно голямо, то

$$\frac{n^2}{4} - \alpha n^2 - |D_0| \sqrt{\frac{n}{2\alpha}} > \frac{(n - |D_0|)^2}{4}. \tag{4.24}$$

Да допуснем, че (4.24) не е в сила. Тогава, от (4.23),

$$\frac{n^2}{4} - \alpha n^2 - (2(1+\varepsilon)\alpha n) \sqrt{\frac{n}{2\alpha}} \leq \frac{n^2}{4} - \alpha n^2 - |D_0| \sqrt{\frac{n}{2\alpha}} \leq \frac{(n - |D_0|)^2}{4}$$
$$\leq \frac{(n - (2+\varepsilon)\alpha n)^2}{4}$$

и така, след прости алгебрични преобразувания получаваме

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq (2(1+\varepsilon)) \frac{1}{\sqrt{2\alpha n}} + \frac{(2+\varepsilon)^2 \alpha^2}{4} < \frac{4}{\sqrt{2f(n)}} + 4n^{2c-2},$$

което е противоречие, ако n е достатъчно голямо. Следователно, (4.24) е в сила. Тогава, ако n е достатъчно голямо, от Следствие 4.3 следва, че

$$bk(G[V \backslash D_0]) > \frac{n - |D_0|}{6} > \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}.$$

С това противоречие доказателството е завършено. ■

В [24], стр. 235, Ердьош поставя въпроса колко голямо е $\gamma(n, n^c)$ за $0 < c < 1$. Ако положим $f(n) = n^{c-1}$ за $1 < c < 7/5$ и приложим Теорема 3.8, заедно с (4.16), ще получим следното.

Следствие 4.10 *Ако $0 < c < 1$ и n е достатъчно голямо, то*

$$\gamma(n, n^c) < \frac{1}{2\sqrt{2}} n^{1-c/2}.$$

Също, ако $0 < c < 2/5$, $\varepsilon > 0$ и n е достатъчно голямо, то

$$\gamma(n, n^c) > \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \varepsilon\right) n^{1-c/2}$$

Глава 5

Числата на Ремзи $r\left(B_p, B_q\right)$

Изследването на числата на Ремзи $r\left(B_p, B_q\right)$ е започнато от Русо и Шиихан в [49] където се доказва следната теорема.

Теорема 5.1 *За всяко $q > 1$ е в сила*

$$r(B_1, B_q) = 2q + 3.$$

Малко по-късно Фодри, Шиихан и Русо в [34] усилват този резултат по следния начин.

Теорема 5.2 *Да допуснем, че $1 \leq p \leq q$. Тогава*

$$r(B_p, B_q) = 2q + 3.$$

за всички

$$q \geq (p-1)\left(16p^3 + 16p^2 - 24p - 10\right) + 1.$$

Ограничението за q от четвърта степен по p е на свой ред редуцирано до линейно от Никифоров и Русо в [45].

Теорема 5.3 *Съществува такава положителна константа c, че*

$$r(B_p, B_q) = 2q + 3$$

за всяко $q \geq cp$.

В [45] е установено, че $c \geq 10^{-6}$. Фактически се оказва, че

$$|c - 1/6| < \varepsilon$$

и доказателството на това неравенство е основната ни цел в тази глава.

Ще докажем следната теорема.

Теорема 5.4 *За всяко* ε $(0 < \varepsilon < 1/6)$*, ако* q *е достатъчно голямо и* $p \leq (1/6 - \varepsilon)\, q$*, то*

$$r\,(B_p, B_q) = 2q + 3.$$

Ако вземем обединението на два дизюнктни пълни графа с $q{+}1$ върха, веднага виждаме, че

$$r\,(B_p, B_q) \geq 2q + 3,$$

така че всичко, което трябва да докажем, е, че, при допусканията на теоремата, в сила е неравенството

$$r\,(B_p, B_q) \leq 2q + 3. \tag{5.1}$$

Очевидно от Теорема 5.4 веднага получаваме

$$c > 1/6 - \varepsilon.$$

В раздел 5.3 ще докажем, че

$$c < 1/6 + \varepsilon$$

като прилагаме стандартни вероятностни методи към една полудетерминирана конструкция.

Доказателството на Теорема 5.4 е доста сложно и се получава по същество като Следствие от Теорема 5.5, която се разглежда в следващия раздел.

5.1 Теорема за устойчивост от Ремзи тип

В този раздел ще докажем следната теорема.

Теорема 5.5 *Съществува такава константа* $c > 0$*, че за всяко* ξ $(0 < \xi < c)$, *всеки граф* G *с достатъчно голям брой върхове* n*, има едно от следните свойства:*

(i) $bk(\overline{G}) > n/2$;

(ii) $bk(G) > (1/12 - 10^{-6}\xi^6)\, n$;

(iii) G *съдържа един индуциран двучастен граф* G_0 *с най-малко* $(1-\xi)\,n$ *върха и*

$$\delta(G_0) > \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n.$$

Първо ще дадем някои предварителни резултати, свързани с равномерностната лема на Семереди. За означенията и дефинициите, свързани с тази лема, виж напр. [38]. Имаме нужда и от няколко технически резултата; първият е едно основно свойство на ε-равномерните двойки (виж [38], Факт 1.4), което ще формулираме по начин подходящ за нашите цели.

Лема 5.6 *Да допуснем че* $0 < \varepsilon < d \leq 1$ *и* (A, B) *е една* ε*-равномерна двойка с* $e(A, B) = d\,|A|\,|B|$. *Тогава съществуват най-много* $2\varepsilon\,|A|^2$ *множества* $\{u, v\} \subset A$ *с*

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B| \leq (d - \varepsilon)^2\,|B|.$$

□

Следващата лема дава оценка отдолу за броя на триъгълниците в един граф, който се състои от няколко ε-равномерни двойки, които имат общ клас.

Лема 5.7 *Нека* $\varepsilon > 0$ *и* H *е граф, върховете на който са подразделени като*

$$V(H) = A \cup B_1 \cup ... \cup B_k$$

така, че

$$|A| = |B_1| = ... = |B_k| = t.$$

Да допуснем че за всяко $i \in [k]$ *двойката* (A, B_i) *е* ε*-равномерна и* $e(A, B_i) \geq d_i t^2$, *където* $d_i > \varepsilon$. *Тогава съществуват най-малко*

$$t\left(e(A) - 2\varepsilon t^2\right)\sum_{i=1}^{k} d_i^2 - 2\varepsilon kte(A)$$

триъгълника в H, *точно 2 от върховете на които са в* A.

Доказателство. Ще докажем първо, че за всяко $i \in [k]$ съществуват най-малко

$$d_i^2\left(e(A) - 2\varepsilon t^2\right)t - 2\varepsilon e(A)t \tag{5.2}$$

триъгълника в H за които 2 от върховете са в A и един е в B_i.

Това е определено вярно ако $d_i \leq \varepsilon$ тъй като тогава горният израз е неположителен.

Да допуснем, че $d_i > \varepsilon$; като приложим 5.6 към двойката (A, B_i) виждаме, че съществуват не повече от $2\varepsilon t^2$ ребра (u, v) в A за които

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B_i| \leq (d_i - \varepsilon)^2 t.$$

Оттук, съществуват най-малко $(e(A) - 2\varepsilon t^2)$ ребра в A за които

$$\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B_i > (d_i - \varepsilon)^2 t$$

и следователно съществуват най-малко

$$\begin{aligned}(d_i - \varepsilon)^2\left(e(A) - 2\varepsilon t^2\right)t &\geq \left(d_i^2 - 2\varepsilon\right)\left(e(A) - 2\varepsilon t^2\right)t \\ &> d_i^2\left(e(A) - 2\varepsilon t^2\right)t - 2\varepsilon e(A)t\end{aligned}$$

триъгълника в H за които 2 от върховете са в A и един е в B_i.

Сумирайки това неравенство за $i = 1, ..., k$ получаваме желания резултат. ■

Чрез усредняване по ребрата на A получаваме следното следствие.

Следствие 5.8 *При условията на Лема 5.7, ако $e(A) > 0$ то съществува книга, чиято основа е в (A) и редът на която е най-малко*

$$t\left(1 - \frac{2\varepsilon t^2}{e(A)}\right)\sum_{i=1}^{k} d_i^2 - 2\varepsilon kt.$$

Подобни резултати са в сила и за книги, чиито основи са ребра между различни класове.

Лема 5.9 *Да допуснем, че ε, d_1, d_2 са реални числа и*

$$0 < 2\varepsilon \le d_1 \le 1, 2\varepsilon \le d_2 \le 1.$$

Нека (A_1, B), (A_2, B) са ε-равномерни двойки, за които

$$e(A_i, B) = d_i |A_i| |B|, (i = 1, 2).$$

Тогава съществуват не повече от $2\varepsilon |A_1| |A_2|$ двойки (u, v) за които $u \in A_1$, $v \in A_2$ и такива, че

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B| \le (d_1 - \varepsilon)(d_2 - \varepsilon)|B|. \tag{5.3}$$

Доказателство. Доказателството ни представлява елементарно упражнение по ε-равномерни двойки. Нека A_1' е множеството от всички $u \in A_1$ такива че

$$|\Gamma(u) \cap B| \le (d_1 - \varepsilon)|B|.$$

От ε-равномерността на (A_1, B) имаме

$$|A_1'| \le \varepsilon |A_1|$$

Да вземеме произволно $u_0 \in A_1 \backslash A_1'$ и нека A_2' е множеството от всички $v \in A_2$ такива, че

$$|\Gamma(v) \cap (\Gamma(u) \cap B)| \leq (d_2 - \varepsilon) |\Gamma(u) \cap B|.$$

От ε-равномерността на(A_2, B) , и от

$$|\Gamma(u) \cap B| > (d_1 - \varepsilon) |B| > \varepsilon |B|,$$

получаваме

$$|A_2'| \leq \varepsilon |A_2|,$$

така, че съществуват най-малко $(1 - \varepsilon) |A_2|$ върха $v \in A_2$ за които

$$|\Gamma(v) \cap \Gamma(u) \cap B| > (d_2 - \varepsilon) |(\Gamma(u) \cap B)| > (d_2 - \varepsilon)(d_1 - \varepsilon) |B|.$$

Следователно, съществуват не повече от

$$\left(1 - (1 - \varepsilon)^2\right) |A_1| |A_2| < 2\varepsilon |A_1| |A_2|$$

двойки (u, v), за които $u \in A_1$, $v \in A_2$ и такива, че е в сила (5.3). ■

Лема 5.10 *Да допуснем че $\varepsilon > 0$ и H е граф, върховете на който са подразделени така, че*

$$\begin{aligned} V(H) &= A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup ... \cup B_k \\ |A_1| &= |A_2| = |B_1| = ... = |B_k| = t. \end{aligned}$$

Да допуснем, че за всяко $i \in [2], j \in [k]$ двойките (A_i, B_j) са ε-равномерни и

$$e(A_i, B_j) \geq d_{ij} t^2.$$

Тогава съществуват най-малко

$$t\left(e(A_1, A_2) - 2\varepsilon t^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} d_{1i} d_{2i}\right) - 2\varepsilon k t e(A_1, A_2)$$

тригълника в H, точно един от върховете на които е в A_1 и един - в A_2.

Доказателство. Първо ще докажем, че за всяко $i \in [k]$ съществуват най-малко

$$d_{1i}d_{2i}\left(e(A_1,A_2) - 2\varepsilon t^2\right)t - 2\varepsilon e(A_1,A_2)\,t \tag{5.4}$$

триъгълника в H за които единият връх е в A_1, вторият е в A_2, а третият - в B_i.

Това е определено вярно ако $d_{1i} \leq \varepsilon$ или $d_{1i} \leq \varepsilon$, тъй като тогава горния израз е неположителен.

Да допуснем, че $d_{1i} > \varepsilon$ и $d_{1i} > \varepsilon$; и да приложим Лема 5.9 към двойките (A_1, B_i) and (A_2, B_i). Тъй като съществуват най-много $2\varepsilon t^2$ двойки (u, v), за които $u \in A_1$, $v \in A_2$ и

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B_i| \leq (d_{1i} - \varepsilon)(d_{2i} - \varepsilon)\,t,$$

то съществуват най-малко $(e(A_1,A_2) - 2\varepsilon t^2)$ ребра (u, v), за които $u \in A_1$, $v \in A_2$ и

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap B_i| > (d_{1i} - \varepsilon)(d_{2i} - \varepsilon)\,t.$$

Следователно в H съществуват най-малко

$$\begin{aligned}(d_{1i} - \varepsilon)(d_{2i} - \varepsilon)\left(e(A_1,A_2) - 2\varepsilon t^2\right)t &\geq (d_{1i}d_{2i} - 2\varepsilon)\left(e(A_1,A_2) - 2\varepsilon t^2\right)t \\ &\geq d_{1i}d_{2i}\left(e(A_1,A_2) - 2\varepsilon t^2\right)t \\ &\quad - 2\varepsilon e(A_1,A_2)\,t\end{aligned}$$

триъгълника, един от върховете на които е в A_1, един в A_2 и един - в B_i. Сумирайки това неравенство за $i \in [k]$, получаваме желания резултат. ■

С усредняване по ребрата в $E(A_1, A_2)$ получаваме следното следствие.

Следствие 5.11 *При условията на Лема 5.10, ако* $e(A_1, A_2) > 0$*, то съществува книга, основата на която принадлежи на* $E(A_1, A_2)$ *и с ред не по-малък от*

$$t\left(1 - \frac{2\varepsilon t^2}{e(A_1,A_2)}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} d_{1i}d_{2i}\right) - 2\varepsilon k t.$$

Ключов елемент в нашето доказателство на Теорема 5.5 е Теорема 4.6, която е доказана в раздел 4.2. Веднага се вижда, че Теорема 5.5 би могла да следва от Теорема 4.6, но следствието не е е непосредствено.

Доказателство на Теорема 5.5 Вместо графа G и неговият допълнителен граф, ще разгледаме такова червено-синьо оцветяване на K_n, че сините ребра да съответстват на ребрата на G. Да положим $bk_R = bk\left(\overline{G}\right)$ и $bk_B = bk\left(G\right)$.

Ако $X \subset [n]$, то $e_R(X)$ и $e_B(X)$ ще означават съответно броя на сините и червени ребра в $E(X)$. Аналогично ако $X, Y \subset [n]$ са дизюнктни множества, то $e_R(X, Y)$ и $e_B(X, Y)$ означават съответно броя на червените и сини ребра в $E(X, Y)$

Да допуснем, че при всеки избор на $\xi > 0$ имаме за някое достатъчно голямо n,

$$bk_R \leq \frac{n}{2}, \qquad bk_B \leq \left(\frac{1}{12} - 10^{-6}\xi^6\right) n. \tag{5.5}$$

Целта ни е да покажем, че от тези условия следва (iii). Това можем да постигнем прилагайки Теорема 4.6, но за целта трябва да гарантираме, че броят на сините ребра е достатъчно близък до $n^2/4$, и по този начин да е в сила условието (4.10). Всъщност основната част от нашето доказателство е посветена на тази задача. Първо ще използваме равномерностната лема ва Семереди, за да получим редица условия за оцветяването на ребрата, от които окончателно да следва, че броят на сините ребра е достатъчно близък до $n^2/4$, а след това ще използваме Теорема 4.6, за да завършим доказателството.

Да фиксираме достатъчно малка стойност $\xi > 0$ и да означим

$$\beta = \frac{1}{17}\left(\frac{\xi}{2}\right)^3, \qquad \gamma = \beta^3, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma^2}{2}.$$

В хода на доказателството често ще използваме факта, че

$$\varepsilon \ll \gamma \ll \beta \ll \xi,$$

и по този начин, избирайки достатъчно малко ξ, можем да направим ε, γ и β толкова малки, колкото е нужно.

Според равномерностната лема на Семереди за всяко достатъчно голямо n съществува подразделяне

$$[n] = V_0 \cup V_1 \cup ... \cup V_k,$$

такова че

$$|V_0| < \varepsilon n, \quad |V_1| = ... = |V_k|,$$

и всички освен εk^2 двойки (V_i, V_j) са ε-равномерни. Множествата $V_1, ..., V_k$ ще наричаме за краткост *отделения.*

Лесно се вижда, че можем допълнително да предположим, че k е достатъчно голямо и за всяко $i \in [k]$ по-малко от εk двойки (V_i, V_j) не са ε-равномерни. Полагайки $|V_1| = t$, като вземем предвид, че $17^{-3}2^{-6} > 10^{-6}$, от допускането (5.5) следва

$$bk_R \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\, kt, \qquad bk_B \leq \left(\frac{1}{12} - \gamma\right)(1+\varepsilon)\, kt. \tag{5.6}$$

За всяко $i, j \in [k]$ нека d_{ij} да е плътността на червените ребра в двойката (V_i, V_j), т.е.,

$$d_{ij} = e_R(V_i, V_j)/t^2.$$

Ще докажем четири твърдения, с което ще покажем, че условието (5.6) налага строги структурни ограничения върху оцветяването на ребрата.

Първо ще докажем, че никое отделение не съдържа съществено много ребра от двата цвята.

Твърдение 5.12 *За всяко* i, *или* $e_R(V_i) < \gamma t^2$ *или* $e_B(V_i) < \gamma t^2$.

Доказателство. Да допуснем противното и нека V_i да е отделение, за което

$$e_R(V_i) \geq \gamma t^2, \; e_B(V_i) \geq \gamma t^2$$

Да оценим средния ред на сините книги, чиято основа е в (V_i). Нека $M \subset [k]$ е множеството от всички $s \in [k] \setminus \{i\}$ такива, че (V_i, V_s) е ε-равномерна двойка; според нашето допускане $|M| \geq (1-\varepsilon)k$. Прилагайки Следствие 5.8 при

$$A = V_i, \qquad B_s = V_s, \quad \text{за всяко } s \in M,$$

получаваме

$$bk_B \geq t(1-\gamma)\sum_{s\in M}(1-d_{is})^2 - 2\varepsilon kt$$

и от неравенството на Коши, като вземем предвид, че $|M| \leq k$ и (5.6), виждаме, че

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}(1-\gamma)\left(\sum_{s\in M} 1 - d_{is}\right)^2 &\leq \left(\frac{1}{12} - \gamma + 2\varepsilon\right)(1+\varepsilon)k \\ &\leq \left(\frac{1}{12} - \gamma + \gamma^2\right)(1+\gamma^2/2)k\end{aligned}$$

Оттук,

$$\sum_{s\in M} 1 - d_{is} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{12} - \gamma + \gamma^2\right)\frac{(1+\gamma^2/2)}{(1-\gamma)}k} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{12} - \frac{\gamma}{2}\right)}k. \qquad (5.7)$$

Аналогично, като изчислим средния ред на червените книги, чиято основа е в $E(V_i)$, виждаме, че

$$\frac{1}{k}\left(\sum_{s\in M} d_{is}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right)\frac{1+\varepsilon}{1-\gamma}k = \left(\frac{1}{2} + \gamma^2\right)\frac{(1+\gamma^2/2)}{(1-\gamma)}k \leq \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)k$$

и следователно,

$$\sum_{s\in M} d_{is} \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \gamma k} \qquad (5.8)$$

Като съберем (5.7) и (5.8) намираме, че

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{12} - \frac{\gamma}{2}\right)} &\geq \frac{|M|}{k} \\ &\geq 1 - \varepsilon > 1 - \gamma.\end{aligned}$$

Това води до противоречие, ако γ е малко, тъй като

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6} = 0.995... < 1.$$

С това доказателството на Твърдение 5.12 е завършено ■

Ще наричаме дадено отделение *с и н ь о* , ако то индуцира не повече от γt^2 червени ребра, и *червено*, ако то индуцира не повече от γt^2 сини ребра. Да забележим, че според Твърдение 5.12 всяко отделение е или червено, или синьо, но никое отделение не е синьо и червено едновременно.

Сега ще докажем, че не съществуват три отделения V_i, V_j, V_k, всяко от които индуцира съществено много червени ребра и всеки две от които са свързани със съществено много сини ребра.

Твърдение 5.13 *Не съществуват три отделения* V_i, V_j, V_l *такива, че*

$$e_R(V_i) \geq \gamma t^2, \; e_R(V_j) \geq \gamma t^2, \; e_R(V_l) \geq \gamma t^2$$

и

$$e_B(V_i, V_j) \geq \gamma t^2, \; e_B(V_i, V_l) \geq \gamma t^2, \; e_B(V_l, V_j) \geq \gamma t^2.$$

Доказателство. Да допуснем, че съществуват три отделения, удовлетворяващи условията на горното твърдение. Нека M е множеството от всички $s \in [k] \setminus \{i, j, l\}$ такива, че всяка една от двойките (V_i, V_s), (V_j, V_s), (V_l, V_s) е ε-равномерна. Очевидно $|M| \geq (1 - 3\varepsilon) k$.

Както при доказателството на Твърдение 5.12, като оценим средния размер на червените книги, чиято основа е в едно от множествата $E(V_i)$, $E(V_j)$, $E(V_l)$ получаваме

$$bk_R \geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} d_{is}^2 - 2kt\varepsilon, \tag{5.9}$$

$$bk_R \geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} d_{js}^2 - 2kt\varepsilon, \tag{5.10}$$

$$bk_R \geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} d_{ls}^2 - 2kt\varepsilon. \tag{5.11}$$

От друга страна, като приложим Следствие 5.11 при

$$A_1 = V_i, \quad A_2 = V_j, \quad B_s = V_s : s \in M,$$

за средния ред S на сините книги, основите на които са в $E(V_i, V_j)$, получаваме

$$\begin{aligned} bk_B \geq S &\geq t\left(1 - \frac{2\varepsilon t^2}{e_B(A_1, A_2)}\right) \sum_{s \in M} (1 - d_{is})(1 - d_{js}) - 2\varepsilon kt \\ &\geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} (1 - d_{is})(1 - d_{js}) - 2\varepsilon kt. \qquad (5.12) \end{aligned}$$

За (V_i, V_k) и (V_j, V_k), точно по същия начин получаваме

$$bk_B \geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} (1 - d_{is})(1 - d_{ls}) - 2\varepsilon kt \qquad (5.13)$$

$$bk_B \geq t(1-\gamma) \sum_{s \in M} (1 - d_{js})(1 - d_{ls}) - 2\varepsilon kt. \qquad (5.14)$$

Ако положим

$$d_s = \sum_{s \in M} d_{is} + d_{js} + d_{ls}$$

и съберем (5.12), (5.13), (5.14) с всяко от (5.9), (5.10), (5.11), умножени по 1/2, получаваме

$$t(1-\gamma) \sum_{s \in M} \left(3 - 2d_s + \frac{1}{2} d_s^2\right) - 9\varepsilon kt \leq 3bk_B + \frac{3}{2} bk_R.$$

Оттук, като положим

$$d = \frac{1}{|M|} \sum_{s \in M} d_s,$$

от неравенството на Коши и (5.6) виждаме, че

$$|M|\, t(1-\gamma)\left(3 - 2d + \frac{1}{2} d^2\right) - 9\varepsilon kt \leq \left(3\left(\frac{1}{12} - \gamma\right) + \frac{3}{4}\right)(1+\varepsilon)\, kt.$$

Следователно

$$(1-\gamma)(1-3\varepsilon)\left(3-2d+\frac{1}{2}d^2\right)-9\varepsilon \leq (1-3\gamma)(1+\varepsilon).$$

Оттук, предвид на $\varepsilon = \gamma^2/2$,

$$\begin{aligned} 2-2d+\frac{1}{2}d^2 &< \frac{(1-3\gamma)(1+\gamma^2/2)}{(1-\gamma)(1-3\gamma^2/2)}+8\gamma^2-1 \\ &= \left(1-\frac{3\gamma}{(1-\gamma)}\right)\left(1+\frac{2\gamma^2}{1-3\gamma^2/2}\right)+8\gamma^2-1 \\ &< -\frac{3\gamma}{(1-\gamma)}+10\gamma^2. \end{aligned}$$

Това е противоречие, тъй като дясната страна е отрицателна за $\gamma < 1$ докато лявата страна е винаги неотрицателна. Доказателството на Твърдение 5.13 е завършено. ■

Следващото твърдение гласи, че не съществуват две отделения, които съдържат съществено много сини ребра, свързани със съществено много червени ребра.

Твърдение 5.14 *Не съществуват две отделения V_i, V_j такива, че*

$$e_B(V_i) \geq \gamma t^2, \; e_B(V_j) \geq \gamma t^2$$

и

$$e_R(V_i, V_j) \geq \gamma t^2.$$

Доказателство. Да допуснем, че съществуват две отделения, които удовлетворяват условията на горното твърдение. Нека M е множеството от всички $s \in [k] \setminus \{i, j\}$ такива, че всяка една от двойките (V_i, V_s), (V_j, V_s) е ε-равномерна; очевидно $|M| \geq (1-2\varepsilon)k$.

Както и при доказателството на Твърдение 5.12, от оценката за средния ред на сините книги, които имат основа във всяко едно от множествата $E(V_i)$, $E(V_j)$ следва

$$bk_R \geq t(1-\gamma)\sum_{s\in M}(1-d_{is})^2 - 2\varepsilon kt, \tag{5.15}$$

$$bk_R \geq t(1-\gamma)\sum_{s\in M}(1-d_{js})^2 - 2\varepsilon kt. \tag{5.16}$$

Както и при доказателството на Твърдение 5.13, от оценката на средната стойност за реда на червените книги, които имат основа в $E(V_i, V_j)$ следва

$$bk_B \geq t(1-\gamma)\sum_{s\in M} d_{is}d_{js} - 2\varepsilon kt. \tag{5.17}$$

Ако положим

$$d_s = \sum_{s\in M} d_{is} + d_{js},$$

и съберем (5.15),(5.16), и удвоеното (5.17) получаваме

$$t(1-\gamma)\sum_{s\in M}\left(2 - 2d_s + d_s^2\right) - 8\varepsilon kt \leq 2bk_B + 2bk_R.$$

Оттук и от (5.6) виждаме, че

$$\begin{aligned}(1-\gamma)\sum_{s\in M}\left(2-2d_s+d_s^2\right) &\leq \left(2\left(\frac{1}{12}-\gamma\right)+1\right)(1+\varepsilon)k + 8\varepsilon k \\ &= \left(\frac{7}{6} - 2\gamma + \frac{7}{6}\varepsilon - 2\gamma\varepsilon + 8\varepsilon\right)k < \frac{7}{6}k.\end{aligned}$$

Ако положим

$$d = \frac{1}{|M|}\sum_{s\in M} d_s,$$

от неравенството на Коши и $|M| \geq (1-2\varepsilon)k$,

$$(1-2\varepsilon)k\left(2-2d+d^2\right) \leq \frac{7}{6}\frac{1}{1-\gamma}k.$$

и следователно

$$2 - 2d + d^2 \leq \frac{7}{6}\frac{1}{(1-2\varepsilon)(1-\gamma)}. \tag{5.18}$$

От друга страна, като приложим неравенството на Коши към (5.15) и (5.16), и вземем предвид (5.6), получаваме

$$|M|\left(1-\frac{1}{|M|}\sum_{s\in M}d_{is}\right)^2-2\varepsilon k\leq\left(\frac{1}{12}-\gamma\right)(1+\varepsilon)\,k,$$

$$|M|\left(1-\frac{1}{|M|}\sum_{s\in M}d_{js}\right)^2-2\varepsilon k\leq\left(\frac{1}{12}-\gamma\right)(1+\varepsilon)\,k.$$

Оттук отново от неравенството на Коши и $|M|\geq(1-2\varepsilon)\,k$, виждаме, че

$$(1-2\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2}d\right)^2\leq\left(\frac{1}{12}-\gamma\right)(1+\varepsilon)+4\varepsilon,$$

което дава

$$(2-d)^2\leq\left(\frac{1}{3}-\gamma\right)\frac{1+\gamma^2/2}{1-\gamma^2}+\frac{2\gamma^2}{1-\gamma^2}. \tag{5.19}$$

Тъй като можем да изберем произволно малко γ, от (5.18) и (5.19) получаваме

$$2-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq d\leq 1+\sqrt{\frac{1}{6}},$$

което дава

$$1\leq\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6},$$

противоречие, тъй като

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}=0.98...<1.$$

С това доказателството на Твърдение 5.14 е завършено. ■

Следващото твърдение показва, че в действителност не съществуват сини отделения.

Твърдение 5.15 *Не съществуват сини отделения.*

Доказателство. Доказателството на това твърдение е занчително по-сложно от останалите.

Да допуснем, че $V_1, ..., V_l$ са сините отделения и да положим $l = \alpha k$.

Да фиксираме синьото отделение V_i и да оценим средната стойност за реда на сините книги, чиято основа е в $E(V_i)$. Нека M_i е множеството от всички $s \in [k] \setminus \{i\}$ такива, че двойката (V_i, V_s) е ε-равномерна и нека

$$\begin{aligned} M_{i1} &= M_i \cap [l], \\ M_{i2} &= M_i \cap [l+1, k]. \end{aligned}$$

От $|M_i| \geq (1 - \varepsilon) k$ веднага получаваме

$$\begin{aligned} l \geq |M_{i1}| &\geq l - \varepsilon k, \\ k - l \geq |M_{i2}| &\leq k - l - \varepsilon k. \end{aligned} \tag{5.20}$$

От Твърдение 5.14 за всяко $s \in M_{i1}$ червената плътност на двойката (V_i, V_s) удовлетворява

$$1 - d_{is} \geq 1 - \gamma.$$

Следователно, средната стойност за реда S на сините книги, чиято основа е в $E(V_i)$, удовлетворява

$$\begin{aligned} S &\geq \left((1 - \varepsilon - \gamma)^2 |M_{i1}| + \sum_{s \in M_{i2}} (1 - d_{is})^2 - 2\varepsilon k \right) t \\ &\geq \left((1 - 4\gamma) |M_{i1}| + \sum_{s \in M_{i2}} (1 - d_{is})^2 - 2\varepsilon k \right) t. \end{aligned}$$

Оттук и $bk_B \geq S$, като вземем предвид (5.6), виждаме, че

$$(1 - 4\gamma) |M_{i1}| + \sum_{s \in M_{i2}} (1 - d_{is})^2 \leq \left(\frac{1}{12} - \gamma + 2\varepsilon \right) (1 + \varepsilon) k.$$

Тогава, от неравенството на Коши и (5.20), намираме, че

$$(1 - 4\gamma)(l - \varepsilon k) + \frac{1}{k - l} \left(\sum_{s \in M_{i2}} 1 - d_{is} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{12} - \gamma + 2\varepsilon \right) (1 + \varepsilon) k$$

и следователно,

$$\sum_{s\in M_{i2}} 1 - d_{is} \leq k\sqrt{\left(\left(\frac{1}{12} - \gamma + 2\varepsilon\right)(1+\varepsilon) - (1-4\gamma)(\alpha-\varepsilon)\right)(1-\alpha)}.$$

Като сумираме това неравенство за $i = 1, ..., l$ и положим

$$A = \alpha\sqrt{\left(\left(\frac{1}{12} - \gamma + 2\varepsilon\right)(1+\varepsilon) - (1-4\gamma)(\alpha-\varepsilon)\right)(1-\alpha)},$$

получаваме

$$\sum_{i\in[l]}\sum_{s\in M_{i2}} (1 - d_{is}) \leq Ak^2. \tag{5.21}$$

Сега ще получим едно подобно неравенство, като разгледаме средната стойност за реда на червените книги, основите на които се съдържат в червено отделение.

Да дефинираме графа H по следния начин. Върховете на H са числата $[l+1, k]$ и два върха i, j са свързани тогава и само тогава, когато червената плътност d_{ij} на двойката (V_i, V_j) удовлетворява

$$d_{ij} \geq 1 - \gamma.$$

От Твърдение 5.13 следва, че допълнителният граф на H е без триъгълници, откъдето, по теоремата на Туран, броят на ребрата на H удовлетворява

$$e(H) \geq \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)(k-l)^2 \tag{5.22}$$

когато k е достатъчно голямо. Да фиксираме някое $i \in [l+1, k]$. Нека M_i е множеството от всички $s \in [k] \setminus \{i\}$ такива, че двойката (V_i, V_s) е ε-равномерна и нека

$$M_{i1} = M_i \cap \Gamma_H(i),$$
$$M_{i2} = M_i \cap [l].$$

От $|M_i| \geq (1-\varepsilon)\,k$ веднага получаваме

$$\begin{aligned} d_H(i) \geq |M_{i1}| &\geq d_H(i) - \varepsilon k, \\ l \geq |M_{i2}| &\geq l - \varepsilon k. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Следователно, средната стойност за реда S на червените книги, чиято основа е във (V_i), удовлетворява

$$\begin{aligned} S &\geq \left((1-\varepsilon-\gamma)^2\,|M_{i1}| + \sum_{s\in M_{i2}} d_{is}^2 - 2\varepsilon k \right) t \\ &\geq \left((1-4\gamma)\,|M_{i1}| + \sum_{s\in M_{i2}} d_{is}^2 - 2\varepsilon k \right) t. \end{aligned}$$

Оттук и $bk_R \geq S$, като вземем предвид (5.6) и (5.23), виждаме, че

$$(1-4\gamma)\,(d_H(i) - \varepsilon k) + \sum_{s\in M_{i2}} d_{is}^2 \leq \frac{1}{2}\,(1+5\varepsilon)\,k.$$

По този начин, от неравенството на Коши и (5.23), намираме, че

$$(1-4\gamma)\,(d_H(i) - \varepsilon k) + \frac{1}{l}\left(\sum_{s\in M_{i2}} d_{is} \right)^2 \leq \frac{1}{2}\,(1+5\varepsilon)\,k.$$

Като сумираме това неравенство за $i = l+1, ..., k$ получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}\sum_{i=l+1}^{k}\left(\sum_{s\in M_{i2}} d_{is} \right)^2 &\leq \frac{1}{2}\,(1+5\varepsilon)\,k\,(k-l) \\ &\quad - (1-4\gamma)\,(2e\,(H) - \varepsilon k\,(k-l)). \end{aligned}$$

Следователно от (5.22) виждаме, че

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}\sum_{i=l+1}^{k}\left(\sum_{s\in M_{i2}} d_{is} \right)^2 &\leq \frac{1}{2}\,(1+5\varepsilon)\,k\,(k-l) \\ &\quad - (1-4\gamma)\left(\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon \right)(k-l) - \varepsilon k \right)(k-l). \end{aligned}$$

Като приложим неравенството на Коши и заместим l с αk, получаваме

$$\left(\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{s\in M_{i2}} d_{is}\right)^2 \le \frac{1}{2}(1+5\varepsilon)\,\alpha\,(1-\alpha)^2\,k^4$$
$$-\left((1-4\gamma)\left(\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)(1-\alpha)-\varepsilon\right)\right)\alpha\,(1-\alpha)^2\,k^4.$$

Означавайки за краткост

$$B=(1-\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+5\varepsilon)-\left((1-4\gamma)\left(\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)(1-\alpha)-\varepsilon\right)\right)\right)\alpha}$$

получаваме

$$\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{s\in M_{i2}}(d_{is}-\varepsilon)\le Bk^2. \tag{5.24}$$

Като прибавим (5.21) към (5.24) имаме

$$(1-2\varepsilon)\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{s\in M_{i2}}\le (A+B)\,k^2.$$

Да забележим, че сумата

$$\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{s\in M_{i2}}$$

е просто броят на ε-равномерните двойки, които съединяват сини с червени отделения, и следователно,

$$\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{s\in M_{i2}}\ge l\,(k-l)-\varepsilon k^2=((1-\alpha)\,\alpha-\varepsilon)\,k^2.$$

Така виждаме, че

$$(1-2\varepsilon)\,((1-\alpha)\,\alpha-\varepsilon)\le A+B.$$

Ако допуснем, че това неравенство е в сила за произволно малки стойности на γ, получаваме

$$(1-\alpha)\,\alpha \leq (1-\alpha)\,\alpha\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha\sqrt{\left(\frac{1}{12}-\alpha\right)(1-\alpha)}$$

и следователно

$$\sqrt{(1-\alpha)}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{12}-\alpha\right)},$$

откъдето следва

$$\alpha\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{2}-\frac{17}{12} = -.002... < 0,$$

което е противоречие. Доказателството на Твърдение 5.15 е завършено. ■

За да завършим доказателството на Теорема 5.5, ще покажем, че броят на сините ребра е произволно близък до $n^2/4$.

Ще напомним, че d_{ij} е червената плътност на двойката (V_i, V_j). Да дефинираме графите H_{irr}, H_{blue}, H_{mid} и H_{red} върху множеството от върхове $[k]$ по следния начин:

(a) $(i,j) \in E(H_{irr})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) не е ε-равномерна;

(b) $(i,j) \in E(H_{blue})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$d_{ij} < \beta;$$

(c) $(i,j) \in E(H_{mid})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$\beta \leq d_{ij} < 1-\gamma;$$

(d) $(i,j) \in E(H_{red})$ точно, когато двойката (V_i, V_j) е ε-равномерна и

$$d_{ij} \geq 1-\gamma;$$

Да забележим, че никои два от графите H_{irr}, H_{blue}, H_{mid} и H_{red} нямат общи ребра.

Нека i е произволен връх в H_{red}. Оценявайки средната стойност за реда на червените книги, основата на които е в (V_i), получаваме

$$\begin{aligned}\left(d_{H_{red}}(i) - \varepsilon k\right)(1-\varepsilon-\gamma)^2 t + \left(d_{H_{mid}}(i) - \varepsilon k\right)(\beta-\varepsilon)^2 &\leq bk_R \\ &\leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\, kt\end{aligned} \tag{5.25}$$

и оттук

$$\left(\frac{2e(H_{red})}{k^2} - \varepsilon\right)(1-\varepsilon-\gamma)^2 + \left(\frac{2e(H_{mid})}{k^2} - \varepsilon\right)(\beta-\varepsilon)^2 \leq \frac{1}{2} + \gamma. \tag{5.26}$$

Тъй като от Твърдение 5.13 допълнителният граф на H_{red} е без триъгълници, от теоремата на Туран имаме

$$e(H_{red}) \geq \binom{k}{2} - \frac{k^2}{4} > \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)k^2$$

за достатъчно големи k. Оттук виждаме, че

$$\begin{aligned}\left(\frac{2e(H_{red})}{k^2} - \varepsilon\right)(1-\varepsilon-\gamma)^2 &\geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right)(1-\varepsilon-\gamma)^2 \\ &> \left(\frac{1}{2} - 3\gamma\right)(1-4\gamma) > \frac{1}{2} - 5\gamma.\end{aligned}$$

Следователно, от (5.26) намираме, че

$$\left(\frac{2e(H_{mid})}{k^2} - \varepsilon\right)\frac{\beta^2}{4} \leq \left(\frac{2e(H_{mid})}{k^2} - \varepsilon\right)(\beta-\varepsilon)^2 \leq 6\gamma = 6\beta^3,$$

и така

$$e(H_{mid}) < \left(12\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right)k^2 < 13\beta k^2.$$

От друга страна, от (5.25), веднага получаваме

$$\left(d_{H_{red}}(i) - \varepsilon k\right)(1-\varepsilon-\gamma)^2 \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\, k,$$

и следователно,

$$e(H_{red}) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon-\gamma)^2}\frac{1}{4}(1+\varepsilon)\, k^2 < \frac{1}{1-4\gamma}\left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{2}\right)k^2 < \left(\frac{1}{4} + 2\gamma\right)k^2.$$

По този начин имаме

$$\begin{aligned} e\left(H_{blue}\right) &= \binom{k}{2} - e\left(H_{red}\right) - e\left(H_{mid}\right) - e\left(H_{irr}\right) \\ &\geq \binom{k}{2} - \left(\frac{1}{4} + 2\gamma\right) k^2 - 13\beta k^2 - \varepsilon k^2 > \left(\frac{1}{4} - 16\beta\right) k^2. \end{aligned}$$

Следователно за броя на ребрата на графа G виждаме, че

$$e\left(G\right) > e\left(H_{blue}\right) \left(\frac{1}{4} - 16\beta\right) k^2 \left(1 - \beta\right) t^2 > \left(\frac{1}{4} - 17\beta\right) n^2.$$

Тъй като имаме

$$bk\left(G\right) \leq \left(\frac{1}{12} - \gamma\right) n \leq \left(\frac{1}{6} - 2\left(17\beta\right)^{1/3}\right) n,$$

от Теорема 4.6, ако ξ е достатъчно малко, то G съдържа индуциран граф G_0 за който

$$|G_0| \geq \left(1 - \xi\right) n$$

и

$$\delta\left(G_0\right) \geq \left(1 - 2\xi\right) n.$$

С това доказателството на Теорема 5.5 е завършено. ■

5.2 Доказателство на Теорема 5.4

Доказателство. Да допуснем, че съществува ε $(0 < \varepsilon < 1/6)$ такова, че за произволно големи q съществува $p \leq (1/6 - \varepsilon)\, q$ такова, че

$$r\left(B_p, B_q\right) > 2q + 3,$$

т.е. съществува граф G с брой на върховете $n = 2q + 3$ такъв, че

$$bk\left(G\right) \leq \left(\frac{1}{12} - \varepsilon\right) n, \tag{5.27}$$

$$bk\left(\overline{G}\right) \leq \frac{n}{2} - 2. \tag{5.28}$$

От Теорема 5.5 виждаме, че за всяко $\xi > 0$ и достатъчно голямо q, G трябва да съдържа индуциран двучастен граф G_0, за който

$$v(G_0) \geq (1-\xi)\, n,$$

и

$$\delta(G_0) \geq \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n.$$

Нека $U = V(G_0)$ и U_1 и U_2 са двата класа на G_0, т.е. $U = U_1 \cup U_2$. Да положим

$$\begin{aligned}
V_0 &= V(G) \backslash V(G_0);\\
V_1 &= \{u: \quad u \in V_0, \;\; \Gamma(u) \cap U_1 \neq \varnothing, \; \Gamma(u) \cap U_2 = \varnothing\}\\
V_2 &= \{u: \quad u \in V_0, \;\; \Gamma(u) \cap U_1 = \varnothing, \; \Gamma(u) \cap U_2 \neq \varnothing\}\\
V_3 &= \{u: \quad u \in V_0, \;\; \Gamma(u) \cap U_1 \neq \varnothing, \; \Gamma(u) \cap U_2 \neq \varnothing\}
\end{aligned}$$

Веднага виждаме, че

$$\begin{aligned}
V_0 &= V_1 \cup V_2 \cup V_3\\
V_1 \cap V_2 &= \varnothing,\\
e(M_1, V_2) &= e(M_2, V_1) = 0.
\end{aligned}$$

Първата ни цел е да докажем, че V_3 е празно.

За всеки връх $v \in G_0$ ще означим $P(v) = V_3 \backslash \Gamma_G(v)$ и ще разгледаме двойка от различни върхове $u, v \in U_2$. Имаме

$$\begin{aligned}
bk\left(\overline{G}\right) &\geq |U_2| - 2 + |V_1| + |P(u) \cap P(v)|\\
&\geq |U_2| - 2 + |V_1| + |P(u)| + |P(v)| - |V_3|.
\end{aligned}$$

Като сумираме по всички двойки $u, v \in U_2$ и вземем средната стойност, получаваме

$$\begin{aligned}
bk\left(\overline{G}\right) &\geq |U_2| - 2 + |V_1| + \frac{2\left(|V_3|\,|U_2| - e(U_2, V_3)\right)}{|U_2|} - |V_3|\\
&= |U_2| - 2 + |V_1| + |V_3| - \frac{2e(U_2, V_3)}{|U_2|} \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Тъй като U_1 е независимо множество, имаме

$$|U_1| \leq bk\left(\overline{G}\right) + 2 \leq \frac{n}{2}.$$

Така получаваме

$$|U_2| \geq |G_0| - \frac{n}{2} > \left(\frac{1}{2} - \xi\right) n.$$

и оттук, като оценим $|U_2|$ в знаменателя на (5.29)

$$bk\left(\overline{G}\right) > |U_2| - 2 + |V_1| + |V_3| - \frac{4e\left(U_2, V_3\right)}{\left(1 - 2\xi\right) n}$$

По симетрия намираме, че

$$bk\left(\overline{G}\right) > |U_1| - 2 + |V_2| + |V_3| - \frac{4e\left(U_1, V_3\right)}{\left(1 - 2\xi\right) n}$$

и така, като вземем предвид $|U| = |U_1| + |U_2|$ и $|V_1| + |V_2| + |V_3| + |U| = n$, имаме

$$2bk\left(\overline{G}\right) > n - 4 + |V_3| - \frac{4e\left(U, V_3\right)}{\left(1 - 2\xi\right) n}.$$

От (5.28) веднага се получава

$$e\left(U, V_3\right) > \frac{\left(1 - 2\xi\right)|V_3|\, n}{4}. \tag{5.30}$$

От друга страна, всяко $v \in V_3$ има съсед $u \in U_1$, оттук и като вземем предвид

$$|\Gamma(u) \cap U_2| \geq \delta\left(G_0\right) \geq \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n,$$

намираме, че

$$\begin{aligned} bk\left(G\right) &\geq |\Gamma(v) \cap \Gamma(u) \cap U_2| = |\Gamma(v) \cap U_2| + |\Gamma(u) \cap U_2| - |U_2| \\ &\geq |\Gamma(v) \cap U_2| + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n - |U_2|. \end{aligned}$$

С усредняване по всички $v \in V_3$ получаваме

$$bk\left(G\right) \geq \frac{e\left(V_3, U_2\right)}{|V_3|} + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n - |U_2|,$$

и по симетрия,

$$bk(G) \geq \frac{e(V_3, U_1)}{|V_3|} + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) n - |U_1|.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} 2bk(G) &\geq \frac{e(V_3, U)}{|V_3|} + (1 - 4\xi) n - |U| \geq \frac{e(V_3, U)}{|V_3|} + (1 - 4\xi) n - |U| \\ &\geq \frac{e(V_3, U)}{|V_3|} - 4\xi n \end{aligned}$$

и като вземем предвид (5.27) намираме, че

$$\left(\frac{1}{6} + 4\xi\right) n |V_3| \geq e(V_3, M).$$

След комбиниране с (5.30) получаваме

$$\frac{1}{6} + 4\xi > \frac{1 - 2\xi}{4},$$

и това е очевидно противоречие за малки ξ. Следователно, наистина $V_3 = \varnothing$.

От $|V_3| = 0$ можем да заключим, че

$$|U_1| + |U_2| + |V_1| + |V_2| = n.$$

За да завършим доказателството е достатъчно да отбележим, че

$$\begin{aligned} bk\left(\overline{G}\right) &\geq |U_1| + |V_2| - 2, \\ bk\left(\overline{G}\right) &\geq |U_2| + |V_1| - 2, \end{aligned}$$

и следователно, $bk\left(\overline{G}\right) \geq n/2 - 2$. ■

5.3 Точност на Теорема 5.4

В този раздел ще докажем, че Теорема 5.4 е съществено точна.

Теорема 5.16 *За всяко достатъчно малко* $\varepsilon > 0$, *ако* q *е достатъчно голямо и* $p \geq (1/6+\varepsilon)q$, *то*

$$r(B_p, B_q) > (2+\varepsilon)q.$$

В частност равенството

$$r(B_p, B_q) = 2q + 3$$

не е в сила при $p > (1/6+\varepsilon)q$.

Доказателство. За да докажем теоремата е достатъчно да покажем, че за фиксирано достатъчно малко ε и за достатъчно голямо n, ребрата на K_n могат да се оцветят в червени и черно така, че

$$bk_R < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n, \qquad bk_B < \left(\frac{1}{12} + \varepsilon\right) n. \tag{5.31}$$

Наистина това означава, че за $p = \lceil (1/12+\varepsilon)\, n \rceil$ и $q = \lceil (1/2-\varepsilon)\, n \rceil$ числото на Ремзи $r(B_p, B_q)$ удовлетворява

$$r(B_p, B_q) > n \geq \frac{q-1}{1/2-\varepsilon} > 2\,(q-1)\,(1+2\varepsilon) > (2+\varepsilon)\,q,$$

и освен това,

$$\frac{p}{q} = \frac{\lceil (1/12+\varepsilon)\, n \rceil}{\lceil (1/2-\varepsilon)\, n \rceil} > \frac{(1/12)\, n}{(1/2-\varepsilon/2)\, n} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\varepsilon} > \frac{1}{6}\,(1+\varepsilon)\,.$$

Ще докажем съществуването на оцветяване на ребрата на K_n, удовлетворяващо (5.31) чрез вероятностни методи. Да припомним следната версия на неравенството на Чернов ([5], стр. 10-12): Нека $X_1, ..., X_n$ са независими Бернулиеви случайни величини с $P\,(X_i = 1) = p_i$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = pn$. Тогава за $X = X_1 + ... + X_n$ и $\alpha > 0$,

$$P(X \geq (p+\alpha)\, n) < \exp(-2\alpha^2 n). \tag{5.32}$$

За удобство да допуснем, че n се дели на 3. Да подарзделим множеството $[n]$ на три класса A_1, A_2, A_3, всяко с по $n/3$ върха и да оцветим в червено ребрата във всчко от множествата A_1, A_2, A_3. Да оцветим независимо ребрата uv, $(u \in A_i,\ v \in A_j,\ i \neq j)$, червени с вероятност $p = 1/2 - 2\varepsilon$ и сини с вероятност $q = 1/2 + 2\varepsilon$.

За $uv \in A_i$, $(u \neq v)$, размерът $b_R(u,v)$ на червената книга имаща за база uv е случайна величина

$$b_R(u,v) = n/3 - 2 + X_1 + ... + X_{2n/3},$$

където X_i са независими Бернулиеви случайни величини с $P(X_i = 1) = p^2$. Следователно средната стойност на $b_R(u,v)$ удовлетворява

$$E(b_R(u,v)) = \frac{n}{3} - 2 + \frac{2}{3}p^2 n.$$

Ако ε е достатъчно малко, то стойността

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - 2\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) = \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{8}{3}\varepsilon^2$$

е положителна. От (5.32) имаме

$$P\left(b_R(u,v) \geq \frac{n}{3} - 2 + \frac{2}{3}np^2 + \xi_1 n\right) < \exp\left(-\frac{4}{3}\xi_1^2 n\right),$$

и следователно,

$$P\left(b_R(u,v) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)n\right) < \exp\left(-\frac{4}{3}\xi_1^2 n\right). \tag{5.33}$$

Нека сега $u \in A_i$ and $v \in A_j$, $(i \neq j)$. Ако реброто uv е синьо, размерът $b_B(u,v)$ на синята книга имаща за база uv е случайна величина

$$b_B(u,v) = X_1 + ... + X_{n/3},$$

където X_i са независими Бернулиеви случайни величини с $P(X_i = 1) = q^2$. Ако ε е достатъчно малко, то величината

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \left(\frac{1}{12} + \varepsilon\right) - \frac{1}{3}q^2 = \left(\frac{1}{12} + \varepsilon\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^2\end{aligned}$$

е положителна. От (5.32) получаваме

$$P\left(b_B(u,v) \geq \frac{1}{3}q^2 n + \xi_2 n\right) \leq \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_2^2 n\right),$$

и следователно,

$$\begin{aligned} P\left(b_R(u,v) \geq \left(\frac{1}{12} + \varepsilon\right) n\right) &< \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_2^2 n\right) \\ &< \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_1^2 n\right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

Ако реброто uv е червено, размерът $b'_R(u,v)$ на червената книга имаща за база uv е случайна величина

$$b'_R(u,v) = X_1 + \ldots + X_{n/3} + Y_1 + \ldots + Y_{2n/3-2},$$

където X_i и Y_i са независими Бернулиеви случайни величини с $P(X_i = 1) = p^2$, $P(Y_i = 1) = p$. Следователно средната стойност на $b'_R(u,v)$ удовлетворява

$$E(b'_R(u,v)) = \frac{n}{3}p^2 + \left(\frac{2n}{3} - 2\right)p.$$

За ε достатучно малко имаме

$$\begin{aligned} \xi_3 n &= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n - \frac{n}{3}p^2 - \left(\frac{2n}{3} - 2\right) p \\ &> \left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - 2\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) n \\ &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^2\right) n > \xi_1 n. \end{aligned}$$

Оттук и от (5.32) намираме

$$\begin{aligned} P\left(b'_B(u,v) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n\right) &\leq P\left(b'_B(u,v) \geq E(b'_R(u,v)) + \xi_3 n\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_3^2 n\right) \leq \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_1^2 n\right). \end{aligned} \tag{5.35}$$

От (5.33), (5.34) и (5.35) се вижда, че вероятността за червена книга от ред по-голям от $(1/2 - \varepsilon)n$ или за синя книга от ред по-голям от $(1/12 + \varepsilon)n$ е по-малка от

$$\binom{n}{2} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi_1^2 n\right),$$

и следователно клони към 0, когато $n \to \infty$. Следователно, за достатъчно големи n, желаното оцветяване на ребрата на K_n съществува. ■

Глава 6

Съществуване и устойчивост на r-книги

В [27] Ердьош, Фодри и Русо въвеждат функцията

$$\beta^{(k)}(n,m) = \min\left\{bk^{(k)}(G) \mid G = G(n,m)\right\}.$$

По-конкретно, те разглеждат графа $H(a,b,r)$, определен по следния начин.

$V(H(a,b,r)) = [a] \times [b] \times [r]$ и два върха (a_1,b_1,r_1) и (a_2,b_2,r_2) са съседни тогава и само тогава, когато $a_1 \neq a_2$ и $r_1 \neq r_2$. Очевидно $v(H(a,b,r)) = abr$ и лесно може да се провери, че

$$e(G(a,b,r)) = r(r-1)a(a-1)b^2/2 \tag{6.1}$$

$$bk^{(k)}(G(a,b,r)) = (r-k)(a-k)b. \tag{6.2}$$

Можем да обобщим тази конструкция за произволен брой върхове по следния прост начин. Нека $s > r \geq 3$ са фиксирани цели числа. Да разделим множеството V от n върха на rs множества V_{ij} $(i \in [s],\ j \in [r])$ по такъв начин, че мощността на V_{ij} да е или $\lceil n/rs \rceil$, или $\lfloor n/rs \rfloor$. Два върха $v \in V_{ij}$ и $u \in V_{pq}$ се съединяват тогава и само тогава, когато $i \neq p$ и $j \neq q$. Очевидно ако $rs|n$, конструираният по този начин граф е изоморфен на $H(r, n/rs, s)$, докато в общия случай тази конструкция може да даде и неизоморфни графи. За произволен такъв граф $H_{r,s}$ очевидно имаме

$$\binom{r}{2} s(s-1)\left\lfloor\frac{n}{rs}\right\rfloor^2 \leq e(H_{r,s}) \leq \binom{r}{2} s(s-1)\left\lceil\frac{n}{rs}\right\rceil^2$$

и

$$(r-k)(s-k)\left\lfloor\frac{n}{rs}\right\rfloor \leq bk^{(k)}(H_{r,s}) \leq (r-k)(s-k)\left\lceil\frac{n}{rs}\right\rceil.$$

Инвертирайки тези релации по отношение на броя на върховете n и на ребрата m, авторите на [27] показват, че за безкрайно много съществено различни стойности на m, удовлетворяващи

$$\frac{r-2}{2(r-1)}n^2 < m < \frac{r-1}{2r}n^2$$

е в сила

$$\beta^{(k)}(n,m) \leq \left(\frac{r-k}{r(r-1)}\right)\left(\frac{2krm-(r-1)(k-1)n^2}{n}\right)$$

за всяко $k \leq r$ (да забележим, че в [27], на стр. 147, равенство (2), и на стр. 147, равенство (4), има печатни грешки). В частност, за всяко $\varepsilon > 0$ можем да подберем m така, че

$$\frac{(r-2)}{2(r-1)}n^2 < m < \left(\frac{(r-2)}{2(r-1)}+\varepsilon\right)n^2$$

и

$$\beta^{(r-1)}(n,m) = \frac{(r-2)}{r(r-1)}n + O(1). \tag{6.3}$$

По-нататък ще намерим една оценка на $\beta^{(r-1)}(n,m)$ отдолу, която се различава от 6.3 с мултипликативна константа по-малка от $1/3$.

6.1 Едно неравенство от Бонферони тип

В този раздел ще разгледаме едно неравенство от Бонферони тип, което ще е нужно в последващото изложение.

Нека $(X, \mathcal{A}, \mu)$ е пространство с мярка μ и $\mu(X) = 1$. Да предположим че $A_1, ..., A_r \in \mathcal{A}$ са измерими множества. За всяко $k = 1, ..., r$ да означим

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq r} \mu\left(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}\right).$$

В сила е следното твърдение.

Теорема 6.1 *Ако i, k, l удовлетворяват*

$$1 \leq k \leq i \leq r,\ \ k < l \leq r$$

то

$$\binom{i-1}{l-1}\left(S_k\binom{i-1}{k-1}^{-1} - \frac{i\,(l-k)}{lk}\right) \leq S_l.$$

Този резултат е често приписван на Мори и Секеи [40] (напр. виж Галамбош и Симонели [35]), чиято работа е от 1983 г. В действителност той е бил известен поне 20 години по-рано на Яглом и Файнберг [55] и на Пирогов [48]. При това относително строго доказателство на това неравенство може да се намери в руски сборник от задачи от 1974 ([50], задача 60).

Лема 6.2 *Да допуснем, че $r > 2$, X е множество с мощност n и $A_1, ..., A_{r+1}$ е семейство от $r + 1$ подмножества на X за които*

$$\sum_{i=1}^{r+1} |A_i| \geq (r - 1 + a)\, n.$$

Тогава r члена от $\{A_1, ..., A_{r+1}\}$ имат най-малко

$$\frac{an}{r+1}$$

общи елемента.

Доказателство. Да вземем $\mathcal{A} = 2^X$ и нека $\mu(A) = |A|/n$. Прилагайки Теорема 6.1 при

$$k = 1,\ l = r,\ i = r$$

и семейството $A_1, ..., A_{r+1}$ намираме, че

$$\begin{aligned} S_r &\geq \binom{r-1}{r-1}\left(S_1\binom{r-1}{0}^{-1} - \frac{r(r-1)}{r}\right) \\ &= S_1 - (r-1) \geq a. \end{aligned}$$

Оттук

$$\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq r+1} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| \geq an$$

и желания резултат следва. ■

6.2 Семейството $\left\{B^{(r)}_{\lceil n/4r \rceil}\right\}$ е устойчиво

В този раздел ще докажем устойчивостта на $B^{(r)}_{\lceil cn \rceil}$ за $c > 1/4r$.

Да припомним следната теорема на Бонди ([8] и [9]).

Теорема 6.3 *Нека $r \geq 2$ и $G = G(n, t_r(n) + 1)$. Тогава за всеки връх u с максимална степен е в сила*

$$e(G[\Gamma(u)]) > t_{r-1}(d(u)).$$

Любопитно е, че този гъвкав резултат не се използва много в изследванията на книговото число на графи.

Да забележим, че ако $G = G(n, m)$ е граф с $m > t_r(n)$, то от (1.2) следва, че максималната степен на G е по-голяма от $(r-1)n/r$. Оттук, като приложим индуктивно Теорема 6.3 върху съседните върхове на връх с максимална степен, лесно получаваме следното твърдение.

Следствие 6.4 *Нека* $r \geq 3$ *и* $G = G(n, m)$ *е граф с* $m > t_r(n)$. *Тогава за всяко* $1 \leq k \leq r - 1$ *съществува k-клика R за която*

$$d(R) > \frac{r-k}{r} n$$

и

$$e(G[\Gamma(R)]) > t_{r-k}(d(R)).$$

□

Ще комбинираме този резултат със Следствие 4.3, за да получим следната оценка.

Теорема 6.5 *За всяко* $r \geq 2$ *и* n,

$$\beta^{(r)}(n, t_r(n) + 1) \geq \frac{n}{3r} \tag{6.4}$$

Доказателство. Нека $G = G(n, t_r(n) + 1)$. От Следствие 4.3 получаваме, че исканото неравенство е в сила при $r = 2$. Нека $r > 2$; от Следствие 6.4, приложено за $k = r - 2$, съществува $(r-2)$-клика $R \subset G$ за която

$$d(R) > \frac{2}{r} n$$

и

$$e(G[\Gamma(R)]) > t_2(d(R)).$$

Тогава (6.4) следва от Следствие 4.3, приложено към графа $G[\Gamma(R)]$. ■

От (6.4) и (6.3), виждаме, че

$$\frac{1}{3r} n \leq \beta^{(r-1)}(n, m) \leq \frac{r-1}{r(r+1)} n.$$

Следователно, оценката (6.4) е оптимална с точност до коефициент 1/3.

Теорема 6.6 *За всяко* $\alpha \leq 4^{-3} r^{-6}$ *и всеки граф* $G = G(n, m)$, *за който*

$$m \geq \left(\frac{r-1}{2r} - \alpha\right) n^2$$

е в сила или

$$bk^{(r)}(G) > \frac{n}{4r},$$

или G съдържа индуциран r-частен граф G_0 с повече от $\left(1-\alpha^{1/3}\right)n$ върха и с минимална степен

$$\delta(G_0) > \left(\frac{r-1}{r} - 4\alpha^{1/3}\right)n.$$

Доказателство. Ще означим $\varepsilon = \alpha^{1/3}$ и нека M_ε е множеството на всички $u \in V(G)$ за които

$$d(u) \leq \left(\frac{r-1}{r} - \varepsilon\right)n.$$

Ако допуснем, че $|M_\varepsilon| \geq \varepsilon n$, то можем да изберем множество $M \subset M_\varepsilon$ за което

$$\frac{1}{r-1}\varepsilon n \leq |M| \leq \frac{r}{r-1}\varepsilon n. \tag{6.5}$$

Очевидно $|V \backslash M| \geq 3n/4$; следователно, ако

$$e(V \backslash M) > \frac{r-1}{2r}\left(|V \backslash M|\right)^2,$$

то от Теорема 6.5 бихме имали за някоя r-клика $R \subset G[V \backslash M]$

$$d(R) > \frac{|V \backslash M|}{3r} \geq \frac{n}{4r}.$$

По този начин можем да предположим

$$e(V \backslash M) > \frac{r-1}{2r}\left(|V \backslash M|\right)^2,$$

и следователно

$$\begin{aligned} M\left(\frac{r-1}{r} - \varepsilon\right)n &\geq \left(\frac{r-1}{2r} - \alpha\right)n^2 - \frac{r-1}{2r}(n-M)^2 \\ &= -\alpha n^2 + Mn\left(\frac{r-1}{r}\right) - \frac{r-1}{2r}M^2. \end{aligned}$$

Оттук

$$\frac{r-1}{r}M^2 - 2\varepsilon Mn + 2\alpha n^2 \geq 0.$$

Решавайки това квадратно неравенство по отношение на $|M|$ и вземайки предвид $\varepsilon = \alpha^{1/3} \leq r^{-2}/4$, виждаме, че или

$$\begin{aligned}|M| &\geq \frac{r}{r-1}\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 2\frac{r-1}{r}\alpha}\right)n = \frac{r}{r-1}\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}\right)n \\ &= \frac{r}{r-1}\left(1 + \sqrt{1-\varepsilon}\right)\varepsilon n > \frac{r}{r-1}\varepsilon n\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}M &\leq \frac{r}{r-1}\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 2\frac{r-1}{r}\alpha}\right)n = \frac{r}{r-1}\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}\right)n \\ &= \frac{r}{r-1}\left(1 - \sqrt{1-\varepsilon}\right)\varepsilon n < \frac{r}{r-1}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right)\varepsilon n = \frac{1}{r-1}\varepsilon n,\end{aligned}$$

което е противоречие с (6.5).

Следователно $|M_\varepsilon| < \varepsilon n$. Да разгледаме графа $G_0 = G\left[V \backslash M_\varepsilon\right]$ и да допуснем, че $R \subset G_0$ е $(r+1)$-клика. От нашия избор за всяко $u \in R$ имаме

$$d\left(u\right) > \left(\frac{r-1}{r} - \varepsilon\right)n \geq \left(\frac{r-1}{r} - \frac{1}{r\left(r+1\right)}\right)n$$

и следователно

$$\sum_{u \in R} d\left(u\right) > \left(r - \frac{2}{r}\right)n.$$

Да положим $X = V$, и за всяко $i = 1, ..., r+1$, нека $A_i = \left\{\Gamma\left(i\right)|i \in R\right\}$. Като приложим Лема 6.2 към X, и $A_1, ..., A_{r+1}$ при

$$a = \frac{r-2}{r}$$

виждаме, че съществува r-клика $Q \subset R$, за която

$$d\left(Q\right) \geq \frac{r-2}{r\left(r+1\right)}n \geq \frac{n}{4r}$$

и доказателството ще е завършено, ако G съдържа K_{r+1}.

Следователно можем да предположим, че G_0 е без K_{r+1}. За всяко $u \in V(G_0)$ имаме

$$d_{G_0}(u) \geq d(u) - |M_\varepsilon| \geq \frac{2m}{n} - \varepsilon n - |M_\varepsilon| = \left(\frac{r-1}{r} - 2\alpha - \varepsilon\right) n - |M_\varepsilon|. \quad (6.6)$$

Ще докажем, че

$$\left(\frac{r-1}{r} - 2\alpha - \varepsilon\right) n - |M_\varepsilon| > \frac{3r-4}{3r-1}(n - |M_\varepsilon|) = \frac{3r-4}{3r-1} v(G_0). \quad (6.7)$$

Наистина, ако допуснем противното, виждаме, че

$$\left(\frac{1}{(3r-1)r} - 2\varepsilon^3 - \varepsilon\right) n \leq \frac{3}{3r-1}|M_\varepsilon| < \frac{3}{3r-1}\varepsilon n.$$

Оттук, като вземем предвид $\varepsilon \leq 1/4r^2$,

$$\frac{1}{(3r-1)r} < 2\varepsilon^3 + \left(\frac{3r+2}{3r-1}\right)\varepsilon \leq \frac{2}{4^3 r^6} + \left(\frac{3r+2}{3r-1}\right)\frac{1}{4r^2}.$$

С прости пресятания получаваме

$$r < \frac{2(3r-1)}{4^3 r^5} + \frac{3r+2}{4r} \leq \frac{3}{128r^4} + \frac{3r+2}{4r} \leq \frac{3}{2048} + 1 < 2,$$

което е противоречие. От Теорема 3.1 и (6.7), се вижда, че G_0 е r-хроматичен.

За да завършим доказателството, е достатъчно да забележим, че от (6.6) и $|M_\varepsilon| \leq \varepsilon n = \alpha^{1/3} n$ имаме

$$\begin{aligned}\delta(G_0) &\geq \left(\frac{r-1}{r} - 2\alpha - \varepsilon\right) n - |M_\varepsilon| \geq \left(\frac{r-1}{r} - 2\alpha - 2\alpha^{1/3}\right) n \\ &\geq \left(\frac{r-1}{r} - 4\alpha^{1/3}\right) n.\end{aligned}$$

■

Глава 7

Обобщени степени

През 1975 Болобаш и Ердьош в [6] предполагат, че всеки граф $G(n, m)$ с $m \geq t_r(n)$ съдържа r-клика R за която

$$\sum_{i \in R} d(i) \geq \frac{2rm}{n}. \tag{7.1}$$

Едуардс в [12] доказва, че това е вярно за $m > (r-1)\, n^2/2r$ и $r = 2, 3$, а в [13] и за $r \leq 8$ и $r \leq n^{1/2}$. Окончателно, Фодри в [32] доказва предположението за произволно $r \geq 2$ при ограничението $n > r^2 (r-1)/4$.

В тази глава даваме едно алтернативно доказателство, което показва, че предположението на Болобаш и Ердьош е валидно без никакви ограничения за n. Трябва да се отбележи, че нашето решение в много отношения е близко до това на Фодри, въпреки че в никакъв случай не е просто негово усъвършенстване.

7.1 Един графов алгоритъм

Нека за даден граф G разгледаме следния алгоритъм $\mathfrak{P}$ за конструиране на последователност $v_1, ..., v_k$ от върхове на G: избира се връх v_1 с максимална степен, след това връх v_2 с максимална степен от множеството $\Gamma(v_1)$, след това връх v_3 с максимална степен в множеството $\Gamma(v_1 v_2)$ и т.н. Очевидно върховете $v_1, ..., v_k$, конструирани от $\mathfrak{P}$ индуцират пълен граф в G. Казваме, че последователността $v_1, ..., v_k$ е $\mathfrak{P}$-*последователост*, ако тя може да се конструира от алгоритъма $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$-последователността $v_1, ..., v_k$ е максимална, ако не е собствена подпоследователност на $\mathfrak{P}$-последователност или, еквивалентно, ако $\Gamma(v_1...v_k) = \varnothing$.

Теорема 7.1 *Нека $r \geq 2$, $n \geq r$ и $m \geq t_r(n)$. Тогава всеки граф $G = G(n,m)$ е такъв, че:*

(i) *всяка максимална $\mathfrak{P}$-последователност има най-малко r члена;*

(ii) *За всяка $\mathfrak{P}$-последователност $v_1, ..., v_r$,*

$$\sum_{i=1}^{r} d(v_i) \geq (r-1)n; \tag{7.2}$$

(iii) *ако в (7.2) имаме равенство за някоя $\mathfrak{P}$-последователност $v_1, ..., v_r$ то $m = t_r(n)$.*

Доказателство. Ще предполагем, че $V(G) = [n]$. Без загуба на общност можем да допуснем, че $\mathfrak{P}$ конструира точно върховете $1, ..., k$ и следователно $d(1) \geq ... \geq d(k)$.

Доказателство на (i) и (ii) От (1.1) приложена при $M_i = \Gamma(i)$, $i = 1, ..., q$,

$$\sum_{i=1}^{q} d(i) > (q-1)n \tag{7.3}$$

следва $\Gamma(v_1...v_q) \neq \varnothing$. Следователно доказателствата на (i) и (ii) ще бъдат завършени ако (7.3) е в сила за $q \leq r$. Да допуснем, че това не е вярно и нека разгледаме най-малкото $q \leq r$ за което (7.3) не е в сила. От нашия избор на q,

$$\sum_{i=1}^{q} d(i) \leq (q-1)n, \tag{7.4}$$

докато за всяко $1 \leq h < q$,

$$\sum_{i=1}^{h} d(i) > (h-1)n. \tag{7.5}$$

Очевидно, $q > 1$, тъй като $d_1 > 0$. Нека подразделим V на q множества $V = V_1 \cup ... \cup V_q$, където,

$$V_1 = V \backslash \Gamma(1)\,,\ V_h = \Gamma([h-1]) \backslash \Gamma([h]) \text{ for } h = 2, ..., q-1,\ V_q = \Gamma([q-1])\,.$$

По този начин имаме

$$\begin{aligned}
2m &= \sum_{j \in V} d(j) = \sum_{h=1}^{q} \sum_{j \in V_h} d(j) \le \sum_{h=1}^{q} d(h)\,|V_h| \\
&= d(1)(n - d(1)) + \sum_{h=2}^{q-1} d(h)(d([h-1]) - d([h])) + d(q)\, d([q-1]) \\
&= d(1)\, n + \sum_{h=1}^{q-1} d([h])(d(h+1) - d(h))\,. \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

От (1.1), приложена при $M_i = \Gamma(i)$, $i = 1, ..., h$, получаваме

$$d([h]) = |\Gamma([h])| \ge \sum_{i=1}^{h} d(i) - (h-1)\, n = n - \sum_{i=1}^{h} (n - d(i))$$

и тъй като за всяко $h = 1, ..., q-1$ имаме $d(h+1) \le d(h)$, то в сила е

$$d([h])(d(h+1) - d(h)) \le \left(n - \sum_{i=1}^{h} (n - d(i))\right)(d(h+1) - d(h))\,. \qquad (7.7)$$

От друга страна, от (7.4), имаме

$$d_q \le (q-1)\, n - \sum_{i=1}^{q-1} d(i) = \sum_{i=1}^{q-1} (n - d(i))\,. \qquad (7.8)$$

Следователно, от (7.6), (7.7) и (7.8),

$$\begin{aligned}
2m &\le nd(1) + \sum_{h=1}^{q-2} \left(n - \sum_{i=1}^{h} (n - d(i))\right)(d(h+1) - d(h)) \\
&\quad + \left(n - \sum_{i=1}^{q-1} (n - d(i))\right)\left(\sum_{i=1}^{q-1} (n - d(i)) - d(q-1)\right).
\end{aligned}$$

Като разделим на 2 и пренаредим елементите от дясната страна, получаваме

$$\begin{aligned} m \quad \leq \quad & \left(n - \sum_{i=1}^{q-1} (n - d(i))\right) \left(\sum_{i=1}^{q-1} (n - d(i))\right) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq q-1} (n - d(i))(n - d(j)) \end{aligned} \tag{7.9}$$

За всяко $i = 1, ..., q-1$ полагаме $k_i = n - d(i)$ и $k_q = n - (k_1 + ... + k_{q-1})$. Очевидно, всички k_i са положителни за $i = 1, ..., q$ и освен това $k_1 + ... + k_q = n$. Да забележим, че дясната страна на (7.9) е точно

$$\sum_{1 \leq i < j \leq q} k_i k_j$$

и тази стойност е точно равна на $e(K(k_1, ..., k_q))$. Ако вземем такова n, че $k_1 + ... + k_q = n$, стойността $e(K(k_1, ..., k_q))$ достига максимума си тогава и само тогава, когато всички k_i се различават най-много с 1, т.е., точно когато $K(k_1, ..., k_q) = T_q(n)$. Следователно, от $m \geq t_r(n)$ и (7.9), получаваме

$$t_r(n) \leq m \leq e(K(k_1, ..., k_q)) \leq t_q(n). \tag{7.10}$$

Тъй като за $q < r \leq n$, имаме $t_q(n) < t_r(n)$, виждаме, че $q = r$ и с това доказателството на (i) е завършено. Да допуснем, че (7.2) не е в сила, т.е.,

$$\sum_{i=1}^{r} d(i) < (r-1)n.$$

Оттук следва, че (7.8) е в сила при стриктно неравенство и оттук доказателството на (7.10) дава $t_r(n) < t_q(n)$. Това противоречие доказва (ii).

Доказателство на (iii) Да допуснем, че за някоя $\mathfrak{P}$-последователност $v_1, ..., v_r$ за (7.2) имаме равенство. Имаме право и ще допуснем, че $v_1, ..., v_r = 1, ..., r$, т.е.,

$$\sum_{i=1}^{r} d(i) = (r-1)n.$$

Със същите разсъждения както при доказателството на (i) и (ii), от (7.10) стигаме до заключението, че

$$t_r(n) = m = e(K(k_1, ..., k_r)) = t_r(n) \tag{7.11}$$

и това доказателството е завършено. ■

7.2 Средна степен в клики

В този раздел ще се занимаем със задачата за намиране на клики с голяма средна степен. Ще използваме Теорема 7.1, за да докажем че всеки граф $G = G(n, m)$ с $m \geq t_r(n)$ съдържа r-клика R за която

$$\sum_{i \in R} d(i) \geq \frac{2rm}{n}, \tag{7.12}$$

както е предположено от Болобаш и Ердьош в [6]. Оказва се, че желаната r-клика R може да се конструира от алгоритъма $\mathfrak{P}$. Да забележим, че предположението е тривиално вярно за регулярни графи; както ще покажем, ако G не е регулярен, то неравенството (7.12) е строго.

Теорема 7.2 *Нека $r \geq 2$, $n \geq r$, $m > t_r(n)$ и нека $G = G(n, m)$ е граф който не е регулярен. Тогава съществува $\mathfrak{P}$-последователност $v_1, ..., v_r$ такава, че*

$$\sum_{i=1}^{r} d(v_i) > \frac{2rm}{n}. \tag{7.13}$$

Доказателство. Ще предполагем, че $V(G) = [n]$. От Теорема 7.1, част (iii), имаме за някоя $\mathfrak{P}$-последователност от r върха, например $1, ..., r$,

$$\sum_{i=1}^{r} d(i) > (r-1)n.$$

Тъй като $d(i) < n$, веднага получаваме

$$\sum_{i=1}^{s} d(i) > (s-1)n \tag{7.14}$$

за всяко $s \in [r]$. Можем да предполагаме, че $1, ..., k$ е максимална $\mathfrak{P}$-последователност, която съдържа $1, ..., r$. Очевидно

$$d([k]) \leq \sum_{i=1}^{k} d(i) - (k-1)n,$$

тъй като иначе, от (1.1) следва $\Gamma([k]) \neq \varnothing$ и по този начин с $\mathfrak{P}$ ще може да се конструира поне още един връх. Да разгледаме най-голямото q, за което

$$d([q-1]) > \sum_{i=1}^{q-1} d(i) - (q-2)n.$$

От нашия избор на q, имаме

$$d([q]) \leq \sum_{i=1}^{q} d(i) - (q-1)n, \tag{7.15}$$

и от (7.14), имаме $q \geq r$.

Ще завършим доказателството по следния начин: първо ще намерим оценка отгоре за m, изразена със сумите $\sum_{i=1}^{q} d(i)$ и $\sum_{i=1}^{q} d^2(i)$. После ще докажем

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} d(i) \geq \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} d(i) \geq \frac{2m}{n},$$

показвайки, че дясната част е равенство тогава и само тогава, когато G е регулярен.

Да подразделим множеството V на $q+1$ множества $V = V_1 \cup ... \cup V_{q+1}$, където

$$V_1 = V \backslash \Gamma(1), \ V_i = \Gamma([i-1]) \backslash \Gamma([i]) \text{ for } i = 2, .., q, \ V_{q+1} = \Gamma([q]).$$

По този начин

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{j \in V} d(j) = \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{j \in V_i} d(j) \leq \sum_{i=1}^{q+1} d(i) |V_i| \\ &= d_1(n - d_1) + \sum_{i=1}^{q-1} d(i)(d([i]) - d([i+1])) + d(q+1)d([q]) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Очевидно от (1.1),

$$\begin{aligned} d\left([i+1]\right) &= \left|\Gamma\left([i+1]\right)\right| = \left|\Gamma\left([i]\right) \cap \Gamma\left(i+1\right)\right| \\ &\geq \left|\Gamma\left([i]\right)\right| + \left|\Gamma\left(i+1\right)\right| - n = d\left([i]\right) + d\left(i\right) - n \end{aligned}$$

и оттук

$$d\left([i]\right) - d\left([i+1]\right) \leq d\left(i\right) - n.$$

Следователно, от (7.16) следва, че

$$2m \leq \sum_{i=1}^{q} d\left(i\right)\left(n - d\left(i\right)\right) + d\left(q+1\right) d\left([q]\right).$$

Сега, нека $S_q = \sum_{i=1}^{q} d\left(i\right)$. За забележим, че $d\left(q+1\right) \leq S_q/q$ и от (7.15),

$$2m \leq \frac{S_q}{q}\left(S_q - \left(q-1\right)n\right) + nS_q - \sum_{i=1}^{q} d^2\left(i\right).$$

От неравенството на Коши следва, че

$$2m \leq \frac{S_q}{q}\left(S_q - \left(q-1\right)n\right) + nS_q - \frac{S_q^2}{q} = \frac{S_q n}{q}. \tag{7.17}$$

Тъй като $d\left(1\right) \geq \ldots \geq d\left(r\right) \geq \ldots \geq d\left(q\right)$, имаме

$$\frac{S_r}{r} \geq \frac{S_q}{q} \geq \frac{2m}{n} \tag{7.18}$$

което доказва

$$\sum_{i=1}^{r} d\left(i\right) \geq \frac{2rm}{n}. \tag{7.19}$$

За да завършим доказателството, ще предположим, че в (7.19) и в (7.18) имаме равенства. Но тогава ще имаме равенство и в случая, в който прилагаме неравенството на Коши

$$\sum_{i=1}^{q} d^2\left(i\right) = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{q} d\left(i\right)\right)^2$$

и по този начин $d\left(1\right) = \ldots = d\left(q\right)$. Следователно, максималната степен $d\left(1\right)$ ще е равна на средната степен $2m/n$, което противоречи на допускането, че G не е регулярен. ■

Глава 8

Съществуване и устойчивост на сглобки

През 1969 г. Ердьош [23] доказва следното твърдение.

Теорема 8.1 (Erdős[23]) *За цели $r \geq 2$, $n > n_0(r)$ всеки $G(n, t_r(n) + 1)$ има ребро, което се съдържа в повече от*

$$\frac{n^{r-1}}{(10r)^{6r}} \tag{8.1}$$

$(r+1)$-клики на G.

Той използва този резултат като инструмент за получаване на няколко важни оценки за броя на кликите в графите. Въпреки важността си това направление не получава по-нататъшно развитие.

Целта ни в тази глава е да разширим и подобрим Теорема 8.1, като разгледаме проблема от гледна точка на устойчивост. Нека първо въведем концепцията за сглобки.

Дефиниция 8.2 *Нека p, q, r са положителни числа и $p \geq r$, $q > r \geq 1$. Граф, който представлява обединение на p-клика H и множество от t на брой q-клики, всяка от които има точно r общи върха с H, се нарича* (p, q, r)-сглобка *и се означава с $J_t^{(p,q,r)}$. Стойността t се нарича* ред *на* *сглобката. Максималният ред на (p,q,r)-сглобка в графа G се означава с $js^{(p,q,r)}(G)$.*

Очевидно сглобките разширяват концепцията за r-книгите - обикновените книги са $(2,3,2)$-сглобки, а r-книгите са $(r,r+1,r)$-сглобки. Да обърнем внимание, че в общия случай параметрите p,q,r описват семейство графи, а не един единствен граф.

В следващото изложение ще се занимаваме предимно със сглобки от тип $J_q^{(2,r+1,2)}$. По-точно, за $c>0$ нека $\mathfrak{J}^{(2,r+1,2)}(cn^{r-1})$ е фамилията от сглобки $J_q^{(2,r+1,2)}$ с ред не по-малък от cn^{r-1}. В раздел 8.2 ще докажем подобрена версия на Теорема 8.1, а в раздел 8.3 ще докажем, че фамилията $\left\{\mathfrak{J}^{(2,r+1,2)}(cn^{r-1})\right\}$ е устойчива за някаква положителна константа $c=c(r)>0$.

8.1 Някои предварителни резултати

Ще започнем, като дадем оценка отдолу за броя $(r+1)$-клики в граф G с n върха, когато броят на ребрата в G е малко по-голям от $t_r(n)$.

Лема 8.3 *Ако $r\geq 3$ е цяло число, $c>0$, и графът $G=G(n,m)$ удовлетворява*

$$m\geq\left(\frac{r-1}{2r}+c\right)n^2,$$

то

$$k_{r+1}(G)>c\left(\frac{n}{r}\right)^{r+1} \tag{8.2}$$

и

$$js^{(2,r+1,2)}(G)>c\left(\frac{n}{r}\right)^{r-1} \tag{8.3}$$

Доказателство. Да припомним следното неравенство на Муун и Мозер [39], (също [36]): Ако $G=G(n)$ и $k_s(G)>0$, то

$$\frac{(s+1)\,k_{s+1}(G)}{sk_s(G)}-\frac{n}{s}\geq\frac{sk_s(G)}{(s-1)\,k_{s-1}(G)}-\frac{n}{s-1}.$$

Оттук, лесно получаваме, че за $s = 2, ..., r$

$$\frac{(s+1)\, k_{s+1}(G)}{sk_s(G)} - \frac{n}{s} \geq \frac{2m}{n} - n > \left(-\frac{1}{r} + 2c\right) n$$

и по този начин

$$\frac{(s+1)\, k_{s+1}(G)}{sk_s(G)} \geq \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} + 2c\right) n$$

Умножавайки тези неравенства за $s = 2, ..., r$, получаваме

$$\begin{aligned}\frac{(r+1)\, k_{r+1}(G)}{n} &\geq n^r \prod_{s=1}^{r} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} + 2c\right) > 2cn^r \prod_{s=1}^{r-1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{2c}{r^r} n^r\end{aligned}$$

и оттук,

$$k_{r+1}(G) \geq \frac{2c}{(r+1)\, r^r} n^{r+1} > c \left(\frac{n}{r}\right)^{r+1},$$

с което доказателството на (8.2) е завършено.

Накрая, (8.3) следва от

$$js^{(2,r+1,2)}(G) \geq \binom{r+1}{2} k_{r+1}(G) \binom{n}{2}^{-1} > \binom{r+1}{2} c \left(\frac{n}{r}\right)^{r+1} > c \left(\frac{n}{r}\right)^{r-1}.$$

■

Можем да получим подобни оценки и като функция на $\delta(G)$. По-специално, в сила е следното.

Следствие 8.4 *Ако* $r \geq 3$, $c > 0$, *и графът* $G = G(n)$ *удовлетворява*

$$\delta(G) \geq \left(\frac{r-1}{r} + c\right) n,$$

то

$$k_{r+1}(G) > \frac{c}{2} \left(\frac{n}{r}\right)^{r+1}$$

и

$$js^{(2,r+1,2)}(G) > \frac{c}{2} \left(\frac{n}{r}\right)^{r-2}.$$

Доказателство. Този резултат следва от

$$e(G) > \left(\frac{r-1}{2r} + \frac{c}{2}\right) n^2$$

и Лема 8.3. ■

Освен това ще имаме нужда и от едно неравенство от Бонферони тип.

Лема 8.5 *Нека $r > 2$, X е множество с кардинално число n и $A_1, ..., A_{r+1}$ е фамилия от $r+1$ подмножества на X, за които*

$$\sum_{i=1}^{r+1} |A_i| \geq \left(r - \frac{1}{r} - (r+1)\, a\right) n.$$

Тогава някои 2 члена на $\{A_1, ..., A_{r+1}\}$ имат най-малко

$$\left(\frac{r-2}{r} + \frac{2}{r^2\,(r+1)} - \frac{2\,(r-1)}{r} a\right) n$$

общи елемента.

Доказателство. Дефинициите, които се използват в доказателството, са въведени в раздел 6.1.

Нека $\mathcal{A} = 2^X$ и $\mu(A) = |A|/n$. Ако приложим Теорема 6.1 за

$$k = 1,\ l = 2,\ i = r$$

към фамилията $A_1, ..., A_{r+1}$ получаваме, че

$$\begin{aligned} S_2 &\geq \binom{r-1}{1}\left(S_1 - \frac{r}{2}\right) = (r-1)\left(r - \frac{1}{r} - (r+1)\,a - \frac{r}{2}\right) \\ &= \frac{r\,(r-1)}{2} - \frac{r-1}{r} - \left(r^2 - 1\right) a. \end{aligned}$$

Оттук

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r+1} |A_i \cap A_j| \geq \left(\frac{r\,(r-1)}{2} - \frac{r-1}{r} - \left(r^2 - 1\right) a\right) n$$

и следователно за някои $1 \leq i < j \leq r+1$ ще имаме

$$\begin{aligned}|A_i \cap A_j| &\geq \left(\frac{r(r-1)}{2} - \frac{r-1}{r} - \left(r^2-1\right)a\right)\binom{r+1}{2}^{-1} n \\ &= \left(\frac{r-1}{r+1} - \frac{2(r-1)}{r^2(r+1)} - \frac{2(r-1)}{r}a\right)n \\ &= \left(\frac{r-2}{r} + \frac{2}{r^2(r+1)} - \frac{2(r-1)}{r}a\right)n.\end{aligned}$$

■

Идеята на следващата лема се дължи основно на Ердьош, но нашата техника на доказателство позволява неговата оценка да бъде значително подобрена.

Лема 8.6 *Ако* $G = G(n)$ *съдържа* K_{r+1} *и*

$$\delta(G) \geq \left(\frac{r-1}{r} - \frac{1}{r^2(r^2-1)}\right)n,$$

то

$$js^{(2,r+1,2)}(G) > \frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}}.$$

Доказателство. Наистина, нека $\{1, ..., r+1\}$ е една $(r+1)$-клика в G. Ако приложим Лема 8.5 при $A_i = \Gamma(i)$ и $a = \left(r^2\left(r^2-1\right)\right)^{-1}$ получаваме

$$\sum_{i=1}^{r+1} |A_i| > \left(r - \frac{1}{r} + \frac{r+1}{\left(r^2\left(r^2-1\right)\right)}\right)n,$$

и следователно, за някое $1 \leq i < j \leq r+1$,

$$\begin{aligned}|\Gamma(i) \cap \Gamma(j)| &\geq \left(\frac{r-2}{r} + \frac{2}{r^2(r+1)} - \frac{2(r-1)}{r}\frac{1}{r^2(r^2-1)}\right)n \\ &= \left(\frac{r-2}{r} + \frac{1}{r^2(r+1)}\right)n. \qquad (8.4)\end{aligned}$$

Да положим $M = \Gamma(ij)$ и да разгледаме графа $G[M]$. Имаме

$$\begin{aligned}\delta(G[M]) &\geq \delta(G) - (n - |M|) \geq \left(\frac{r-1}{r} - \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\right)n - (n - |M|) \\ &= |M| - \left(\frac{1}{2r^2(r^2-1)} + \frac{1}{r}\right)n. \qquad (8.5)\end{aligned}$$

С рутинни пресмятания получаваме, че за $r \geq 3$,

$$\left(\frac{1}{r-2} - \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\right)\left(r - 2 + \frac{1}{r(r+1)}\right) \geq 1 + \frac{1}{2r(r^2-1)}.$$

От (8.4),

$$|M|\left(\frac{1}{r-2} - \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\right) \geq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2(r+1)}\right)n,$$

и следователно,

$$|M| - \left(\frac{1}{r^2(r+1)} + \frac{1}{r}\right)n \geq \left(\frac{r-3}{r-2} + \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\right)|M|.$$

Оттук и от (8.5), следва

$$\delta(G[M]) \geq \left(\frac{r-3}{r-2} + \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\right)|M|.$$

Накрая, от Следствие 8.4 и (8.4) получаваме

$$k_{r-1}(G[M]) \geq \frac{1}{2r^2(r^2-1)}\frac{|M|^{r-1}}{(r-2)^{r-2}} > \frac{(r-2)}{2r^2(r^2-1)}\frac{n^{r-1}}{r^{r-1}} \geq \frac{1}{8}\frac{n^{r-1}}{r^{r+2}}.$$

■

8.2 Съществуване на сглобки $J_q^{(2,r+1,2)}$

В този раздел ще докажем един резултат от Туранов тип за сглобки от вида $J_q^{(2,r+1,2)}$.

Теорема 8.7 *За $r \geq 2$ и достатъчно голямо n всеки $G = G(n,m)$, удовлетворяващ*

$$m > t_r(n) \tag{8.6}$$

съдържа индуциран подграф $G' = G(n', m')$ с $n' > (1 - 1/r^2)n$ и такъв, че е в сила или

$$K_{r+1} \subset G', \qquad \delta(G') > \left(\frac{r-1}{2r} - \frac{1}{r^2(r^2-1)}\right)n', \tag{8.7}$$

или

$$m' > \left(\frac{r-1}{2r} + \frac{1}{r^4\left(r^2-1\right)}\right)\left(n'\right)^2. \tag{8.8}$$

Доказателство. Да дефинираме последователността $u_1, ..., u_n$ от върхове по следния начин

$$d\left(u_1\right) = \delta\left(G\right), \qquad d\left(u_s\right) = \delta\left(G - u_1 - ... - u_{s-1}\right), \; 2 < s \leq n.$$

За всяко $0 \leq s < n$, да положим $G_s = G - u_1 - ... - u_s$ и да отбележим, че

$$e\left(G_s\right) - e\left(G_{s+1}\right) = \delta\left(G_s\right). \tag{8.9}$$

Нека $\beta = \frac{1}{r^2(r^2-1)}$ и да предположим, че $k-1$ е най-голямото цяло число, такова, че

$$\delta\left(G_{k-1}\right) \leq \left(\frac{r-1}{r} - \beta\right)\left(n-k-1\right).$$

От (1.4) и (8.6) следва, че за всяко G_s, $1 \leq s \leq k$, и достатъчно голямо n,

$$e\left(G_s\right) > t_r\left(n-s\right). \tag{8.10}$$

По-точно, от (8.9), за всяко G_s, $1 \leq s \leq k$, имаме

$$m - e\left(G_s\right) = \sum_{i=0}^{s-1} \delta\left(G_i\right) \leq \left(\frac{r-1}{r} - \beta\right) \sum_{i=0}^{s} \left(n-i\right)$$

и следователно,

$$\begin{aligned} m - e\left(G_s\right) &\leq \left(\frac{r-1}{r} - \beta\right)\left(\binom{n+1}{2} - \binom{n-s+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{r-1}{r} - \beta\right)\left(\frac{n^2}{2} - \frac{\left(n-s\right)^2}{2} + \frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

По този начин, от (8.6), за всяко G_s, $1 \leq s \leq k$, получаваме

$$\begin{aligned} e(G_s) &> -\left(\frac{r-1}{r} - \beta\right)\left(\frac{n^2}{2} - \frac{(n-s)^2}{2} + \frac{s}{2}\right) + \frac{r-1}{2r}n^2 \\ &= \beta\frac{n^2}{2} + \left(\frac{r-1}{2r} - \frac{\beta}{2}\right)(n-s)^2 - \left(\frac{r-1}{r} - \beta\right)\frac{s}{2} \\ &= \frac{r-1}{2r}(n-s)^2 + \frac{\beta}{2}\left(n^2 - (n-s)^2\right) + O(n). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Да допуснем, че $k > n/r^2$. Тогава за $s = \lfloor n/r^2 \rfloor$ имаме

$$\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)n + O(1) = n - s \geq \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)n, \tag{8.12}$$

откъдето,

$$(n-s)^2\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{-2} = n^2 + O(n).$$

Следователно, за достатъчно голямо n,

$$\begin{aligned} e(G_s) &> \frac{r-1}{2r}(n-s)^2 + \frac{\beta}{2}\left(n^2 - (n-s)^2\right) - \frac{s}{2} \\ &> \left(\frac{r-1}{2r} + \frac{\beta}{r^2}\right)(n-s)^2. \end{aligned}$$

Оттук и от (8.12), следва (8.8) за $G' = G_k$.

Да допуснем, че $k \leq n/r^2$. Тогава от (8.10), имаме

$$e(G_k) > t_r(n-k).$$

за достатъчно голямо n. Оттук и от $(n-k) \geq (1 - 1/r^2)\,n$, следва (8.7) за $G' = G_k$. ■

Теорема 8.8 *За $r \geq 2$ и достатъчно голямо n, за всеки $G = G(n, t_r(n) + 1)$ е в сила*

$$js^{(2,r+1,2)}(G) > \frac{n^{r-1}}{2r^{r+5}}. \tag{8.13}$$

Доказателство. От Теорема 8.7 следва, че G съдържа индуциран подграф $G' = G(n', m')$ с $m' > (1 - 1/r^2)\, n'$, за който е в сила или (8.7) или (8.8). Ако (8.7) е вярно, то, прилагайки Лема 8.6 към графа G', виждаме, че:

$$js^{(2,r+1,2)}(G') \geq \frac{(n')^{r-1}}{8r^{r+2}} > \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{r-1} \frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}} > \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}}$$

и твърдението следва.

Ако (8.8) е вярно, то от Лема 8.3 виждаме, че

$$js^{(2,r+1,2)}(G') \geq \frac{1}{r^4(r^2-1)} \left(\frac{n}{r}\right)^{r-1} > \frac{n^{r-1}}{r^{r+5}}$$

и оттук твърдението следва . ■

Да обърнем внимание, че оценката (8.13) е много по-точна от (8.1). Фактически (8.13) е точна до мултиплкативна константа $2r^{-6}$, както може да се види от прост пример.

8.3 Семейството $\left\{\mathfrak{J}^{(2,r+1,2)}\left(cn^{r-1}\right)\right\}$ е r-устойчиво

С помощта на теорема 8.8 ще покажем, че семейството $\left\{\mathfrak{J}^{(2,r+1,2)}\left(cn^{r-1}\right)\right\}$ е r-устойчиво. По-точно, в сила е следната теорема.

Теорема 8.9 *За всяко* $0 < \alpha < r^{-8}/36$, *и* $n > n_0(\alpha)$, *ако графът* $G = G(n, m)$ *удовлетворява*

$$m \geq \left(\frac{r-1}{2r} - \alpha\right) n^2,$$

то или

$$js^{(2,r+1,2)}(G) > \frac{n^{r-1}}{3r^{r+5}},$$

или G *съдържа индуциран* r*-хроматичен подграф* G_0 *с брой на върховете по-голям от* $(1 - 2\sqrt{\alpha})\, n$ *и*

$$\delta(G_0) > \left(1 - \frac{1}{r} - 6\sqrt{\alpha}\right) n.$$

Доказателство. Да допуснем, че

$$js^{(2,r+1,2)}(G) \leq \frac{n^{r-1}}{3r^{r+5}}.$$

Да положим $\varepsilon = 2\sqrt{\alpha}$ и да дефинираме $M_\varepsilon \subset V$ като

$$M_\varepsilon = \left\{ u : d(u) \leq \left(\frac{r-1}{r} - \varepsilon \right) n \right\}.$$

Първо ще покажем, че $|M_\varepsilon| < 2\varepsilon n$. Наистина нека допуснем, че е в сила обратното и да изберем произволно $M' \subset M_\varepsilon$, удовлетворяващо

$$\left(1 - \sqrt{1/2}\right) \varepsilon n < |M'| < \left(1 + \sqrt{1/2}\right) \varepsilon n. \tag{8.14}$$

Нека G' е графът, индуциран от $V \backslash M'$. Тогава

$$\begin{aligned} e(G) = e(G') + E(M', V\backslash M') + e(G[M']) &\leq e(G') + \sum_{u \in M'} d(u) \\ &\leq e(G') + |M'| \left(\frac{r-1}{r} - \varepsilon \right) n. \end{aligned}$$

От $|M'| < \left(1 + \sqrt{1/2}\right) \varepsilon n$ следва

$$n - |M'| > n - 2\varepsilon n.$$

Следователно, ако

$$e(G') > \frac{r-1}{2r} (n - |M'|)^2,$$

то от Теорема 8.8, имаме

$$\begin{aligned} js^{(2,r+1,2)}(G) &\geq js^{(2,r+1,2)}(G') > \frac{(n - |M'|)^{r-1}}{2r^{r+5}} > (1 - 2\varepsilon)^{r-1} \frac{n^{r-1}}{2r^{r+5}} \\ &> \left(1 - \frac{2}{3r^4}\right)^r \frac{n^{r-1}}{2r^{r+5}} > \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \frac{n^{r-1}}{2r^{r+5}} > \frac{n^{r-1}}{3r^{r+5}}, \end{aligned}$$

което е противоречие. Следователно можем да приемем, че

$$e(G') \leq \frac{r-1}{2r} (n - |M'|)^2$$

и оттук,

$$\frac{r-1}{2r}\left(n-|M'|\right)^2 \geq e\left(G'\right) > -\left|M'\right|\left(\frac{r-1}{r}-\varepsilon\right)n+\left(\frac{r-1}{2r}-\alpha\right)n^2.$$

Полагайки $x=|M'|/n$, от това неравенство следва

$$\frac{r-1}{2r}(1-x)^2+x\left(\frac{r-1}{r}-\varepsilon\right)-\left(\frac{r-1}{2r}-\alpha\right)>0$$

и следователно,

$$x^2-2\varepsilon x+2\alpha>0.$$

Оттук,

$$|M_\varepsilon| > \left(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-2\alpha}\right)n=\varepsilon\left(1-\sqrt{1/2}\right)n$$

или

$$|M_\varepsilon| < \left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+2\alpha}\right)n=\varepsilon\left(1+\sqrt{1/2}\right)n,$$

което е противоречие с (8.14). Следователно, $|M_\varepsilon|<2\varepsilon n$.

Да разгледаме графа G_0, индуциран от множеството $V\backslash M_\varepsilon$. От нашия избор, за всяко $u\in V\backslash M_\varepsilon$ имаме

$$d_G(u) > \left(\frac{r-1}{r}-\varepsilon\right)n,$$

и оттук,

$$\begin{aligned} d_{G_0}(u) &> \left(\frac{r-1}{r}-\varepsilon\right)n-|M_\varepsilon| > \left(\frac{r-1}{r}-3\varepsilon\right)v\left(G_0\right) && (8.15)\\ &> \left(\frac{r-1}{r}-\frac{1}{r^4}\right)v\left(G_0\right) > \left(1-\frac{3}{3r-1}\right)v\left(G_0\right). && (8.16)\end{aligned}$$

Ако G_0 е съдържа K_{r+1}, то от Лема 8.6, предвид на (8.15), имаме

$$\begin{aligned} js^{(2,r+1,2)}(G) &\geq js^{(2,r+1,2)}\left(G_0\right) > \frac{\left(n-|M'|\right)^{r-1}}{8r^{r+2}} > (1-2\varepsilon)^{r-1}\frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}}\\ &> \left(1-\frac{1}{3r^4}\right)^r\frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}} > \left(1-\frac{1}{3r^3}\right)\frac{n^{r-1}}{8r^{r+2}} > \frac{n^{r-1}}{3r^{r+5}},\end{aligned}$$

което е противоречие.

Ако G_0 е без K_{r+1}, от Теорема 3.1, предвид на (8.16), той е r-хроматичен. Оттук, предвид на (8.15), доказателството е завършено. ■

Глава 9

Научни приноси

В представения дисертационен труд са направени следните научни приноси:

1) въведено е понятието устойчивост на семейство графи;

2) изследвани са някои общи свойства на устойчиви семейства графи и е намерено необходимо условие за устойчивост;

3) решена е една задача на Ердьош за локална плътност на графи без K_p. Дадена е характеризация на такива графи извън областта на устойчивост.

4) доказана е устойчивостта на пълните графи;

5) решена е една задача на Едуардс и Елфик от 1983 за максималната собствена стойност на граф без K_p;

6) характеризирана е устойчивостта на пълните графи чрез максималната собствена стойност на граф;

7) намерени са числата на Ремзи $r\left(K_r, B_q^{(l)}\right)$ за достатъчно големи q;

8) намерена е асимптотична оценка на числата на Ремзи $r(H, B_q^{(l)})$ за фиксиран граф H;

9) опровергано е едно предположение на Ердьош за всички стойности на параметрите с изключение на краен брой;

10) доказано е, че семейството от книгите $\left\{B_{\lceil n/6\rceil}\right\}$ е устойчиво;

11) решени са две задачи на Ердьош относно книговото число на

определен тип графи;

12) намерени са числата на Ремзи $r(B_p, B_q)$ за $p \leq q/6 + o(q)$ и е доказана оптималността на константата 1/6 в дадения контекст;

13) доказано, че семейството от r-книгите $\left\{B^{(r)}_{\lfloor cn \rfloor}\right\}$ е устойчиво за $c \geq 1/4r$;

14) дадено е пълно решение на една задача на Болобаш и Ердьош от 1976 г. за средна степен върху клики;

15) въведен е и е изследван нов тип графи, наречени сглобки;

16) подобрена е значително една оценка на Ердьош от 1969 г. за максималния ред на определен клас сглобки;

17) доказана е устойчивостта на определен клас сглобки.

Библиография

[1] B. Andrásfai, P. Erdős and V. Sós, On the connection between chromatic number, maximal clique and minimum degree of a graph. *Discr. Math.* **8** (1974), 205–218.

[2] B. Bollobás, *Modern Graph Theory,* Graduate Texts in Mathematics, **184**, Springer-Verlag, New York (1998), xiv+394 pp.

[3] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory,* Academic Press Inc., London-New York, 1978, xx+488 pp.

[4] B. Bollobás, Turán's theorem and maximal degrees, *J. Comb. Theory, Ser. B* **75** (1999), 160–164.

[5] B. Bollobás, *Random Graphs,* 2nd ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics,* **73**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.

[6] B. Bollobás and P. Erdős, Unsolved problems, *Proc. Fifth Brit. Comb. Conf. (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975),* Winnipeg, Util. Math. Publ., 678–680.

[7] S. A. Burr and P. Erdős, Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal, *J. Graph Theory* **7** (1983), 39–51.

[8] J. A. Bondy, Large dense neighbourhoods and Туран's theorem, *J. Comb. Theory Ser. B* **34** (1983), 109–111.

[9] J. A. Bondy, Erratum: Large dense neighbourhoods and Туран's theorem, *J. Comb. Theory Ser. B* **35** (1983), 80.

[10] B. Bollobás and V. Nikiforov, Books in graphs, представена в *Eur. Journal of Comb.*

[11] D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[12] C. Edwards, The largest vertex degree sum for a triangle in a graph, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **9** (1977), 203–208.

[13] C. Edwards, Complete subgraphs with largest sum of vertex degrees, *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai,* **18**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978, pp. 293–306.

[14] C. Edwards, ръкопис.

[15] C. Edwards and C. Elphick, Lower bounds for the clique and the chromatic number of a graph, *Discr. Appl. Math.* **5** (1983) 51-64.

[16] T. Motzkin and E. Straus, Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán, *Canad. J. Math.* **17**(1965), 533-540.

[17] H. Wilf, Spectral Bounds for the Clique and Independence Numbers of Graphs, *J. Comb. Theory Ser. B* **40** (1986), 113-117.

[18] P. Erdős, On the number of complete subgraphs contained in certain graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **VII**, Ser. A3 (1962), 459-464p.

[19] P. Erdős, On a theorem of Rademacher-Туран, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 122–127p.

[20] P. Erdős, On the structure of linear graphs, *Israel J. Math.* **1** (1963), 156–160

[21] P. Erdős, Some recent results on extremal problems in graph theory (results) in *Theory of Graphs (Internat. Sympos., Rome, 1966)*, pp. 117–130, Gordon and Breach, New York; Dunod, Paris.

[22] P. Erdős, On some new inequalities concerning extremal properties of graphs, in: *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pp. 77–81, Academic Press, New York, 1968.

[23] P. Erdős, On the number of complete subgraphs and circuits contained in graphs, *Časopis Pěst. Mat.* **94** (1969), 290–296.

[24] P. Erdős, Some of my favourite problems in various branches of combinatorics, *Combinatorics 92 (Catania, 1992), Matematiche (Catania)* **47** (1992), 231–240.

[25] P. Erdős, Problems and results in combinatorial analysis and graph theory, *Proceedings of the First Japan Conference on Graph Theory and Applications (Hakone, 1986), Discrete Math.* **72** (1988), 81–92.

[26] P. Erdös, R. Faudree and E. Györi, On the book size of graphs with large minimum degree, *Studia Sci. Math. Hungar.* **30** (1995), 25–46.

[27] P. Erdös, R. Faudree and C. C. Rousseau, Extremal problems and generalized degrees, *Graph Theory and Applications (Hakone, 1990), Discr. Math.* **127** (1994), 139–152.

[28] P. Erdős, A. Hajnal, V. Sós and E. Szemerédi, More results on Ramsey-Turán type problems, *Combinatorica* **3** (1983), 69–81.

[29] P. Erdős and M. Simonovits, On a valence problem in extremal graph theory, *Discr. Math.*, **5** (1973), 323-334.

[30] P. Erdős and V. Sós, Some remarks on Ramsey's and Turán's theorem. *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969),* pp. 395–404, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[31] P. Erdős and A. H. Stone, On the structure of linear graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 1087–1091.

[32] R. Faudree, Complete subgraphs with large degree sums, *J. Graph Theory* **16** (1992), 327–334p.

[33] R. Faudree, C. C. Rousseau and J. Sheehan, More from the good book, *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1978),* pp. 289–299, *Congress. Numer.,* **XXI**, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1978.

[34] R. Faudree, C. C. Rousseau and J. Sheehan, Strongly regular graphs and finite Ramsey theory, *Linear Algebra Appl.* **46** (1982), 221–241.

[35] J. Galambos and I. Simonelli, Bonferroni-type inequalities with applications, *Probability and its Applications (New York),* Springer-Verlag, New York, 1996. x+269 pp.

[36] Н. Хаджииванов и В. Никифоров, О неравенствах Нордхауза-Стюарта-Муна-Мозера, *Сердика* **4** (1978), 344–350.

[37] Н. Хаджииванов и В. Никифоров, Решение проблемы Ердеша о максимальном числе треугольников с общим ребром в графе, *Докл. Болг. Акад. Наук* **34** (1981), 969-970.

[38] J. Komlós and M. Simonovits, Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty,* Vol. **2** (Keszthely, 1993), pp. 295–352, Bolyai Soc. Math. Stud., 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[39] J. Moon and L. Moser, On a problem of Turán, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 7 (1962), 283–286.

[40] T. F. Móri and G. J. Székely, On the Erdős-Rényi generalization of the Borel-Cantelli lemma, *Studia Sci. Math. Hungar.* **18** (1983), 173–182.

[41] E. Nordhaus, B. Stewart, Triangles in an ordinary graph, *Canad. J. Math.* **15** (1963), 33–41.

[42] V. Nikiforov, On the minimum number of k-cliques in graphs with restricted independence number, *Comb. Prob. Comp.* **10** (2001), 361-366.

[43] V. Nikiforov, On the edge distribution of a graph, *Comb. Prob. Comp.* **10** (2001), 543-555.

[44] V. Nikiforov, Some inequalities for the largest eigenvalue of a graph, *Comb. Prob. and Comp.* **11** (2002), 179-189.

[45] V. Nikiforov and C. C. Rousseau, A note on Ramsey numbers for books, представена в *J. Graph Theory.*

[46] V. Nikiforov and C. C. Rousseau, Large generalized books are p-good, представена в *J. Comb. Theory Ser B.*

[47] V. Nikiforov and C. C. Rousseau, Book Ramsey numbers I, представена в *Rand. Struct. and Alg.*.

[48] С. А. Пирогов, Вероятности сложных событий и линейное программирование, *Теор. Вероятности и ее Применен.* **13** (1968), 344–348.

[49] C. C. Rousseau and J. Sheehan, On Ramsey numbers for books, *J. Graph Theory* **2** (1978), 77–87.

[50] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Геометрические оценки и задачи комбинаторной геометрии, *Библиотека математического кружка No 13,* Наука, Москва, 1974, 383 pp.

[51] M. Simonovits, A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems, in: *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966),* pp. 279–319, Academic Press, New York, 1968.

[52] M. Simonovits, Extermal graph problems with symmetrical extremal graphs. Additional chromatic conditions, *Discr. Math.* **7** (1974), 349–376.

[53] M. Simonovits, Extremal graph theory, *Selected Topics in Graph Theory,* Ed. Beineke and Wilson, vol. 2, pp. 161–200, Academic Press, London, 1983.

[54] P. Turán, On an extremal problem in graph theory (Hugarian), *Mat. és Fiz. Lapok* **48** (1941) 436-452.

[55] И. М. Яглом и Е. И. Файнберг, Оценки вероятности сложных событий, *Труды VI всесоюзного совещания по вероятности и математической статистики,* Вильнюс, 1962, pp 297-303.