

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО ПАРАЛЕЛНА ОБРАБОТКА НА  
ИНФОРМАЦИЯТА

Андрей Борисов Андреев

АПОСТЕРИОРЕН СУПЕРСХОДЯЩ  
АНАЛИЗ В МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ  
ЕЛЕМЕНТИ – ОЦЕНКИ И ТЕХНИКИ

ДИСЕРТАЦИЯ  
за присъждане на  
научна степен "доктор на математическите науки"  
по научна специалност 01.01.09

София, 2004

# Съдържание

Увод	4
<b>1 Точки на суперсходимост – апостериорни оценки и техники</b>	<b>20</b>
1.1 Въведение	20
1.2 Точки на суперсходимост	24
1.3 Локална суперсходимост за квадратични и кубични триъгълни крайни елементи	29
1.4 Локална суперсходимост за параболична задача	37
1.5 Локална суперсходимост за задача за собствени стойности и собствени функции	46
1.6 Апостериорна покриваща процедура, основана на точките на суперсходимост за 6-точковите квадратични елементи	52
1.7 Апостериорна покриваща процедура, основана на точките на суперсходимост за 10-точковите кубични елементи	60
1.8 Суперсходимост при съгласувано свързване на квадратични и кубични крайни елементи	67
1.9 Числени примери	91
<b>2 Интерполационен подход в суперсходящите апостериорни процедури</b>	<b>98</b>
2.1 Въведение	98
2.2 Апостериорен интерполационен метод за задачи от втори ред	101
2.3 Интерполационен апостериорен подход за едномерни елиптически задачи от четвърти ред	120

2.4	Ултрасходимост на интерполационен апостериорен подход, приложен за задача от четвърти ред в равнината .....	129
2.5	Суперблизост между елиптичен проектор и приближена собствена функция .....	149
2.6	Апостериорен процес от интерполационен тип за самоспрегнати спектрални задачи .....	155
2.7	Числени примери .....	159
3	Суперсходящи постпроцедури за спектрални задачи – оценки, методи и алгоритми .....	168
3.1	Въведение .....	168
3.2	Апостериорна техника и алгоритъм за елиптични спектрални задачи от ред $2m$ .....	170
3.3	Суперсходящ апостериорен метод за смесения МКЕ, приложен към бихармоничната задача за собствени стойности ....	182
3.4	Вариационни аспекти за някои спектрални задачи .....	203
3.5	Изопараметричен МКЕ и оценка на грешката за задача на Стеклов .....	217
3.6	Пост-процедура за задачи със спектрален параметър върху границата .....	227
3.7	Алгоритмични и изчислителни аспекти .....	233
3.8	Числени примери .....	240
	Заклучение .....	250
	Библиография .....	251

## Увод

Днес всяка област на съвременното естествознание е свързана с компютърните методи и симулации. Стремехът да се създаде подробна и точна картина на изследваните процеси обуславя необходимостта от въвеждане и изучаване на все по-сложни математически модели. Те, от своя страна, изискват използването на по-сложен математически апарат. Така методите на изчислителната математика непрекъснато се усъвършенстват заедно с прогреса в областта на компютърните технологии.

Моделирането и решаването на задачи, свързани с физични процеси и явления, често се осъществява чрез използване на числени методи от вариационен тип. Те имат важно място в почти всички области на инженерната практика. Така методите на Ритц, на Галъоркин и на най-малките квадрати се съчетават с различни мрежови процедури, за да се получи ефективна компютърна реализация. Методът на крайните елементи (МКЕ) се явява един от най-сполучливите и често използвани в практиката вариационни числени методи. Развитието на метода е пряко свързано с неговата математическа теория. Със средствата на функционалния анализ много аспекти в МКЕ бяха ясно и строго обосновани [39, 102].

Анализът за качеството на даден числен метод най-добре се представя посредством доказване на оценки (априорни и апостериорни) между точното и приближеното решение. В теорията на МКЕ се отчита степента на характерния мрежов параметър  $h$ , получен при дискретизацията на дефиниционната област  $\Omega$  на разглеждания проблем. В зависимост от гладкостта на точното решение са доказани класически оптимални оценки за редица моделни задачи (виж [39, 102, 104, 106]).

Естествен е стремехът на специалистите, които се занимават с числов анализ, за получаване на алгоритми и изчислителни схеми, които притежават висока точност при апроксимация. В числените методи такива алгоритми са характеризирани качествено с оценки от тип "суперсходимост", т.е. такива, при които степента на мрежовия параметър превишава тази от оптималния случай. Създаването на комерсиален или специализиран софтуер на базата на суперсходящите алгоритми определи развитието на едно



основно направление в теорията на МКЕ, наречено **суперсходящ анализ**.

Първите резултати по суперсходимост датират от началото на 70-те години на миналия век [63, 92, 94]. Оценка обикновено се получават в специални дискретни норми [3, 4, 12, 63, 79]. За да се получи по-голяма точност в МКЕ, теоретично трябва да повишим размерността на крайноелементното пространство. Това може да стане или чрез сгъстяване на мрежата, т.е. намаляване на  $h$ , или чрез повишаване степента на апроксимиращите полиноми.

Основната цел на суперсходящия анализ, в крайна сметка, е да се получат изчислителни схеми с добри апроксимационни свойства, без да се повишава размерността на крайноелементното пространство. Това може да се постигне, като се използва априорна информация за гладкостта на решението и характера на изходната задача.

Теорията на суперсходимостта за крайноелементните апроксимации може да бъде условно разделена в две направления:

#### **(А) Априорен суперсходящ анализ**

Доказват се априорни оценки, обикновено в дискретни норми, с порядък, по-висок от оптималния. Основен момент е установяването на точките (линиите) на суперсходимост [4, 12, 47, 50, 77, 79]. Те зависят от вида на крайния елемент, както и от разглеждания проблем. Към този анализ можем да причислим и установяването на **суперблизост** между функции от дадено крайномерно пространство [6, 8, 9, 82]. В последните години интересът към установяване на **естествените** (natural) точки на суперсходимост отново се засили. Природата им е определена от дискретизацията на областта и от вида на елемента за даден клас от гранични задачи (виж [82, 115]). Бабушка и др. [29] предложиха компютърен подход при предсказване на точки, в които приближеното решение или неговите производни са по-близки до точното.

#### **(Б) Апостериорен суперсходящ анализ**

През последните 15 години този анализ получи много и разнообразни проявления. Основен момент е, че се използва едно или няколко вече получени приближени решения. На тази база се определя пост-процедура, която използва разнообразни идеи и не задължително МКЕ. Някои от по-известните подходи са:

- екстраполация от приближени решения [72, 73];
- осредняване на стойности на приближеното решение в специални точки [12, 48, 74, 75];

- използване на приближени решения, получени от по-прости задачи или използващи апроксимационни пространства с по-малка размерност [66, 99, 112, 113];
- интерполиране по специален начин върху група от крайни елементи (patch recovery) с използване на интегрални стойности на приближеното решение или негови стойности в точки [21, 83, 84];
- осредняване на приближеното решение върху група от елементи на базата на апроксимационен подход, например по метода на най-малките квадрати [55, 58].

Трябва обаче да подчертаем, че двете направления в суперсходящия анализ много често са взаимно свързани. Така например априорните оценки в дискретни полунорми се използват за апостериорно осредняване на приближеното решение (виж например [48, 74]).

Дисертацията е посветена на суперсходящия апостериорен анализ в МКЕ – получаване и доказване на оценки, методи и алгоритми. Привлекателната сила на суперсходящите пост-процедури се дължи на факта, че основната част от изчислителните процеси се извършва върху груба мрежа, а "уточняването" на решението се реализира с използване на относително малко изчислителни ресурси. Подходът може да позволи увеличаване скоростта на сходимост с два и повече порядъка (ултрасходимост).

В дисертацията се разглеждат три различни по природа апостериорни теории. Върху тази основа се предлагат методи и/или алгоритми, които са подкрепени с числови експерименти. Някои от идеите са приложими за произволен метод от вариационен тип. В повечето случаи, с цел по-ясно представяне на теорията, авторът използва възможно по-проста моделна задача. Обобщението (до известна степен) за по-сложни диференциални оператори, други гранични условия или друга геометрична област е въпрос на техническо уточняване.

**Основните въпроси, разглеждани в дисертацията, са:**

- Построяване на суперсходящ покриващ градиент на базата на точките на суперсходимост за 6-точкови квадратични и 10-точкови кубични крайни елементи.
- Частично покриваща техника при непрекъснато свързване на области, използващи различни крайни елементи.

- Апостериорно интерполиране на група от елементи (patch recovery) и доказване на апостериорни оценки от тип суперсходимост (ултрасходимост).
- Установяване и използване на суперблизост на функции и резултатите от предходния пункт при апостериорен анализ на спектрални задачи.
- Анализ на суперсходяща постпроцедура, приложима за широк клас самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ .
- Постпроцедура, приложима за смесения МКЕ при бихармоничната спектрална задача.
- Вариационни аспекти и оценки за задачи, при които собствената стойност участва линейно в граничните условия.

Наред с основните въпроси се засягат проблеми, съпътстващи на главната тема за апостериорния анализ, но не по-малко важни за теорията на числените методи. Това са:

- ◇ Диагонализация на матрицата на маса (lumped mass method). Където е възможно, авторът анализира този ефект и връзката му със суперсходящия анализ на различни по вид задачи. Засягат се накратко начините за диагонализация и отражението на метода върху апостериорните оценки.
- ◇ Локални свойства, породени от точките на суперсходимост и връзката им с параболичните задачи и задачите за собствени стойности.
- ◇ Изопараметричен анализ при апроксимиране с криволинейни елементи на пограничния слой на областта.

Целите на дисертацията са:

1. Да се доразвият и докажат нови резултати, свързани със съвременните апостериорни методи (§ 1.6, § 1.7, § 2.2, § 2.3);
2. Да се предложат нови идеи, методи и алгоритми в теорията и приложението на апостериорния суперсходящ анализ (§ 1.8, § 3.2, § 3.3, § 3.6);
3. Да се докажат нови априорни оценки, които могат да се използват в апостериорни процедури (§ 2.5, § 3.5);

Дисертацията се състои от три глави. Номерата на отделните параграфи, теореми, лема, забележки, определения, формули, таблици, примери и фигури се състоят от две числа, отделени с точка, първото от които е номерът на съответната глава, а второто – номерът на съответния обект в тази глава. Номерацията на твърденията (теореми и лема) е отделна и независима.

В първа глава са доказани локални и глобални оценки от тип суперсходимост на базата на точки върху краен елемент, в които сходимостта на градиента на точното към приближеното решение е по-висока от оптималната. Развитието на суперсходящия анализ исторически води началото си именно от стремението да се получат точките на суперсходимост [32, 51, 62, 63, 92]. Това, от своя страна, провокира намирането на пост-процедури, които да използват тези точки [51, 63, 70]. Ето защо първите резултати в апостериорния суперсходящ анализ са свързани с априорните оценки от тип суперсходимост.

Основната цел в Глава 1 е на тази основа да бъдат представени нови резултати. Поставя се акцент върху двата най-разпространени в практиката крайни елемента – квадратичен и кубичен краен елемент.

За елиптична гранична задача от втори ред се доказва, че ако решението  $u(x) \in H^{n+2}(\Omega)$  при  $n = 2$  или  $n = 3$ , то

$$\|u - u_h\|_{1,h}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega},$$

където  $u_h$  е приближеното решение по МКЕ, а  $\|\cdot\|_{1,h}^*$  е дискретна полунорма, която използва точките на суперсходимост.

В §1.4 се доказва суперсходимост в подходяща дискретна полунорма за параболична гранична задача от втори ред. Точките на суперсходимост на градиента за елиптичната гранична задача съвпадат с тези на съответната елиптична спектрална задача. Това е следствие от суперблизостта на Лагранжевия интерполант на точното решение и на съответното приближено решение (Лема 1.6). В §1.4 и §1.5 се дискутира възможността за диагонализация на матрицата на маса.

Основен резултат в Глава 1 е да се построи възстановен (recovery) градиент  $\nabla^R$ , който използва стойностите на производните на приближеното решение в точките на суперсходимост и ще го наричаме **покриващ**. За квадратичните ( $n = 2$ ) и кубични ( $n = 3$ ) триъгълни крайни елементи е предложена оригинална осредняваща конструкция такава, че

$$\nabla^R u_I \equiv \nabla u,$$

когато  $u$  е полином от степен  $n + 1$ , т.е.  $u \in P_{n+1}(\Omega)$ ,  $n = 2$  или  $n = 3$ . В Теорема 1.5 и Теорема 1.6 се доказва, че ако  $u \in H^{n+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , то

$$\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega}, \quad n = 2; 3.$$

Нека да отбележим, че операторът

$$\nabla^R : V_h \rightarrow (V_h)^2$$

се строи по различен начин при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Нещо повече, точките на суперсходимост на градиента при кубичните триъгълни крайни елементи не са Гаусови точки върху страните.

В §1.8 е представена нова и оригинална идея за непрекъснато (съгласувано) свързване на крайни елементи с различни степени. Разгледан е случаят с квадратични и кубични изопараметрични елементи. Очевидно обаче този подход би могъл да бъде обобщен за произволни два крайни елемента от степен съответно  $n$  и  $n + 1$ . За да се постигне търсеното непрекъснато свързване, се въвежда нов 7-точков непълнен кубичен елемент. Той участва в интерфейсна свързваща подобласт, чието разделяне е от типа criss-cross.

Суперсходящата апостериорна процедура се осъществява чрез **частично покриване**. Това означава, че суперсходящият покриващ градиент е използван само за елементите от по-ниска степен. Подходът има следните предимства:

- по-голямата част от областта се разделя с равномерна мрежа от елементи от по-ниска степен;
- само в пограничния слой се използват изопараметрични елементи с една крива страна и от по-висока степен;
- чрез прилагане на пост-процедура, основана на точките на суперсходимост върху равномерна мрежа и само за елементите от по-ниска степен, се получава по-добра сходимост.

Освен това, в §1.8 са получени резултати, свързани с изопараметричния анализ, който използва известната обратима трансформация на Леноар [80].

Характерна особеност на тематиката в първа глава е, че апостериорните оценки и подходи използват априорни оценки и свойства за точките на суперсходимост на градиента. Методът на покриващия градиентен оператор  $\nabla^R$  има място в апостериорния суперсходящ анализ, тъй като все още

съществуват открити въпроси, които биха имали приложение в МКЕ.

Глава втора е посветена на едно направление в суперсходящия анализ, което се развива най-бързо през последните няколко години. Става въпрос за локално изглаждане на приближеното решение върху обединение от крайни елементи. Това обединение ще наричаме накратко пач (an element patch). Получаваните суперсходящи частични покрития (superconvergence patch recovery – SPR) осъществяват  $L_2$ -проекции или приближаване по метода на най-малките квадрати чрез локални полиномиални развятия.

SPR-методите претърпяха интензивно развитие след работите на Зенкевич и Жу (ZZ-методи) (виж [58, 59]). Днес се прилагат много и разнообразни подходи в SPR-методите в зависимост от избора на базис върху първоначалната триангулация  $\tau_h$ , начина на обединение в пачове и от вида на полиномиалното развитие върху даден пач (виж [27, 53, 57]).

В Глава 2 се развива един интерполационен подход в SPR-методите, който е получил популярност с работата на Лин, Йан и Жу [84]. Те доказват ултрасходимост, когато крайноелементното разделяне е породено от правоъгълна мрежа и се решава уравнението на Лаплас.

Елементите, обединени в даден пач, в нашия подход ще наричаме **интерполирани крайни елементи**. Суперсходящият анализ е осъществен в две стъпки:

- (i) Конструиране на "малък интерполационен оператор"  $i_h : C^0 \rightarrow V_h$ , даващ оценка от тип суперсходимост (ултрасходимост) на  $a(i_h u - u, v)$  за всяко  $v \in V_h$  и функция  $u$ , притежаваща достатъчна гладкост. Интерполантът на точното решение  $i_h u$  на дадена елиптическа задача и елиптическият проектор  $R_h u$  на същото решение са суперблизки. Самият базис, върху който се определя  $i_h$ , използва не само стойности на функция в точки, но и стойности на интеграли от функции.
- (ii) Определяне на "голям интерполационен оператор"  $I_{2h}$  върху разделяне  $\tilde{\tau}_{2h}$ , състоящо се от обединения (пачове) от елементи от първоначалното разделяне  $\tau_h$ . Същността на суперсходящия апостериорен алгоритъм е в прилагане на интерполационния оператор  $I_{2h}$  към крайноелементното решение  $u_h$ , в резултат на което се получава оценка, по-добра от оптималната.

За композицията на конструираните два интерполационни оператора е изпълнено

$$I_{2h} \circ i_h \equiv I_{2h}.$$

Конструирането на двата интерполанта и доказване на съответни оценки е технически нелека задача. Това е валидно особено за първата стъпка. При втората стъпка се работи с полиноми от по-висока степен, но предимството на метода е, че всъщност с тези високи степени не се решава задача по МКЕ.

В Глава 2 интерполационният подход в SPR-метода е разгледан за елиптически задачи от втори и четвърти ред. Получени са резултати, които съществено развиват апостериорния метод. Доказани са съответните оценки от тип суперсходимост/ултрасходимост, като освен това в експлицитен вид са представени интерполационните развития, които могат директно да се прилагат при алгоритмизацията на метода.

За 6-точковия триъгълен краен елемент, приложен към елиптична задача от втори ред, са получени оценките (Теорема 2.1, Теорема 2.2 и Теорема 2.3):

$$\begin{aligned} a(i_h u - u, v) &\leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V_h, \\ \|i_h u - R_h u\|_{1,\Omega} &\leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}, \\ \|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} &\leq Ch^3 \|u\|_{5,\Omega}. \end{aligned}$$

Важно е да се подчертае, че най-ниската степен на апроксимирани полиноми за задача от втори ред при интерполирани крайни елементи, осигуряваща ресурс за получаване на порядък, по-висок от оптималния, е втора. От друга страна, използване на апроксимирани полиноми от степен, по-висока от втора, при положение, че ще се прилага суперсходяща постериорна процедура, едва ли е разумно и оправдано. Ето защо, на практика 6-точковия триъгълен краен елемент е най-удобен за използване при задачи от втори ред. В този случай постпроцедурата, произтичаща от оценките, показва, че редът на сходимост се повишава с единица.

Показано е също, че аналогичен резултат при постпроцедура за четириъгълни крайни елементи, съответстващ на този за 6-точкови триъгълни елементи, е 8-точковият Серендипов краен елемент.

Апостериорният SPR-метод е приложен и за едномерни елиптически задачи от четвърти ред с билинейна  $a$ -форма

$$a(u, v) = \int_0^l (u''v'' + pu'v' + quv) dx,$$

където  $p$  и  $q$  са реални неотрицателни параметри.



В Теорема 2.6 се доказва, че при използване на полиноми от четвърта степен ( $n = 4$ )

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{2,(0,t)} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^5) & \text{ако } p \neq 0, \\ \mathcal{O}(h^6) & \text{ако } p = 0, \end{cases}$$

което е оценка от тип ултрасходимост.

Така §2.3 продължава резултатите на Жу и Жао [57], които разглеждат SPR-метода за двуточкови задачи от втори ред.

Ултрасходящата постпроцедура за уравнения от четвърти ред изисква използване на апроксимиращи полиноми от степен  $n$ ,  $n \geq 4$ . Както и при задачи от втори ред, използването на много висока степен  $n$  на апроксимиращите полиноми не е оправдано. Така че, по убеждение на автора, има смисъл да се разглежда най-вече случаят  $n = 4$ . Изчислителната апостериорна схема, която се предлага, подобрява сходимостта на вторите производни при елиптично уравнение от четвърти ред. По-конкретно, редът на сходимост за  $\Delta u_h$  се повишава от  $\mathcal{O}(h^3)$  на  $\mathcal{O}(h^5)$ . В Теорема 2.9 е доказана оценката

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{2,\Omega} \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega},$$

когато апроксимиращите полиноми са от четвърта степен.

Във втора глава е доказан един фундаментален резултат за суперблизост между приближена собствена функция, получена по МКЕ за елиптичен самоспрегнат оператор от ред  $2m$ , и елиптичния проектор на съответното точно решение. Известно е, че оптималната оценка при  $u \in H^{n+1}(\Omega) \cap V$  е:

$$\|u - R_h u\|_{m,\Omega} \leq Ch^{n+1-m} \|u\|_{n+1,\Omega}.$$

Ако  $u_h$  е крайноеlementно решение, то при същите предположения за  $u(x)$

$$\|u_h - R_h u\|_{m,\Omega} \leq Ch^{n+1+s} \|u\|_{n+1,\Omega},$$

където  $s$  е цяло число от интервала  $[0, m]$ .

Това неравенство е доказано в Теорема 2.10. За спектрално уравнение от четвърти ред са направени важни модификации и забележки.



Една от основните цели на втора глава е да се покаже, че резултатът за суперблизост, който цитирахме по-горе, е необходимата връзка при приложението на апостериорната SPR-процедура за спектрални задачи.

И така, доказана е следната

**Теорема** Нека  $(\lambda, u)$  е точната собствена двойка на задачата от ред  $2m$ , а  $(\lambda_h, u_h)$  е нейното приближение по МКЕ с използване на апроксимиращи полиноми от степен  $n$ . Тогава, ако за някоя функция  $u(x) \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $k \geq n + 1$  имаме следната апостериорна оценка от тип ултрасходимост

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{m,\Omega} \leq Ch^k \|u\|_{k+1,\Omega},$$

то

$$\|I_{2h} u_h - u\|_{m,\Omega} \leq Ch^\alpha \|u\|_{k+1,\Omega},$$

$$\left| \frac{a(I_{2h} u_h, I_{2h} u_h)}{(I_{2h} u_h, I_{2h} u_h)} - \lambda \right| \leq Ch^{2\alpha} \|u\|_{k+1,\Omega}^2,$$

където  $\alpha = \min(n + 1 + s, k)$ , а цялото число  $s$  е от интервала  $[0, m]$ .

Така един от основните приноси в Глава 2 е, че е доказана възможността апостериорният метод на интерполираните крайни елементи да се приложи за широк клас самоспрегнати спектрални задачи. Този факт е коментиран и подкрепен с числови примери.

В трета глава е предложен метод, който е принос в теорията на глобалната апостериорна техника. Той е приложим за елиптични самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ . Подходът е различен от тези в предходните две глави от дисертационния труд. Апостериорно се използва вече намерено по МКЕ решение и получената собствена функция участва в решаването на по-проста приближена задача. Решаването на допълнителна задача обикновено се извършва отново по МКЕ, но върху различно крайноеlementно пространство. Сходна с тази идея е използвана за решаване на задачи от параболичен и хиперболичен тип (виж [42, 66, 112]). При екстраполиране (комбиниране) на решения, намерени чрез използване на две или повече мрежи, се получава модификация на метода [72, 119]. Решаване на дискретната задача върху две мрежи и комбиниране на двете приближени решения е предложено от Ксю и Жоу [73] за спектрални задачи от втори ред.

Представената в трета глава постпроцедура има две разновидности в зависимост от неговото приложение, а именно:

- за съгласувания МКЕ и самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ ;
- за смесения МКЕ и бихармонична спектрална задача.

Алгоритмите, описващи реализацията на тази постпроцедура, са приложими за вариационните методи на Ритц-Гальоркин, въпреки че изследванията са фокусирани върху случая за МКЕ.

В тази глава са разгледани и два проблема, които са много важни за вариационните числени методи, и в частност за МКЕ. Това са:

- Възможността за симетризуемост на вариационната формулировка при наличие на собствената стойност в граничните условия;
- Изучаване ефекта от диагонализация на матрицата на маса (lumped mass method).

Последните два аспекта са разгледани във връзка с основната тематика, т.е. с оглед на тяхното влияние за апостериорния анализ.

Да разгледаме самоспрегнатата спектрална задача от ред  $2m$

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V,$$

където  $V$  е затворено подпространство на  $H^m(\Omega)$ , т.е.  $H_0^m(\Omega) \subseteq V \subseteq H^m(\Omega)$ .

Ако  $V_h$  е крайноеlementно пространство от функции, съдържащо полиноми от степен, не по-висока от  $n$ ,  $n \geq 2m - 1$ , то приближената собствена двойка  $(\lambda_h, u_h)$  по МКЕ е решение на уравнението:

$$a(u_h, v) = \lambda_h(u_h, v), \quad \forall v \in V_h.$$

Оптималната оценка е [104]:

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C(\lambda) h^{2(n+1-m)} \|u\|_{n+1, \Omega}^2,$$

$$\|u - u_h\|_{m, \Omega} \leq C(\lambda) h^{n+1-m} \|u\|_{n+1, \Omega}.$$

Така оценката за собствени стойности се изразява чрез квадрата на оценката за собствени функции в основната (енергетична) норма.

Разглеждаме спомагателната елиптична задача

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = (u_h, v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h,$$

където  $u_h$  е някоя собствена функция, получена по МКЕ върху груба мрежа и  $\tilde{V}_h$  е крайноеlementно пространство, съдържащо полиноми от степен най-много  $n_1 = n + m$ .

Тогава можем да определим числото

$$\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{(\tilde{u}_h, u_h)}.$$

Следната апостериорна оценка е от тип ултрасходимост:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^{2(n+1)}),$$

където  $V_h$  и  $\tilde{V}_h$  са крайноеlementни пространства, използващи апроксимационни полиноми от степен, съответно  $n \geq 2m - 1$  и  $n_1 = n + m$ . Това означава още, че

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2).$$

Аналогични разглеждания се правят и за апостериорно пресметнатите приближени собствени функции. Определяме приближението на точната функция чрез

$$\tilde{w}_h = \lambda_h \cdot \tilde{R}_h \circ T u_h,$$

където  $\tilde{R}_h : V \rightarrow \tilde{V}_h$  е елиптичен проектор, а  $T : L_2(\Omega) \rightarrow V$  е разрешаващ оператор на граничната (изходна) задача.

Теорема 3.3 доказва апостериорна оценка от тип ултрасходимост за собствените функции.

Представеният Алгоритъм 3.1 дава икономичен начин за получаване на спектъра на елиптичен самоспрегнат оператор от ред  $2m$  с висока точност. Това е следствие от обстоятелството, че първоначално решаваме спектралната задача с крайни елементи от ниска степен и върху груба мрежа, а след това използваме елементи от по-висока степен, но за значително по-лесна за решаване задача.

Разгледан е и нов суперсходящ апостериорен метод за смесения МКЕ, приложен към бихармоничната задача в равнината

$$-\Delta u = \sigma,$$

$$-\Delta \sigma = \lambda u,$$

която удовлетворява хомогенни гранични условия.

Използваме идеята, приложена за спектралния проблем от ред  $2m$  за съгласувания метод. Това означава, че:

1. Решаваме по смесения МКЕ разглежданата задача;

2. Решаваме допълнителна (изходна) елиптическа задача върху променено крайноелементно пространство, като за дясна част се използва намереното в предходния пункт решение.

Ако крайноелементните пространства съдържат полиноми от степен  $n$ ,  $n \geq 2$  и  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ , то оценките по смесения МКЕ са (виж [30] или [68]):

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C h^{2n-2} \|u\|_{n+1,\Omega}^2,$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h^n \|u\|_{n+1,\Omega}.$$

Ако  $(\tilde{\tau}, \tilde{w})$  е решение на спомагателната елиптическа задача, чиято дясна част е вече намерената собствена функция  $u_h$  и

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{a(u_h, \tilde{w})}, \quad \text{където } a(u_h, \tilde{w}) = \int_{\Omega} u_h \cdot \tilde{w} \, dx,$$

то (Теорема 3.4):

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq C \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2.$$

На практика чрез смесения МКЕ намираме приближеното решение  $(\tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h)$  на спомагателната задача. Тогава определяме апостериорната приближена собствена стойност

$$\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{a(u_h, \tilde{w}_h)}.$$

Основният резултат в §3.3 се съдържа в оценката

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq C \left[ \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2 \right].$$

Разгледани са два подхода за определяне на спомагателните крайноелементни пространства, с цел съгласуване на оценката от по-висок порядък с гладкостта на дясната част на елиптическата задача. Това са: "метод на двете мрежи" [73] и "метод на двете пространства" [99].

Доказана е и апостериорна оценка с повишен порядък за собствените функции (Теорема 3.7).

Алгоритъм 3.2 има за задача да поясни в синтезиран вид как на практика да се използват получените суперсходящи апостериорни оценки за смесения метод.

В §3.4 са разгледани някои вариационни аспекти на спектрални задачи от втори ред, при които собствената стойност участва в граничните условия. Тези задачи се причисляват към така наречените задачи на Стеклов [30, 67]. Доказани са достатъчни условия (Теорема 3.8 и Теорема 3.9) за симетризуемост на билинейните форми, които участват във вариационното представяне. Дефинирано е и Хилбертово пространство, на което принадлежат собствените функции. Аналогични разглеждания са направени и за смесената формулировка на спектрални задачи от четвърти ред. Това, от своя страна, е основа за прилагане на апостериорната процедура, предложена в тази глава за по-широк клас спектрални задачи от четвърти ред, стига те да притежават симетрична вариационна формулировка в смесен вид. Нека отбележим още, че (поне за реалните задачи, до които авторът е имал досег в своята практика) ако дадена спектрална задача от четвърти ред притежава симетрична смесена вариационна формулировка, то тази задача е по начало самоспрегната. Достатъчно на брой примери в подкрепа на това са дадени и от Коллатц [71]. Чрез контрапримери от инженерните приложения лесно може да се покаже, че обратното не е в сила. Аналитичното извеждане и доказване на тези факти не е невъзможно, но е обект на други изследвания.

§3.5 е посветен на изопараметричния метод за задачата на Стеклов от втори ред. Дадено е доказателство за оценка на грешката в изопараметричния МКЕ, когато размерността на областта  $\Omega$  е произволна и границата на областта е криволинейна, с определена гладкост. Ако  $n$ ,  $n \geq 2$  е степента на апроксимиращите полиноми, то

$$|\lambda - \lambda_h| = \mathcal{O}(h^{2n}),$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n+\frac{1}{2}}.$$

В тази глава се разширява приложимостта на метода, представен в §3.2 и за смесения МКЕ в §3.3. В §3.6 се прави обобщение на базата на представеното в предходните параграфи на същата глава. Доказани са апостериорни оценки (Теорема 3.12 и Теорема 3.13) в случаите, в които спектралният параметър участва линейно в граничните условия. Разглеждани са подробно различни особености, които съществуват при тези "нестандартни" случаи. Така например качествената оценка на апостериорната процедура зависи от някои априорни оценки, с които невинаги разполагаме.

Накрая се дискутират някои алгоритмични и изчислителни особености на апостериорния метод за самоспрегнати спектрални задачи. Дава се акцент на:

- задачи с различна размерност;
- връзка между метода с концентрация на масата и апостериорната процедура.

Преобладаващият характер на дисертацията е теоретичен. В нея подробно са изучени въпроси от три различни подхода в съвременния суперсходящ анализ. Доказани са предимно апостериорни оценки и са предложени методи и алгоритми. Разгледаните разнообразни аспекти от числените методи пораждат и някои нерешени проблеми, които са представени в края на дисертацията.

Методите на изследване главно се определят от:

- Методите на приложния функционален анализ;
- Суперсходящия анализ в МКЕ в неговата  $h$ -версия и  $p$ -версия;
- Основни теореми в теорията на МКЕ: Теорема на Брамбъл-Хилберт, Теорема за следата и други;
- Техника за получаване на оценки при изопараметрична трансформация и оценки в отрицателни норми;
- Прилагане формулите на Грийн.

Основните резултати в дисертационния труд са публикувани в статиите [3] – [26], [97] и [98] (26 на брой).

Резултатите от дисертацията са докладвани на:

- Семинар по изчислителна математика към ИПОИ-БАН;
- Семинар по Числени методи към ИМИ-БАН;
- Семинар по Крайни елементи Finite Element Center – Chalmers University · Göteborg, Sweden;
- Семинар по Приложен функционален анализ Numerical functional analysis and mathematical modelling (*NfaM<sup>2</sup>*) – Ghent, Belgium.

Част от публикуваните резултати са докладвани на международни конференции.

Работата по дисертационния труд бе частично подпомогната от два проекта на МОН, както и от четирите проекта, ръководени от автора и финансирани от Технически университет–Габрово.

*Изказвам благодарността си на моя учител проф. Р. Лазаров за подкрепата, която ми оказа, както и за дългия път, който извървахме със Superconvergence от далечната 1978 година.*

# Глава 1

## Точки на суперсходимость – апостериорни оценки и техники

### 1.1 Въведение

Теорията на суперсходящия анализ в МКЕ датира от 70-те години на миналия век. Първите резултати са в получаването на точки на суперсходимость (виж [32, 51, 62, 63, 92]). Това са такива точки от разглежданата област, в които скоростта на сходимость на приближеното към точното решение (или на някои от производните им) е по-висока, отколкото получената от оптималната оценка на метода. Това свойство беше доказано за възловите точки, за точките на Гаус, Якоби, Лобато и други [51, 63, 70, 79]. Намирането на точките на суперсходимость за дадена моделна задача има важно практическо значение, защото позволява да се получи по-добро приближение с по-малко изчислителни ресурси.

Развитието на суперсходящия анализ довежда до построяване на апостериорни приближени решения на базата на "специалните" точки. Така се достига до повишаване скоростта на сходимость не само в някои конкретни точки, но и в подобласти (локална суперсходимость) и дори в цялата област (глобална суперсходимость). Този подход има своята актуалност в наши дни, защото осредняващата техника (average technique) или покриващата техника (recovery technique) на базата на точките на суперсходимость в повечето познати (класически) задачи не са получили своето окончателно решение. Трябва да се отбележи, че обикновено двата споменати по-горе подхода нямат еднозначно решение в МКЕ.

Първите апостериорни оценки и осредняващи суперсходящи методи са свързани с най-простите линейни крайни елементи. Това са постпроцедури, предложени от Кшижек и Нейтаанмаки [74, 75] или Гудсел и Уайтман [47].



Постпроцедура, основана на точките на суперсходимость за квадратични крайни елементи, е предложена от Андреев и Лазаров [12], а също и от Гудсел и Уайтман [48]. За други видове задачи и крайни елементи може да се споменат работите на Лезен и Зламал [79], на Бейкър [33] и много други. Обзорна статия относно точките на суперсходимость и тяхното използване е представена от Кшижек и Нейтаанмаки [74], в която са цитирани около 200 заглавия по тази тематика.

През последните 10 години суперсходящият апостериорен анализ, използващ точките на суперсходимость, придоби ново развитие. Това се дължи най-вече на големия брой публикации на учени от Китай (виж например [108, 115, 118]). Очевидно е, че тази техника ще продължи да предизвиква интерес. Макар и "най-стар" в апостериорния анализ, този подход в създаване на алгоритми, икономисващи изчислителни ресурси, има своето важно място в числените методи. Интересен поглед по този въпрос е направен от Брандтс и Кшижек [38].

Целта на първа глава е да се даде прецизен анализ на осредняващата апостериорна техника от този вид и на нейното приложение за широк клас задачи. Обхванати са следните задачи, определени в двумерната област: елиптични уравнения от втори ред; параболични уравнения от втори ред и задача за собствени стойности от четен ред.

За да се постави акцент върху приносите на автора в апостериорната техника, някои от резултатите, необходими за изложението, които са добре познати, са само цитирани. Определени скицирания на идеите се дават само когато от това не се губи яснотата на изложението.

Организацията в настоящата глава е следната:

- Разглеждат се точките на суперсходимость на градиента за триъгълни и четириъгълни крайни елементи. Резултатите, някои от които са получени от автора преди години, а в голямата си част са добре известни, са предпоставка за построяване на постпроцедури;
- Дискутира се локалната суперсходимость на градиента, като се очертават два акцента:
  - ролята на дискретната полуорма в суперсходящия анализ;
  - суперблизост на функции от крайноеlementното пространство;
- Използвайки резултатите за елиптичната задача и подхода в предходния пункт, се доказват теореми от тип суперсходимость за задачи от параболичен тип и за елиптични спектрални задачи;

- Основният принос от тази глава се състои в построяване на осредняващ интерполант, който използва точките на суперсходимост. Подробно се разглеждат квадратичният и кубичен случай. Тези два резултата са принос в теорията и приложението на суперсходящата апостериорна техника. Предлага се идея за съчетаване на квадратични и кубични крайни елементи с цел получаване на по-добра сходимост, без използване на елементи от по-висока степен;
- Предлагат се и се дискутират числени експерименти, илюстриращи разглежданата теория.

Означенията, които се въвеждат, са валидни за следващите глави и параграфи, освен ако не са споменати изрично други означения. Посредством  $C, C_1, C_2, \dots$  ще бележим общи константи, т.е. такива, които не зависят от крайноелементния параметър  $h$ . Зависимостта от някоя функция или величина често ще бъдат отбелязвани. Под  $P_k(\Omega)$  ще разбираме множеството от полиноми, дефинирани в  $\Omega$ , от степен най-много  $k$ . Означението  $Q_k(\Omega)$  се използва за множеството от полиноми от степен най-много  $k$  по всяка от променливите. Пространството на Соболев

$$W_p^k(\Omega), \quad k = \{0, 1, \dots\}, \quad p \in [1, \infty]$$

съдържа всички функции, дефинирани върху  $\Omega$ , чиито  $p$ -ти степени на производните им, до ред  $k$  включително, са интегрируеми [2]. За съответните норми и полунорми ще използваме следните означения:  $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$  и  $|\cdot|_{k,p,\Omega}$ . В частност, ще записваме  $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,2,\Omega}$ ,  $|\cdot|_{k,\Omega} = |\cdot|_{k,2,\Omega}$ . Пространството  $H_0^k(\Omega)$  е затварянето на безкрайно гладките функции с компактен носител в  $\Omega$ , т.е. функциите от  $C_0^\infty(\Omega)$  относно  $H^k$ -нормата. Най-сетне, ще записваме  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , ако  $\Omega_0$  е такава област, че  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ .

Други общи означения са свързани с крайноелементното разделяне на областта  $\Omega$ . Ще се придържаме към дефинициите за краен елемент и крайноелементно разделяне, дадени от Сиарле [102]. Така под краен елемент ще разбираме наредената тройка  $(K, P, \Sigma)$ , където  $K$  е свързано с геометрията на елемента (засега ще разбираме триъгълник или четириъгълник);  $P$  е множеството от реалнозначни функции от определен клас, дефинирани върху  $K$ , а  $\Sigma$  включва крайно множество от линейно независими линейни форми  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , които ще наричаме степени на свобода за дадения краен елемент.

Нека  $h_K = \text{diam}(K)$ , а с  $\rho_K$  да означим диаметъра на максималната окръжност, съдържаща се в  $K$ .

**Определение 1.1** [102] Множеството от крайни елементи  $(K, P_K, \Sigma_K)$  ще наричаме **регулярно**, ако съществува константа  $\sigma$ , такава че

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad \forall K.$$

Това условие е еквивалентно на [102]: съществува константа  $\alpha_0 > 0$ , такава че

$$\alpha_K \geq \alpha_0, \quad \forall K,$$

където  $\alpha_K$  означава най-малкият ъгъл на крайния елемент.

Крайноелементното разделяне на областта ще означаваме с  $\tau_h$ , където параметърът  $h$  се дефинира с равенството

$$h = \max_{K \in \tau_h} h_K.$$

Триъгълникът (квадратът)  $\widehat{K}$  ще наричаме **основен краен елемент**, а всички операции и зависимости, свързани с него, ще бележим със символа  $\widehat{\cdot}$ . Така основният 2-симплекс се определя с

$$\widehat{K} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbf{R}^2 : \hat{x}_1 \geq 0, \hat{x}_2 \geq 0, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\};$$

съответно за квадрата

$$\widehat{K} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq \hat{x}_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

Във всички разглеждания важна роля играе крайноелементната трансформация  $F_K$ , която изобразява основния елемент  $\widehat{K}$  в произволен, т.е.  $F_K : \widehat{K} \rightarrow K$ .

Ако всички крайни елементи са праволинейни, то  $F_K$  е обратима афинна трансформация, като

$$\hat{x} \rightarrow x = F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K,$$

$B_K \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ,  $b_K \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$ . Ако  $\widehat{K}$  е 2-симплекс, то  $\det(B_K) = 2 \text{meas}(K)$ , а ако  $\widehat{K}$  е определеният по-горе квадрат, то  $\det(B_K) = \frac{1}{4} \text{meas}(K)$ .

При крайни елементи, имащи една крива страна, ние ще използваме обратима **изопараметрична трансформация**  $F_K \in \widehat{P}^2$ ,  $K = F_K(\widehat{K})$ , където  $\widehat{P} = P_n(\widehat{K})$  (съответно  $\widehat{P} = Q_n(\widehat{K})$ ).

Без ограничение на общността ще считаме, че Якобианът на всяка трансформация  $J_K$  е положителен. Оттук нататък

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x), \quad x = F_K(\hat{x}), \quad \forall \hat{x} \in \widehat{K}.$$

Важна роля в нашите изследвания играе следният специален случай на лемата на Брамбъл-Хилберт [37]:

**Лема 1.1** Нека линейният функционал  $l : H^{k+1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$  е ограничен в  $H^{k+1}(\Omega)$ , т.е.

$$|l(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{k+1, \Omega}$$

и нека  $l(\varphi) = 0$  за всяко  $\varphi \in P_k(\Omega)$ . Тогава съществува константа  $M = M(\Omega)$ , независеща от функцията  $\varphi$  такава, че

$$|l(\varphi)| \leq C.M |\varphi|_{k+1, \Omega} \quad \forall \varphi \in H^{k+1}(\Omega).$$

## 1.2 Точки на суперсходимост

Нека припомним, че нашата основна цел в тази глава е да построим суперсходящи апостериорни процедури на базата на точките на суперсходимост. За целта ще представим точките на суперсходимост на градиента за следната елиптична задача от втори ред:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

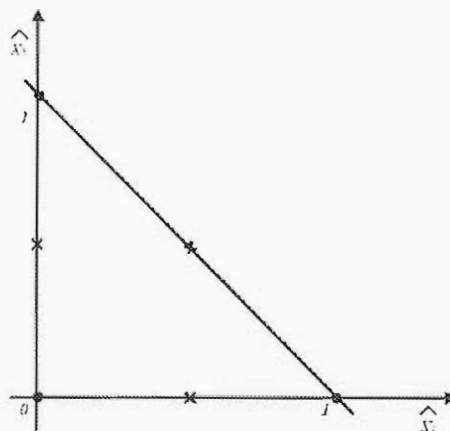
където

$$Lu = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

а  $\Omega$  е ограничена област в равнината с достатъчно гладка граница  $\Gamma$ . Допускаме, че коефициентите  $a_{ij}(x)$  са непрекъснати по Липшиц в  $\bar{\Omega}$  и че

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2$$

за всяко  $x \in \Omega$  и  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ , където  $\alpha_0 = \text{const} > 0$ .



Фигура 1.1: Точки на суперсходимост за линеен краен елемент

Слабото решение на задачата (1.1) е функцията  $u(x)$ , принадлежаща на  $V = H_0^1(\Omega)$ , където

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}$$

и удовлетворяваща

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V, \quad (1.2)$$

където

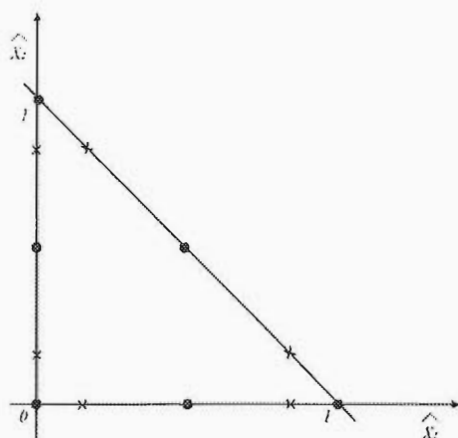
$$(w, v) = \int_{\Omega} w \cdot v \, dx, \quad a(w, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx, \quad dx_1 dx_2 = dx.$$

Да дефинираме крайноелементното пространство  $V_h$ , което се състои от непрекъснати функции. То се получава чрез трансформацията  $F_K$ , изобразяваща полиномите, определени върху основния елемент  $\widehat{K}$  във функция, дефинирана в  $K \subset \tau_h$ . Ако  $F_K$  е афинна трансформация, то  $V_h \subset V$ . Така върху всеки краен елемент се определя полином от степен  $n$ , т.е. полином от  $P_n(K)$ , ако  $K$  е триъгълен и съответно от  $Q_n(K)$  – ако  $K$  е четириъгълен елемент.

Решението  $u_h \in V_h$  по МКЕ се получава от уравнението, съответстващо на (1.2):

$$a(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \quad (1.3)$$

По-долу ще разглеждаме точките на суперсходимост за някои крайни елементи. На съответните фигури знакът  $\bullet$  означава възел на елемента, а



Фигура 1.2: Точки на суперсходимост за квадратични крайни елементи

x означава точка на суперсходимост.

(a) Линейни триъгълни крайни елементи

Средите на страните на всеки линеен краен елемент са точки на суперсходимост на градиента (Фигура 1.1). Този резултат за различни задачи от втори ред е доказан преди повече от 20 години от Чен [116], Андреев [3] и Левин [77] за равномерна мрежа. По-късно е използван за намиране на суперсходящ осреднен градиент, като се използват средите на страните [75, 83].

(б) Квадратични триъгълни крайни елементи

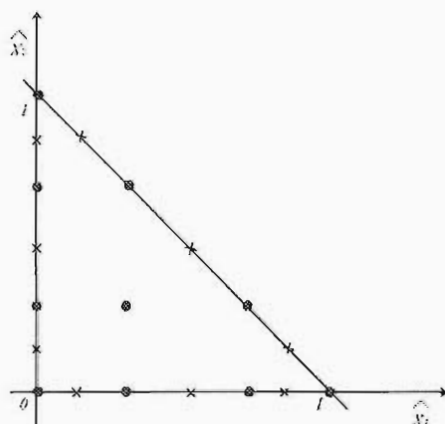
Да въведем Гаусовите точки от втори ред в интервала  $[0, 1]$ :

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.2113; \quad \hat{g}_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.7887.$$

Тогава Гаусовите точки по страните на основния 6-точков елемент са  $\hat{G}_{k,0}(\hat{g}_k, 0)$ ,  $\hat{G}_{0,k}(0, \hat{g}_k)$  и  $\hat{G}_{k,3-k}(\hat{g}_k, \hat{g}_{3-k})$ ,  $k = 1, 2$  (Фигура 1.2). Точките по страните на всеки краен елемент  $K \in \tau_h$ , които са изопараметрично (афинно) еквивалентни на Гаусовите точки на основния елемент, са точки на суперсходимост на тангенциалните производни по посока на страните на елемента. Следователно, това са точките

$$G_{i,j} = F_K(\hat{G}_{i,j}), \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Този резултат е доказан от Андреев и Лазаров [12] (виж също [4]). По-късно Гудсел и Уайтмън [48] намират малко по-просто доказателство на



Фигура 1.3: Точки на суперсходимость за кубичен краен елемент

този факт.

(в) Кубични триъгълни крайни елементи

Въвеждаме следните точки в интервала  $[0, 1]$ :

$$\hat{s}_1 = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{5}) = 0.1273; \quad \hat{s}_2 = \frac{1}{2}; \quad \hat{s}_3 = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{5}) = 0.8727.$$

Върху страните на основния елемент разглеждаме следните 9 точки (виж Фигура 1.3):

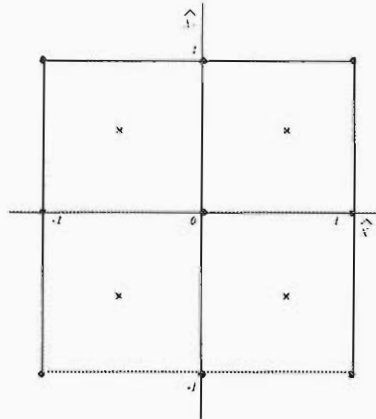
$$\hat{S}_{i0}(\hat{s}_i, 0), \quad i = 1, 2, 3; \quad \hat{S}_{0j}(0, \hat{s}_j), \quad j = 1, 2, 3; \quad \hat{S}_{ij}(\hat{s}_i, \hat{s}_j), \quad i + j = 4, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В следващия параграф ще докажем, че съответните точки  $S_{ij} = F_K(\hat{S}_{ij})$ , които са афинно еквивалентни на по-горе въведените точки от основния елемент, са точки на суперсходимость на производните по посока на страните на всеки краен елемент.

(г) Четириъгълни крайни елементи от произволна степен

Най-общият резултат за тези крайни елементи, засягащ суперсходимостта на градиента, е доказан от Лезен и Зламал [79]. Точките на суперсходимость на градиента на всеки четириъгълен краен елемент от областта са изопараметрично еквивалентни на Гаусовите точки в основния краен елемент. Тези точки в  $\hat{K}$  имат за координати корените на полинома на Лъожандър от съответната степен в интервала  $[-1, 1]$ . На Фигура 1.4 е показан случаят за полиноми от  $Q_2(\hat{K})$ . Тогава четирите Гаусови точки са

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$



Фигура 1.4: Точки на суперсходимост (Гаусови точки) за четириъгълен краен елемент от  $Q_2$

**Забележка 1.1** *Както подчертахме по-горе, Лезен и Зламал [79] доказават, че точките на суперсходимост на градиента за четириъгълните крайни елементи са Гаусовите точки. Това е в сила, когато възлите на елемента са точките на Лобато. Този факт е валиден за линейните и квадратични триъгълни крайни елементи, отнасящи се за Гаусовите и Лобатови точки върху страните на елементите. Например за линейните елементи точките 0 и 1 са Лобатови за интервала  $[0, 1]$ , а точката  $\frac{1}{2}$  е Гаусова от първи ред за същия интервал. За кубичните триъгълни крайни елементи обаче този факт не е в сила, т.е.  $\hat{s}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  не са Гаусови точки за интервала  $[0, 1]$ . Действително, точките (възлите)  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  не са Лобатови точки за същия интервал.*

(d) Елиптични задачи от четвърти ред

За тези задачи в равнината точките на Гаус от съответен ред за четириъгълните крайни елементи са точки на суперсходимост на вторите производни. Този суперсходящ резултат в дискретна енергетична норма е доказан от Даутов и Лалин [50] (виж също Даутов [49]). Характерен момент е, че доказаните твърдения са получени само при използване на подходяща числова квадратура, т.е. МКЕ в този случай се явява неконформен. Очевидно е, че и в едномерния случай Гаусовите точки ще бъдат точки на суперсходимост на вторите производни. Въпросът за намиране на точките на суперсходимост за задача от четвърти ред и използване на триъгълни крайни елементи засега остава нерешен.



### 1.3 Локална суперсходимост за квадратични и кубични триъгълни крайни елементи

Параграфът е посветен на оценки от тип суперсходимост в дискретни  $H^1$ -норми за елиптичната задача от втори ред (1.3), при използване на полиноми от втора или трета степен върху всеки краен елемент. Разглежданата локална суперсходимост е свързана с производните по посока на страните на елемента. Резултатите, които ще изложим, са предпоставка за получаване на суперсходяща апостериорна процедура.

В нашите разглеждания ще използваме точките, които представихме в случаите (б) и (в) от предходния параграф. За яснота на изложението ще предполагаме конформен МКЕ, т.е. интегралите в (1.3) се пресмятат точно и трансформацията  $F_K$  е афинна. Под формата на забележки ще отчетем възможните и досега известни в тези случаи световни постижения в суперсходящия анализ.

Локалната суперсходимост се базира на две основни лема. Ще ги докажем едновременно за квадратични и кубични триъгълни крайни елементи. Следователно  $n = 2$  или  $n = 3$ .

Нека  $\varphi_I$  означава Лагранжевият интерполант на  $\varphi$  в  $V_h$ , т.е.  $\varphi_I \in V_h$  и  $\varphi_I = \varphi$  във възлите на всеки краен елемент  $K \in \mathcal{T}_h$ . Ще използваме и означенията за производните

$$\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \partial_i \hat{\varphi} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_i}, \quad i = 1, 2,$$

където  $\varphi$  и  $\hat{\varphi}$  са гладки функции. Най-сетне,  $F_K$  е неизродена афинна трансформация с диагонална матрица.

**Лема 1.2** Нека  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{n+2}(\Omega)$  е решение на (1.2),  $n = 2; 3$  и  $u_I \in V_h$  е по части квадратичен (кубичен) интерполант на  $u$ . Тогава

$$|a(u - u_I, v)| \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega} |v|_{1, \Omega}, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.4)$$

Доказателство. Да положим  $\omega = u - u_I$ . Тогава за всяко  $v \in V_h$

$$\begin{aligned} a(\omega, v) = & \sum_{i,j=1}^2 \sum_{l=1}^M \left\{ \int_{K_l} a_{ij} \partial_i \omega \partial_j v \, dx - h^{n+1} \oint_{\partial K_l} a_{ij} B_{ij}^l(u, v) \, ds \right\} \\ & + h^{n+1} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{l=1}^M \oint_{\partial K_l} a_{ij} B_{ij}^l(u, v) \, ds, \end{aligned} \quad (1.5)$$

където  $B_{ij}^l$  са такива, че за  $\forall \hat{u} \in P_{n+1}(\hat{K})$

$$\int_{\widehat{K}} \partial_i \hat{\omega} \partial_j \hat{v} d\hat{x} - \oint_{\partial \widehat{K}} \widehat{B}_{ij}^l(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{s} = 0. \quad (1.6)$$

Билинейните форми  $\widehat{B}_{ij}^l(\hat{u}, \hat{v})$  съдържат първи производни на  $\hat{v}$  по посока на страните на  $\widehat{K}$  и трети производни ( $n = 2$ ) и четвърти производни ( $n = 3$ ) на функцията  $\hat{u}$ . За триъгълните квадратични елементи конструкцията на  $\widehat{B}_{ij}^l$  е предложена за пръв път от Андреев и Лазаров [12] и усъвършенствана от Гудсел и Уайтмън [48].

Всеки триъгълник  $K_l$  се изобразява в основния  $\widehat{K}$ . Тогава за последното събираемо на (1.5) получаваме

$$\sum_{l=1}^M \oint_{\partial K_l} a_{ij} B_{ij}^l(u, v) ds = 0,$$

защото интегрираме върху обща за всеки два съседни елемента страна в две противоположни посоки, с една и съща подинтегрална функция. За интегралите върху част от границата  $\Gamma$  функцията  $v$  е нула и следователно и нейната тангенциална производна ще се анулира.

Означаваме с  $G_l$  центъра на тежестта на триъгълника  $K_l$ . От (1.5) ще получим:

$$\begin{aligned} a(\omega, v) &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{l=1}^M \left\{ a_{ij}(G_l) \left[ \int_{K_l} \partial_i \omega \partial_j v dx - h^{n+1} \oint_{\partial K_l} B_{ij}^l(u, v) ds \right] \right. \\ &+ \left. \int_{K_l} (a_{ij}(x) - a_{ij}(G_l)) \partial_i \omega \partial_j v dx + h^{n+1} \oint_{\partial K_l} (a_{ij}(G_l) - a_{ij}(x)) B_{ij}^l(u, v) ds \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{l=1}^M \left\{ E_{ij}^l(u) + F_{ij}^l(u) + H_{ij}^l(u) \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ще оценим всяко от събираемите в дясната страна на (1.7):

$$E_{ij}^l(u) = \widehat{E}_{ij}^l(\hat{u}) = \hat{a}_{ij}^l(\widehat{G}_l) \left\{ \int_{\widehat{K}} \partial_i \hat{\omega} \partial_j \hat{v} d\hat{x} - \oint_{\partial \widehat{K}} \widehat{B}_{ij}^l(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{s} \right\}.$$

От теоремите на Соболев за влагане е ясно, че  $\widehat{E}_{ij}^l(\hat{u})$ ,  $i, j = 1, 2$  е ограничено в  $H^{n+2}(\widehat{K})$ , т.е.

$$|\widehat{E}_{ij}^l(\hat{u})| \leq C |\hat{a}_{ij}^l|_{0, \infty, \widehat{K}} \|\hat{u}\|_{n+2, \widehat{K}} |\hat{v}|_{1, \widehat{K}}.$$

Изразите  $\widehat{B}_{ij}^l(\hat{u}, \hat{v})$  са така конструирани, че (1.6) е изпълнено. Следователно  $\widehat{E}_{ij}^l(\hat{u}) = 0$  за  $\hat{u} \in P_{n+1}(\widehat{K})$ . От лемата на Брамбъл-Хилберт [37] се получава оценката:

$$\begin{aligned}
|\widehat{E}_{ij}^l(\hat{u})| &\leq C|\hat{a}_{ij}^l|_{0,\infty,\widehat{K}}|\hat{u}|_{n+2,\widehat{K}}|\hat{v}|_{1,\widehat{K}} \\
&\leq Ch^{n+1}|a_{ij}^l|_{0,\infty,K_l}|u|_{n+2,K_l}|v|_{1,K_l}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Вземайки предвид, че  $a_{ij} \in W_{\infty}^1(\Omega)$  и че  $\omega = 0$  при  $u_{K_l} \in P_n(K_l)$ , получаваме:

$$\begin{aligned}
|F_{ij}^l(u)| &= |\widehat{F}_{ij}^l(\hat{u})| = \left| \int_{\widehat{K}} (\hat{a}_{ij}^l - \hat{a}_{ij}^l(\widehat{G}_l)) \partial_i \hat{\omega} \partial_j \hat{v} \, d\hat{x} \right| \\
&\leq C|\hat{a}_{ij}^l|_{1,\infty,\widehat{K}}|\hat{\omega}|_{1,\widehat{K}}|\hat{v}|_{1,\widehat{K}} \leq C|\hat{a}_{ij}^l|_{1,\infty,\widehat{K}}|\hat{u}|_{n+1,\widehat{K}}|\hat{v}|_{1,\widehat{K}} \\
&\leq Ch^{n+1}|a_{ij}|_{1,\infty,K_l}|u|_{n+1,K_l}|v|_{1,K_l}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ще приложим теоремата за следата [44] за последното събираемо в (1.7):

$$\begin{aligned}
|H_{ij}^l(u)| &= |\widehat{H}_{ij}^l(\hat{u})| = \left| \oint_{\partial K_l} (\hat{a}_{ij}^l - \hat{a}_{ij}^l(\widehat{G}_{ij}^l)) B_{ij}^l(\hat{u}, \hat{v}) \, d\hat{s} \right| \\
&\leq C|\hat{a}_{ij}^l|_{1,\infty,\widehat{K}} \left( |\hat{u}|_{n+1,\widehat{K}} + |\hat{u}|_{n+2,\widehat{K}} \right) |\hat{v}|_{1,\widehat{K}} \\
&\leq Ch^{n+1}|a_{ij}|_{1,\infty,K_l} \|u\|_{n+2,K_l} |v|_{1,K_l}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Неравенствата (1.8), (1.9) и (1.10) завършват доказателството на лемата.  $\blacksquare$

**Забележка 1.2** Ако операторът  $L$  от (1.1) има постоянни коефициенти  $a_{ij}$ , тогава  $F_{ij}^l(u) = H_{ij}^l(u) = 0$  и неравенството (1.4) ще има вида

$$|a(u - u_I, v)| \leq Ch^{n+1}|u|_{n+2,\Omega}|v|_{1,\Omega}.$$

**Забележка 1.3** Резултатът от Лема 1.2 при  $n = 2$  е доказан от Андреев и Лазаров [12] при следните условия:

- $F_K$  е изопараметрична трансформация;
- Използва се подходяща числова квадратура с положителни коефициенти;

- Разделянето на областта е квазиравномерно. Това означава, че всеки два съседни триъгълника  $K_1$  и  $K_2$  образуват "почти" успоредник. Аналитично това се изразява с неравенството:

$$\left| J_{K_1}^{-1} \frac{\partial x_i^{K_1}}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j^{K_1}}{\partial \hat{x}_l} - J_{K_2}^{-1} \frac{\partial x_i^{K_2}}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_j^{K_2}}{\partial \hat{x}_l} \right| \leq Ch, \quad i, j, k, l = 1, 2$$

при трансформацията  $x_i = x_i^K(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in P_2(\widehat{K})$ ,  $i = 1, 2$ ;

- Крайноелементното разделяне е 2-стро го регулярно [102].

Въпросът за доказателството на резултата от Лема 1.2 при аналогични условия за кубичните крайни елементи остава все още нерешен.

Следващата лема доказва суперблизост между Лагранжевия интерполант и приближеното решение, получено по МКЕ.

**Лема 1.3** Нека условията от Лема 1.2 са изпълнени и  $u_h \in V_h$  е решение на (1.3). Тогава

$$|u_I - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega}, \quad (1.11)$$

Доказателство. Да забележим, че  $u_I - u_h \in V_h \subset V$ . От елиптичността на билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  ще получим ( $\alpha = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned} \alpha |u_I - u_h|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u_I - u_h, u_I - u_h) \\ &= a(u - u_h, u_I - u_h) - a(u - u_I, u_I - u_h) \\ &= -a(u, u_I - u_h) \leq |a(u, u_I - u_h)| \\ &\leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega} |u_I - u_h|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

където в последното неравенство сме приложили оценката (1.4) на Лема 1.2. ■

**Забележка 1.4** В нашето изложение допуснахме, че билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  и скалярното произведение  $(\cdot, \cdot)$  се интегрират точно. Последните две оценки ще са валидни, ако се използват квадратурни формули върху основния елемент. Те трябва да запазват елиптичността на формата и да са с достатъчно голяма алгебрична степен на точност (виж [12, 79]).

Последните две лема показват, че оценки от тип суперсходимост са в сила, когато точното решение е с по-голяма гладкост. В нашия случай  $u(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$  за  $n = 2$  и  $u(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^5(\Omega)$  за  $n = 3$ .

Ще дефинираме дискретни полунорми, които използват точките на суперсходимост на градиента.

#### За 6-точковите квадратични елементи

Нека  $\hat{g}_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  и  $\hat{g}_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  са Гаусовите точки в интервала  $[0, 1]$ . Дефинираме следната дискретна полунорма

$$|v|_{1,h}^* = \left( \sum_{K \in \tau_h} |\hat{v}|_{1,h,\hat{K}}^{*2} \right)^{1/2},$$

където

$$|\hat{v}|_{1,h,\hat{K}}^* = \left\{ \frac{\text{meas}(\hat{K})}{4} \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_1} \right)^2 (\hat{g}_m, 0) + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 (0, \hat{g}_m) + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \right)^2 (\hat{g}_m, \hat{g}_{3-m}) \right\}^{1/2},$$

с вектор  $l(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

#### За 10-точковите кубични елементи

Нека  $\hat{s}_{m,0}$ ,  $\hat{s}_{0,m}$ ,  $\hat{s}_{m,4-m}$ ,  $m = 1, 2, 3$  са точките на суперсходимост на градиента в основния елемент, определени в предходния параграф. Дефинираме полунормата

$$|v|_{1,h}^* = \left( \sum_{K \in \tau_h} |\hat{v}|_{1,h,\hat{K}}^{*2} \right)^{1/2},$$

където

$$|\hat{v}|_{1,h,\hat{K}}^* = \left\{ \frac{\text{meas}(\hat{K})}{9} \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_1} \right)^2 (\hat{s}_{m,0}) + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 (\hat{s}_{0,m}) + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \right)^2 (\hat{s}_{m,4-m}) \right\}^{1/2},$$

при което  $l(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Очевидно е, че за двата разглеждани случая ( $n = 2; 3$ )

$$|\hat{v}|_{1,h,\hat{K}}^* \leq C|v|_{1,\hat{K}}$$

за всяко  $\hat{v} \in P_n(\hat{K})$ . От това, че крайноелементната трансформация  $F_K$  е афинна, лесно следва

$$|v|_{1,h}^* \leq C|v|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.12)$$

Следващата теорема е основна за оценки от тип суперсходимост в дискретна норма.

**Теорема 1.1** *Нека условията от Лема 1.2 и Лема 1.3 са изпълнени за квадратичните и кубични триъгълни крайни елементи. Тогава*

$$|u - u_h|_{1,h}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega}. \quad (1.13)$$

**Доказателство.** Нека първо да разгледаме случая за квадратични крайни елементи. Отново полагаме  $\omega = u - u_I$  и разглеждаме линейния функционал

$$\hat{l}_1(\hat{u}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{g}_m, 0).$$

Лесно се вижда, че  $\hat{l}_1$  е ограничен в  $H^1(\hat{K})$  и се анулира за полиноми от  $P_3(\hat{K})$ . Действително, ако  $\hat{u} = \hat{x}_1^3$ , то  $(\hat{u})_I = \frac{3}{2}\hat{x}_1^2 - \frac{1}{2}\hat{x}_1$ . Следователно

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}_1^3 - \frac{3}{2}\hat{x}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{x}_1) = 3\hat{x}_1^2 - 3\hat{x}_1 + \frac{1}{2}.$$

Последният полином има за корени числата  $\hat{g}_1$  и  $\hat{g}_2$ . Ето защо,  $\hat{l}_1(\hat{x}_1^3) = 0$ . За случаите  $\hat{u} = \hat{x}_2^3$ ,  $\hat{u} = \hat{x}_1\hat{x}_2^2$  и  $\hat{u} = \hat{x}_1^2\hat{x}_2$  се получава аналогично с интерполанти, съответно  $\frac{3}{2}\hat{x}_2^2 - \frac{1}{2}\hat{x}_2$ ,  $\frac{1}{2}\hat{x}_1\hat{x}_2$  и  $\frac{1}{2}\hat{x}_1\hat{x}_2$ .

За функционала

$$\hat{l}_2(\hat{u}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}_2}(0, \hat{g}_m)$$

са в сила същите разсъждения. Тогава  $\hat{l}_2(\hat{u}) = 0$  за всяко  $\hat{u} \in P_3(\hat{K})$ .

Да разгледаме накрая

$$\hat{l}_3(\hat{u}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l}(\hat{g}_m, \hat{g}_{3-m}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^2 \left( -\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}_2} \right) (\hat{g}_m, \hat{g}_{3-m}).$$

Ако  $\hat{u} = \hat{x}_1^3$  или  $\hat{u} = \hat{x}_2^3$ , то както в предните два случая функционалът  $\hat{l}_3$  се анулира. Когато  $\hat{u} = \hat{x}_1 \hat{x}_2^2$  или  $\hat{u} = \hat{x}_1^2 \hat{x}_2$ , получаваме

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\hat{x}_2^2 + \frac{1}{2} \hat{x}_2 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 - \frac{1}{2} \hat{x}_1 \right)$$

или съответно

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{x}_1^2 - \frac{1}{2} \hat{x}_1 - 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 + \frac{1}{2} \hat{x}_2 \right).$$

И двата израза се анулират в точките  $(\hat{g}_1, \hat{g}_2)$  и  $(\hat{g}_2, \hat{g}_1)$ . Така проверихме, че  $\hat{l}_3(\hat{u}) = 0$  за всяко  $\hat{u} \in P_3(\bar{K})$ .

От лемата на Брамбъл-Хилберт за всеки елемент  $K \in \tau_h$  получаваме

$$|\hat{l}_i(\hat{u})| \leq Ch^3 \|u\|_{4,K}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Сумирането по всички крайни елементи  $K \in \tau_h$  води до

$$|u - u_I|_{1,h}^* \leq ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \quad (1.14)$$

Същите разглеждания могат да се извършат за кубичните крайни елементи.

Нека означим с  $\partial_t$  тангенциалните производни по страните на даден елемент. Ще покажем, че когато  $u \in P_4(K)$ , то

$$[\partial_t(u - u_I)]_{S_{ij}^m} = 0,$$

където  $S_{ij}^m$  са точките на суперсходимост на даден елемент.

Действително, ако  $\hat{u} = \hat{x}_1^4$ , то  $(\hat{x}_1^4)_I = 2\hat{x}_1^3 - \frac{11}{9}\hat{x}_1^2 + \frac{2}{9}\hat{x}_1$ . Получаваме:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} (\hat{x}_1^4 - (\hat{x}_1^4)_I) = 4\hat{x}_1^3 - 6\hat{x}_1^2 + \frac{22}{9}\hat{x}_1 - \frac{2}{9}.$$

Този кубичен полином има за корени числата

$$\hat{s}_1 = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{5}); \quad \hat{s}_2 = \frac{1}{2}; \quad \hat{s}_3 = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{5}).$$

Останалите четири монома от четвърта степен  $\hat{x}_1^3\hat{x}_2$ ,  $\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2$ ,  $\hat{x}_1\hat{x}_2^3$  и  $\hat{x}_2^4$  дават същия резултат, като прилагаме Лагранжев интерполант и използваме точките на суперсходимост в основния елемент.

Да разгледаме линейните функционали:

$$\hat{l}_1(\hat{u}) = \sum_{m=1}^3 \partial_1 \hat{\omega}(\hat{s}_{m0}), \quad \hat{l}_2(\hat{u}) = \sum_{m=1}^3 \partial_2 \hat{\omega}(\hat{s}_{0m}), \quad \hat{l}_3(\hat{u}) = \sum_{m=1}^3 \partial_1 \hat{\omega}(\hat{s}_{m,4-m}).$$

Очевидно  $\hat{l}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  са ограничени в  $H^5(\widehat{K})$  и се анулират за полиноми от  $P_4(\widehat{K})$ . От лемата на Брамбъл-Хилберт следва, че:

$$|\hat{l}_i(\hat{u})| \leq Ch^4 \|u\|_{5,K}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Сумирайки по всички крайни елементи  $K \in \tau_h$  достигаем до оценката

$$|u - u_I|_{1,h}^* \leq Ch^4 \|u\|_{5,\Omega}. \quad (1.15)$$

Комбинирайки неравенствата (1.14) и (1.15) заедно с (1.12) и Лема 1.3, получаваме:

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,h}^* &\leq |u - u_I|_{1,h}^* + |u_I - u_h|_{1,h}^* \\ &\leq |u - u_I|_{1,h}^* + C|u_I - u_h|_{1,\Omega} \\ &\leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega}, \quad n = 2; 3, \end{aligned}$$

с което завършваме доказателството. ■

Теоремата показва, че точките на суперсходимост за квадратичните и кубични крайни елементи са разположени върху страните на елемента. За двата разгледани (и най-важни) случая те имат различна природа (виж Забележка 1.1). Макар че производните са по посока на страните на елемента, то в теорията на суперсходящия анализ неравенството (1.13) се нарича "оценка от тип суперсходимост на градиента" (виж [4] и [29, 110]).

Локалните оценки, използващи дискретни норми в "специални" точки, имат важно значение за инженерната практика. Известно е [12, 47, 48, 75], че подходяща линейна комбинация на производни в такива точки по посока на страните (тангенциални производни) довежда до намиране на векторно поле на градиента с по-добри апроксимационни свойства.



Нашата цел в тази глава е да използваме резултата на Теорема 1.1 за получаване на практически алгоритъм, чрез който апостериорно ще конструираме по-точно приближаване на градиента на решението.

Преди това ще покажем, че локалните суперсходящи техники намират приложение не само за елиптични гранични задачи.

## 1.4 Локална суперсходимост за параболична задача

Едно важно приложение на точките на суперсходимост на градиента за елиптични уравнения е получаването на оценки от тип суперсходимост за задачи, зависещи от времевата променлива. В този параграф ще представим техника, която позволява да бъдат пренесени резултатите за суперсходимост към линейни параболични уравнения от втори ред.

Основна задача тук ще бъде да докажем оценка от тип суперсходимост в полудискретна  $H^1$ -норма. Втората важна стъпка в нашите изследвания е да се покаже възможността за диагонализиране на матрицата на маса в МКЕ за параболични уравнения и да се разгледа основната задача в този смисъл, а именно как ефектът от диагонализацията влияе върху точността на приближеното решение.

Върху многоъгълната област  $\Omega$  разглеждаме моделна гранична задача на Коши от втори ред [106]: Търсим функция  $u(x; t) \in H_0^1(\Omega) \times C^1[0, T]$ , удовлетворяваща интегралното твърждение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) &= (f, v) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Към тази задача ще приложим стандартен полудискретен метод на Галъоркин: Да се намери функция  $u_h(x; t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ , където  $\{\varphi_j(x)\}$ ,  $j = 1, \dots, N$  е каноничен базис в крайноеlementното пространство. Неизвестната функция  $u_h$  удовлетворява равенството, съответстващо на (1.16):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \\ \forall v_h \in V_h, t \in [0, T], \\ u_h(x, 0) &= \text{дадено.} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Така получаваме следната задача на Коши за системата от обикновени диференциални уравнения:

$$M\alpha'(t) + K\alpha(t) = F(t), \quad t \geq 0, \quad \alpha(0) - \text{дадено}, \quad (1.18)$$

където  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ ,  $M = \{(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$  е матрицата на маса,  $K = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$  е матрицата на коравина и  $F = ((f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_N))^T$ .

Да въведем следната норма:

$$\|w\|_{1,\Omega}^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|w\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^T |w|_{1,\Omega}^2 dt = \|w\|_{L^\infty(L_2(\Omega))} + \|w\|_{L_2(H^1(\Omega))}^2.$$

Суперсходящият анализ, който разгледахме за елиптични уравнения, се пренася и за параболична задача от втори ред. За целочисления параметър  $n$  ще предпологаме, че има стойности 1, 2 или 3, когато се разглеждат триъгълни крайни елементи. За четириъгълни крайни елементи ще използваме резултата на Лезен и Зламал [79], т.е.  $n$  може да е произволно цяло положително число (виж също [5]). Естествено е да предпологаме, че решението на (1.16) има по-голяма гладкост.

**Определение 1.2** *Две функции от дадено пространство ще наричаме суперблизки, ако тяхната разлика се оценява в основната енергетична норма с по-висок порядък, отколкото е оптималната оценка на приближението към точното решение за съответния метод на Галъоркин.*

Следващата лема доказва суперблизост на приближеното решение в МКЕ и интерполанта на точното решение.

**Лема 1.4** *Нека  $u(x; t) \in (H^{n+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times C^1([0, T])$  е решение на (1.16), а  $u_h(x; t)$  е решение на (1.17) чрез използване на полиноми от степен  $n$ , като оценката (1.4) остава в сила за всяко  $t \in [0, T]$ . Тогава*

$$\|u_h - u_I\|_{1,\Omega} \leq Ch^{n+1} \left( \|u\|_{L_2(H^{n+2}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(H^{n+1}(\Omega))} \right), \quad (1.19)$$

където  $\|v\|_{L_2(H^k(\Omega))} = \left( \int_0^T \|v\|_{k,\Omega}^2 dt \right)^{1/2}$ .

**Доказателство.** Да положим  $z_h = u_h - u_I \in V_h$  и да заместим  $(f, v_h)$  от (1.17) със съответния израз от (1.16). За всяко  $v_h \in V_h$  ще получим

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z_h}{\partial t}, v_h\right) + a(z_h, v_h) &= (f, v_h) - \left(\frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h\right) - a_h(u_I, v_h) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h\right) + a(u, v_h) - \left(\frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h\right) - a_h(u_I, v_h) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h\right) + a(u - u_I, v_h).
\end{aligned}$$

Ще оценим всяко едно от двете събираеми в дясната страна. Нека  $w = \frac{\partial u}{\partial t}$ . Тогава за всяко  $t \in [0, T]$

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h\right)\right| = \left|\sum_{K \in \tau_h} \int_K (w - w_I) v_h dx\right|.$$

От друга страна,

$$\begin{aligned}
\int_K (w - w_I) v_h dx &= \text{meas}(K) \int_{\hat{K}} (\hat{w} - \hat{w}_I) \hat{v} d\hat{x} \\
&\leq \text{meas}(K) \|\hat{w} - \hat{w}_I\|_{0, \hat{K}} \|\hat{v}\|_{0, \hat{K}} \\
&\leq \text{meas}(K) |\hat{w}|_{n+1, \hat{K}} \|\hat{v}\|_{0, \hat{K}} \\
&\leq Ch^{n+1} \|w\|_{n+1, K} \|v_h\|_{0, K}.
\end{aligned}$$

Да сумираме по всички  $K \in \tau_h$  и да използваме неравенството на Фридрихс [102]. Получаваме

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}(u - u_I), v_h\right)\right| \leq Ch^{n+1} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{n+1, \Omega} |v_h|_{1, \Omega}. \quad (1.20)$$

Използваме оценката на Лема 1.2 за всяко  $t \in (0, T]$ :

$$|a(u - u_I, v_h)| \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega} |v_h|_{1, \Omega}.$$

Това неравенство заедно с (1.20) ни дава:

$$\left(\frac{\partial z_h}{\partial t}, v_h\right) + a(z_h, v_h) \leq Ch^{n+1} \left( \|u\|_{n+2, \Omega} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{n+1, \Omega} \right) |v_h|_{1, \Omega}.$$

Нека сега  $v_h = u_h - u_I = z_h \in V_h$  и да забележим, че

$$\left( \frac{\partial z_h}{\partial t}, z_h \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|z_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Като приложим елементарното неравенство  $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ , получаваме:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|z_h\|_{0,\Omega}^2 + |z_h|_{1,\Omega}^2 \leq Ch^{2(n+1)} \left( \|u\|_{n+2,\Omega} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{n+1,\Omega} \right) + \frac{1}{2} |z_h|_{1,\Omega}^2.$$

Последното неравенство е вярно за всяко  $t \in [0, T]$ . Интегрирайки по отношение на  $t$ , получаваме оценката (1.19). ■

**Концентрация на масата** Да разгледаме важния за практически решаване в МКЕ случай, когато матрицата  $M$  в уравнението (1.18) е диагонална. Този ефект се нарича **концентрация на масата** (lumped mass). Това ще означава все едно в  $i$ -я ред на  $M$  да положим на всички места нула с изключение на диагоналния, за който имаме  $\sum_{k=1}^N (\varphi_i, \varphi_k)$ . Така уравнението (1.18) ще има вида:

$$\overline{M} \alpha'(t) + K \alpha(t) = F(t), \quad t \geq 0.$$

Тази процедура обикновено се интерпретира като резултат на подходяща **числова квадратура** (виж например [5, 13, 25, 117]). Върху основния елемент  $\widehat{K}$  се дефинира числова квадратурна формула

$$\int_{\widehat{K}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} \cong \widehat{I}(\hat{\psi}) = \sum_{i=1}^L \hat{\omega}_i \hat{\psi}(\hat{a}_i) \quad (1.21)$$

за всяка непрекъснатата в  $\widehat{K}$  функция  $\hat{\psi}(\hat{x})$ , където  $\hat{\omega}_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, L$  са подходящи теглови множители. Точките  $\hat{a}_i$  са възли на квадратурната формула.

Ако  $\hat{a}_i$  съвпадат с възлите на крайния елемент, то очевидно при изчисляване на скаларните произведения за елементите на матрицата на маса ще бъде изпълнено  $(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_j) = 0$  за  $i \neq j$ .

За всеки краен елемент  $K \in \tau_h$  се дефинира квадратурна формула

$$\int_K \psi(x) dx \cong I_K(\psi) = \widehat{I}(J_{F_K} \hat{\psi}), \quad (1.22)$$

където  $J_{F_K}(\hat{x}) > 0, \forall \hat{x} \in \widehat{K}$  е Якобианът на трансформацията  $F_K$ . Така интегралите върху  $\Omega$  се изчисляват елемент по елемент, използвайки формула (1.22). Формулата (1.21) има определена алгебрична степен на точност, която чувствително влияе на МКЕ чрез използване на числови квадратури.

Да дефинираме функционала на грешката

$$\widehat{E}(\hat{\psi}) = \int_{\widehat{K}} \hat{\psi} d\hat{x} - \widehat{I}(\hat{\psi}), \quad \forall \hat{\psi} \in C(\widehat{K}).$$

Тогава

$$E_K(\psi) = \int_K \psi dx - I_K(\psi), \quad \forall \psi \in C(K).$$

Да означим още

$$E(u, v) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(u, v), \quad \forall u, v \in V_h.$$

Използвайки, че  $\hat{\psi}(\hat{x}) = \psi(x), \forall \hat{x} \in \widehat{K}$ , ще получим

$$E_K(\psi) = \widehat{E}(\hat{\psi} \cdot J_{F_K}).$$

**Забележка 1.5** Връзката между числовата квадратура върху някой елемент  $K \in \tau_h$  и основния елемент  $\widehat{K}$  (1.22), както и зависимостите между функционалите на грешката  $E_K$  и  $\widehat{E}$  са дадени в по-общия изопараметричен случай. При афинно изображение  $F_K$  ще имаме:

$$\omega_{i,K} = (\det B_K) \hat{\omega}_i, \quad a_{i,K} = F_K(a_i) \in K,$$

$$I_K(\psi) = (\det B_K) \widehat{I}(\hat{\psi}), \quad E_K(\psi) = (\det B_K) \widehat{E}(\hat{\psi}).$$

Ние можем да дефинираме приближение на скаларното произведение и на нормата в  $L_2(\Omega)$  посредством

$$(u, v)_h = \sum_{K \in \tau_h} I_K(u, v), \quad \forall u, v \in V_h,$$

$$\|w\|_h = (w, w)_h^{1/2}, \quad \forall w \in V_h.$$

Тогава параболичната задача (1.17) ще добие вида

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right)_h + a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \\ \forall v_h \in V_h, t \in [0, T], \\ u_h(x, 0) &= \text{дадено}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

където за първото събираемо отляво сме приложили подходящо числено интегриране, при което се получава диагонална матрица на масата (lumped mass method).

Първо ще покажем, че при определени условия за квадратурната формула (1.21) ще получим суперблизост на  $u_h$  и  $u_I$  в МКЕ с концентрирана матрица на масата. За целта да променим нормата, в която оценявахме разликата  $u_h - u_I$  от Лема 1.4:

$$\| \|w\| \|_{1,h} = \max_{0 \leq t \leq T} \|w\|_h^2 + \int_0^T |w|_{1,\Omega}^2 dt = \|w\|_{L^\infty(L_2^h(\Omega))}^2 + \|w\|_{L_2(H^1(\Omega))}^2.$$

**Лема 1.5** Нека условията от Лема 1.4 са изпълнени. Нека освен това за скаларното произведение  $\left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right)$  сме приложили такава квадратурна формула (1.21) върху основния елемент, която е с положителни коефициенти, точна за полиноми от  $P_{2n-1}(\tilde{K})$  (съответно  $Q_{2n-1}(\tilde{K})$ ) и даваща диагонална матрица на масата  $\bar{M}$  в резултатното матрично уравнение. Тогаво

$$\| \|u_h - u_I\| \|_{1,h} \leq Ch^{n+1} \left( \|u\|_{L_2(H^{n+2}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(H^{n+1}(\Omega))} \right).$$

**Доказателство.** Както и при доказателството на Лема 1.4, полагаме  $z_h = u_h - u_I \in V_h$  и получаваме за всяко  $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t}, v_h \right)_h + a(z_h, v_h) &= a(u - u_I, v_h) + \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v_h \right) - \left( \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right)_h \\ &= a(u - u_I, v_h) + \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right) + E \left( \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right). \end{aligned}$$

Първите две събираеми в дясната страна на последното равенство са оценени в Лема 1.4 с порядък  $\mathcal{O}(h^{n+1})$ . Остава да оценим  $E \left( \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right)$ :

$$\left| E \left( \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right) \right| \leq \sum_{K \in \tau_h} \left| E_K \left( \frac{\partial u_I}{\partial t}, v_h \right) \right|.$$

Като използваме, че квадратурната формула е точна за полиноми от степен  $2n - 1$ , то от лемата на Брамбъл-Хилберт следва

$$\begin{aligned} |E_K(\sigma)| &= \text{meas}(K) |\widehat{E}_K(\hat{\sigma})| \\ &\leq C \text{meas}(K) |\hat{\sigma}|_{2n, \widehat{K}}. \end{aligned}$$

Сега да приложим правилото на Лайбниц за производна на произведение на функции, както и неравенството

$$|\hat{v}|_{j, \widehat{K}} \leq |\hat{v}|_{i, \widehat{K}}, \quad \forall \hat{v} \in P_n(\widehat{K}), \quad 0 \leq i < j \leq n.$$

Тогава

$$\begin{aligned} |E_K\left(\frac{\partial u_I}{\partial t} \cdot v_h\right)| &\leq \text{meas}(K) \left| \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} |\hat{v}|_{n, \widehat{K}} \\ &\leq \text{meas}(K) \left| \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} |\hat{v}|_{1, \widehat{K}}. \end{aligned}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} &\leq \left| \frac{\partial(\hat{u} - \hat{u}_I)}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} + \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} \\ &\leq Ch \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|_{n+1, \widehat{K}} + \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|_{n, \widehat{K}} \\ &\leq Ch^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{n+1, K}. \end{aligned}$$

Така окончателно получаваме

$$|E_K\left(\frac{\partial u_I}{\partial t} \cdot v_h\right)| \leq Ch^{n+1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{n+1, K} |v_h|_{1, K}.$$

Сумираме по всички  $K \in \tau_h$  и полагаме  $v_h = u_h - u_I$ . Както на края в доказателството на Лема 1.4, използваме  $\varepsilon$ -неравенството при  $\varepsilon = 1/2$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|z_h\|_h^2 + |z_h|_{1, \Omega}^2 \leq Ch^{2(n+1)} \left( \|u\|_{n+2, \Omega} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{n+1, \Omega} \right) + \frac{1}{2} |z_h|_{1, \Omega}^2.$$

Интегрирайки по  $t$  от 0 до  $T$ , завършваме доказателството на Лемата. ■

**Забележка 1.6** При четириъгълните крайни елементи ефектът "концентрация на масата" се получава, когато  $(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h)$  се пресмята чрез квадратурни формули на Лобато (виж [5, 25]). Нека  $L_n(\xi)$  означава полиномът на Лъожандър от степен  $n$  при  $\xi \in [-1, 1]$ . Тогава  $L'_n(\xi)$  има  $n - 1$  прости корена в интервала  $(-1, 1)$ . Да разгледаме точковото множество

$$\widehat{R}_{n+1} = \{l_0, \dots, l_n : l_0 = -1, l_n = 1, L'_n(l_j) = 0, j = 1, \dots, n - 1\}.$$

Тогава върху основния квадрат  $\widehat{K}$  се определят  $(n + 1)^2$  възела  $\hat{a}_j = (l_{j_1}, l_{j_2}) \in \widehat{R}_{n+1}^2$ , където  $j = (j_1, j_2)$ ,  $0 \leq j_1, j_2 \leq n$ , които са точки на Лобато. Квадратурната формула на Лобато

$$\widehat{I}(\psi) = \sum_{i=1}^{(n+1)^2} \hat{\omega}_i \psi(\hat{a}_i)$$

е точна за полиноми от  $\widehat{Q}_{2n-1}(\widehat{K})$ .

При триъгълните крайни елементи *lumped mass* за параболичното уравнение (1.23), като се запазва суперсходящата оценка на градиента, имаме за линейни крайни елементи ( $n = 1$ ) [13]. Тогава върху основния симплекс използваме квадратурната формула

$$\widehat{I}(\psi) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{a}_i),$$

където  $\hat{a}_i$  са върховете на  $\widehat{K}$ . Тази формула е точна за полиномите от  $P_1(\widehat{K})$ .

Въпросът за съществуване на квадратурна формула, която дава концентрация на масата при триъгълните крайни елементи и запазва суперсходяща оценка на градиента при някои  $n \geq 2$  засега остава нерешен. Вероятно отговорът на този въпрос е отрицателен.

**Забележка 1.7** Разбира се другите два интеграла в (1.23) могат да бъдат пресметнати с използване на числено интегриране. За да запазим порядъка в разглежданите оценки, необходимо е точността на квадратурната формула да е не по-лоша от тази, с която се пресмята  $(\frac{\partial u}{\partial t}, v)$ .

Сега ще докажем основния резултат на този параграф. Той се отнася до оценка от тип суперсходимост на градиента за параболични уравнения от втори ред. За целта да дефинираме съответната дискретна полуорма.



Нека  $|\cdot|_{1,h}^*$  е някоя от полунормите, дефинирани в предходния параграф и отнасящи се до триъгълни крайни елементи от степен  $n$ , където  $n = 1, 2$  или  $3$ . При  $n = 1$  тази полунорма се дефинира аналогично на случаите  $n = 2; 3$  (виж [13]). Когато елементът е четириъгълен, то полунормата се дефинира, използвайки квадратурни формули на Лобато или Гаус, които са точни за полиноми от  $Q_{2n-1}$  (виж [5, 25, 79]).

За параболичната задача дефинираме

$$|v|_{1,h,t}^* = \int_0^T |v|_{1,h}^* dt \quad \text{за } v \in H^1(\Omega) \times C[0, T].$$

От така дадената дефиниция за полунормата, чрез която ще получим суперсходяща оценка за параболичната задача, имаме следното очевидно неравенство:

$$|v|_{1,h,t}^* \leq C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V_h, \quad t \in [0, T]. \quad (1.24)$$

Ако използваме числено интегриране, както в (1.23), то нормата отдясно в (1.24) ще се промени. Тогава отново неравенството от същия вид е в сила, т.е.

$$|v|_{1,h,t}^* \leq C \|v\|_{1,h} \quad \forall v \in V_h, \quad t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

Сега можем да представим теоремата за суперсходимост на градиента за параболичната задача.

**Теорема 1.2** *Нека условията от Лема 1.4 (съответно Лема 1.5) са изпълнени за всяко  $t \in [0, T]$ . Тогава имаме следната оценка от тип суперсходимост:*

$$|u - u_h|_{1,h,t}^* \leq Ch^{n+1} \left( \|u\|_{L_2(H^{n+2}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(H^{n+1}(\Omega))} \right),$$

където  $u$  и  $u_h$  означават решенията на (1.16) и (1.17) (или (1.23)), съответно.

**Доказателство.** Първо, като интегрираме по  $t$  от 0 до  $T$  оценката от тип суперсходимост на градиента за елиптическата задача

$$|u - u_I|_{1,h}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2,\Omega},$$

ще получим

$$|u - u_I|_{1,h,t}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{L_2(H^{n+2}(\Omega))}.$$

От неравенството на триъгълника, както и от (1.24) (или (1.25)) следва:

$$\begin{aligned}
|u - u_h|_{1,h,t}^* &\leq |u - u_I|_{1,h,t}^* + |u_I - u_h|_{1,h,t}^* \\
&\leq |u - u_I|_{1,h,t}^* + C \| |u - u_I| \|_{1,\Omega} \\
&\leq Ch^{n+1} \left( \|u\|_{L_2(H^{n+2}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(H^{n+1}(\Omega))} \right),
\end{aligned}$$

като в последното неравенство сме приложили резултата от Лема 1.4 (съответно Лема 1.5). ■

Доказаната теорема е аналог на теоремите за суперсходимост на градиента за елиптични уравнения. Тя показва, че точките на суперсходимост могат да бъдат практически използвани при параболичните уравнения. Интересен остава и въпросът за съчетаване на суперсходящата техника с възможността за получаване на диагонална матрица на масата (виж Забележка 1.6).

## 1.5 Локална суперсходимост за задача за собствени стойности и собствени функции

Нашата цел в този параграф е да покажем, че оценките, свързани с точките на суперсходимост, намират приложение и в спектралните задачи от съответен ред. С други думи, ще покажем, че точките на суперсходимост на градиента за елиптична задача, които дискутирахме в предходните параграфи, са точки на суперсходимост на градиента за собствените функции. Това е предпоставка да се построи покриващо приближено решение, използващо тези точки, което да притежава по-добри апроксимационни свойства.

Разглеждаме моделна гранична задача за собствени стойности и собствени функции от втори ред: Търсим функция  $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$  и число  $\lambda \in \mathbf{R}$  такива, че

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.26)$$

където

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx;$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} b(x)uv \, dx.$$

Предполагаме, че  $a_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$  и  $b(x) \in L_{\infty}(\Omega)$ , като

$$b(x) \geq \alpha > 0, \quad \alpha = \text{const.}$$

Ако условието за елиптичност е изпълнено, то задача (1.26) притежава собствени стойности с крайни кратности  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

При дискретизация на областта  $\Omega$  по метода на крайните елементи ще получим приближените собствени двойки  $(\lambda_h, u_h)$  които са съответни на решенията на уравнението (1.26), т.е.

$$\begin{aligned} u_h \in V_h, \quad \lambda_h \in \mathbf{R}, \\ a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Да допуснем, че в МКЕ сме използвали апроксимация с полиноми от степен  $n$ . Тогава, ако решението  $u(x)$  принадлежи на  $H^{n+1}(\Omega)$ , то оптималните оценки за съответните задачи от втори ред са [30, 104]:

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &\leq Ch^{2n} \|u\|_{n+1, \Omega}^2, \\ \|u - u_h\|_{s, \Omega} &\leq Ch^{n+1-s} \|u\|_{n+1, \Omega}, \quad s = 0, 1. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Аналогично на елиптичното уравнение, ако решението  $u(x)$  на (1.26) е по-гладка функция, то можем да докажем локална суперсходимост в някоя дискретна полунорма за собствените функции.

Основен резултат в този параграф е да докажем суперблизост на приближеното решение на (1.27)  $u_h$  и съответния Лагранжев интерполант  $u_I$  на точното решение. Двете функции принадлежат на крайноелементното пространство и следователно тяхната суперблизост ще породи суперсходимост в дискретна полунорма.

**Лема 1.6** *Нека крайноелементното разделяне  $\tau_h$  на областта  $\Omega$  е такова, че изпълнява условията при суперсходящия анализ за елиптична задача от втори ред, разгледана в §1.3. Нека също решението  $u(x)$  на (1.26) принадлежи на  $H^{n+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Тогава*

$$\|u_h - u_I\|_{1, \Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega}. \tag{1.29}$$

Доказателство. В нашето доказателство съществено използваме оценката, получена в Лема 1.2, а именно

$$|a(u - u_I, v_h)| \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega} |v_h|_{1, \Omega} \quad \forall v_h \in V_h.$$

От  $V_h$ -елиптичността на  $a$ -формата получаваме ( $\rho = \text{const} > 0$ ):

$$\rho \|u_h - u_I\|_{1, \Omega}^2 \leq a(u_h - u_I, u_h - u_I) = \lambda_h b(u_h, u_h - u_I) - a(u_I, u_h - u_I).$$

Да положим  $z_h = u_h - u_I \in V_h$ . Тогава от Лема 1.2 и оценките (1.28) ще следва

$$\begin{aligned} \rho \|z_h\|_{1, \Omega}^2 &\leq (\lambda_h - \lambda) b(u_h, z_h) + \lambda b(u_h, z_h) - a(u_I, z_h) \\ &= (\lambda_h - \lambda) b(u_h, z_h) + \lambda b(u_h - u, z_h) + \lambda b(u, z_h) - a(u_I, z_h) \\ &= (\lambda_h - \lambda) b(u_h, z_h) + \lambda b(u_h - u, z_h) + a(u - u_I, z_h) \\ &\leq (|\lambda - \lambda_h| \|u\|_{0, \Omega} + \lambda \|u - u_h\|_{0, \Omega} + Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega}) \|z_h\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

Разделяйки двете страни на това неравенство на  $\|z_h\|_{1, \Omega}$ , получаваме (1.29). ■

Задачата за суперблизост между приближената собствена функция  $u_h$  и съответния интерполант на точната собствена функция е решена от Андреев и Рачева за самоспрегната спектрална задача от ред  $2m$  (виж [17]). Случаят  $m = 1$  е разгледан в [6].

Суперсходимостта на приближените собствени функции, базирана на точките на суперсходимост, се опира на два основни момента:

- суперблизост между приближената собствена функция и Лагранжевия интерполант  $u_I$  (Лема 1.6);
- използване на специалните дискретни полунорми, дефинирани в §1.3.

И така, нека  $|\cdot|_{1, h}^*$  е дискретна полунорма, която използва точките на суперсходимост на градиента. Производните на крайноелементния интерполант на точното решение на елиптическата задача имат по-добра апроксимация в точките на Гаус-Льожандър [50, 79]. Тогава (виж (1.14) и (1.15))

$$|u - u_I|_{1, h}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+2, \Omega}.$$

Оценка от тип суперсходимост на градиента за собствените функции се дава в следната теорема:

**Теорема 1.3** Нека условията на Лема 1.6 са изпълнени. Тогава е в сила следната оценка за приближената и точна собствена функция:

$$|u - u_h|_{1,h}^* \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+1,\Omega}. \quad (1.30)$$

Доказателство. Като се използва неравенство (1.12), получаваме:

$$|u - u_h|_{1,h}^* \leq |u - u_I|_{1,h}^* + C|u_h - u_I|_{1,\Omega}.$$

Тогава оценката (1.30) лесно следва от резултата, доказан в Лема 1.6. ■

Концентрация на масата Диагонализацията на матрицата на маса е важна практическа стъпка при пресмятане по МКЕ. Както при параболичната задача, така и тук този ефект може да се постигне чрез използване на подходящи квадратурни формули.

Нека разгледаме следната моделна задача: Търсим  $\lambda \in \mathbf{R}$  и  $u \in V, u \neq 0$  така, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V,$$

където  $V$  е затворено подпространство на  $H^1(\Omega)$ , т.е.  $H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega)$ . Нека за пресмятането на скаларното произведение откъсно сме използвали квадратурна формула с положителни коефициенти, чиито възли съвпадат с възлите на крайния елемент. Тогава съответната приближена задача по МКЕ ще бъде: Търсим  $(\bar{\lambda}_h, \bar{u}_h) \in (\mathbf{R}, V_h)$  така, че

$$a(\bar{u}_h, v_h) = \bar{\lambda}_h(\bar{u}_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (1.31)$$

където  $(\cdot, \cdot)_h$  означава използване на квадратурна формула, диагонализираща матрицата на маса  $M^h$ . Ако означим базисните функции на елемента  $K$  с  $\varphi_{iK}$ ,  $1 \leq i \leq N(h)$ , то при изчисляване на приближената матрица на маса имаме

$$\bar{M}^h = (\bar{M}_{ij}^h), \quad 1 \leq i, j \leq N(h),$$

като  $\bar{M}_{ij}^h = (\varphi_{iK}, \varphi_{jK})_h = 0$ , ако  $i \neq j$ . следователно матрицата  $\bar{M}^h$  е диагонална или "концентрирана".

Точността на решението  $(\bar{\lambda}_h, \bar{u}_h)$  е свързана с точността на използваната квадратурна формула. За правоъгълните крайни елементи този въпрос е решен от Андреев, Касчиева и Ван Маеле [11]. Формулите на Лобато са квадратурните формули, даващи концентрирана матрица на масата. Те

осигуряват диагонализация на матрицата  $\overline{M}^h$  и имат висока алгебрична степен на точност, а именно, те са точни за полиноми от пространството  $Q_{2n-1}(K)$ . В [11] е доказано, че в този случай се постига оптималната оценка за собствените стойности (1.28) при условие, че билинейната  $a$ -форма е регулярна (виж [102]). За триъгълните крайни елементи такава оптималност се получава в линейния случай ( $n = 1$ ) (виж [13]). Тогава подходящата квадратурна формула е с възли във върховете на триъгълника и е точна за полиноми от  $P_1(K)$ .

Интересен е случаят при триъгълните крайни елементи за  $n \geq 2$ . Такива изследвания има и от автора за изопараметричния случай, но това излиза извън рамките на разглежданата тематика. Настоящата ни цел е да установим, може ли да се получи оценка от тип (1.30) при задачата с концентрирана матрица на масата (1.31). За да направим това, ще трябва да се докаже суперблизост между приближената собствена функция  $\bar{u}_h$  и съответния Лагранжев интерполант  $u_I$ .

За известните случаи на концентрация на масата такава суперблизост не съществува.

Действително, нека да означим, както и в "съгласувания" случай,  $\bar{z}_h = \bar{u}_h - u_I \in V_h$ .

Аналогично на разглежданията от Лема 1.6, получаваме:

$$\begin{aligned}
 \rho \|\bar{z}_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(\bar{u}_h, \bar{z}_h) - a(u_I, \bar{z}_h) \\
 &= (\bar{\lambda}_h - \lambda)(\bar{u}_h, \bar{z}_h)_h + \lambda(\bar{u}_h, \bar{z}_h)_h - a(u_I, \bar{z}_h) \\
 &\leq |\bar{\lambda}_h - \lambda| \|\bar{u}_h\|_{0,\Omega} \|\bar{z}_h\|_{1,\Omega} + \lambda \|\bar{u}_h - u\|_{0,\Omega} \|\bar{z}_h\|_{1,\Omega} \\
 &\quad + \lambda E(u, \bar{z}_h) + a(u - u_I, \bar{z}_h),
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

където сме използвали, че квадратурната формула с положителни коефициенти осигурява неравенството

$$\|v\|_{1,h} \leq C \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in V_h.$$

Като приложим неравенство (1.32), ще покажем, че суперблизост като получената в Лема 1.6 не може да съществува при метод с концентрация на масата. Причините за това са следните:

- Ако сме използвали Лобатова квадратурна формула при четириъгълни крайни елементи, то (виж [11])

$$\|u - \bar{u}_h\|_{0,\Omega} \sim \|u - \bar{u}_h\|_{1,\Omega},$$

където порядъкът е  $\mathcal{O}(h^{n-1})$ ,  $n \geq 2$ .

- Ако сме използвали линейни крайни елементи и квадратура във върховете на елемента, то  $E(u, \bar{z}_h)$  не дава нужния висок порядък поради факта, че формулата е точна за полиноми от  $P_1(K)$  (виж [13]).

Изводът, който се налага е, че не може да бъде приложен суперсходящ анализ в комбинация с метода на концентрация на масата за задачите за собствени функции.

Все пак, методът с концентрация на масата има важно практическо приложение в инженерните пресмятания. Той води до по-лесни за приложение и по-стабилни изчислителни схеми.

Следващите параграфи разглеждат основната цел на тази глава. Тя е да се предложи апостериорна техника за квадратичните и кубични триъгълни крайни елементи, която да осигури по-добра сходимост на приближеното към точното решение. Този подход отчита резултатите, представени дотук. Следователно в апостериорните алгоритми ще участват локалните резултати, базирани на точките на суперсходимост.

Идеята за глобална покриваща или осредняваща техника с цел повишаване на сходимостта на приближения градиент е приложена първо при линейните триъгълни крайни елементи (виж [78]). Осредняването на точното решение във възел (връх) на елемента е силно улеснено от факта, че градиентът на приближеното решение върху всеки краен елемент е постоянен вектор [74, 75]. Точките на суперсходимост на градиента (средите на страните) позволяват да се построи **покриващ градиент** (recovered gradient) от приближеното решение и по този начин да се получи глобално векторно поле, което приближава истинското решение с по-добра точност [47].

Различните осредняващи и покриващи апостериорни техники за линейните триъгълни крайни елементи имат сравнително дълга история (виж [47, 74, 75] и литературата към тях). Получените оценки от тип суперсходимост изискват по-висока регулярност ( $H^3$ ) на слабото решение на изходната задача. Това условие може да бъде отслабено, като се изисква по-голяма гладкост на решението само върху подобласт на разглежданата област [109]. Суперсходящите резултати в подобласт в  $L_2$  и  $L_\infty$ -норми бяха доразвити от Гудсел и Уайтмън [107] и бяха приложени за задачи от линейната еластичност.

Нека обаче да подчертаем, че използването на линейните крайни елементи не е толкова развито в изчислителната практика. В много важни за практиката задачи те не осигуряват дори сходимост на приближеното към



точното решение (например уравненията на Навие-Стокс). Апроксимацията с по части квадратични полиноми е една от най-разпространените в инженерната практика. Получаването на осреднен градиент с по-добри апроксимационни свойства е значително по-трудно.

В следващите два параграфа ще предложим оригинална техника за получаване на покриващ градиент (recovery gradient), като се използват точките на суперсходимост. Резултатите се отнасят за най-използваните крайни елементи – квадратичните 6-точкови и кубичните 10-точкови. Този подход води до глобална суперсходимост на градиента. Друга авангардна идея е възможността за частично покриване на подобласт, с цел понижаване размерността на крайноелементното пространство.

## 1.6 Апостериорна покриваща процедура, основана на точките на суперсходимост за 6-точковите квадратични елементи

Както вече подчертахме, ролята на суперсходящите апостериорни процедури е да се повиши ефективността (точността) на алгоритъма, без да се намалява крайноелементният параметър  $h$ . В този параграф ще разгледаме две възможности за намиране на recovered градиент чрез осредняване на приближеното решение.

### А Суперсходимост на градиента във върховете на елемента

Нека  $\tau_h$  е равномерно разделяне на областта, т.е. всеки два съседни елемента образуват успоредник. Да означим с  $I_h$  множеството от вътрешните върхове на елементите; с  $B_h$  – множеството от върховете, лежащи на границата на областта с изключение на ъглите; с  $V$  – множеството на ъгловите точки (виж Фигура 1.5).

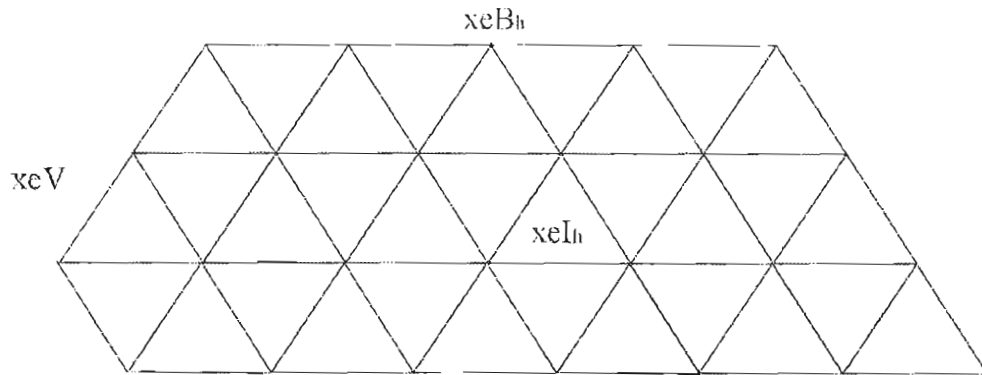
Разглеждаме функцията  $v(x) \in V_h$ . Нека означим с  $\partial_{l_j} v(x)$  производната на тази функция по посока на единичния вектор  $l_j = (\cos \alpha_j, \sin \alpha_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Както обикновено,  $g_1$  и  $g_2$  означават Гаусовите точки върху някоя страна на елемента.

Ще конструираме осреднен (averaged) градиент  $G_{hj}$ , който отговаря на посоката  $l_j$  и "покрива" елементи, които имат общ връх.

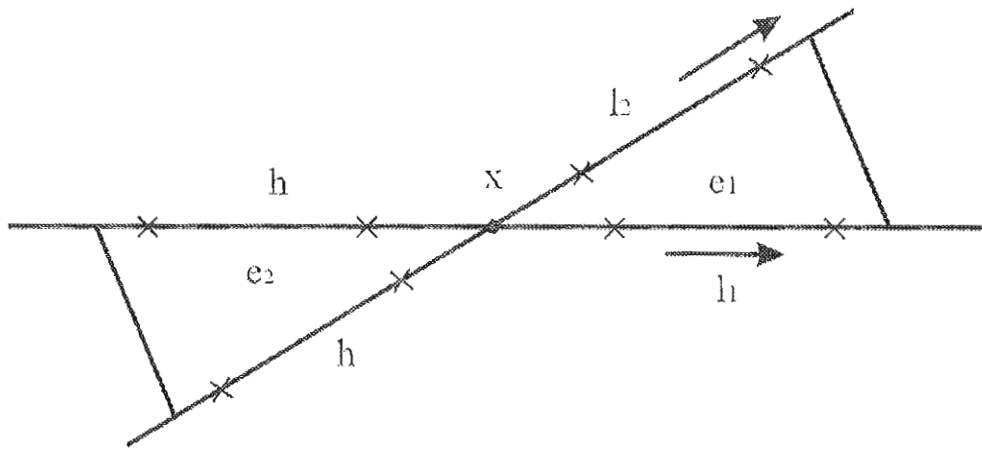
(i) Връх на областта

$$G_{hj}v(x) = 0, \quad j = 1, 2, \quad x \in V.$$





Фигура 1.5: Равномерно разделяне на областта, с отбелязване на трите вида възли



Фигура 1.6: Посредством  $\times$  е означен вътрешен връх на елемента

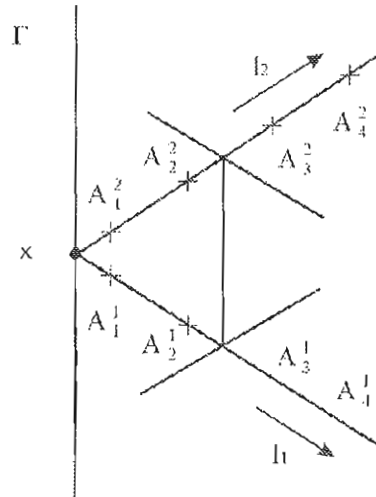
(ii) Вътрешен връх на елемента (Фигура 1.6)

Съответната осреднена стойност на градиента във вътрешен връх  $x(x_1, x_2)$  на триъгълника се пресмята по формулата

$$G_{hj}v(x) = \sum_{i=1}^2 C_i \left\{ \partial_{l_j} v(x_1 + g_i h \cos \alpha_j, x_2 + g_i h \sin \alpha_j) \right.$$

$$\left. + \partial_{l_j} v(x_1 - g_i h \cos \alpha_j, x_2 - g_i h \sin \alpha_j) \right\}, \quad j = 1, 2; \quad x \in I_h,$$

където коефициентите са



Фигура 1.7: Посредством  $x$  е означен връх на елемента, лежащ на границата  $\Gamma$

$$C_1 = 0.25 + \sqrt{3}/6 \cong 0.5387,$$

$$C_2 = 0.25 - \sqrt{3}/6 \cong -0.0387.$$

(iii) Връх, който лежи на границата (Фигура 1.7)

В този случай формулите, по които ще пресмятаме осреднения градиент, са

$$G_{hj}v(x) = \sum_{i=1}^4 C_i \partial_{l_j} v(A_i^j), \quad j = 1, 2, \quad x \in B_h,$$

където

$$A_i^j = (x_1 + g_i h \cos \alpha_j, x_2 + g_i h \sin \alpha_j), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2;$$

$$A_i^j = (x_1 + (1 - g_{i-2})h \cos \alpha_j, x_2 + (1 + g_{i-2})h \sin \alpha_j), \quad i = 3, 4, \quad j = 1, 2.$$

Коефициентите  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  в представянето са:

$$C_1 = 0.25 + \sqrt{75}/6 \cong 1.6934,$$

$$C_2 = 0.25 - \sqrt{75}/6 \cong -1.1934,$$

$$C_3 = 0.25 + \sqrt{3}/6 \cong 0.5387,$$

$$C_4 = 0.25 - \sqrt{3}/6 \cong -0.0387.$$

Така конструираният покриващ градиент има суперсходящи свойства. Във всеки връх на 6-точковия краен елемент производните по посока на съответните страни имат с един порядък на  $h$  повече, отколкото оптималната оценка по МКЕ. Това свойство е представено в следната теорема:

**Теорема 1.4** Нека  $\tau_h$  е равномерна триангулация на  $\bar{\Omega}$  и решението на (1.2)  $u(x)$  принадлежи на  $H^4(\Omega) \cap V$ . Тогава за 6-точковите крайни елементи е в сила следната оценка от тип суперсходимост:

$$\left\{ \sum_{x \in I_h \cup B_h} h^2 \sum_{j=1}^2 [\partial_{l_j} u(x) - G_{hj} u_h(x)]^2 \right\}^{1/2} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega},$$

където  $u_h(x)$  е приближеното решение по МКЕ.

Доказателство. Твърдението на теоремата е следствие от факта, че ако  $u(x)$  е кубичен полином, то

$$(\partial_{l_j} u(x) - G_{hj} u_h) |_{x \in I_h \cup B_h} = 0, \quad j = 1, 2.$$

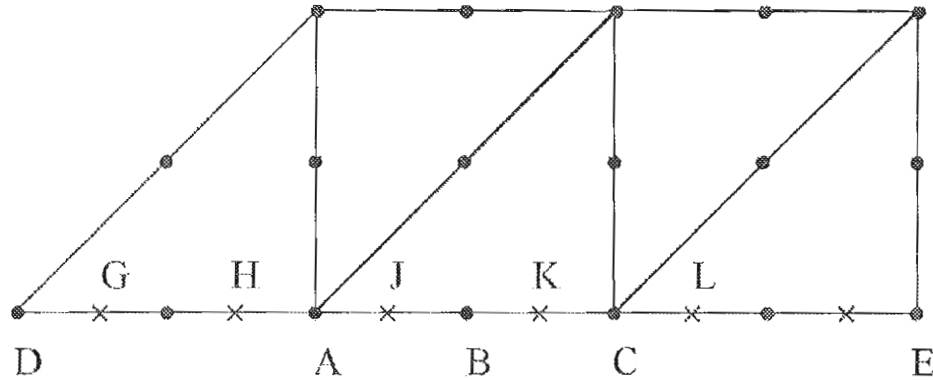
■

Б Апостериорна покриваща техника върху разделяне, породено от правоъгълна мрежа

Както в предходния пункт, осредняването във възлите на 6-точковия елемент ще се извърши, като се използват точките на суперсходимост. Този път разглеждаме важния частен случай, при който триъгълниците са правоъгълни (Фигура 1.8).

Нека  $V_h \subset V$ . Целта е да бъде построен покриващ градиент  $\nabla^R v \in (V_h)^2$  такъв, че

$$\nabla^R u_I \equiv \nabla u,$$



Фигура 1.8:

когато  $u$  е полином от трета степен, а  $u_I$  е квадратичен интерполант на функцията  $u$ .

Върху страните на всеки краен елемент са разположени 6 Гаусови точки. Означаваме ги с  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Тогава за всеки полином от трета степен ( $u \in P_3(K)$ )

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (u - u_I) \right]_{G_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (1.33)$$

където  $\frac{\partial}{\partial t}$  е тангенциална производна.

Ще построим покриващ суперсходящ градиент, като го определим във възлите на елемента:

(i) Върх на елемента

Нека  $(\nabla^{Rv})_x$  и  $(\nabla^{Rv})_y$  са компонентите на покриващия градиент. Ще приложим телгово осредняване на тангенциалните производни по страни, върху които лежи разглежданият връх. Така се получава квадратична интерполационна схема, базирана на Гаусовите точки на елемента.

Разглеждаме върха  $A$  (Фигура 1.8) и осреднявам  $\frac{\partial v}{\partial x}$  по Гаусовите точки  $G, H, J, K$ :

$$\begin{aligned} [(\nabla^{Rv})_x]_A &= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \left( \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right]_G + \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right]_K \right) \\ &+ \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \left( \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right]_H + \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right]_J \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Това е симетрична осредняваща схема. Тегловите коефициенти са същите, както в предходния случай. Използват се два квадратични интерполанта на стойностите на  $\frac{\partial v}{\partial x}$  в точките  $G, H, J$  и точките  $H, J, K$ , които са Гаусови точки.

Нека сега върхът  $A$  е гранична точка със страна  $AC$ , перпендикулярна на границата. Тогава

$$\begin{aligned} [(\nabla^R v)_x]_A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_J \\ &+ \frac{1}{4}(1 - 3\sqrt{3}) \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_K + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_L. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Последната формула използва квадратична екстраполация.

Нека  $u$  е кубичен полином. От (1.33) следва

$$\left[\frac{\partial(u - u_I)}{\partial x}\right]_{G,H,J,K,L} = 0$$

и тъй като върху елемента  $\nabla u$  е полином от втора степен, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} - (\nabla^R u_I)_x\right]_A = 0.$$

Същата апостериорна процедура за покриващия градиент е валидна и за другото направление, откъдето конструираме  $[(\nabla^R v)_y]_A$ . Оттук се получава покриващ градиент, за който

$$[\nabla u - \nabla^R u_I]_A = 0,$$

когато  $u$  е полином от трета степен.

(ii) Среда на страна на елемента

Разглеждаме точката  $B$  (Фигура 1.8). Първо ще направим осредняване в симетричния случай. Характерна особеност тук е, че се използват стойностите на  $\nabla^R$  във върховете на елемента. Тогава

$$\begin{aligned} [\nabla^R v]_B &= -\frac{1}{16} \left( [\nabla^R v]_D + [\nabla^R v]_E \right) \\ &+ \frac{9}{16} \left( [\nabla^R v]_A + [\nabla^R v]_C \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

което представлява симетрично осредняване на квадратичен интерполант по стойностите на  $\nabla^R v$  в точките  $D, A, C$  и в точките  $A, C, E$ .

Нека отново да предположим, че  $A$  е гранична точка, а  $AC$  е перпендикулярна на границата. Като използваме отново квадратична екстраполация, ще получим апостериорния осреднен градиент във възела  $B$ :

$$[\nabla^R v]_B = \frac{3}{8} [\nabla^R v]_A + \frac{3}{4} [\nabla^R v]_C - \frac{1}{8} [\nabla^R v]_E. \quad (1.37)$$

Резултатът от формулите (1.36) и (1.37) ще даде, че ако  $u$  е полином от трета степен, то

$$[\nabla u - \nabla^R u_I]_B = 0.$$

Сега ще покажем, че  $\nabla^R$  дава глобална апостериорна суперсходяща оценка.

**Лема 1.7** *Нека решението на (1.2) принадлежи на  $H^4(\Omega) \cap V$  и  $u_I \in V_h$  е по части квадратичният интерполант на решението  $u$ . Тогава*

$$\|\nabla u - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \quad (1.38)$$

**Доказателство.** Като приложим формулите (1.34) - (1.37) за всеки възел на всеки краен елемент, ще получим твърдението

$$\nabla^R u_I \equiv \nabla u,$$

когато  $u \in P_3(\Omega)$ . Оценката (1.38) следва от лемата на Брамбъл-Хилберт. ■

Основният резултат в този параграф се съдържа в следната теорема:

**Теорема 1.5** *Нека решението  $u(x)$  на елиптичната задача принадлежи на  $H^4(\Omega) \cap V$  и нека  $u_h$  е съответното приближено решение по МКЕ. Тогава за апостериорния осредняващ градиент е в сила следната оценка от тип суперсходимост:*

$$\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \quad (1.39)$$

Доказателство. От неравенството (1.38) лесно следва

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\nabla^R u_h - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} + \|\nabla u - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\nabla^R u_h - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} + Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}.\end{aligned}$$

Да забележим, че операторът  $\nabla^R : V_h \rightarrow (V_h)^2$  е ограничен и следователно

$$\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} \leq C \left( |u_h - u_I|_{1,\Omega} + h^3 \|u\|_{4,\Omega} \right),$$

така че оценката (1.39) следва от Лема 1.3. ■

Резултатът на Теорема 1.5 ни дава глобална суперсходимост на градиента. Едновременно с това формулите, използващи Гаусовите точки по страните, дават възможност за представяне на апостериорен суперсходящ алгоритъм. Той се осъществява чрез относително малко изчислителни операции, приложени върху приближеното решение  $u_h$ , но като краен резултат допринася за увеличаване порядъка на  $h$  с една степен.

**Забележка 1.8** *Важна особеност в прилагането на суперсходящата апостериорна техника е възможността тя да се използва в подобласт на  $\Omega$ . Понеже суперсходящият анализ изисква по-голяма гладкост на точното решение, то входните данни (функциите  $f$ ,  $a_{ij}$  и други) могат да имат нужната регулярност далеч от особеностите на областта (ъгловите точки). Тази регулярност осигурява нужната гладкост на решението в подобласт [44]. Освен това суперсходимост в подобласт се доказва и при нехомогенни гранични условия (виж Гудсел и Уайтмън [48]).*

## 1.7 Апостериорна покриваща процедура, основана на точките на суперсходимост за 10-точковите кубични елементи

В този параграф ще направим разглеждания, аналогични на извършените при квадратичните крайни елементи, но този път за 10-точковите кубични елементи (Фигура 1.3). Суперсходящият анализ за елементи, използващи полиноми от по-висока степен, не следва непосредствено от разсъжденията, направени при полиноми от по-ниска степен. Така например, при кубичните крайни елементи основна роля ще има начинът на разделяне на областта, за да бъде конструиран суперсходящият покриващ градиент.

Апостериорната процедура използва точките на суперсходимост, разгледани в §1.2 и §1.3 (виж също Теорема 1.1).

За гладката функция  $\varphi$  означаваме:

$$\partial_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Нека предположим, че  $\Omega$  е многоъгълна област, която може да бъде разделена на краен брой правоъгълници (виж Фигура 1.9).

В подобластта  $\tilde{\Omega}$  броят на 10-точковите крайни елементи е  $2m$ , където числото  $m$  е кратно на 3. Това изискване, което не е силно ограничително, се налага заради представената конструкция на суперсходящия покриващ градиент.

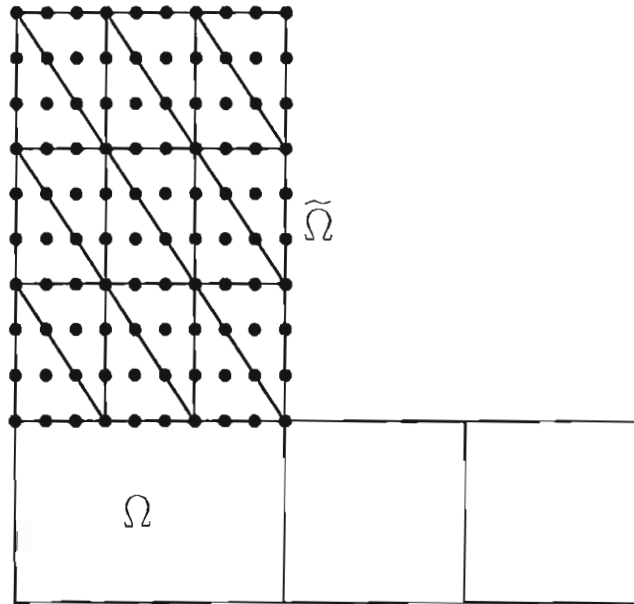
Нека  $u \in P_4(\Omega)$  и  $u_I$  е неговият Лагранжев интерполант, принадлежащ на крайноелементното пространство  $V_h$ . Ще построим непрекъснатата по части кубична покриваща функция на градиента  $\nabla^R u_h \in (V_h)^2$ , такава, че  $\nabla^R u_I \equiv \nabla u$ , когато  $u$  е полином от четвърта степен. Изобщо  $\nabla u_I = \nabla u$  е изпълнено само за полиноми до трета степен.

Разделяме областта  $\Omega$  на краен брой правоъгълни подобласти  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  (виж Фигура 1.9). При покриващия градиент за всяка подобласт  $\Omega_i$  прилагаме един и същ подход. Следователно можем да разглеждаме апостериорната процедура за една фиксирана подобласт (Фигура 1.10).

Нека  $A_{00}(x_{10}, x_{20})$  е долният ляв ъгъл на подобластта  $\tilde{\Omega}$ , а  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  е мрежовият параметър, който съответства на координатната ос  $Ox_i$ . Тогава  $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ .

За да конструираме  $\nabla^R$ , ще разделим различните групи от възли в подобластта  $\tilde{\Omega}$  (Фигура 1.10):





Фигура 1.9: Начално разделяне на  $\Omega$  на правоъгълни подобласти и разделяне на подобластта  $\tilde{\Omega}$  чрез 10-точкови елементи

(i) Върх на триъгълник

$$A_{ij} \left( x_{10} + \frac{ih_1}{3}, x_{20} + \frac{jh_2}{3} \right), \quad i, j \in \{0, 3, 6, 9\},$$

(ii) Възел върху катет на елемент

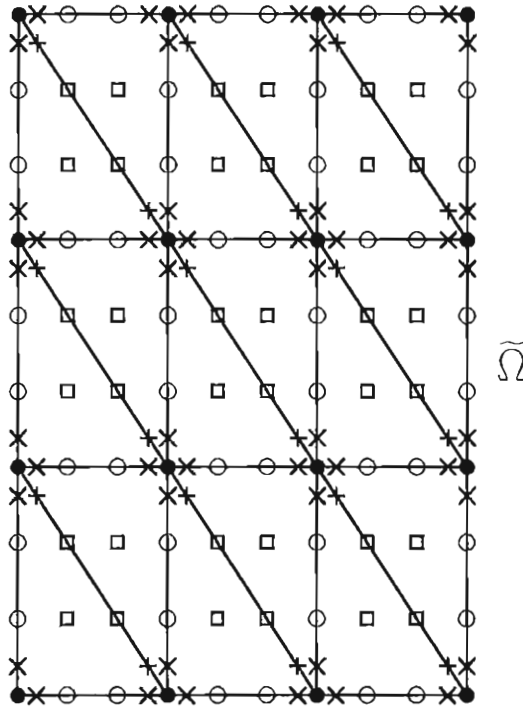
Съответните координати на възлите върху катетите на триъгълника се пресмятат по формулата

$$B_{ij} \left( x_{10} + \frac{ih_1}{3}, x_{20} + \frac{jh_2}{3} \right),$$

$$i, j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \times \{0, 3, 6, 9\} \cup \{0, 3, 6, 9\} \times \{1, 2, 4, 5, 7, 8\},$$

(iii) Център на тежестта на елемент или възел върху хипотенузата на елемент

$$C_{ij} \left( x_{10} + \frac{ih_1}{3}, x_{20} + \frac{jh_2}{3} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}.$$



Фигура 1.10: Разделяне на подобластта  $\tilde{\Omega}$ . Възлите (върховете)  $A_{ij}$  са означени с ●, възлите по катетите  $B_{ij}$  с ○, възлите  $C_{ij}$  с ■, а точките на суперсходимост  $S_{ij}$  с ×

За да получим суперсходящия покриващ градиент в подобластта  $\tilde{\Omega}$ , ще използваме следните точки на суперсходимост:

$$S_{3i-2,j} \left( x_{10} + (i-1 + \hat{s}_1)h_1, x_{20} + \frac{jh_2}{3} \right),$$

$$S_{3i-1,j} \left( x_{10} + (i - \hat{s}_1)h_1, x_{20} + \frac{jh_2}{3} \right), \quad (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{0, 3, 6, 9\},$$

$$S_{i,3j-2} \left( x_{10} + \frac{ih_1}{3}, x_{20} + (j-1 + \hat{s}_1)h_2 \right),$$

$$S_{i,3j-1} \left( x_{10} + \frac{ih_1}{3}, x_{20} + (j - \hat{s}_1)h_2 \right), \quad (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{0, 3, 6, 9\}.$$

За всяка от трите групи възли ще определим покриващия градиент в тези точки.

### А Суперсходящият градиент във върховете на елементите

За всеки вътрешен възел от този тип  $A_{ij}$ ,  $i, j \in \{3, 6\}$  определяме крайноелементния покриващ градиент, като използваме точките на суперсходимост:

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{ij}} &= \frac{15 - 7\sqrt{5}}{60} \left( [\partial_1 v_h]_{s_{i-2,j}} + [\partial_1 v_h]_{s_{i+2,j}} \right) \\ &+ \frac{15 + 7\sqrt{5}}{60} \left( [\partial_1 v_h]_{s_{i-1,j}} + [\partial_1 v_h]_{s_{i+1,j}} \right), \\ &\forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Представената схема за  $A_{ij}$  по направление, отговарящо на променливата  $x_1$ , е осредняване на два кубични интерполанта. За другата компонента, т.е. за

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{ij}}$$

представянето е аналогично на формула (1.40).

Нека сега върховете  $A_{ij}$  лежат на границата на подобластта, но не са нейни ъгли. Тогава осредняването на градиента за  $v_h \in V_h$  се осъществява със следната кубична екстраполация:

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{0j}} &= \frac{19}{6\sqrt{5}} \left( [\partial_1 v_h]_{s_{1j}} - [\partial_1 v_h]_{s_{2j}} \right) \\ &\left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_1 v_h]_{s_{4j}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_1 v_h]_{s_{5j}}, \quad j = 3, 6, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{0j}} &= \frac{15 - 7\sqrt{5}}{60} \left( [\partial_2 v_h]_{s_{0,j-2}} + [\partial_2 v_h]_{s_{0,j+2}} \right) \\ &\frac{15 + 7\sqrt{5}}{60} \left( [\partial_2 v_h]_{s_{0,j-1}} + [\partial_2 v_h]_{s_{0,j+1}} \right) \quad j = 3, 6, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{9j}} &= \frac{19}{6\sqrt{5}} \left( [\partial_1 v_h]_{S_{8j}} - [\partial_1 v_h]_{S_{7j}} \right) \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_1 v_h]_{S_{5j}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_1 v_h]_{S_{4j}}, \quad j = 3, 6, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{i0}} &= \frac{19}{6\sqrt{5}} \left( [\partial_2 v_h]_{S_{i1}} - [\partial_2 v_h]_{S_{i2}} \right) \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_2 v_h]_{S_{i4}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_2 v_h]_{S_{i5}}, \quad j = 3, 6, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{i9}} &= \frac{19}{6\sqrt{5}} \left( [\partial_2 v_h]_{S_{i8}} - [\partial_2 v_h]_{S_{i7}} \right) \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_2 v_h]_{S_{i5}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) [\partial_2 v_h]_{S_{i4}}, \quad j = 3, 6. \end{aligned} \quad (1.45)$$

За останалите възможни случаи (направления) от този вид пресмятаме:

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{9j}}, \quad j = 3, 6,$$

както във формула (1.42) и

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{ij}}, \quad i = 3, 6, j = 0, 9,$$

както във формула (1.40).

Най-накрая ще определим покриващия градиент във върховете на под-областта:

$$\text{за } \left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{0j}}, j = 0, 9 \quad \text{използваме (1.41),}$$

$$\text{за } \left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{i0}}, i = 0, 9 \quad \text{използваме (1.44),}$$

за  $\left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_{9j}}, j = 0, 9$  използваме (1.43),

за  $\left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_{i9}}, i = 0, 9$  използваме (1.45).

### В Суперсходящият градиент във възлите, лежащи на катетите на елементите

Тук се използва идеята, която приложихме за квадратичните крайни елементи. За да определим суперсходящия покриващ градиент в точките  $B_{ij}$ , използваме намерените стойности във върховете  $A_{ij}$ . Коэффициентите пред  $\nabla^R v_h$  във възлите на катетите са определени от матрица на прехода  $Q$ , която дефинираме по-долу. Кубичната интерполация във върховете  $A_{ij}$  е следната:

$$\left( [\nabla^R v_h]_{B_{1j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{2j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{4j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{5j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{7j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{8j}} \right)^t$$

$$= Q \left( [\nabla^R v_h]_{A_{0j}}, [\nabla^R v_h]_{A_{3j}}, [\nabla^R v_h]_{A_{6j}}, [\nabla^R v_h]_{A_{9j}} \right), \quad j = 0, 3, 6, 9,$$

$$\left( [\nabla^R v_h]_{B_{i1}}, [\nabla^R v_h]_{B_{i2}}, [\nabla^R v_h]_{B_{i4}}, [\nabla^R v_h]_{B_{i5}}, [\nabla^R v_h]_{B_{i7}}, [\nabla^R v_h]_{B_{i8}} \right)^t$$

$$= Q \left( [\nabla^R v_h]_{A_{i0}}, [\nabla^R v_h]_{A_{i3}}, [\nabla^R v_h]_{A_{i6}}, [\nabla^R v_h]_{A_{i9}} \right), \quad i = 0, 3, 6, 9,$$

където  $t$  е знак за транспониране, а матрицата  $Q$  е

$$Q = \frac{1}{3^4} \begin{pmatrix} 40 & 60 & -24 & 5 \\ 14 & 84 & -21 & 4 \\ -5 & 60 & 30 & -4 \\ -4 & 30 & 60 & -5 \\ 4 & -21 & 84 & 14 \\ 5 & -24 & 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

В Суперсходящият градиент в центровете на тежестта и във възлите, лежащи на хипотенузите на елементите

И тук използваме кубична интерполация, но този път в точките  $B_{ij}$ .  
Тогава

$$\begin{aligned} & \left( [\nabla^R v_h]_{C_{1j}}, [\nabla^R v_h]_{C_{2j}}, [\nabla^R v_h]_{C_{4j}}, [\nabla^R v_h]_{C_{5j}}, [\nabla^R v_h]_{C_{7j}}, [\nabla^R v_h]_{C_{8j}} \right)^t \\ &= Q \left( [\nabla^R v_h]_{B_{0j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{3j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{6j}}, [\nabla^R v_h]_{B_{9j}} \right), \quad i = 1, 2, 3, 5, 7, 8. \end{aligned}$$

Конструкцията, направена в изброените три случая, ни позволява да заключим, че

$$[\nabla u - \nabla^R u_I]_{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}} = 0, \quad \forall u \in P_4(\Omega), \quad (1.46)$$

където индексите  $i, j$  означават, че сме извършили осредняване по всички възли на 10-точковите кубични елементи. От равенство (1.46) лесно следва, че

$$\nabla u \equiv \nabla^R u_I, \quad \forall u \in P_4(\Omega). \quad (1.47)$$

Остава да докажем само теоремата за суперсходимост. Основен момент в това доказателство е, че  $\nabla^R u_I$  съвпада с  $\nabla u$ , щом като  $u$  е полином от четвърта степен и  $u_I \in V_h$  е по части кубичен полином, интерполиращ решението  $u$ .

**Теорема 1.6** *Нека  $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  е решение на елиптичната задача (1.2) и  $u_h$  е неговото крайноелементно приближение чрез използване на 10-точкови кубични триъгълни елементи. Тогава за покриващия градиент  $\nabla^R u_h$  е в сила следната суперсходяща оценка:*

$$\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^4 \|u\|_{5,\Omega}.$$

Доказателство. Използвайки (1.47), от лемата на Брамбъл-Хилберт следва

$$\|\nabla u - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} \leq Ch^4 \|u\|_{5,\Omega}, \quad (1.48)$$

Тази оценка има порядък, с единица по-висок от този на оптималната оценка при използване на кубични крайни елементи.

Освен това

$$\|\nabla^R v_h\|_{0,\Omega} \leq C |v_h|_{1,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Тогава оценката

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\nabla u - \nabla^R u_I\|_{0,\Omega} + \|\nabla^R(u_I - u_h)\|_{0,\Omega} \\ &\leq C(|u_I - u_h|_{1,\Omega} + h^4\|u\|_{5,\Omega})\end{aligned}$$

следва непосредствено от (1.48) и неравенството на триъгълника. За доказателството на теоремата е достатъчно да използваме Лема 1.3. ■

**Забележка 1.9** Като следствие от Теорема 1.5 и Теорема 1.6 може да се докаже суперсходимост на градиента за собствените функции (виж [7]). Ако  $u$  и  $u_h$  са съответните собствени функции, получени от решаване на (1.26) и (1.27), то чрез същите разсъждения, както за последните две теореми, стигаме до:

$$\|\nabla u - \nabla^R u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n+1}\|u\|_{n+2,\Omega}, \quad n = 2, 3.$$

## 1.8 Суперсходимост при съгласувано свързване на квадратични и кубични крайни елементи

Сега ще представим една нова идея за използване на суперсходящата покриваща техника. Апостериорната процедура се прилага върху неквазиравномерни изотропни триъгълни мрежи. Тази стратегия се използва за изопараметрична триангулация. За да се получи свързване на 6-точков с 10-точков краен елемент, се въвежда нов, 7-точков елемент. Така суперсходящата апостериорна процедура се осъществява чрез **частично покриване**, т.е. покриваният градиент действа само върху елементите от по-ниска степен.

Локалното повишаване на степента на апроксимиращите полиноми би могло да се разглежда като аналог на метода на локалното съгъстяване. Тук новата идея може да се резюмира по следния начин: В пограничния слой ще използване "по-силни" елементи с една крива страна, а голяма част от областта ще бъде триангулирана с елементи от по-ниска степен, като мрежата, без ограничение на общността, можем да считаме равномерна. За да получим по-добра сходимост, ще използваме покриваща техника,

основана на точките на суперсходимост върху равномерната мрежа. Въвеждането на **интерфейсна подобласт** позволява да се осъществи съгласувано и непрекъснато свързване на различните триъгълни елементи.

Новата идея, представена в този параграф, позволява да се търсят други двойки крайни елементи, осъществяващи непрекъснато свързване на крайноелементното решение.

Нека  $\Omega$  е ограничена и криволинейна област с непрекъсната по Липшиц граница  $\Gamma$  и нека  $D'(\Omega)$  означава пространството от обобщени функции, дефинирани върху  $\Omega$ . Разглеждаме силно елиптичния оператор

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad u \in D'(\Omega),$$

където коефициентите  $a_{ij}(x)$  принадлежат на  $C^1(\Omega)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Моделният проблем, който ще дискутираме, е следният:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \text{Търсим функция } u, \text{ удовлетворяваща} \\ Lu = f \text{ в } \Omega, \\ u = 0 \text{ върху } \Gamma, \end{cases}$$

където функцията  $f$  и границата  $\Gamma$  притежават такава гладкост, че за решението  $u$  получаваме  $u \in H^4(\Omega)$  (виж Гривард [44]).

Нека  $V = H_0^1(\Omega)$ . Слабата формулировка на задача  $\mathcal{P}$  може да бъде записана по следния начин:

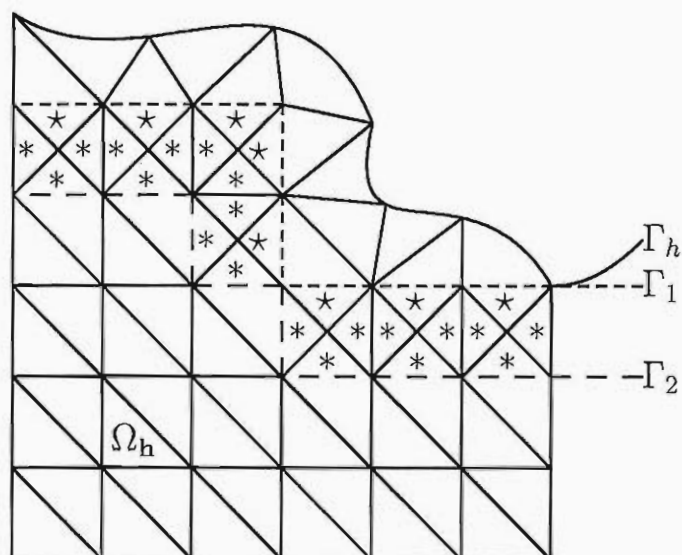
$$\mathcal{P}_w: \begin{cases} \text{Търсим функция } u \in V \cap H^4(\Omega) \text{ такава, че} \\ a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Новата стратегия за разделяне на областта  $\Omega$  ни позволява да приложим покриващата суперсходяща апостериорна техника при решаване на задача  $\mathcal{P}_w$ .

Разглеждаме съвкупността от **регулярни крайноелементни разделения**  $\tau_h$  на  $\Omega$ , удовлетворяващи обратното неравенство [102], т.е. такива, че съществува константа  $\nu > 0$  такава, че  $h/h_K \leq \nu$  за всеки краен елемент  $K \in \tau_h$ .

Ще използваме както праволинейни крайни елементи, така и изопараметрични крайни елементи с една крива страна. Това се прави с цел по-добро приближаване на границата  $\Gamma$ . Както обикновено, само елементите с два върха върху границата имат крива страна. Ето защо, само в граничния слой има елементи с крива страна. Приближавайки  $\Gamma$  с по-чисти кубична крива, в крайна сметка ние получаваме променена (пертурбирана) област  $\Omega_h$ , която приближава изходната област  $\Omega$ .





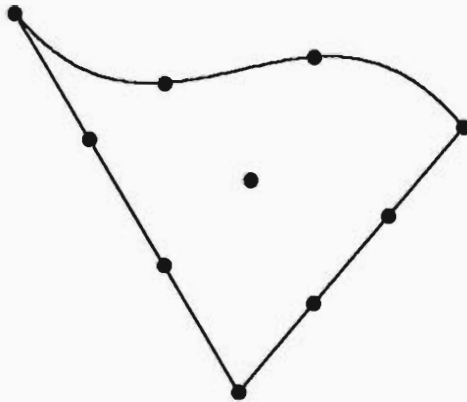
Фигура 1.11: Разделяне на областта  $\Omega$ . Елементите на интерфейлната подобласт са отбелязани както следва:  $\star$  - 7-точков кубичен елемент,  $*$  - 6-точков квадратичен елемент. Вътрешните граници  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  са отбелязани съответно с малки и големи прекъснати линии

Нека дефинираме подобластите на  $\Omega$ , а именно  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  така, че  $\Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ , както е показано на Фигура 1.11. Важно е да се отбележи, че  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  са области, които могат да бъдат получени като обединение на правоъгълници (многоправоъгълни области). Основната ни идея включва използването на три различни групи крайни елементи:

- (i) Изопараметрични 10-точкови 2-симплекс елементи (Фигура 1.12), използвани само в пограничния слой  $\omega_h = \Omega_h \setminus \Omega_1$ ;
- (ii) Нововъведени 7-точкови 2-симплекс елементи (Фигура 1.13б) и 6-точкови квадратични триъгълни елементи (Фигура 1.13а), които са разположени в интерфейлната подобласт  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ ;
- (iii) 6-точкови квадратични крайни елементи в областта  $\Omega_2$ .

Без ограничение на общността считаме, че разделянето в (ii) и (iii) е **равномерно**, т.е. областите  $\Omega_2$  и  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  са покрити с еднакви равнобедрени правоъгълни триъгълници.

6-точковите и 10-точковите триъгълни елементи са едни от най-използваните крайни елементи.



Фигура 1.12: Изопараметричен 10-точков триъгълен краен елемент

Необходимо е да се спрем по-подробно на новия 7-точков непълен кубичен краен елемент.

Първо, нека въведем възловите базисни функции на елемента:

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}) = (2\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_1 + \frac{1}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(-1 - 9\hat{x}_1 + 9\hat{x}_2),$$

който е свързан с възела  $\hat{a}_1(1, 0)$  (записваме  $\varphi_1 \mapsto \hat{a}_1$ ).

За останалите базисни функции получаваме ( $\hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ ):

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}) = (2\hat{x}_2 - 1)\hat{x}_2 + \frac{1}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(-1 + 9\hat{x}_1 - 9\hat{x}_2) \mapsto \hat{a}_2(0, 1),$$

$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}) = (2\hat{x}_3 - 1)\hat{x}_3 \mapsto \hat{a}_3(0, 0),$$

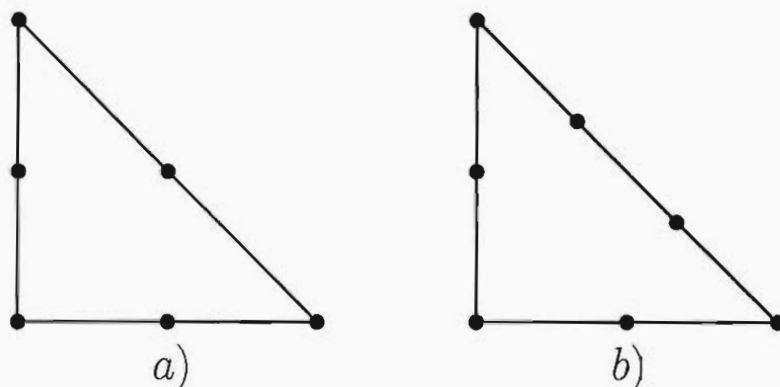
$$\hat{\varphi}_4(\hat{x}) = \frac{9}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(1 + 3\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2) \mapsto \hat{a}_4(2/3, 1/3),$$

$$\hat{\varphi}_5(\hat{x}) = \frac{9}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(1 - 3\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2) \mapsto \hat{a}_5(1/3, 2/3),$$

$$\hat{\varphi}_6(\hat{x}) = 4\hat{x}_2\hat{x}_3 \mapsto \hat{a}_6(0, 1/2),$$

$$\hat{\varphi}_7(\hat{x}) = 4\hat{x}_1\hat{x}_3 \mapsto \hat{a}_7(1/2, 0).$$

Нека сега да дефинираме основния 7-точков краен елемент  $(\widehat{K}, \widehat{P}_7, \widehat{\Sigma}_7)$ :



Фигура 1.13: а) 6-точков основен краен елемент, б) 7-точков основен краен елемент

$\widehat{K} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) : \hat{x}_1 \geq 0, \hat{x}_2 \geq 0, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$  е каноничният 2-симплекс;

$\widehat{P}_7 = \text{Span} \{\hat{\varphi}_i, i = 1, \dots, 7\}$ ;

$\widehat{\Sigma}_7 = \{\hat{a}_i : i = 1, \dots, 7\}$ .

Знакът  $\widehat{\cdot}$ , както обикновено, означава локализация в основния симплекс  $\widehat{K}$ .

Произволен 7-точков краен елемент  $(K, P, \Sigma)$  в интерфейсната подобласт  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  се получава чрез афинната обратима трансформация  $F_K$ , т.е.  $K = F_K(\widehat{K})$ .

**Забележка 1.10** В практиката съществува и друг тип 7-точков краен елемент, който използва барицентъра на триъгълника. Неговите свойства и възможността за получаване на концентрирана матрица на масата в изопараметричния МКЕ са изучени от Андреев и Тодоров в [22].

**Лема 1.8** Седемточковият триъгълен краен елемент запазва всички апроксимационни свойства на 6-точковия триъгълен краен елемент.

Доказателство. Нека  $(\widehat{K}, \widehat{P}_6, \widehat{\Sigma}_6)$  означава основния 6-точков краен елемент. Тогава

$$\widehat{P}_6 = \text{Span} \{\hat{\psi}_i, i = 1, 2, \dots, 6\},$$

където

$$\hat{\psi}_1(\hat{x}) = (2\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_1, \quad \hat{\psi}_2(\hat{x}) = (2\hat{x}_2 - 1)\hat{x}_2,$$

$$\hat{\psi}_3(\hat{x}) = (2\hat{x}_3 - 1)\hat{x}_3, \quad \hat{\psi}_4(\hat{x}) = 4\hat{x}_1\hat{x}_2,$$

$$\hat{\psi}_5(\hat{x}) = 4\hat{x}_2\hat{x}_3, \quad \hat{\psi}_6(\hat{x}) = 4\hat{x}_1\hat{x}_3.$$

Дефинираме векторите

$$\underline{\hat{\Psi}}(\hat{x}) = (\hat{\psi}_1(\hat{x}), \hat{\psi}_2(\hat{x}), \dots, \hat{\psi}_6(\hat{x}))^t,$$

$$\underline{\hat{\Phi}}(\hat{x}) = (\hat{\varphi}_1(\hat{x}), \hat{\varphi}_2(\hat{x}), \dots, \hat{\varphi}_7(\hat{x}))^t.$$

Тогавя равенството

$$\underline{\hat{\Psi}}(\hat{x}) = B \cdot \underline{\hat{\Phi}}(\hat{x})$$

е валидно с матрица

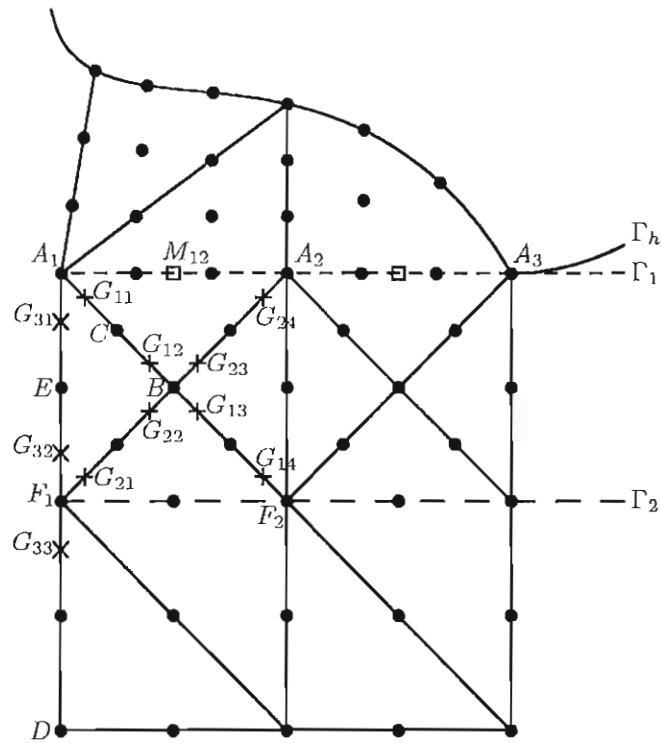
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

която не зависи от променливата  $\hat{x}$ . Това доказва включването

$$\hat{P}_6 \subset \hat{P}_7,$$

което завършва доказателството на лемата. ■

Ролята на 7-точковия краен елемент при свързване на кубичен с квадратичен елемент се вижда от Фигура 1.14. За да се осъществи това свързване, е необходимо разделяне от типа "criss-cross" [82].



Фигура 1.14: Триангулация на интерфейсната подобласт и свързване на кубичните и квадратични крайни елементи

Нека  $\Phi_h : \Omega_h \rightarrow \Omega$  означава обратимо изображение, конструирано от Леноар [80]. Това изображение се превръща в идентитет, стига елементът да няма повече от един възел, лежащ на границата  $\Gamma$ , т.е. когато действа върху елементи с прави страни. Следователно  $\Phi_h(\Omega_1) = \Omega_1$ . Нека означим с  $V_h$  крайноелементното пространство, свързано с триангулацията  $\tau_h$ . Дефинираме функционалното пространство  $W_h = V + V_h$ :

$$W_h = \{w_h : w_h(x) = (v \circ \Phi_h)(x) + v_h(x), \forall x \in \Omega_h, v \in V, v_h \in V_h\}.$$

Нека означим още с  $\pi_h$   $V_h$ -интерполационния оператор ( $\text{dom } \pi_h = W_h$ ) върху цялата област  $\Omega_h$ . Тогава

$$f_h = \pi_h(f \circ \Phi_h), \quad a_{ij}^h = \pi_h(a_{ij} \circ \Phi_h).$$

Така дефинираме приближената билинейна форма

$$a_h(u, v) = \int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^h(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad u, v \in W_h.$$

Скаларното произведение в пространството  $L_2(\Omega_h)$  ще бележим с  $(\cdot, \cdot)_h$ .

Билинейната форма  $a_h(\cdot, \cdot)$  в изопараметричния подход ще наричаме  $W_h$ -елиптична, ако съществува константа  $\beta > 0$ , независеща от пространството  $W_h$  и такава, че за всяко достатъчно малко  $h$  и за всяко  $w_h \in W_h$

$$\beta \|w_h\|_{1, \Omega_h}^2 \leq a_h(w_h, w_h).$$

$W_h$ -елиптичността е очевидна за билинейната форма  $a_h(\cdot, \cdot)$ , тъй като коя да е функция  $w_h \in W_h$  удовлетворява условието  $w_h = 0$  върху  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ . Да припомним, че коефициентите  $a_{ij}^h$  са  $V_h$ -интерполанти на коефициентите  $a_{ij} \circ \Phi_h$ . Следователно за достатъчно малки  $h$ , съществува константа  $C > 0$  такава, че

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^h(x) \xi_i \xi_j \geq C \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad \forall \xi, x \in \mathbf{R}^2.$$

По такъв начин ще имаме

$$\|w_h\|_{1, \Omega_h}^2 \leq C |w_h|_{1, \Omega_h}^2 = C \int_{\Omega_h} (\nabla w_h)^2 dx \leq C a_h(w_h, w_h).$$

Нека дефинираме дискретния проблем, съответстващ на  $\mathcal{P}_w$ :

$$\mathcal{P}_h: \begin{cases} \text{Търсим функция } u_h \in V_h \text{ такава, че} \\ a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Нашата цел е да конструираме частично покриващ суперсходящ градиент, използващ точките на суперсходимост на градиента за 6-точковия триъгълен краен елемент (виж Фигура 1.2). Ако означим  $\hat{g}_0 = 0$ , то шестте Гаусови точки върху основния елемент са

$$\hat{G}_{ij}(\hat{g}_i, \hat{g}_j), \quad i, j \in \{0, 1, 2\}, \quad i \neq j.$$

Нека  $u_I = \pi_h(u \circ \Phi_h)$  означава  $V_h$ -интерполанта на функцията  $u \circ \Phi_h$  върху областта  $\Omega_h$ . Нашата задача е да се намери покриващ градиент  $\nabla^R v \in (W_h(\Omega_1))^2$ ,  $v \in W_h$ , удовлетворяващ тъждеството

$$\nabla^R u_I \equiv \nabla(u(x)),$$

за всяка кубична функция  $u(x)$ ,  $x \in \Omega_1$ .

Използвайки точките на суперсходимост на градиента, за произволен елемент  $K$  от подобластта  $\Omega_1$ , ще получим  $G_{ij}^K = F_K(\hat{G}_{ij})$ , където  $F_K$  е афинна трансформация за елемента  $K$ . На Фигура 1.14 горният индекс на Гаусовите точки е пропуснат, а вторите индекси са номерирани линейно върху всяка права, по която се извършва осредняването.

Върху подобластта  $\Omega_2$  се използва същата стратегия, описана в §1.6 Б (виж също [12, 48]), за да получим покриващ градиент  $\nabla^R v_h$ . Остава да разгледаме случая за конструиране на  $\nabla^R v_h$  в подобластта  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ .

Разглеждаме ситуацията, представена на Фигура 1.14, както и формулите (1.34)–(1.37). Вземайки предвид, че ако  $u(x)$  е кубичен полином, то  $u \equiv u_I$  върху хипотенузата на 7-точковия елемент, то

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_{A_1} = \left[ \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \right]_{A_1}.$$

За втората компонента на  $\nabla^R v_h$  във възела  $A_1$  ще получим

$$\begin{aligned} \left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_{A_1} &= \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left[ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \right]_{G_{31}} \\ &+ \frac{1}{4} (1 - 3\sqrt{3}) \left[ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \right]_{G_{32}} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left[ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \right]_{G_{33}}. \end{aligned}$$

Градиентът в другите върхове  $A_i$ ,  $i = 2, 3$  ще пресметнем по същото правило, както за  $A_1$ .

В средата на хипотенузата на 7-точковите елементи имаме:

$$\left[ \nabla^R v_h \right]_{M_{12}} = \frac{3}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_{A_1} + \frac{3}{4} \left[ \nabla^R v_h \right]_{A_2} - \frac{1}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_{A_3}.$$

Нека сега да разгледаме тангенциалните производни

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Осредняването във върха  $B$  ще осъществим чрез изразите:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_j} \right]_B &= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \left\{ \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_j} \right]_{G_{j1}} + \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_j} \right]_{G_{j4}} \right\} \\ &+ \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \left\{ \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_j} \right]_{G_{j2}} + \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_j} \right]_{G_{j3}} \right\}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

По този начин за компонентите на покриващия градиент  $\nabla^R v_h$  във възела  $B$  ще получим

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_1} \right]_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_1} \right]_B + \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_2} \right]_B \right\},$$

$$\left[ (\nabla^R v_h)_{x_2} \right]_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_1} \right]_B + \left[ \frac{\partial v_h}{\partial t_2} \right]_B \right\}.$$

За средите  $C$  и  $E$  се получават едни и същи изчислителни схеми за покритие, а именно:

$$\left[ \nabla^R v_h \right]_C = \frac{3}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_{A_1} + \frac{3}{4} \left[ \nabla^R v_h \right]_B - \frac{1}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_{F_2},$$

$$\left[ \nabla^R v_h \right]_E = \frac{3}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_{A_1} + \frac{3}{4} \left[ \nabla^R v_h \right]_{F_1} - \frac{1}{8} \left[ \nabla^R v_h \right]_D.$$

По този начин определяме всички възлови стойности (постоянен вектор) на  $\nabla^R v_h$  в интерфейлната подобласт  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ .

Най-сетне, непрекъснатият покриващ градиент  $\nabla^R v_h \in (V_h(\Omega_1))^2$  се получава чрез интерполация на възловите стойности на всяка компонента на градиента. Следователно,  $\nabla^R u_I \equiv \nabla u$ , когато  $u$  е кубичен полином.

Нашата основна стъпка е да докажем оценка на грешката от тип суперсходимост за апостериорния покриващ градиент. Характерна особеност на представената техника е, че покриващият градиент е частичен. Да дефинираме този градиент:

$$\widetilde{\nabla}^R v = \begin{cases} \nabla^R v(x), & x \in \Omega_1, \\ \nabla v(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad \forall v \in W_h. \quad (1.49)$$

Ако  $u \circ \Phi_h$  е кубичен полином, то

$$\nabla (u \circ \Phi_h) \equiv \widetilde{\nabla}^R u_I, \quad x \in \Omega_h.$$

Както вече подчертахме, доказването на суперблизост на оператора  $\widetilde{\nabla}^R$ , приложен апостериорно към крайноелементното решение  $u_h$ , е в основата на представената суперсходяща апостериорна техника. Това доказателство се предшества от няколко лема.

Следващата лема се отнася до важно свойство на пространството  $V_h$ .

**Лема 1.9** Нека триангулацията  $\tau_h$  да е 3-регулярна [103] и са в сила условията за разделяне на областта (i) – (iii). Тогава е в сила следното включване:

$$V_h \subset C(\Omega_h). \quad (1.50)$$



Доказателство. Нека  $(\widetilde{K}, \widetilde{P}_{10}, \widetilde{\Sigma}_{10})$  означава основния 10-точков краен елемент. Тогава

$$\widetilde{P}_{10} = \text{Span} \{ \xi_i(\hat{x}), i = 1, 2, \dots, 10 \}.$$

Да означим страните на триъгълника  $\widetilde{K}$

$$\widetilde{K}_i = \{ \hat{x} \in \widetilde{K} : \hat{x}_i = 0 \}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2.$$

Лесно се проверява, че свързващият 7-точков краен елемент притежава следните свойства:

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{\xi}_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \widehat{K}_3, \quad i = 1, 2, 4, 5,$$

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{\psi}_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \widehat{K}_2, \quad i = 1, 3,$$

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \hat{\psi}_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \widehat{K}_1, \quad i = 2, 3,$$

$$\hat{\varphi}_6(\hat{x}) = \hat{\psi}_5(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \widehat{K}_1,$$

$$\hat{\varphi}_7(\hat{x}) = \hat{\psi}_6(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \widehat{K}_2.$$

Тези равенства в комбинация с основното изопараметрично свойство

$$\varphi_K(x) = \hat{\varphi}(\hat{x}), \quad \varphi_K = \hat{\varphi} \circ F_K^{-1}, \quad K \in \tau_h$$

доказват верността на (1.50). ■

Следващата лема е в основата на доказване на суперсходимост на градиента чрез използване на апостериорна техника при свързване на елементи, които използват различни апроксимирани полиноми (виж Забележка 1.11).

**Лема 1.10** Нека  $\tau_h$  е 3-регулярна триангулация на областта  $\Omega$ , която удовлетворява (i) – (iii). Нека също така  $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  е решението на  $\mathcal{P}_w$  и  $u_I \in V_h$  е неговият интерполант. При тези условия е в сила следната оценка:

$$|a_h(u \circ \Phi_h - u_I, v_h)| \leq Ch^{5/2} \|u\|_{4,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_h}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.51)$$

Доказателство. Най-напред да представим разделянето  $\tau_h$  във вида  $\tau_h = \tau_h^0 \cup \tau_h^1$ , където  $\tau_h^1$  отговаря на подобластта  $\Omega_1$ , а  $\tau_h^0$  - на граничния слой  $\omega_h$ .

Означаваме  $e = u \circ \Phi_h - u_I \in W_h$ . Тогава

$$\begin{aligned} a_h(e, v_h) &= a_h^0(e, v_h) + a_h^1(e, v_h) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in \tau_h^0} \int_K a_{ij}^h \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx + \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in \tau_h^1} \int_K a_{ij}^h \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Нека  $\Phi_K$  и  $a_K^0$  са рестрикциите съответно на  $\Phi_h$  и  $a_h^0$  върху крайния елемент  $K \in \tau_h^0$ . Ще оценим първия член на (1.52) чрез класическия изопараметричен подход. Тъй като  $u_I|_K \in V_h$ -интерполант на  $u \circ \Phi_K \in H^4(K)$  върху елемента  $K$ , то (виж също [80]):

$$\begin{aligned} |a_h^0(u \circ \Phi_h - u_I, v_h)| &= \sum_{K \in \tau_h^0} |a_K^0(u \circ \Phi_K - u_I, v_h)| \\ &\leq \sum_{K \in \tau_h^0} \|u \circ \Phi_K - u_I\|_{1,K} \|v_h\|_{1,K} \leq Ch^3 \sum_{K \in \tau_h^0} \|u \circ \Phi_K\|_{4,K} \|v_h\|_{1,K} \\ &\leq Ch^3 \|u \circ \Phi_h\|_{4,\Omega_h} \|v_h\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_h}. \end{aligned}$$

Така получаваме оценката

$$|a_h^0(u \circ \Phi_h - u_I, v_h)| \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_h}. \quad (1.53)$$

За да оценим второто събираемо в (1.52), ще използваме съществено, че областта  $\Omega_1$  е многоъгълник, чиито ъгли са прави. Нека също отбележим, че всеки елемент  $K \in \tau_h^1$  е равнобедрен триъгълник. Да означим

$$u_K = (u \circ \Phi_h)|_K, \quad \hat{u}_K = u_K \circ F_K, \quad \hat{e} = \hat{u}_K - \hat{u}_I,$$

където  $F_K$  е пораждаща изопараметрична трансформация за крайния елемент  $K \in \tau_h$ . Впрочем, трансформацията  $F_K$  е афинна, когато  $K \in \tau_h^1$ .

Нека  $M_h$  да означава обединението на всички 7-точкови триъгълници  $K \in \tau_h^1$  и  $m_h = \Omega_1 \setminus M_h$ . Следователно

$$a_h^1(e, v_h) = a_h^1(e, v_h)|_{m_h} + a_h^1(e, v_h)|_{M_h} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \quad (1.54)$$

За да оценим  $A_1$ , разглеждаме многоъгълна област  $\Omega_0$  с граница  $\Gamma_0$  такава, че

$$\Omega_1 \subset\subset \Omega_0 \subset \Omega.$$

Нека да намерим решението  $\tilde{u} \in H^4(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$  на задачата

$$a(\tilde{u}, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_0),$$

където  $\tilde{u}|_{m_h} = u$ .

За областта  $\Omega_0$  предполагаме, че е разделена на равнобедрени правоъгълни триъгълници. Предполагаме още, че крайноелементното подпространство  $V_{0,h} \subset H_0^1(\Omega_0)$  е определено като пространство от непрекъснати по части квадратични функции върху 6-точкови триъгълници.

Използвайки апроксимационната теория, развита от Гудсел и Уайтмън [48], следната оценка от тип суперсходимост е валидна:

$$|a(\tilde{u} - \tilde{u}_I, v_h)| \leq Ch^3 \|\tilde{u}\|_{4, \Omega_0} |v_h|_{1, \Omega_0}, \quad \forall v_h \in V_{0,h}.$$

Този резултат остава в сила и локално, т.е. върху всеки краен елемент. Следователно

$$\begin{aligned} |A_1| &= \left| \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K a_{ij} \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right| = \left| \sum_{K \in \mathcal{M}_h} a(\tilde{u} - \tilde{u}_I, v_h)|_K \right| \\ &\leq Ch^3 \|\tilde{u}\|_{4, \mathcal{M}_h} \|v_h\|_{1, \mathcal{M}_h} \leq Ch^3 \|u\|_{4, \Omega} |v_h|_{1, \Omega_h}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

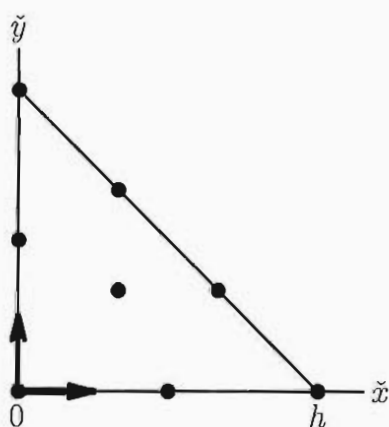
използвайки факта, че  $\tilde{u}_I|_{m_h} = u_I$ .

Нека  $G_K$  да означава барицентърът на триъгълник от  $M_h$ . Тогава

$$\begin{aligned} a_h^1(e, v_h) &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \left\{ \int_K (a_{ij}(x) - a_{ij}(G_K)) \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right. \\ &\quad \left. + a_{ij}(G_K) \int_K \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right\}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Използвайки, че коефициентите  $a_{ij}$  са непрекъснати по Липшиц функции и че  $e = 0$ , когато  $u_K \in P_2(K)$ , то ще получим

$$\begin{aligned} \left| \int_K (a_{ij}(x) - a_{ij}(G_K)) \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right| &= \left| \int_{\hat{K}} (\hat{a}_{ij}^K(\hat{x}) - \hat{a}_{ij}^K(\hat{G})) \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial \hat{v}_K}{\partial \hat{x}_j} d\hat{x} \right| \\ &\leq \hat{C} |\hat{a}_{ij}^K|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{e}|_{1, \hat{K}} |\hat{v}_K|_{1, \hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{a}_{ij}^K|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{u}_K|_{3, \hat{K}} |\hat{v}_K|_{1, \hat{K}} \end{aligned}$$



Фигура 1.15: Малък елемент с отбелязани степени на свобода за интерполанта  $J_h$ .

$$\leq Ch^3 |a_{ij}|_{1,\infty,K} \|u\|_{3,K} |v_h|_{1,K}, \quad \forall K \in M_h. \quad (1.57)$$

За да оценим втория член в дясната страна на (1.54) и оттам да получим оценка за  $\mathcal{A}_2$  от (1.54), въвеждаме малък основен елемент (виж Фигура 1.15):

$$\check{K} = \{(\check{x}_1, \check{x}_2) : \check{x}_1 \geq 0, \check{x}_2 \geq 0, \check{x}_1 + \check{x}_2 \leq h\}.$$

Нека  $\check{F}_K$  е афинната трансформация, изобразяваща малкия елемент  $\check{K}$  в някой елемент  $K \in M_h$ . Очевидно Якобианът  $J_{\check{F}_K}$  е константа, независеща от  $h$ .

Да дефинираме следния интерполационен оператор  $J_h : C(\check{K}) \rightarrow P_3(\check{K})$ , удовлетворяващ условията (Фигура 1.15):

$$\check{v}(\check{a}_i) = J_h \check{v}(\check{a}_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

$$\frac{\partial \check{v}}{\partial \check{x}_j}(0, 0) = \frac{\partial J_h \check{v}}{\partial \check{x}_j}(0, 0), \quad j = 1, 2,$$

където възлите  $\check{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  са върховете, средите на катетите, центърът на тежестта на  $\check{K}$ , а също така и точките  $(\frac{2h}{3}, \frac{h}{3})$ ,  $(\frac{h}{3}, \frac{2h}{3})$ , лежащи върху хипотенузата.

Важно е да отбележим, че този базис е йерархично надграждане на базиса на 7-точковия краен елемент. Това е нов подход при доказване на свойството суперблизост. Лесно може да се провери, че

$$J_h \check{v} = \check{v}, \quad \forall \check{v} \in P_3(\check{K}).$$

Сега ще докажем, че  $J_h\check{v}$  и  $\check{v}_I$  са суперблизки върху всеки елемент  $K$ , който принадлежи на  $M_h$ . И така,

$$J_h\check{v} = \sum_{k=0}^3 \sum_{i+j=k} \alpha_{ij} \check{x}_1^i \check{x}_2^j,$$

$$\check{v}_I = \sum_{k=0}^2 \sum_{i+j=k} \beta_{ij} \check{x}_1^i \check{x}_2^j + \beta(\check{x}_1^2 \check{x}_2 - \check{x}_1 \check{x}_2^2),$$

Означаваме  $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$ ,  $i + j = k$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Тогава

$$Q(\check{x}_1, \check{x}_2) = J_h\check{v} - \check{v}_I = \sum_{k=0}^2 \sum_{i+j=k} \gamma_{ij} \check{x}_1^i \check{x}_2^j + \sum_{i+j=3} \alpha_{ij} \check{x}_1^i \check{x}_2^j - \beta(\check{x}_1^2 \check{x}_2 - \check{x}_1 \check{x}_2^2).$$

Използвайки равенствата

$$Q(0, 0) = Q\left(\frac{h}{2}, 0\right) = Q(h, 0) = 0,$$

получаваме

$$\gamma_{00} = 0, \quad \gamma_{10} = \frac{1}{2}\alpha_{30}h^2, \quad \gamma_{20} = -\frac{3}{2}\alpha_{30}h.$$

По същия начин от  $Q(0, \frac{h}{2}) = Q(0, h) = 0$ , следва

$$\gamma_{01} = \frac{1}{2}\alpha_{03}h^2, \quad \gamma_{02} = -\frac{3}{2}\alpha_{03}h.$$

Най-накрая, от  $Q(\frac{2h}{3}, \frac{h}{3}) = Q(\frac{h}{3}, \frac{2h}{3}) = 0$  получаваме

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2}(\alpha_{21} + \alpha_{12})h, \quad \beta = \frac{1}{2}(\alpha_{03} - \alpha_{30} + \alpha_{21} - \alpha_{12}).$$

Оттук следва изводът, че всеки моном в израза за  $Q(\check{x}_1, \check{x}_2)$  е от вида

$$Ch^p \check{x}_1^q \check{x}_2^r, \quad p + q + r = 3,$$

където  $0 \leq p \leq 2$ ,  $0 \leq q, r \leq 3$ . Чрез директно пресмятане ще получим

$$|J_h\check{v} - \check{v}_I|_{1,K} = \mathcal{O}(h^3). \quad (1.58)$$

Като следствие, за второто събираемо в дясната страна на (1.56) имаме

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in M_h} a_{ij}(G_K) \int_K \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right| &\leq C \sum_{K \in M_h} |u - u_I|_{1,K} |v_h|_{1,K} \\
&\leq \check{C} \sum_{K \in M_h} |\check{u}_K - \check{u}_I|_{1,\check{K}} |\check{v}_K|_{1,\check{K}},
\end{aligned}$$

където  $\check{v}_K = v_K \circ \check{F}_K$ . От друга страна,

$$|\check{u}_K - \check{u}_I|_{1,\check{K}} \leq |\check{u}_K - J_h \check{u}_K|_{1,\check{K}} + |J_h \check{u}_K - \check{u}_I|_{1,\check{K}}.$$

От лемата на Брамбъл-Хилберт и от (1.58) следва неравенството

$$|u - u_I|_{1,K} \leq Ch^3 (\|u\|_{4,K} + 1), \quad \forall K \in M_h.$$

Следователно, като отчетем, че  $\text{card}(M_h) = h^{-1}$ , ще получим

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in M_h} a_{ij}(G_K) \int_K \frac{\partial e}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \right| &\leq C \sum_{K \in M_h} |u - u_I|_{1,K} |v_h|_{1,K} \\
&\leq Ch^3 \sum_{K \in M_h} (\|u\|_{4,K} + 1) |v_h|_{1,K} \\
&\leq Ch^3 \left( \sum_{K \in M_h} (\|u\|_{4,K} + 1)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in M_h} |v_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq Ch^3 (\|u\|_{4,\Omega_1} + h^{-1/2}) |v_h|_{1,\Omega_1} \\
&\leq Ch^{5/2} \|u\|_{4,\Omega_1} |v_h|_{1,\Omega_1}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Така двете неравенства (1.57) и (1.59) дават оценка за  $\mathcal{A}_2$ :

$$|\mathcal{A}_2| \leq Ch^{5/2} \|u\|_{4,\Omega} |v_h|_{1,\Omega_h}.$$

Последното неравенство, заедно с (1.53) и (1.55), завършва доказателството на лемата. ■

**Забележка 1.11** Въпреки, че глобалният порядък е  $\frac{5}{2}$ , той ще се прояви само в тясната интерфейсна област  $M_h$ . По-точно оценката (1.51) би могла да се запише във вида

$$|a_h(u \circ \Phi_h - u_I, v_h)| \leq Ch^\mu \|u\|_{4,\Omega} |v_h|_{1,\Omega_h}, \quad \forall v_h \in V_h,$$

където

$$\mu = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{върху } M_h, \\ 3 & \text{върху } \Omega \setminus M_h. \end{cases}$$

Току-що разгледаната лема ще ни позволи да докажем суперблизост между крайноелементното решение  $u_h$  и интерполанта  $u_I$ . Но преди това трябва да докажем няколко спомагателни твърдения, отнасящи се до изопараметричната техника.

**Лема 1.11** Нека условията от предходната лема са изпълнени и освен това за коефициентите имаме  $a_{ij} \in W^{4,\infty}(\Omega)$ . Тогава е в сила следната оценка

$$|a_h(u \circ \Phi_h, v_h) - a(u, v)| \leq Ch^3 \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_h}, \quad (1.60)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad v = v_h \circ \Phi_h^{-1}.$$

**Доказателство.** Важна роля в доказателството играе фактът, че трансформацията  $\Phi_h$  съвпада с идентитета върху областта  $\Omega_1$  (виж Леноар [80]). Нека  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, 2$  означава каноничният базис в  $\mathbf{R}^2$ , а  $J(\Phi_h)$  – Якобиана на трансформацията  $\Phi_h$ . Нека означим още  $\omega = \Omega \setminus \Omega_1$ . Първо оценяваме разликата между рестрикциите на билинейните форми:

$$\begin{aligned} & |a_h^0(u \circ \Phi_h, v_h) - a^0(u, v)| \\ &= \left| \int_{\omega_h} \sum_{i,j} a_{ij}^h(x) \frac{\partial(u \circ \Phi_h)}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx - \int_{\omega} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega} \sum_{i,j} (a_{ij}^h \circ \Phi_h^{-1})(x) (\nabla u (D\Phi_h^{-1})^{-1} \cdot e_i) (\nabla v (D\Phi_h^{-1})^{-1} \cdot e_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}(x) (\nabla u \cdot \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
= & \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 (a_{ij}^h \circ \Phi_h^{-1})(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right. \\
& \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}(x) (\nabla u \cdot \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
\leq & \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 (a_{ij}^h \circ \Phi_h^{-1})(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right. \\
& \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right| \\
& + \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right. \\
& \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}(x) (\nabla u \cdot \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
\leq & \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 ((a_{ij}^h \circ \Phi_h^{-1})(x) - a_{ij}(x)) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) \right. \\
& \left. \times (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right. \\
& \left. + \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) J(\Phi_h^{-1}) dx \right|
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) dx \Big| \\
& + \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}(x) (\nabla u \cdot \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
& \leq Ch^4 \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\
& + Ch^4 \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \|J(\Phi_h^{-1}) - 1\|_{0,\infty,\Omega} \\
& + \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_j) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
& + \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}(x) (\nabla u \cdot \underline{e}_i) (\nabla v \cdot \underline{e}_j) dx \right| \\
& \leq C \left( h^4 \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} + h^3 \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \right) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega_h} \\
& + \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot (D\Phi_h^{-1})^{-1} \underline{e}_i) (\nabla v \cdot ((D\Phi_h^{-1})^{-1} - I) \underline{e}_j) dx \right|
\end{aligned}$$

$$- \left| \int_{\omega} \sum_{i,j}^2 a_{ij}^h(x) (\nabla u \cdot ((D\Phi_h^{-1})^{-1} - I) e_i) (\nabla v \cdot e_j) dx \right|.$$

В последните неравенства съществено използвахме следните оценки [80]:

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C \|v \circ \Phi_h\|_{1,\Omega_h} \leq C \|v_h\|_{1,\Omega_h},$$

$$\|(D\Phi_h^{-1})^{-1} - I\|_{0,\infty,\Omega} \leq C \|D\Phi_h - I\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq Ch^3,$$

$$\|J(\Phi_h^{-1}) - 1\|_{0,\infty,\Omega} = \mathcal{O}(h^3).$$

Втората стъпка в доказателството на лемата се състои в оценка на разликата между билинейните форми  $a$  и  $a_h$  върху областта  $\Omega_1$ . Тъй като тази област е разделена с праволинейни елементи, то трябва да се отбележи, че  $\Phi_h \equiv I$  и следователно

$$|a_h^1(u \circ \Phi_h, v_h) - a^1(u, v)|$$

$$= \left| \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^h(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right|$$

$$\leq \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}^h - a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} |u|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega_1} \leq Ch^3 \|u\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_1}.$$

Последното неравенство очевидно следва от интерполационната теория. Най-накрая, използвайки неравенството на триъгълника, получаваме:

$$|a_h(u \circ \Phi_h, v_h) - a(u, v)| \leq C(h^4 + h^3) \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega_h}.$$

■

**Лема 1.12** Нека  $\tau_h$  е  $\mathfrak{Z}$ -регулярна триангулация на областта  $\Omega$ , удовлетворяваща условията (i)-(iii) и  $f \in H^4(\Omega)$ . Тогава за всяко  $v_h \in V_h$

$$|(f, v) - (f_h, v_h)_h| \leq Ch^3 \|f\|_{4,\Omega} \|v_h\|_{0,\Omega_h}, \quad v = v_h \circ \Phi_h^{-1}. \quad (1.61)$$

Доказателство. Както и в предходната лема, за да оценим разликата в (1.61), ще разгледаме скаларните произведения отделно върху граничния слой и върху подобластта  $\Omega_1$ . Така получаваме

$$\begin{aligned}
|(f, v) - (f_h, v_h)_h| &= \left| \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega_h} f_h v_h \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\omega} f v \, dx - \int_{\omega_h} f_h v_h \, dx \right| + \left| \int_{\Omega_1} f v \, dx - \int_{\Omega_1} f_h v_h \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\omega_h} (f \circ \Phi_h)(v \circ \Phi_h) J(\Phi_h) \, dx - \int_{\omega_h} f_h v_h \, dx \right| + \left| \int_{\Omega_1} (f - f_h) v_h \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\omega_h} (f \circ \Phi_h) v_h J(\Phi_h) \, dx - \int_{\omega_h} f_h v_h \, dx \right| + \|f - f_h\|_{0, \Omega_1} \|v_h\|_{0, \Omega_1} \\
&\leq \left| \int_{\omega_h} (f \circ \Phi_h) v_h J(\Phi_h) \, dx - \int_{\omega_h} f_h v_h J(\Phi_h) \, dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\omega_h} f_h v_h J(\Phi_h) \, dx - \int_{\omega_h} f_h v_h \, dx \right| + Ch^3 \|f\|_{3, \Omega} \|v_h\|_{0, \Omega_h} \\
&\leq c (\|f \circ \Phi_h - f_h\|_{0, \omega_h} \|J(\Phi_h)\|_{0, \infty, \omega_h} \|v_h\|_{0, \Omega_h} \\
&\quad + \|J(\Phi_h) - 1\|_{0, \infty, \omega_h} \|f_h\|_{0, \Omega_h} \|v_h\|_{0, \Omega_h} + h^3 \|f_h\|_{3, \Omega} \|v_h\|_{0, \Omega_h}) \\
&\leq C (h^4 \|f\|_{4, \Omega} + h^3 \|f\|_{0, \Omega} + h^3 \|f\|_{3, \Omega}) \|v_h\|_{0, \Omega_h} \leq Ch^3 \|f\|_{4, \Omega} \|v_h\|_{0, \Omega_h}.
\end{aligned}$$

■

Нека дефинираме **ортогонален елиптически проектор** в изопараметричния случай [39]. Операторът  $P_h : H_0^1(\Omega_H) \rightarrow V_h$  се определя от равенството

$$a_h(u \circ \Phi_h - P_h(u \circ \Phi_h), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Тогава

$$a_h(u_h^*, v_h) = a_h(u \circ \Phi_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (1.62)$$

където  $u_h^* = P_h(u \circ \Phi_h)$ .

**Лема 1.13** Нека условията от последните две лемми са изпълнени. Нека също  $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  е решението на задача  $\mathcal{P}_w$  и  $u_h^* \in V_h$  е неговият елиптически проектор по отношение на енергетичното скалярно произведение  $a_h(\cdot, \cdot)$ . Тогава

$$\|u_h^* - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^3 \left( \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} + \|f\|_{4,\Omega} \right). \quad (1.63)$$

Доказателство. От равенството (1.62), за всяко  $v_h \in V_h$  следва

$$\begin{aligned} a_h(u_h^* - u_h, v_h) &= a_h(u \circ \Phi_h - u_h, v_h) = a_h(u \circ \Phi_h, v_h) - (f_h, v_h)_h \\ &\leq |a_h(u \circ \Phi_h, v_h) - a(u, v)| + |(f, v) - (f_h, v_h)_h|. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Тъй като първият член в дясната страна на (1.64) се оценява от Лема 1.11, а вторият – от Лема 1.12, то имаме:

$$|a_h(u_h^* - u_h, v_h)| \leq Ch^3 \left( \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} + \|f\|_{4,\Omega} \right) \|v_h\|_{1,\Omega_h}. \quad (1.65)$$

Като отчетем  $W_h$ -елиптичността, предвид  $u_h^* - u_h \in V_h$ , получаваме:

$$\begin{aligned} \beta \|u_h^* - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a_h(u_h^* - u_h, u_h^* - u_h) \\ &\leq Ch^3 \left( \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} + \|f\|_{4,\Omega} \right) \|u_h^* - u_h\|_{1,\Omega_h}. \end{aligned}$$

С последното неравенство завършваме доказателството на (1.63). ■

**Лема 1.14** При предположенията, направени в последните три лемми, в сила е следното условие за суперблизост:

$$\|u_I - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{5/2} \left( \left( \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} + 1 \right) \|u\|_{4,\Omega} + \|f\|_{4,\Omega} \right). \quad (1.66)$$

Доказателство. Нека започнем с равенството

$$\begin{aligned} a_h(u_I - u_h, v_h) &= a_h(u_I - u \circ \Phi_h, v_h) + a_h(u \circ \Phi_h - u_h^*, v_h) \\ &\quad + a_h(u_h^* - u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Първото събираемо в дясната страна на (1.67) се оценява от Лема 1.10, а третото – от неравенството (1.65). Вторият член в представянето (1.67) е равен на нула. Тогава

$$|a_h(u_I - u_h, v_h)| \leq Ch^{5/2} \left( \left( \max_{i,j=1,2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} + 1 \right) \|u\|_{4,\Omega} + \|f\|_{4,\Omega} \right) \|v_h\|_{1,\Omega_h}.$$

Полагайки  $v_h = u_I - u_h \in V_h$  и отчитайки  $W_h$ -елиптичността на билинейната форма  $a_h(\cdot, \cdot)$ , завършваме доказателството на лемата. ■

Уточняването на оценката (1.66) би могло да се направи, като се вземе предвид Забележка 1.11. Това означава, че скоростта на сходимост е  $\mathcal{O}(h^3)$ , с изключение върху 7-точковите крайни елементи.

След доказателството на последните няколко лемите сме готови да формулираме и докажем основния резултат. Той се отнася до оценка от тип суперсходимост на частично покриващия градиент  $\widetilde{\nabla}^R$ .

**Теорема 1.7** *Нека триангулацията  $\tau_h$  на областта  $\Omega$  е 3-регулярна и да удовлетворява условията (i)–(iii). Нека също решението  $u(x)$  на задача  $\mathcal{P}_w$  удовлетворява  $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  и  $u_h \in V_h$  е решение на дискретната задача  $\mathcal{P}_h$ .*

*При условие, че коефициентите  $a_{ij}$  принадлежат на  $W^{4,\infty}(\Omega)$  и дясната страна  $f$  принадлежи на  $H^4(\Omega)$ , в сила е следната оценка:*

$$\|\nabla(u \circ \Phi_h) - \widetilde{\nabla}^R u_h\|_{0,\Omega_h} \leq Ch^{5/2} \|u\|_{4,\Omega}. \quad (1.68)$$

**Доказателство.** Предвид направената конструкция на  $\widetilde{\nabla}^R$ ,  $\widetilde{\nabla}^R u_I$  съвпада с  $\nabla(u \circ \Phi_h)$ , когато  $u \circ \Phi_h$  е полином от трета степен. Тогава от лемата на Брамбъл-Хилберт и от теоремата на Соболев за влагане, от включването (1.50) следва, че

$$\|\nabla(u \circ \Phi_h) - \widetilde{\nabla}^R u_I\|_{0,\Omega_h} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \quad (1.69)$$

Тъй като операторът  $\widetilde{\nabla}^R : V_h \rightarrow V_h$  е ограничен, то

$$\|\widetilde{\nabla}^R u_I - \widetilde{\nabla}^R u_h\|_{0,\Omega_h} \leq \|\widetilde{\nabla}^R\| \cdot \|u_I - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq C \|u_I - u_h\|_{1,\Omega_h}.$$

Използвайки неравенството на триъгълника, оценяваме лявата страна на (1.68):

$$\|\nabla(u \circ \Phi_h) - \widetilde{\nabla}^R u_h\|_{0,\Omega_h} \leq C \left( \|u_I - u_h\|_{1,\Omega_h} + \|\nabla(u \circ \Phi_h) - \widetilde{\nabla}^R u_I\|_{0,\Omega_h} \right).$$

Резултатът от теоремата следва непосредствено от оценките (1.66) и (1.69). ■

Оценката (1.68) можем да прецизираме в "частично" локален смисъл, като се съобразим със Забележка 1.11. Така получаваме:

$$\|\nabla(u \circ \Phi_h) - \widetilde{\nabla}^R u_h\|_{0, \Omega_h} \leq Ch^\mu \|u\|_{4, \Omega}, \quad (1.70)$$

където

$$\mu = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{върху } M_h, \\ 3 & \text{върху } \Omega \setminus M_h. \end{cases}$$

**Забележка 1.12** Твърденията в Лемми 1.8–1.14, както и в Теорема 1.7, дават нова стратегия в МКЕ. Тя се основава на конформно свързване на елементи с различни апроксимационни свойства. Този подход дава възможност за намиране на нови комбинации от различни крайни елементи. Основната цел е да се приложи частично покриващ апостериорен градиент. За разлика от глобалната покриваща техника, която се основава на точките на суперсходимост (виж Андреев и Лазаров [12], Гудсел и Уайтмън [48]), предложеният подход не изисква квазиравномерно разделяне на областта, както и не се налага използването на подходяща квадратурна формула.

**Главното предимство** на частично покриващия суперсходящ градиент може да се илюстрира със следващия пример.

Нека за момент да допуснем, че имаме друго триангулиране  $\mathcal{T}_h$  на областта  $\Omega$ , което удовлетворява условията:

- Двете триангулации  $\mathcal{T}_h$  и  $\tau_h$  съдържат едни и същи елементи върху слоя  $\Omega_h \setminus \Omega_1$ ;
- Всеки краен елемент  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $K \subset \Omega_1$  е 10-точков кубичен елемент.

Нека сега  $\mathcal{V}_h$  е крайноелементното пространство, свързано с новата триангулация  $\mathcal{T}_h$  и  $\mathcal{U}_h \in \mathcal{V}_h$  да е решението на дискретната задача  $(\mathcal{P}_h)$  върху триангулацията  $\mathcal{T}_h$ . Тогава, очевидно, за решението  $\mathcal{U}_h$  ще имаме скорост на сходимост  $\mathcal{O}(h^3)$ . Съгласно (1.70) за решението, получено чрез частична

апостериорна процедура, ще получим резултат, който е сравним с този, при който сме използвали само кубични крайни елементи. Да отбележим още, че интерфейлната област  $M_h$  има лице, което клони към нула заедно с  $h$ .

И така, голямото предимство при дискретизацията  $\tau_h$  е, че тогава

$$\dim V_h \ll \dim \mathcal{V}_h,$$

т.е. частичната апостериорна стратегия чувствително намалява размерността на крайноелементната система, без да се губи точност.

## 1.9 Числени примери

Числените примери, представени в настоящия параграф, имат за цел да илюстрират и потвърдят теоретичните резултати и идеи, предложени в Глава 1. Разгледани са моделни задачи от структурната механика. В първият пример (задача за собствени стойности и собствени функции) за пресмятане на  $(\lambda_{h,j}, u_{h,j})$  е използван методът на обратната итерация, като критерият за спиране на итерационния процес е

$$\sum_j |\underline{u}_{h,j}^{(k)} - \underline{u}_{h,j}^{(k-1)}|^2 \leq \varepsilon^2,$$

където с  $\underline{u}_{h,j}^{(k)}$  е означено приближението на  $j$ -ят собствен вектор, получено след  $k$ -та итерация, а  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**Пример 1.1** Разглеждаме прът с дължина  $l$ , неподвижно закрепен в двата си края. Без ограничение на общостта, плътността на пръта и коравината предполагаме равни на единица. Функциите на формата и естествените честоти се определят от следното диференциално уравнение:

$$u^{IV} = \lambda u, \quad x \in (0, l),$$

с гранични условия

$$u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0.$$

Слабата формулировка на разглежданата задача е

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V,$$

където

$$V = \{v \in H^2(0, l) : v(0) = v(l) = 0\},$$

$$a(u, v) = \int_0^l u'' v'' dx, \quad b(u, v) = \int_0^l uv dx.$$

Точните собствени стойности и собствени функции на разглежданата задача са съответно:

$$\lambda_j = \left(\frac{\pi j}{l}\right)^4, \quad u_j(x) = C_j \sin \sqrt[4]{\lambda_j} x, \quad j = 1, 2, \dots,$$

като нормировката

$$b(u_j, u_j) = 1$$

се получава при  $C_j = \sqrt{2}$ . Полагайки  $l = 1$ , например, за първите четири точни собствени двойки получаваме:

$$\lambda_1 = \pi^4 = 97.40909103, \quad u_1(x) = \sqrt{2} \sin \pi x,$$

$$\lambda_2 = 16\pi^4 = 1558.545457, \quad u_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x,$$

$$\lambda_3 = 81\pi^4 = 7890.136374, \quad u_3(x) = \sqrt{2} \sin 3\pi x,$$

$$\lambda_4 = 256\pi^4 = 24936.72732, \quad u_4(x) = \sqrt{2} \sin 4\pi x.$$

Числените пресмятания са получени чрез равномерна мрежа върху интервала  $(0, 1)$ , използвайки кубични Ермитови елементи. Резултатите в Таблица 1.1 са илюстрация към § 1.5. Пресметнати са вторите производни на собствените функции в точките на суперсходимост (Гаусовите точки) в дискретна норма, еквивалентна на нормата в пространството  $H^2(0, 1)$ . За всеки краен елемент са използвани двете Гаусови точки, които са афинно еквивалентни на точките  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  в интервала  $(-1, 1)$ . В таблицата са приведени резултати за  $N_e = 32; 64, 128, 256$  където с  $N_e$  е означен броят на използваните елементи.



Таблица 1.1

$N_e$	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,\cdot}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
32	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,\Omega}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$5.7 \times 10^{-2}$	$2.9 \times 10^{-1}$	$9.1 \times 10^{-1}$
	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,h}^*$	$1.7 \times 10^{-4}$	$5.4 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-1}$
64	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,\Omega}$	$8.9 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-2}$	$7.2 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-1}$
	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,h}^*$	$2.9 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-4}$	$7.3 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-2}$
128	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,\Omega}$	$2.2 \times 10^{-4}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-2}$	$5.7 \times 10^{-2}$
	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,h}^*$	$5.3 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$5.4 \times 10^{-3}$
256	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,\Omega}$	$5.5 \times 10^{-5}$	$8.9 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-2}$
	$\ u_j - u_{h,j}\ _{2,h}^*$	$1.9 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-4}$	$9.6 \times 10^{-4}$

**Пример 1.2** Ще представим илюстрация на теорията от §1.7, отнасяща се за апостериорна покриваща процедура, прилагана за триъгълни кубични крайни елементи.

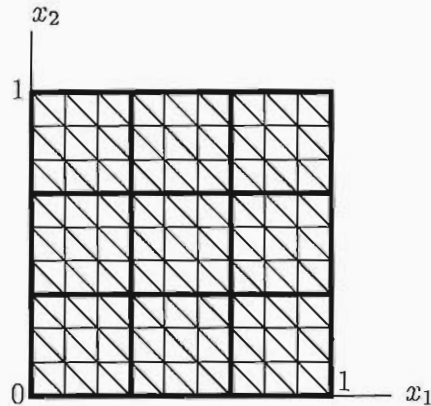
Разглеждаме моделната задача

$$-\Delta u = 20xy(x^2 + y^2)(1 - x^2y^2), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

където  $\Omega$  е единичният квадрат (Фигура 1.16) и  $\Gamma = \partial\Omega$ . Точното решение на тази задача е:

$$u(x, y) = xy(1 - x^4)(1 - y^4).$$



Фигура 1.16: Фина триангулация на областта  $\Omega$ . Границите на деветте подобласти са очертани с удебелена линия

Пресмятанията извършваме върху две мрежи  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Съответните мрежови параметри са  $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$  и  $h_2 = \frac{\sqrt{2}}{9}$ . Началната триангулация  $\tau_1$  се състои от 18 крайни елемента и се разглежда само една подобласт. За да получим по-фината триангулация  $\tau_2$  (виж Фигура 1.16), разделяме всеки елемент от триангулацията  $\tau_1$  на 9 елемента. По този начин всеки два крайни елемента от грубата мрежа, които имат обща хипотенуза, представляват подобласт от фината триангулация. Така се получават 9 подобласти от фината триангулация.

Таблица 1.2: Показателят за асимптотична сходимост е получен за градиента на приближеното решение, както и за апостериорния покриващ градиент на това решение

	$\ \nabla u - \nabla u_{h,i}\ _{0,\Omega}$	$\ \nabla u - \nabla^R u_{h,i}\ _{0,\Omega}$
$\tau_1$	0.0052151807	0.0015612262
$\tau_2$	0.0001911789	0.0000185735
$\alpha$	3.0093595457	4.0337169256

Методът за определяне на асимптотичната скорост на сходимост, който използваме, за да сравним апроксимационните качества на градиента на

крайноеlementното решение с тези на апостериорно полученото приближение, описано в §1.7, е даден в [11].

Нека  $u_{h,i}$ ,  $i = 1, 2$  са две приближение по МКЕ на разглежданата задача, получени съответно върху триангулациите  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогава

$$\|\nabla u - \nabla u_{h,1}\|_{0,\Omega} = Ch^\alpha,$$

$$\|\nabla u - \nabla u_{h,2}\|_{0,\Omega} = C\left(\frac{h}{3}\right)^\alpha.$$

Така можем да изчислим  $\alpha$  по формулата

$$\alpha = \frac{\text{Log} \frac{\|\nabla u - \nabla u_{h,1}\|_{0,\Omega}}{\|\nabla u - \nabla u_{h,2}\|_{0,\Omega}}}{\text{Log} 3}.$$

Резултатите, представени в Таблица 1.2, потвърждават теоретичните изследвания за апостериорния алгоритъм, отнасящ се за 10-точковите кубични крайни елементи.

**Пример 1.3** В този пример е използвана същата стратегия, както в предходния, т.е. имаме апостериорна процедура за триъгълни кубични елементи. Съществуват обаче следните съществени особености:

- Елиптическият оператор е с променливи коефициенти;
- областта  $\Omega$  е  $L$ -образна;
- в този пример не знаем точното решение на задачата.

Разглеждаме следната моделна задача

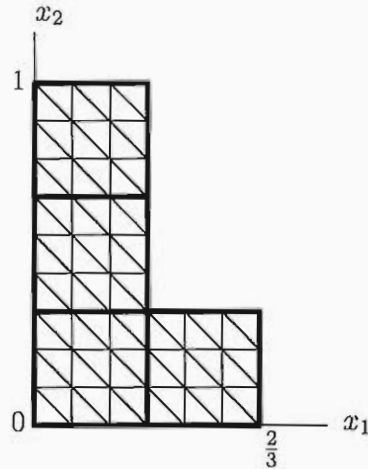
$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sqrt{1+x_1x_2} \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

със следните коефициенти

$$a_{11}(x) = 4 + x_2^2, \quad a_{22}(x) = 4 + x_1^2, \quad a_{12}(x) = a_{21}(x) = e^{-(x_1+x_2)}.$$

Задачата е дефинирана върху  $L$ -образна област  $\Omega$  (Фигура 1.17), определена по следния начин:



Фигура 1.17: Фина триангулация на областта  $\Omega$ . Границите на подобластите са очертани с удебелена линия

$$\Omega = \left\{ x \mid \left\{ 0 \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \leq x_2 \leq 1 \right\} \right\}.$$

Намираме три приближени решения  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  върху три различни триангулации  $\tau_i$  с параметри  $h_i = \frac{\sqrt{2}}{3^{i+1}}$ , съответно. Броят на възлите  $\mathcal{N}_h$ , както и броят на крайните елементи  $FE_h$ , могат да бъдат определени ( $h$  е някой от параметрите  $h_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) както следва:

$$\mathcal{N}_h = 4 \left( \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^{-2} + 5 \left( \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^{-1} + 1, \quad FE_h = \frac{16}{9} h^{-2}.$$

Всяка триангулация  $\tau_i$  се получава от предходната чрез разделяне на всеки елемент на 9 крайни елемента (виж Фигура 1.17). Всяка двойка елементи от грубата мрежа, които имат обща хипотенуза, представлява подобласт от следващата триангулация, както е описано в §1.7.

Тъй като точното решение е неизвестно, за определяне на параметъра  $\alpha$ , който дава асимптотичната сходимост на метода, са необходими най-малко три приближени решения, получени върху три мрежи. Така достигаме до системата:

$$\|\nabla u_2 - \nabla u_1\|_{0,\Omega} = C \left( 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^\alpha \right) h_1^\alpha,$$

$$\|\nabla u_3 - \nabla u_2\|_{0,\Omega} = C \left( 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^\alpha \right) \left( \frac{h_1}{3} \right)^\alpha.$$

Оттук лесно получаваме, че

$$\alpha = \frac{\text{Log} \frac{\|\nabla u_2 - \nabla u_1\|_{0,\Omega}}{\|\nabla u_3 - \nabla u_2\|_{0,\Omega}}}{\text{Log} 3}$$

подобно на [11].

Резултатите, представени в Таблица 1.3, потвърждават суперсходимостта на покриващия градиент  $\nabla^R$ .

**Таблица 1.3:** Показателят за асимптотична сходност  $\alpha$ , получен за градиента на приближеното решение и за апостериорния покриващ градиент на това решение

	$\ \nabla u_{i+1} - \nabla u_i\ _{0,\Omega}$	$\ \nabla^R u_{i+1} - \nabla^R u_i\ _{0,\Omega}$
$i = 1$	0.000138578053	0.000011185026
$i = 2$	0.000004978544	0.000000116174
$\alpha$	3.027725	4.157283

## Глава 2

# Интерполационен подход в суперсходящите апостериорни процедури

### 2.1 Въведение

Когато прилагаме МКЕ, естествен е стремежът за получаване на по-добро приближение на решението не само в специални точки, но и в подобласт и дори в цялата област. Това може да бъде постигнато чрез използване на различни апостериорни процедури. Нека посочим най-популярните от тях:

- осредняваща процедура ([47, 91, 107]);
- проекционни апостериорни методи ([53, 57]);
- апостериорен интерполационен подход ([56, 84]);

Тази глава е посветена на последната от посочените по-горе апостериорни процедури. За да изясним приносите на получените резултати, ще са ни необходими някои пояснения относно фундаменталните статии на Зенкевич и Жу [58, 59].

**Определение 2.1** *Пач от крайни елементи (an element patch) ще наричаме обединение от крайни елементи, върху което се дефинира непрекъснато полиномиално развитие на функции, които са свързани с производните на различни решения.*

Полиномиалните развития най-често осъществяват локални  $L_2$ -проекции или приближаване по метода на най-малките квадрати.

В последните 10 години се появиха много изследвания, които използват суперсходящия пост-процес чрез пачово покритие или така наречения SPR-метод (виж [27, 53, 57] и литературата към тях).

**Определение 2.2** *Апостериорни оценители на грешката (estimators) се наричат локалните оценки на разликата между апостериорното покриващо решение и крайноелементното решение (виж например [60, 61]).*

Качеството и приложимостта на различните естиматори зависят от точността на апостериорното покриващо решение. В [55] се развива числова методология за отчитане качествата на апостериорните естиматори. Тяхната основна роля е да направят апостериорния процес адаптивен, т.е. да "хванат" локалните особености на решението, вследствие сравняване на две различни приближения от едно и също пространство. Тази информация провокира използването на локално съгъстяване на мрежата, изглаждане на приближеното решение или други подобни процедури.

Нашата цел в тази глава е да развием интерполационния подход в SPR-метода и във връзка с това да се получат нови оценки и алгоритми, които да са приложими за апостериорния МКЕ. Този подход налага да именуваме крайните елементи, обединени в даден пач, като **интерполирани крайни елементи**.

**Определение 2.3** *Една оценка в метода на Галъоржин ще наричаме оценка от тип ултрасходимост, ако степента на мрежовия параметър  $h$  в неравенството е поне с две единици по-висока от степента на  $h$  в оптималната оценка.*

Ултрасходимостта в методите, илюстрирани в работите на Зенкевич-Жу (ZZ-методи), се получава вследствие на конструиране на нестандартен базис в МКЕ и обединение по подходящ начин на крайни елементи (виж например [55]). Такава сходимост, разбира се, изисква и много висока гладкост на точното решение. Ето защо, ZZ-методите са приложими най-вече за "вътрешни" оценки, т.е. върху подобласти, отдалечени от особености, предизвикани от ъгловите точки на областта.

Ключов момент в интерполираните крайни елементи е използването на базис, различен от класическия възлов базис. За целта се разглеждат степени на свобода, които са интегрални върху страните на елемента или интегрални върху самия елемент.

Доказателството за по-високата скорост на сходимост на метода се извършва в две основни стъпки:

- Конструирание на интерполационен оператор  $i_h : C^0 \rightarrow V_h$ , работещ по принципа "елементи - страни - върхове". Този интерполационен оператор дава оценка от тип супер(ултра)-сходимост на  $a(i_h u - u, v)$  за всяко  $v \in V_h$  и функция  $u$ , притежаваща достатъчна гладкост. Нека отбележим, че  $V_h$  съдържа всички функции, които са по части полиноми от  $P_n$  (или  $Q_n$ ) върху разделянето  $\tau_h$ .

За да резюмираме първата основна стъпка на метода, ще отбележим, че интерполантът  $i_h$  на точното решение на дадена елиптична задача и елиптичният проектор на същото решение са суперблизки;

- Конструирание на интерполационен оператор  $I_{2h}$  върху разделяне  $\tilde{\tau}_{2h}$ , обединяващо елементите от  $\tau_h$  в групи (пачове). Този интерполант също удовлетворява условията "елементи - страни - върхове", откъдето за композицията на конструираните два интерполанта е изпълнено  $I_{2h} \circ i_h = I_{2h}$ . Всъщност, интерполационният оператор  $I_{2h}$ , приложен към получено крайноелементно решение, осъществява суперсходящ апостериорен алгоритъм в интерполационния SPR-подход.

Идеята, изложена по-горе, е осъществена през 1991 г. от Лин, Йан и Жу [84] за уравнението на Лаплас в равнината с хомогенни гранични условия. Те доказват ултрасходимост, когато крайноелементното разделяне е породено от правоъгълна мрежа. Така полиномите, дефинирани върху всеки краен елемент, са от  $Q_p$ , а интерполантът върху всеки пач е от  $Q_{p+2}$ . В същата статия е разгледана съответната спектрална задача и за нея е доказана сходимост, по-висока от оптималната с два порядъка за собствените функции и съответно с четири – за собствените стойности, след прилагане на апостериорна процедура от интерполационен тип.

Нека обаче да подчертаем, че намирането на базис, условия, и от там конструирание на съответен интерполационен оператор с високи апроксимационни свойства за конкретни елементи е технически твърде трудна задача. Така например в [84] е представен експлицитният вид на  $i_h$  само когато крайноелементното решение е получено с използване на полиноми от втора степен. Ето защо примамливо лесният за практическо прилагане постериорен интерполационен подход е в противовес с трудностите при намиране и доказване на интерполант, притежаващ свойството суперблизост.

В тази глава ние ще разширим SPR-метода за елиптични задачи от втори и четвърти ред. Конкретните резултати, изложени в тази глава, са отразени в следния план: следващият параграф обобщава получените оценки за уравнение от втори ред в равнината. Разгледан е технически трудният случай на триъгълни крайни елементи [20], както и елементи от Серендипов тип. В §2.3 се дискутират едномерни задачи от четвърти ред



[10]. Различните случаи на елиптични оператори в зависимост от коефициентите водят до интересни свойства на интерполираните крайни елементи. Двумерни интерполирани правоъгълни елементи са приложени в §2.4 за доказване на ултрасходимост на вторите производни за задачи от четвърти ред [21]. Следващият §2.5 е посветен на един фундаментален резултат, според който крайноелементното решение на спектрална самоспрегната задача от ред  $2m$  и съответният елиптичен проектор на точното решение са суперблизки [8, 9]. Този резултат ни позволява да приложим метода за приближаване на собствените двойки с по-голяма точност. Такива разглеждания са направени в §2.6. Накрая са представени числени пресмятания, които илюстрират теорията, изложена в тази глава.

## 2.2 Апостериорен интерполационен метод за задачи от втори ред

В този параграф ще докажем следния резултат: Суперсходящата постпроцедура на базата на интерполирани крайни елементи може да бъде реализирана, когато крайноелементното решение е получено при използване на триъгълни крайни елементи. Този резултат е доказан за 6-точковите триъгълни елементи върху равномерна правоъгълна мрежа (виж Забележка 2.2). Суперсходящата апостериорна процедура може лесно да се приложи и когато крайният елемент е правоъгълен триъгълник, който не е непременно равнобедрен.

Триъгълните крайни елементи създават възможност за по-голяма гъвкавост и разнообразие при разделяне на областта (виж [58, 82]). В последните години суперсходящите алгоритми се създаваха на принципа на симетрия за дадена точка (връх) на краен елемент [55, 82]. Чрез този подход всеки връх на елемент, удовлетворяващ известни геометрични изисквания на елементите, към които принадлежи, е точка на суперсходимост (ултрасходимост) на градиента [110, 121]. Нашият подход използва идея, различна от представената в [55] и [121]. Интерполираните крайни елементи са обединени в пачове, като по този начин се дефинира подходяща апостериорна процедура за градиента на приближеното решение.

Освен триъгълните крайни елементи, друг широко използван в инженерната практика е 8-точковият Серендипов краен елемент. В края на параграфа ще покажем, че процедурата на интерполирани крайни елементи е приложима и за този случай. Трябва да се подчертае, че съществува аналогия по отношение на скоростта на сходимост между 6-точковия триъгълен елемент и 8-точковия Серендипов елемент (съотнесени към резулта-

тите в [84]).

Характерна особеност за интерполационния подход в методите е, че предложената процедура повишава сходимостта на приближеното към точното решение, без да се повишава степента на апроксимиращите полиноми.

Разглеждаме моделната задача

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{в} & \Omega, \\ u &= 0 & \text{върху} & \Gamma, \end{aligned} \tag{2.1}$$

където  $\Omega$  е многоъгълна област в  $\mathbf{R}^2$ , която може да се представи като обединение на правоъгълници и има граница  $\Gamma$ . Слабото решение на задачата (2.1) е функция  $u$ , принадлежаща на  $V \equiv H_0^1(\Omega)$  и удовлетворяваща съответната слаба формулировка на (2.1)

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \tag{2.2}$$

където

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Както обикновено, с  $P_k$  е означено множеството от полиномиални функции от степен най-много  $k$  по двете си променливи. В настоящия параграф изследванията провеждаме при  $k = 2$ .

Разглеждаме семейство от регулярни разделяния  $\tau_h = \cup_i T_i$  на  $\bar{\Omega}$ , състоящо се от триъгълни крайни елементи  $T_i$ . Нека разделянето  $\tau_h$  удовлетворява стандартните предположения (виж [102], Глава 3). Ако  $h_i$  е диаметърът на  $T_i$ , то  $h = \max_i h_i$  е крайноелементният параметър, съответен на всяко разделяне  $\tau_h$ .  $V_h$  е крайноелементното функционално пространство.

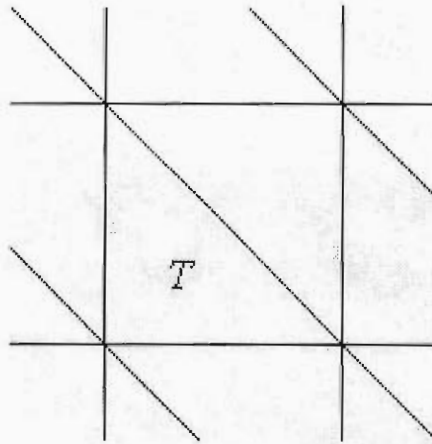
Нека операторът  $R_h : V \rightarrow V_h$  е елиптическият проектор, дефиниран чрез:

$$a(u - R_h u, v) = 0 \quad \forall u \in V, \forall v \in V_h.$$

Както е добре известно [102], ако решението  $u(x, y)$  на (2.2) принадлежи на  $H^3(\Omega) \cap V$ , то

$$\|u - R_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}. \tag{2.3}$$

Целта на настоящия параграф е да се получи оценка, по-добра от оптималната оценка (2.3). Доказателството на суперсходящия резултат, както вече бе споменато в предходния параграф, се извършва на два етапа, съот-



Фигура 2.1:

ветстващи на конструиране и изучаване свойствата на две основни компоненти (интерполационни оператори).

Разглеждаме регулярното разделяне  $\tau_h = \cup T$ , състоящо се от правоъгълни равнобедрени триъгълници. Дължината на катетите е  $2h$ , а точката  $(x_T, y_T)$  е среда на хипотенузата за всеки  $T \in \tau_h$  (виж Фигура 2.1).

Нека означим върховете на всеки елемент  $T \in \tau_h$  с  $p_j$ , а страните – съответно с  $l_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Дефинираме оператора  $i_h : C \rightarrow V_h$  с помощта на следните условия във върховете и по страните на  $T$  (степенни на свобода):

$$\begin{aligned} \forall v \in C(\Omega), \forall T \in \tau_h, \quad i_h v(p_j) &= v(p_j); \\ \int_{l_j} i_h v \, dl &= \int_{l_j} v \, dl, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} i_h v &\in V_h, \quad \forall v \in C(\Omega), \\ i_h v &= v, \quad \forall v \in V_h, \end{aligned}$$

както и че

$$i_h v|_T = \sum_{i=1}^6 \hat{v}_i \cdot \varphi_i \left( \frac{x - x_T}{h}, \frac{y - y_T}{h} \right),$$

където  $\{\varphi_i\}_{i=1}^6$  са базисните функции, съответстващи на степените на свобода (2.4).

Нека отбележим, че

$$\hat{v}_i = v(p_i), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\hat{v}_i = \frac{1}{h} \int_{I_j} v \, dl, \quad i = j + 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

И така, за всяка точка  $(\hat{x}, \hat{y})$ , принадлежаща на основния краен елемент  $\hat{T}$ , т.е. такава, че  $-1 \leq \hat{x} \leq 1$ ;  $-1 \leq \hat{y} \leq -\hat{x}$ , лесно получаваме

$$\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(4\hat{x} + 4\hat{y} + 6\hat{x}\hat{y} + 3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2);$$

$$\varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(-1 + 2\hat{x} + 3\hat{x}^2);$$

$$\varphi_3(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(-1 + 2\hat{y} + 3\hat{y}^2);$$

$$\varphi_4(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(-3\hat{x} - 3\hat{y} - 3\hat{x}\hat{y} - 3\hat{x}^2);$$

$$\varphi_5(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(3 + 3\hat{x} + 3\hat{y} + 3\hat{x}\hat{y});$$

$$\varphi_6(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(-3\hat{x} - 3\hat{y} - 3\hat{x}\hat{y} - 3\hat{y}^2).$$

**Забележка 2.1** Подобен базис може да бъде използван не само за доказване на суперсходящ резултат, а и за непосредствена реализация на метода на крайните елементи.

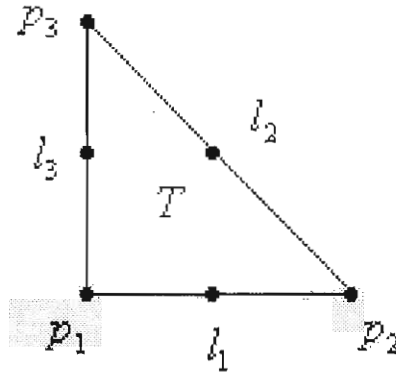
За всеки  $T \in \mathcal{T}_h$  въвеждаме следните функции на грешката:

$$E(x) = \frac{1}{2} [(x - x_T)^2 - h^2],$$

$$F(y) = \frac{1}{2} [(y - y_T)^2 - h^2].$$

Очевидно  $E(p_2) = 0$  и  $E(x)|_{I_3} = 0$ . Аналогично,  $F(p_3) = 0$  и  $F(y)|_{I_1} = 0$  (виж Фигура 2.2).

Също така, ще използваме и функциите на грешката, дефинирани по-долу:



Фигура 2.2:

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_T + h)(x - x_T + y - y_T), \quad (2.5)$$

$$G_2(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_T + h)(x - x_T + y - y_T).$$

Нека отбележим, че за тях е изгълнсно

$$G_1(x, y)|_{l_2} = G_1(x, y)|_{l_3} = 0,$$

$$G_2(x, y)|_{l_1} = G_2(x, y)|_{l_2} = 0.$$

Свойството на суперблизост, което основно характеризира операторът  $i_h$ , ще докажем в следващата теорема:

**Теорема 2.1** Нека  $u(x, y) \in H^4(\Omega)$ . Тогава за всяко  $v \in V_h$  е в сила следното неравенство:

$$a(i_h u - u, v) \leq Ch^3 \|u\|_{4, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}. \quad (2.6)$$

**Доказателство.** Означаваме  $U := i_h u - u$ . Като се вземе предвид, че  $v \in V_h$ , за всяко  $(x, y) \in T$  можем да използваме представянията

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_T, y_T) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) \cdot (x - x_T) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot (y - y_T),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_T, y_T) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) \cdot (y - y_T) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot (x - x_T).$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 a(U, v) &= \int_T \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}(x_T, y_T) dx dy + \int_T \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}(x_T, y_T) dx dy \\
 &+ \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy + \int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy \quad (2.7) \\
 &+ \int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy.
 \end{aligned}$$

Ще оценим всяко събираемо в дясната страна на (2.7). За първото и второто събираемо съответно са валидни следните равенства:

$$\int_T \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}(x_T, y_T) dx dy = \left( \int_{l_2} - \int_{l_3} \right) U \frac{\partial v}{\partial x}(x_T, y_T) dy = 0; \quad (2.8)$$

$$\int_T \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}(x_T, y_T) dx dy = \left( \int_{l_2} - \int_{l_1} \right) U \frac{\partial v}{\partial y}(x_T, y_T) dy = 0. \quad (2.9)$$

Интегрирайки по части и вземайки предвид (2.5), за третото събираемо в дясната страна на (2.7) получаваме:

$$\begin{aligned}
 &\int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy = 2 \int_T \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\
 &= 2 \left( \int_{l_2} - \int_{l_1} \right) G_1(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx - 2 \int_T G_1(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy.
 \end{aligned}$$

Съгласно дефиницията на  $G_1(x, y)$  можем да запишем, че

$$\int_{l_2} G_1(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = 0.$$

От друга страна, интегралите

$$\int_{l_1} G_1(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$$

се унищожават при сумиране по всички  $T \in \tau_h$ . Това се дължи на факта, че  $G_1(x, y)|_{l_1} = E(x)$  и подинтегралната функция е непрекъснатата върху всяка страна на красен елемент (вътрешна за областта), която е успоредна на оста  $x$ . Ако пък страната не е вътрешна за областта, а е част от границата  $\Gamma$ ,

то чрез двукратно интегриране по части, предвид това, че функцията  $v$  се анулира върху  $\Gamma$ , получаваме, че съответният интеграл е равен на нула, т.е. стигахме до:

$$\int_{l_1} E(x) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int_{l_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right] v dx = 0.$$

Следователно, можем да заключим, че (в смисъл на сумиране по  $T \in \tau_h$ ):

$$\int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy = -2 \int_T G_1(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy. \quad (2.10)$$

Използвайки

$$2G_1(x, y) = 2 \left[ \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G_1^2(x, y)]$$

и отчитайки, че  $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = 1$ , след интегриране по части получаваме:

$$\begin{aligned} \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy &= -2 \int_T \left[ \frac{\partial G_1}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\ &- \int_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G_1^2] \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy = 2 \int_T G_1(x, y) \frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\ &+ 2 \int_T G_1(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy - \int_T G_1^2(x, y) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Като комбинираме горното равенство с (2.10), получаваме

$$\begin{aligned} \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy &= \int_T \frac{\partial G_1^2}{\partial x} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\ &- \int_T (x - x_T) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy - \int_T G_1^2(x, y) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Следователно

$$\int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy = - \int_T G_1^2(x, y) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy. \quad (2.11)$$

Аналогично, за четвъртото събираемо в дясната страна на (2.7) е в сила следното равенство:

$$\int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy = - \int_T G_2^2(x, y) \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy. \quad (2.12)$$

Накрая, нека разгледаме сбора от петото и шестото събираемо в дясната страна на (2.7):

$$\begin{aligned} & \int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\ &= \left( \int_{l_2} - \int_{l_3} \right) (y - y_T) U \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy + \left( \int_{l_2} - \int_{l_1} \right) (x - x_T) U \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\ &= - \int_{y_T-h}^{y_T+h} (y - y_T) U(x_T - h, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\ &\quad - \int_{x_T-h}^{x_T+h} (x - x_T) U(x, y_T - h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\ &\quad + \int_{y_T-h}^{y_T+h} [(y - y_T + x - x_T) U(x, y)] \Big|_{x=x_T+y-y_T=0} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy. \end{aligned}$$

Очевидно, последният интеграл се анулира. Останалите два интеграла в дясната страна на горното равенство преобразуваме с помощта на следните представяния:

$$x - x_T = \frac{1}{6} [E^2(x)]''',$$

$$y - y_T = \frac{1}{6} [F^2(y)]''.$$

Тогава, интегрирайки по части, стигама до

$$\begin{aligned} & - \int_{y_T-h}^{y_T+h} (y - y_T) U(x_T - h, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_T - h, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy, \end{aligned} \quad (2.13)$$



като отчетем, че функциите  $U(x_T - h, y)$ ,  $[F^2(y)]'$  и  $F^2(y)$  се анулират при  $y = y_T \pm h$ .

По подобен начин получаваме и

$$\begin{aligned} & - \int_{x_T-h}^{x_T+h} (x - x_T) U(x, y_T - h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\ & = \frac{1}{6} \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, y_T - h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

За нашите цели е удобно да използваме, че очевидно

$$\begin{aligned} & \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_T - h, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\ & - \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_T + y_T - y, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\ & = \left( \int_{l_1} - \int_{l_2} \right) F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy = - \int_T F^2(y) \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy, \end{aligned}$$

и съответно

$$\begin{aligned} & \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, y_T - h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\ & - \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, x_T + y_T - x) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\ & = \left( \int_{l_3} - \int_{l_2} \right) E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx = - \int_T E^2(x) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Тези две тъждества в комбинация с (2.13) и (2.14) водят до:

$$\begin{aligned} & \int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\ & = - \frac{1}{6} \int_T F^2(y) \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{1}{6} \int_T E^2(x) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\ & \quad + \frac{1}{6} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_T + y_T - y, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\ & \quad + \frac{1}{6} \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, x_T + y_T - x) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Нека сега разгледаме двата линейни интеграла върху  $l_2$  в дясната страна на (2.15). За всяка точка  $(x, y) \in l_2$  е в сила равенството  $E(x) = F(y)$ . Тогава

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_T + y_T - y, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\
& + \frac{1}{6} \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, x_T + y_T - x) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \\
& = \frac{1}{6} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \Big|_{x-x_T+y-y_T=0} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \\
& = \frac{1}{12} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \Big|_{x-x_T+y-y_T=0} \left[ 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dy \\
& + \frac{1}{12} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \Big|_{x-x_T+y-y_T=0} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dy.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Първото събираемо в дясната страна на (2.16) можем да пренебрегнем, предвид дефиницията на  $U(x, y)$  и

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right).$$

Горната функция е непрекъсната върху страната  $l_2$ , както и функцията

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Следователно, при сумиране по всички елементи  $T \in \tau_h$  тези интеграли се унищожават. Ако за някой елемент съответната страна  $l_2$  е част от границата  $\Gamma$  на областта, то тогава функцията  $v$  се анулира, следователно интеграл върху такава страна също е равен на нула.

За втория интеграл върху  $l_2$  в представянето (2.16) можем да запишем:

$$\frac{1}{12} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \Big|_{x-x_T+y-y_T=0} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{x=x_T-h}^{x=x_T+y_T-y} dy \\
&+ \frac{1}{12} \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{y=y_T-h}^{y=x_T+y_T-x} dx \\
&+ \frac{1}{12} \int_{y_T-h}^{y_T+h} F^2(y) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{x=x_T-h} dy \\
&+ \frac{1}{12} \int_{x_T-h}^{x_T+h} E^2(x) \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{y=y_T-h} dx.
\end{aligned}$$

Последните две събираеми са съответно интеграли върху  $l_3$  и  $l_1$ . Те се унищожават при сумиране по всички елементи  $T \in \tau_h$ . В случай, че някоя от страните  $l_1$  или  $l_3$  на даден елемент е част от  $\Gamma$ , то функцията  $v$ , както и производната и по направление на съответната страна, се анулира. Следователно от горното представяне, използвайки (2.15) и (2.16), получаваме:

$$\begin{aligned}
&\int_T (y - y_T) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \int_T (x - x_T) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\
&= -\frac{1}{6} \int_T F^2(y) \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{1}{6} \int_T E^2(x) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\
&+ \frac{1}{12} \int_T F^2(y) \left[ \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy \\
&+ \frac{1}{12} \int_T E^2(x) \left[ \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Накрая, отчитайки, че

$$\frac{\partial^{i+j} U}{\partial x^i \partial y^j} = -\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \text{ при } i + j \geq 3$$

и използвайки обратното неравенство, от (2.7), (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) и (2.17) получаваме

$$\int_T \nabla U \cdot \nabla v \, dx \, dy \leq Ch^3 \|u\|_{4,T} \|v\|_{1,T},$$

откъдето

$$a(i_h u - u, v) \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

■

Следващата теорема се получава като непосредствено приложение на резултата от Теорема 2.1:

**Теорема 2.2** *Нека условията на Теорема 2.1 са изпълнени. Тогава е в сила следната оценка за суперблизост:*

$$\|i_h u - R_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega}. \quad (2.18)$$

*Доказателство.* Нека  $\alpha = \text{const} > 0$ . Тогава:

$$\begin{aligned} \alpha \|i_h u - R_h u\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(i_h u - R_h u, i_h u - R_h u) \quad (\text{от } V_h - \text{елиптичност}) \\ &= a(i_h u - u, i_h u - R_h u) \quad (R_h \text{ е елиптичен проектор}) \\ &\leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|i_h u - R_h u\|_{1,\Omega}. \quad (\text{от (2.6)}) \end{aligned}$$

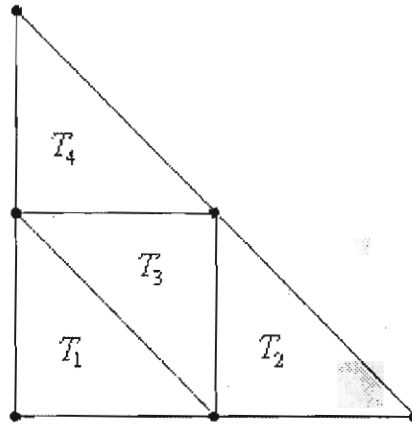
■

Въз основа на получената в Теорема 2.2 оценка ще въведем интерполирани крайни елементи, като за целта ще представим покриваща конструкция при регулярно разделяне на областта.

Разглеждаме пач на елементи от  $\tau_h$ , състоящ се от четири еднакви равнобедрени правоъгълни триъгълника (виж Фигура 2.3).

Процедурата по съставяне на покриващата конструкция се състои в образуване на пачове, представляващи обединение на съседни крайни елементи. Всеки пач съдържа четири крайни елемента  $T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$ , както е показано на Фигура 2.3. Така получаваме ново разделяне  $\tilde{\tau}_{2h}$  на областта с крайноелементен параметър  $2h$ , съставено от обединените крайни елементи (пачове).

Степените на свобода, които ще използваме върху всеки пач (общо 15), са: (i) стойностите на функцията  $v$  във върховете на четирите триъгълника



Фигура 2.3:

$T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$  такива, че  $\bigcup_{s=1}^4 T_s \in \tilde{\tau}_{2h}$ ; (ii) стойностите на интегралите от функцията  $v$  върху страните  $l_j$  на  $T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$ .

По този начин за крайния елемент, който в случая приемаме за основен, а именно дефинираният посредством

$$\{(\hat{x}, \hat{y}) : 0 \leq \hat{x} \leq 2, 0 \leq \hat{y} \leq 2 - \hat{x}\},$$

базисните функции са:

$$\psi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (4 - 24\hat{x} - 24\hat{y} + 78\hat{x}\hat{y} + 39\hat{x}^2 + 39\hat{y}^2 - 72\hat{x}^2\hat{y} - 72\hat{x}\hat{y}^2 - 24\hat{x}^3 - 24\hat{y}^3 + 20\hat{x}^3\hat{y} + 20\hat{x}\hat{y}^3 + 30\hat{x}^2\hat{y}^2 + 5\hat{x}^4 + 5\hat{y}^4);$$

$$\psi_2(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (-4\hat{x} + 15\hat{x}^2 - 16\hat{x}^3 + 5\hat{x}^4);$$

$$\psi_3(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (-4\hat{y} + 15\hat{y}^2 - 16\hat{y}^3 + 5\hat{y}^4);$$

$$\psi_4(\hat{x}, \hat{y}) = 6\hat{x}\hat{y} - 9\hat{x}^2\hat{y} - 9\hat{x}\hat{y}^2 + 2\hat{x}^3\hat{y} + 2\hat{x}\hat{y}^3 + 9\hat{x}^2\hat{y}^2;$$

$$\psi_5(\hat{x}, \hat{y}) = -8\hat{y} + 6\hat{x}\hat{y} + 24\hat{y}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y} - 21\hat{x}\hat{y}^2 - 20\hat{y}^3 - 2\hat{x}^3\hat{y} + 10\hat{x}\hat{y}^3 + 3\hat{x}^2\hat{y}^2 + 5\hat{y}^4;$$

$$\psi_6(\hat{x}, \hat{y}) = -8\hat{x} + 6\hat{x}\hat{y} + 24\hat{x}^2 - 21\hat{x}^2\hat{y} + 3\hat{x}\hat{y}^2 - 20\hat{x}^3 + 10\hat{x}^3\hat{y} - 2\hat{x}\hat{y}^3 + 3\hat{x}^2\hat{y}^2 + 5\hat{x}^4;$$

$$\psi_7(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (46\hat{x} - 99\hat{x}\hat{y} - 99\hat{x}^2 + 138\hat{x}^2\hat{y} + 66\hat{x}\hat{y}^2 + 68\hat{x}^3 - 46\hat{x}^3\hat{y} - 14\hat{x}\hat{y}^3 - 45\hat{x}^2\hat{y}^2 - 15\hat{x}^4);$$

$$\psi_8(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (14\hat{x} - 51\hat{x}^2 + 52\hat{x}^3 - 15\hat{x}^4 - 3\hat{x}\hat{y} + 18\hat{x}^2\hat{y} - 14\hat{x}^3\hat{y} - 6\hat{x}\hat{y}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y}^2 + 2\hat{x}\hat{y}^3);$$

$$\psi_9(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (3\hat{x}\hat{y} - 18\hat{x}^2\hat{y} + 14\hat{x}^3\hat{y} + 6\hat{x}\hat{y}^2 - 3\hat{x}^2\hat{y}^2 - 2\hat{x}\hat{y}^3);$$

$$\psi_{10}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (3\hat{x}\hat{y} + 6\hat{x}^2\hat{y} - 2\hat{x}^3\hat{y} - 18\hat{x}\hat{y}^2 - 3\hat{x}^2\hat{y}^2 + 14\hat{x}\hat{y}^3);$$

$$\psi_{11}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (14\hat{y} - 3\hat{x}\hat{y} - 6\hat{x}^2\hat{y} + 2\hat{x}^3\hat{y} - 51\hat{y}^2 + 18\hat{x}\hat{y}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y}^2 + 52\hat{y}^3 - 14\hat{x}\hat{y}^3 - 15\hat{y}^4);$$

$$\psi_{12}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4} (46\hat{y} - 99\hat{x}\hat{y} + 66\hat{x}^2\hat{y} - 14\hat{x}^3\hat{y} - 99\hat{y}^2 + 138\hat{x}\hat{y}^2 - 45\hat{x}^2\hat{y}^2 + 68\hat{y}^3 - 46\hat{x}\hat{y}^3 - 15\hat{y}^4);$$

$$\psi_{13}(\hat{x}, \hat{y}) = 6 (6\hat{x}\hat{y} - 7\hat{x}^2\hat{y} + 2\hat{x}^3\hat{y} - 7\hat{x}\hat{y}^2 + 4\hat{x}^2\hat{y}^2 + 2\hat{x}\hat{y}^3);$$

$$\psi_{14}(\hat{x}, \hat{y}) = -6 (2\hat{x}\hat{y} - 5\hat{x}^2\hat{y} + 2\hat{x}^3\hat{y} - \hat{x}\hat{y}^2 + 2\hat{x}^2\hat{y}^2);$$

$$\psi_{15}(\hat{x}, \hat{y}) = -6 (2\hat{x}\hat{y} - \hat{x}^2\hat{y} - 5\hat{x}\hat{y}^2 + 2\hat{x}^2\hat{y}^2 + 2\hat{x}\hat{y}^3).$$

Интерполационният оператор  $I_{2h}$  удовлетворява условията във върховете и върху страните на крайните елементи, определени от изброените степени на свобода и базисните функции  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$ .

Нека  $\tilde{V}_{2h} \subset V$  е крайноелементното пространство, асоциирано с разделянето  $\tilde{\tau}_{2h}$ . Тогава  $\tilde{V}_{2h}$  се състои от по части полиноми от степен, не по-висока от 4, т.е. полиноми от  $P_4$ .

Нещо повече, от конструкцията на интерполационния оператор  $I_{2h}$  следва, че са в сила следните свойства:

$$I_{2h} \circ i_h = I_{2h}, \quad (2.19)$$

а също така, тъй като операторът  $I_{2h} : V_h \rightarrow \tilde{V}_{2h}$  е ограничен, то

$$\|I_{2h}v\|_{r,\Omega} \leq C\|v\|_{r,\Omega} \quad \forall v \in V_h, \quad r = 0, 1. \quad (2.20)$$

Накрая, тъй като  $I_{2h}v$  е по части полиномиална функция от степен 4 относно двете си променливи, то

$$\|I_{2h}v - v\|_{1,\Omega} \leq Ch^4 \|v\|_{5,\Omega}. \quad (2.21)$$

Основната оценка на този параграф се съдържа в следващата теорема:

**Теорема 2.3** *Нека  $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Тогава е в сила следната оценка:*

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{5,\Omega}. \quad (2.22)$$

*Доказателство.* Прилагайки (2.19), получаваме представянето

$$I_{2h} \circ R_h u - u = I_{2h} \circ (R_h u - i_h u) + (I_{2h} u - u).$$

Предвид неравенство (2.20)

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} \leq C \|R_h u - i_h u\|_{1,\Omega} + \|I_{2h} u - u\|_{1,\Omega}.$$

Отчитайки оценките (2.18) и (2.21), завършваме доказателството. ■

Получената по-горе основна оценка (2.22) е от тип суперсходимост.

**Забележка 2.2** *В настоящия параграф изследванията са направени при предположение, че триангулацията  $\tau_h$  се състои от правоъгълни равнобедрени триъгълници. Всъщност, не е трудно получените резултати да се обобщят (при запазване на доказаният порядък) и в случай, че приближеното крайноелементно решение е получено посредством неравнобедрени правоъгълни елементи.*

По аналогия с горните резултати, касаещи триъгълни крайни елементи, и с разглежданията в [84], отнасящи се до пълни четириъгълни крайни елементи, можем да докажем и използваме суперсходяща интерполационна процедура и за Серендипови елементи.

За яснота на по-нататъшното изложение, с цел разграничаване на разглежданията за Серендипови крайни елементи, в означенията ще използваме горен индекс  $s$ .

И така, нека разглежданото семейство от регулярни разделяния  $\tau_h^s = \cup_i T_i^s$  на  $\bar{\Omega}$ , където  $\tau_h^s$  се състои от 8-точкови Серендипови правоъгълни крайни елементи  $T_i^s$  (виж [63, 104]). Дължините на страните, успоредни

на осите  $x$  и  $y$  са съответно  $2h_1$  и  $2h_2$ , а точката  $(x_{T^s}, y_{T^s})$  е център на всеки правоъгълник  $T^s \in \tau_h^s$ . За всяко такова разделяне крайноеlementният параметър е  $h = \max_{T_i^s} \{h_1, h_2\}$ .

Означаваме върховете на всеки елемент  $T^s \in \tau_h^s$  с  $p_j^s$ , а страните – с  $l_j^s$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , съответно. В този случай оператора  $i_h^s : C^0 \rightarrow V_h^s$  дефинираме посредством следните степени на свобода, представляващи условия във върховете и по страните на елемента  $T^s$ :

$$\begin{aligned} \forall v \in C(\Omega), \forall T^s \in \tau_h^s, \quad i_h^s v(p_j^s) &= v(p_j^s); \\ \int_{l_j^s} i_h^s v \, dx &= \int_{l_j^s} v \, dx, \quad j = 1, 3; \\ \int_{l_j^s} i_h^s v \, dy &= \int_{l_j^s} v \, dy, \quad j = 2, 4. \end{aligned} \quad (2.23)$$

При това

$$\begin{aligned} i_h^s v &\in V_h^s, \quad \forall v \in C(\Omega), \\ i_h^s v &= v, \quad \forall v \in V_h^s, \end{aligned}$$

а също така

$$i_h^s v|_{T^s} = \sum_{i=1}^8 \hat{v}_i^s \cdot \varphi_i^s \left( \frac{x - x_{T^s}}{h_1}, \frac{y - y_{T^s}}{h_2} \right),$$

където с  $\{\varphi_i^s\}_{i=1}^8$  сме означили базисните функции, съответстващи на степените на свобода (2.23) и

$$\hat{v}_i^s = v(p_i^s), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\hat{v}_i^s = \frac{1}{h_1} \int_{l_j^s} v \, dx, \quad i = 5, 7, \quad \hat{v}_i^s = \frac{1}{h_2} \int_{l_j^s} v \, dy, \quad i = 6, 8.$$

И така, за всяка точка  $(\hat{x}, \hat{y})$ , принадлежаща на основния краен елемент  $\hat{T}^s$ , т.е. такава, че  $-1 \leq \hat{x} \leq 1$ ;  $-1 \leq \hat{y} \leq 1$ , получаваме

$$\varphi_1^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(-4 + \hat{x} + \hat{y} + 2\hat{x}\hat{y} + 3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 - 3\hat{x}^2\hat{y} - 3\hat{x}\hat{y}^2);$$

$$\varphi_2^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(-4 - \hat{x} + \hat{y} - 2\hat{x}\hat{y} + 3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 - 3\hat{x}^2\hat{y} + 3\hat{x}\hat{y}^2);$$



$$\varphi_3^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(-4 - \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{x}\hat{y} + 3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y} + 3\hat{x}\hat{y}^2);$$

$$\varphi_4^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(-4 + \hat{x} - \hat{y} - 2\hat{x}\hat{y} + 3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y} - 3\hat{x}\hat{y}^2);$$

$$\varphi_5^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(3 - 3\hat{y} - 3\hat{x}^2 + 3\hat{x}^2\hat{y});$$

$$\varphi_6^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(3 + 3\hat{x} - 3\hat{y}^2 - 3\hat{x}\hat{y}^2);$$

$$\varphi_7^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(3 + 3\hat{y} - 3\hat{x}^2 - 3\hat{x}^2\hat{y});$$

$$\varphi_8^s(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{8}(3 - 3\hat{x} - 3\hat{y}^2 + 3\hat{x}\hat{y}^2).$$

Свойството на суперблизост, валидно за оператора  $i_h^s$  при използване на Серендинови елементи, е формулирано в следващата теорема:

**Теорема 2.4** Нека  $u(x, y) \in H^4(\Omega)$ . Тогава за всяко  $v \in V_h^s$  е в сила неравенството:

$$a(i_h^s u - u, v) \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \quad (2.24)$$

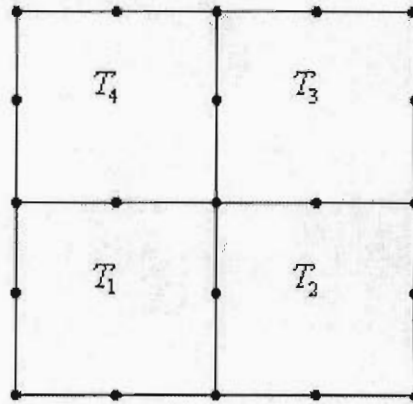
Получаването на оценката (2.24) е аналогично на разглежданията от Теорема 2.1, направени за доказване на (2.6). В хода на доказателството е уместно да се използват функциите на грешката, дефинирани за всеки елемент  $T^s \in \tau_h^s$ :

$$E^s(x) = \frac{1}{2} [(x - x_{T^s})^2 - h_1^2],$$

$$F^s(y) = \frac{1}{2} [(y - y_{T^s})^2 - h_2^2],$$

както и че за всяко  $v \in V_h^s$ , при  $(x, y) \in T^s$  са в сила представянията

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_{T^s}, y_{T^s}) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_{T^s}, y_{T^s}) \cdot (x - x_{T^s}) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x_{T^s}, y_{T^s}) \cdot (y - y_{T^s}) \\ &+ \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}(x, y) \cdot (x - x_{T^s})(y - y_{T^s}) + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(x, y) \cdot \frac{(y - y_{T^s})^2}{2}, \end{aligned}$$



Фигура 2.4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_{T^s}, y_{T^s}) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x_{T^s}, y_{T^s}) \cdot (x - x_{T^s}) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_{T^s}, y_{T^s}) \cdot (y - y_{T^s}) \\ &+ \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(x, y) \cdot (x - x_{T^s})(y - y_{T^s}) + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}(x, y) \cdot \frac{(x - x_{T^s})^2}{2}. \end{aligned}$$

Нека отбележим, че  $v|_{T^s} \in Q_2 \setminus \{x^2 y^2\}$ .

Като следствие от Теорема 2.4 се получава оценката

$$\|i_h^s u - R_h^s u\|_{1, \Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{4, \Omega}. \quad (2.25)$$

В случай на Серендипови правоъгълни крайни елементи покриващата конструкция ще се състои от "обединени" правоъгълници (пачове), всеки от които е съставен от четири съседни правоъгълни елемента от  $\tau_h^s$  (Фигура 2.4). Полученото по такъв начин ново разделяне, съставено от пачове, е с крайноелементен параметър  $2h$ .

Степените на свобода, които се използват върху всеки пач (те са общо 21), са: (i) стойностите на функцията  $v$  във върховете на четирите правоъгълника, формиралци всеки пач; (ii) стойностите на интегралите от функцията  $v$  върху страните на тези четири правоъгълника.

Въз основа на оценката (2.25), при разсъждения, аналогични на проведените за триъгълни елементи, можем да твърдим, че и при използване на Серендипови елементи е в сила оценката (2.22).

Като равносметка, сравнявайки доказания порядък на интерполационните оператори, прилагани върху вече получено при използване на различни крайни елементи от втора степен приближено решение, можем да отбележим, че

- При пълни 9-точкови четириъгълни елементи [84]

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h^4);$$

- При непълни 8-точкови четириъгълни (Серендипови) и 6-точкови триъгълни елементи [20]

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h^3).$$

Изобщо, оказва се, че за разлика от крайноелементното решаване, при дискутираната в настоящата глава суперсходяща интерполационна техника триъгълните крайни елементи имат за аналог не пълните четириъгълни крайни елементи от съответната степен, а Серендиповите крайни елементи. Тази аналогия произлиза най-вече от факта, че при конструиране на интерполационните оператори както при триъгълни, така и при Серендипови елементи използваните за конструиране на суперблизки и суперсходящи интерполационни оператори условия (степен на свобода) са едни и същи: стойности на функцията във върховете и интеграли от функцията по страните на елементите. Що се отнася до интерполационните оператори, които се съставят за пълни четириъгълни крайни елементи [84], то тяхната природа е напълно различна от тази на разглежданите в настоящия параграф интерполанти. Това произтича от използването при конструиране на интерполанти за пълни четириъгълни елементи на още един вид степени на свобода – интегрални стойности върху всеки елемент.

## 2.3 Интерполационен апостериорен подход за едномерни елиптични задачи от четвърти ред

В този параграф се продължават резултатите на Жу и Жао [57], които разглеждат SPR-метода за двучковите задачи от втори ред. Ние доказваме суперсходящите свойства, породени от метода, за различни случаи на елиптичен оператор в зависимост от неговите коефициенти. Едномерните елиптични задачи от четвърти ред имат интересни приложения при прътови конструкции, подложени на динамични натоварвания и при изследване на тяхната устойчивост [71]. Резултатите, получени в този параграф, имат отношение при изследванията на съответните спектрални задачи от четвърти ред. Нека  $\Omega \equiv (0, l)$ ,  $l > 0$ .

Разглеждаме следната моделна задача от четвърти ред в слаба формулировка:

$$a(u, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V, \quad (2.26)$$

където  $V = H^2(0, l)$  и

$$a(u, v) = \int_0^l (u''v'' + pu'v' + quv) dx. \quad (2.27)$$

Изискваме коефициентите  $p \geq 0$  и  $q \geq 0$  да бъдат реални константи.

Нека билинейната вариационна  $a$ -форма е коерцитивна върху  $V$  [102]. Очевидно тя е симетрична. Билинейната  $b$ -форма съдържа най-много първите производни на функциите, участващи в нея. Тя е симетрична и коерцитивна в пространството  $H^1(0, l)$ .

За да получим крайноелементното разделяне  $\tau_h$  на  $[0, l]$ , удовлетворяващо стандартните предположения [102], разбиваме интервала на четен брой подинтервали. Възлите на разделянето са  $p_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2m$ . Тогава всеки подинтервал (краен елемент)  $T_j = [p_{j-1}, p_j]$ ,  $j = 1, \dots, 2m$  е такъв, че  $\tau_h = \bigcup_{j=1}^{2m} T_j$ . Ще използваме следните означения:

$$h_j = p_j - p_{j-1}, \quad x_j = \frac{p_{j-1} + p_j}{2}, \quad h = \max_{1 \leq j \leq 2m} h_j.$$

С крайноелементното разделяне  $\tau_h$  се свързва подпространството  $V_h$  на  $V \cap C^1[0, l]$ . Рестрикцията на всяка функция  $v \in V_h$  върху всеки интервал  $T_j \in \tau_h$  е полином от степен най-много  $n$ .

Разглежданата процедура в нашия случай изисква да използваме апроксимиращи полиноми от степен  $n \geq 4$ . Както вече подчертахме, използване-

то на много висока степен е практически неоправдано в инженерната практика. Ето защо, най-голям смисъл има да се разглежда случаят  $n = 4$ .

Дискретната задача, съответстваща на (2.26), е

$$a(u_h, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (2.28)$$

Ще опишем подробно двете основни стъпки в доказване на нашия интерполационен подход, като конструираме двата апроксимиращи интерполанта.

Нека въведем "малкия интерполант"  $i_h : C^1(0, l) \rightarrow V_h$ , който притежава следните степени на свобода:

$$i_h v(p_j) = v(p_j), \quad j = 0, \dots, 2m,$$

$$\frac{d i_h v}{dx}(p_j) = \frac{dv}{dx}(p_j), \quad j = 0, \dots, 2m,$$

$$\int_{T_j} i_h v(x) dx = \int_{T_j} v(x) dx, \quad j = 1, \dots, 2m.$$

Очевидно, функцията  $i_h v(x)$  се състои по части от полиноми от степен най-много 4.

Нека опишем базисните функции  $\{\varphi_i\}_{i=1}^5$ , които определят интерполанта  $i_h$  върху основния елемент  $[0, 1]$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\hat{t}) \\ \varphi_2(\hat{t}) \\ \varphi_3(\hat{t}) \\ \varphi_4(\hat{t}) \\ \varphi_5(\hat{t}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -30 & 64 & -36 & 0 & 2 \\ -5 & 12 & -9 & 2 & 0 \\ 60 & -120 & 60 & 0 & 0 \\ -30 & 56 & -24 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t}^4 \\ \hat{t}^3 \\ \hat{t}^2 \\ \hat{t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{t} \in [0, 1].$$

Ако въведем означенията

$$\hat{v}_{1,j} = v(p_{j-1}), \quad \hat{v}_{2,j} = \frac{dv}{dx}(p_{j-1}),$$

$$\hat{v}_{3,j} = \int_{T_j} v(x) dx,$$

$$\hat{v}_{4,j} = v(p_j), \quad \hat{v}_{5,j} = \frac{dv}{dx}(p_j),$$

то за всяка функция  $v \in V$  е в сила следното представяне:

$$v(x)|_{T_j} = \hat{v}_{1,j} \cdot \varphi_1 \left( \frac{x - x_j}{h_j} + \frac{1}{2} \right) + \hat{v}_{2,j} \cdot h_j \cdot \varphi_2 \left( \frac{x - x_j}{h_j} + \frac{1}{2} \right) \\ + \hat{v}_{3,j} \frac{1}{h_j} \cdot \varphi_3 \left( \frac{x - x_j}{h_j} + \frac{1}{2} \right) + \hat{v}_{4,j} \cdot \varphi_4 \left( \frac{x - x_j}{h_j} + \frac{1}{2} \right) + \hat{v}_{5,j} \cdot h_j \cdot \varphi_5 \left( \frac{x - x_j}{h_j} + \frac{1}{2} \right).$$

За всеки елемент  $T_j \in \tau_h$  въвеждаме следната функция на грешката:

$$E(x) = \frac{1}{2} \left[ (x - x_j)^2 - \left( \frac{h_j}{2} \right)^2 \right].$$

В нашите по-нататъшни разглеждания ще използваме тъждествата

$$\begin{aligned} x - x_j &= \frac{1}{90} [E^3(x)]^{(5)}; \\ (x - x_j)^2 &= \frac{1}{1260} [E^4(x)]^{(6)} + \frac{h_j^2}{28}; \\ (x - x_j)^3 &= \frac{1}{18900} [E^5(x)]^{(7)} + \frac{h_j^2}{5400} [E^3(x)]^{(5)}; \\ (x - x_j)^4 &= \frac{1}{311850} [E^6(x)]^{(8)} + \frac{h_j^2}{9240} [E^4(x)]^{(6)} + \frac{h_j^4}{336}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

както и представянията

$$\begin{aligned} (x - x_j)^3 &= \frac{1}{420} [E^4(x)]^{(5)} + \frac{h_j^2}{840} [E^3(x)]^{(5)}; \\ (x - x_j)^4 &= \frac{1}{4725} [E^5(x)]^{(6)} + \frac{h_j^2}{7560} [E^4(x)]^{(6)} + \frac{h_j^4}{336}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Получаването на основните резултати в нашите изследвания се базира на следващата лема:

**Лема 2.1** Нека решението  $u(x)$  на (2.26) е достатъчно гладка функция. Тогава, за всяко  $v \in V_h$  са в сила следните оценки:

Ако  $p = q = 0$ , то

$$a(i_h u - u, v) = 0, \quad u \in H^2(0, l),$$

иначе ако  $p = 0$ , то

$$a(i_h u - u, v) \leq Ch^6 \|u\|_{7,(0,l)} \|v\|_{2,(0,l)}, \quad u \in H^7(0, l),$$

иначе

$$a(i_h u - u, v) \leq Ch^5 \|u\|_{6,(0,l)} \|v\|_{2,(0,l)}, \quad u \in H^6(0, l).$$

**Доказателство.** Нека подчертаем, че в доказателството разглежданията се извършват локално, върху елемент. Нека  $T_j$  е елемент от разделянето  $\tau_h$ . За  $x \in T_j$  и за всяко  $v \in V_h$  имаме следното развитие:

$$v^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^4 \frac{(x - x_j)^{k-s}}{(k-s)!} v^{(k)}(x_j), \quad s = 0, 1, 2. \quad (2.31)$$

Да разгледаме билинейната форма  $a(U, v)$ ,  $v \in V_h$ , където  $U = i_h u - u$ .

Случай 1  $p = q = 0$ . От (2.27) следва, че

$$a(U, v) = \int_0^l U'' v'' dx.$$

Да използваме свойствата на интерполационния оператор  $i_h$ , както и равенство (2.31) при  $s = 2$ . След интегриране по части върху интервала  $T_j$  получаваме

$$\int_{T_j} U'' v'' dx = 0,$$

следователно  $a(i_h u - u, v) = 0$ ,  $v \in V_h$ .

Случай 2  $p = 0$ . Очевидно, предвид (2.27)

$$a(U, v) = \int_0^l [U'' v'' + qUv] dx.$$

Първото събираемо в дясната страна на горното представяне е пресметнато в първия случай. За да изразим второто събираемо, отново ще се позовем на развитието (2.31) при  $s = 0$ :

$$\int_{T_j} U.v \, dx = \sum_{k=0}^4 \int_{T_j} U(x) \frac{(x-x_j)^k}{k!} v^{(k)}(x_j) \, dx. \quad (2.32)$$

Ще преобразуваме всяко събираемо в дясната страна на (2.32). От дефиницията на оператора  $i_h$  ще следва

$$\int_{T_j} U(x).v(x_j) \, dx = 0. \quad (2.33)$$

След използване на тъждествата (2.29) и интегриране по части последователно получаваме

$$\int_{T_j} U(x).(x-x_j).v'(x_j) \, dx = -\frac{1}{90} \int_{T_j} U^{(5)}(x).E^3(x).v'(x_j) \, dx; \quad (2.34)$$

$$\int_{T_j} U(x).\frac{(x-x_j)^2}{2!}.v''(x_j) \, dx = \frac{1}{2520} \int_{T_j} U^{(6)}(x).E^4(x).v''(x_j) \, dx; \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{T_j} U(x).\frac{(x-x_j)^3}{3!}.v'''(x_j) \, dx &= -\frac{1}{113400} \int_{T_j} U^{(7)}(x).E^5(x).v'''(x_j) \, dx \\ &\quad -\frac{h_j^2}{32400} \int_{T_j} U^{(5)}(x).E^3(x).v'''(x_j) \, dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

За да избегнем изискване на по-голяма гладкост на решението  $u(x)$ , за последното събираемо в (2.32) използваме второто от равенствата (2.30). Прилагането на последното от равенствата (2.29) би довело до същия порядък, но при по-високо изискване за гладкост на решението.

$$\begin{aligned} \int_{T_j} U(x).\frac{(x-x_j)^4}{4!}.v^{IV}(x) \, dx &= \frac{1}{113400} \int_{T_j} U^{(6)}(x).E^5(x).v^{IV}(x) \, dx \\ &\quad +\frac{h_j^2}{181440} \int_{T_j} U^{(6)}(x).E^4(x).v^{IV}(x) \, dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Най-сетне, да използваме представянето

$$v^{(s)}(x_j) = \sum_{k=s}^4 \frac{(x_j-x)^{k-s}}{(k-s)!} v^{(k)}(x), \quad s = 1; 2; 3$$

в комбинация с обратното неравенство. Замествайки резултатите от (2.33)–(2.37) в (2.32), след сумиране по всички елементи  $T_j \in \tau_h$  получаваме



$$a(U, v) \leq C.h^6 \|u\|_{7,(0,l)} \|v\|_{2,(0,l)}.$$

Случай 3 Това е най-общият случай, а именно

$$a(U, v) = \int_0^l [U''v'' + pU'v' + qUv] dx.$$

Първото и третото събираемо в горното представяне са вече изразени и оценени в предишните два случая. Остава да оценим

$$\int_0^l pU'v' dx.$$

Също така, за третото събираемо ще получим оценка, различна от представената в предишния случай, с цел намаляване на изискването за гладкост на решението.

От развитието (2.31) при  $s = 1$  следва

$$\int_{T_j} U'v' dx = \sum_{k=1}^4 \int_{T_j} U'(x) \frac{(x-x_j)^{k-1}}{(k-1)!} v^{(k)}(x_j) dx, \quad T_j \in \tau_h.$$

След интегриране по части достигаме до равенството

$$\int_{T_j} U'v' dx = - \sum_{k=2}^4 \int_{T_j} U(x) \frac{(x-x_j)^{k-2}}{(k-2)!} v^{(k)}(x_j) dx. \quad (2.38)$$

Предвид свойствата на оператора  $i_h$ , за събираемите в дясната страна на (2.38) можем да запишем:

$$\int_{T_j} U(x)v''(x_j) dx = 0; \quad (2.39)$$

$$\int_{T_j} U(x)(x-x_j)v'''(x_j) dx = \frac{1}{90} \int_{T_j} U^{(5)}(x)E^3(x)v'''(x_j) dx; \quad (2.40)$$

$$\int_{T_j} U(x) \frac{(x-x_j)^2}{2} v^{IV}(x) dx = \frac{1}{2520} \int_{T_j} U^{(6)}(x)E^4(x)v^{IV}(x) dx, \quad (2.41)$$

като за последните две равенства сме използвали зависимостите (2.29).

Нека отбележим, че  $v'''(x_j) = v'''(x) + (x_j - x)v^{IV}(x)$ .

Тогава, от равенства (2.39)–(2.41) и обратното неравенство, след сумиране по всички елементи  $T_j \in \tau_h$  получаваме оценката

$$\int_0^l pU'v' dx \leq C.h^5 \|u\|_{6,(0,l)} \|v\|_{2,(0,l)}. \quad (2.42)$$

За да оценим третото събираемо от  $a(U, v)$ , прилагаме първото равенство от (2.30), вместо (2.36). Това е оправдано от факта, че в (2.42) е необходимо  $u(x) \in H^6(0, l)$ . Така че би могло да се запише:

$$\begin{aligned} \int_{T_j} U(x) \cdot \frac{(x - x_j)^3}{3!} \cdot v'''(x_j) dx &= -\frac{1}{2520} \int_{T_j} U^{(5)}(x) \cdot E^4(x) \cdot v'''(x_j) dx \\ &+ \frac{h_j^2}{5040} \int_{T_j} U^{(5)}(x) \cdot E^3(x) \cdot v'''(x_j) dx. \end{aligned}$$

Сумирайки по елементите  $T_j \in \tau_h$ ,  $j = 1, \dots, 2m$ , за този случай окончателно получаваме

$$a(U, v) \leq C.h^5 \|u\|_{6,(0,l)} \|v\|_{2,(0,l)},$$

с което завършваме доказателството. ■

### Забележка 2.3 Ако

$$a(u, v) = \int_0^l \alpha u'' v'' dx, \quad \alpha = \text{const.} > 0,$$

то  $i_h$  се явява елиптичен проектор по отношение на  $a$ -формата. Именно, ако за  $u \in H^2(0, l)$ , то

$$a(i_h u - u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

Подобен резултат е получен от Жу и Жао за задача от втори ред (виж [57], Следствие 1).

**Забележка 2.4** Резултатът, доказан в Лема 2.1, остава в сила, ако във вариационната  $a$ -форма участват събираеми, съответстващи на стойност на функциите в точка [71, 98]. Така например, за задачата

$$\tilde{a}(u, v) = (f, v),$$

където  $\tilde{a}(u, v) = a(u, v) + C_1 u'(0) v'(0) + C_0 u(0) v(0)$ , очевидно е изпълнено  $\tilde{a}(U, v) = a(U, v)$ .

Резултатът от Лема 2.1 позволява да се формулира и докаже следната теорема за суперблизост, характеризираща оператора  $i_h$ :

**Теорема 2.5** Нека  $u_h$  е приближено крайноеlementно решение на задачата (2.28), а  $i_h u$  е интерполантът на точното решение  $u(x)$  на (2.26), изпълняващо условията за гладкост от Лема 2.1. Тогава са в сила следните оценки:

$$\|i_h u - u_h\|_{2,(0,l)} = 0 \quad \text{при } p = q = 0;$$

$$\|i_h u - u_h\|_{2,(0,l)} \leq C.h^6 \|u\|_{7,(0,l)} \quad \text{при } p = 0;$$

$$\|i_h u - u_h\|_{2,(0,l)} \leq C.h^5 \|u\|_{6,(0,l)} \quad \text{при } p \neq 0.$$

Доказателство. Отчитайки, че  $i_h u - u_h \in V_h$ , поради  $V_h$ -елиптичност на  $a(\cdot, \cdot)$  можем да запишем

$$C \|i_h u - u_h\|_{2,(0,l)}^2 \leq a(i_h u - u_h, i_h u - u_h) = a(i_h u - u, i_h u - u_h).$$

Полагайки  $v = i_h u - u_h$  в резултатите на Лема 2.1, завършваме доказателството. ■

Полученото свойство на суперблизост на интерполационния оператор  $i_h$  позволява да бъде конструиран ултрасходящ покриващ интерполант  $I_{2h} : C^1(0, l) \rightarrow \tilde{V}_{2h}$ , където

$$\tilde{V}_{2h} = \{v : v|_{T_{2j-1} \cup T_{2j}} \in P_7, j = 1, \dots, m\}.$$

Нека разгледаме интервалите  $T_{2j-1} = [p_{2j-2}, p_{2j-1}]$  и  $T_{2j} = [p_{2j-1}, p_{2j}]$ ,  $j = 1, \dots, m$  от крайноеlementното разделяне  $\tau_h$ . Въвеждаме ново разделяне  $\tilde{\tau}_{2h}$ , всеки элемент на който е обединение от два съседни елемента, принадлежащи на  $\tau_h$ :

$$\tilde{\tau}_{2h} = \{\tilde{T}_j = T_{2j-1} \cup T_{2j}, j = 1, \dots, m\}.$$

Върху всеки такъв "обединен" элемент  $\tilde{T}_j$  дефинираме оператора  $I_{2h} : C^1(0, l) \rightarrow \tilde{V}_{2h}$  така, че ( $j = 1, \dots, m$ ):

$$I_{2h} v(p_i) = v(p_i), \quad i = 2j - 2, 2j - 1, 2j;$$

$$\frac{dI_{2h} v}{dx}(p_i) = \frac{dv}{dx}(p_i), \quad i = 2j - 2, 2j - 1, 2j; \quad (2.43)$$

$$\int_{T_j} I_{2h} v(x) dx = \int_{T_j} v(x) dx, \quad i = 2j - 1, 2j.$$

От условията (2.43) лесно следва, че

$$I_{2h} \circ i_h = I_{2h}, \quad (2.44)$$

както и че е в сила следната апроксимационна оценка за всяко  $v(x) \in H^7(0, l)$ :

$$\|I_{2h}v - v\|_{2,(0,l)} \leq Ch^p \|v\|_{p+1,(0,l)}, \quad p = 5; 6. \quad (2.45)$$

Предполагаме, че операторът  $I_{2h}$  е ограничен, т.е. от  $I_{2h} : V_h \rightarrow \tilde{V}_{2h}$  следва  $\dim \mathcal{R}(I_{2h}) < \infty$ . Следователно операторът  $I_{2h}$  е компактен. Тогава

$$\|I_{2h}\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|I_{2h}v_h\|_{2,(0,l)}}{\|v_h\|_{2,(0,l)}} \leq C = \text{const}. \quad (2.46)$$

Оценката от тип ултрасходимост, която е основна цел в този параграф, се дава със следната теорема:

**Теорема 2.6** *Нека  $u(x)$  и  $u_h(x)$  са решения съответно на (2.26) и (2.28). Тогава, ако условията на Лема 2.1 са изпълнени, то в сила са следните оценки:*

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{2,(0,l)} \leq C.h^5 \|u\|_{6,(0,l)} \quad \text{при } p \neq 0,$$

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{2,(0,l)} \leq C.h^6 \|u\|_{7,(0,l)} \quad \text{при } p = 0.$$

*Доказателство.* Вземайки предвид (2.43) и оценката (2.45), последователно получаваме

$$\begin{aligned} \|I_{2h}u_h - u\|_{2,(0,l)} &\leq \|I_{2h}u_h - I_{2h}u\|_{2,(0,l)} + \|I_{2h}u - u\|_{2,(0,l)} \\ &= \|I_{2h}u_h - I_{2h} \circ i_h u\|_{2,(0,l)} + \|I_{2h}u - u\|_{2,(0,l)} \\ &\leq \|I_{2h}\| \cdot \|u_h - i_h u\|_{2,(0,l)} + \|I_{2h}u - u\|_{2,(0,l)}. \end{aligned}$$

За да завършим доказателството, използваме оценката (2.46) и резултата на Теорема 2.5. ■

## 2.4 Ултрасходимост на интерполационен апостериорен подход, приложен за задача от четвърти ред в равнината

В този параграф съществено ще разширим приложимостта на интерполираните крайни елементи в SPR-методи. Разглеждат се елиптични уравнения от четвърти ред в равнината и се доказва ултрасходящ резултат [21].

Както споменахме във въведението на тази глава, разглежданата от нас процедура е в категорията методи, базирани на покриваща техника [56, 57]. Така апостериорните оценки на грешката доказват повишаване на апроксимацията на приближеното решение най-често в енергетичен смисъл или в енергетична норма. Различните подходи в това направление постепенно получават своя строг математичен анализ. Например Ли и Жанг [81] доказват ултрасходимост на производните на приближеното решение при специално разделяне на областта. В последно време намирането на проекционните (интерполационни) оператори, дефинирани върху пачове, се извършва чрез използване на съвременен компютърен софтуер [29, 54].

За уравнението от четвърти ред е намерен нестандартен интерполант, осъществяващ ултрасходимост на вторите производни.

По-конкретно, предлага се изчислителна схема, която подобрява реда на сходимост за  $\Delta u_h$  от  $\mathcal{O}(h^3)$  на  $\mathcal{O}(h^5)$ , когато апроксимиращите полиноми са от четвърта степен. Тази степен е възможно най-ниската при SPR-методи за задачи от четвърти ред. Нашето убеждение е, че полиноми от по-висока степен са трудни за прилагане в инженерната практика. При това не е оправдано използването на пост-процедура, след като решението  $u_h$  е получено с полиноми от много висока степен.

Ултрасходящият резултат и алгоритъм са получени без използване на крайни елементи, определящи полиноми от степен, по-голяма от 4. Процедурата се базира на по-висока интерполация върху пачове от крайни елементи, върху които е извършено пресмятането, т.е., както трябва да се предполага, пост-процедурата се извършва върху груба мрежа.

Различните апостериорни подходи и адаптивни естиматори могат да бъдат намерени в книгата на Ансуърт и Оден [27], както и в статията на Верфюрт [41]. Доказаният в този параграф ултрасходящ резултат е технически труден за получаване, но практическото му прилагане е относително лесно.

Да разгледаме моделната задача

$$\Delta^2 u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.47)$$

с гранични условия

$$u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.48)$$

където  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  е ограничена свързана област, която може да се представи като обединение на правоъгълници с обща граница  $\Gamma$ , а  $\nu$  е външната нормала за областта.

Слабото решение на задача (2.47)–(2.48) е функция  $u(x, y)$ , принадлежаща на  $V \equiv H_0^2(\Omega)$ ,

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

и удовлетворяваща

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (2.49)$$

където

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx \, dy.$$

Очевидно  $a$ -формата е симетрична и коерцитивна във  $V$ , т.е.

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \rho \|v\|_{2, \Omega}^2 \leq a(v, v), \quad \forall u, v \in V,$$

където  $\rho$  е положителна константа. Освен това,  $a(\cdot, \cdot)$  е непрекъснатата:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{2, \Omega} \|v\|_{2, \Omega}, \quad \forall u, v \in V.$$

Нека  $\tau_h$  е регулярно разделяне на областта  $\bar{\Omega}$ , а  $h$  е крайноелементният параметър. Разделянето се състои от правоъгълни крайни елементи  $T$ , които удовлетворяват стандартните изисквания за регулярност и при това е в сила обратното неравенство (виж например [39]).

Нека  $V_h \subset V$  е крайноелементното функционално пространство, което е свързано с дадено разделяне  $\tau_h$ . При задачи от четвърти ред това по части полиномиално пространство е свързано с полиноми от  $Q_n$ ,  $n \geq 3$  [104]. Тъй като целта ни е да конструираме ултрасходящ интерполант, то за него изискването е  $n \geq 4$ . Оттук нататък ще разглеждаме реалистичния случай  $n = 4$ .

Тогава

$$V_h = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap V : v|_T \in Q_4(T), \forall T \in \tau_h\}.$$

Нека  $R_h : V \rightarrow V_h$  е елиптически проектор, дефиниран с равенството

$$a(u - R_h u, v) = 0 \quad \forall u \in V, \forall v \in V_h.$$

Известно е (виж например [104]), че ако решението  $u(x, y)$  на (2.49) принадлежи на  $H^5(\Omega) \cap V$ , то

$$\|u - R_h u\|_{2,\Omega} \leq Ch^3 \|u\|_{5,\Omega}. \quad (2.50)$$

Ще предложим апостериорен интерполационен подход, който ще подобри оптималната оценка (2.50). И този път построяването на двата интерполационни оператора се базира на използването на нестандартни степени на свобода, обединението на елементи в пачове и доказване на съответни ултрасходящи свойства.

Първо ще построим "малкия" интерполационен оператор  $i_h : C^1 \rightarrow V_h$ , използвайки условия от типа "елементи - страни - върхове", които ще въведем по-долу.

Нека означим центъра на елемента  $T \in \tau_h$  с  $(x_T, y_T)$ . Размерите на елемента в  $x$  и  $y$ -направление са съответно  $2h_{1,T}$  и  $2h_{2,T}$ . Ще използваме следните означения:

$$h_T = \max(h_{1,T}; h_{2,T}), \quad h = \max_{T \in \tau_h} h_T.$$

Върховете на елемента  $T$  са  $p_j$ , а неговите страни -  $l_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

Тъй като  $n = 4$ , то за всяко  $v \in C^1(T)$  и  $j = 1, \dots, 4$  въвеждаме следните степени на свобода:

$$\begin{aligned} i_h v(p_j) &= v(p_j), \quad \frac{\partial i_h v}{\partial x}(p_j) = \frac{\partial v}{\partial x}(p_j), \\ \frac{\partial i_h v}{\partial y}(p_j) &= \frac{\partial v}{\partial y}(p_j), \quad \frac{\partial^2 i_h v}{\partial x \partial y}(p_j) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(p_j), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\int_{l_j} i_h v(x, y) dl_j = \int_{l_j} v(x, y) dl_j, \quad \int_{l_j} \frac{\partial i_h v}{\partial \nu}(x, y) dl_j = \int_{l_j} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, y) dl_j,$$

$$\int_T i_h v(x, y) dx dy = \int_T v(x, y) dx dy.$$

Очевидно  $i_h v \equiv v$  за всяко  $v \in V_h$ . Да отбележим също, че

$$\|i_h v - v\|_{2,\Omega} \leq Ch^3 \|v\|_{5,\Omega}.$$

В едномерния случай (виж §2.3) базисът, дефиниращ оператора  $i_h$ , е  $\{\varphi_i(\hat{t})\}_{i=1}^5$ ,  $\hat{t} \in [-1, 1]$ , където:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\hat{t}) \\ \varphi_2(\hat{t}) \\ \varphi_3(\hat{t}) \\ \varphi_4(\hat{t}) \\ \varphi_5(\hat{t}) \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -15 & 4 & 30 & -12 & -7 \\ -5 & 4 & 6 & -4 & -1 \\ 15 & 0 & -30 & 0 & 15 \\ -15 & -4 & 30 & 12 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t}^4 \\ \hat{t}^3 \\ \hat{t}^2 \\ \hat{t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава, в двумерния случай базисът за основния краен елемент

$$\hat{T} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

се състои от 25 функции  $\{\psi_j(x, y)\}_{j=1}^{25}$ , които получаваме посредством произведенията  $\varphi_i(\hat{x}) \cdot \varphi_s(\hat{y})$ ,  $i, s = 1, \dots, 5$ . Следователно

$$i_h v(x, y)|_T = \sum_{j=1}^{25} \hat{v}_j \cdot \psi_j \left( \frac{x - x_T}{h_{1,T}}, \frac{y - y_T}{h_{2,T}} \right),$$

където

$$\hat{v}_{4i-3} = v(p_i), \quad \hat{v}_{4i-2} = h_{1,T} \frac{\partial v}{\partial x}(p_i),$$

$$\hat{v}_{4i-1} = h_{2,T} \frac{\partial v}{\partial y}(p_i), \quad \hat{v}_{4i} = h_{1,T} h_{2,T} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(p_i), \quad i = 1, \dots, 4;$$

$$\hat{v}_{2i+15} = \frac{1}{h_{1,T}} \int_{l_i} v(x, y) dx, \quad \hat{v}_{2i+16} = \frac{h_{2,T}}{h_{1,T}} \int_{l_i} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dx, \quad i = 1; 3;$$

$$\hat{v}_{2i+15} = \frac{1}{h_{2,T}} \int_{l_i} v(x, y) dy, \quad \hat{v}_{2i+16} = \frac{h_{1,T}}{h_{2,T}} \int_{l_i} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dy, \quad i = 2; 4;$$

$$\hat{v}_{25} = \frac{1}{h_{1,T} h_{2,T}} \int_T v(x, y) dx dy.$$



**Забележка 2.5** Лесно се вижда, че операторът  $i_h$  удовлетворява  $C^1$ -условието. Това означава непрекъснатост на функциите  $i_h v$  и на техните първи производни по границата на два съседни елемента.

Конструкцията на  $i_h$  за задачата от четвърти ред трябва да преодолее трудности, съществено по-големи от тези за задача от втори ред [84], най-вече поради наличието на смесени производни във вариационната билинейна  $a$ -форма. Впрочем,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dx dy.$$

Нека отбележим, че това представяне не е единствено.

Въвеждаме вече познатите функции на грешката за елемента  $T \in \tau_h$ :

$$E(x) = \frac{1}{2} [(x - x_T)^2 - h_{1,T}^2],$$

$$F(y) = \frac{1}{2} [(y - y_T)^2 - h_{2,T}^2].$$

При доказателствата в настоящия параграф ще използваме равенствата

$$x - x_T = \frac{1}{90} [E^3(x)]^{(5)}, \tag{2.52}$$

$$(x - x_T)^2 = \frac{1}{1260} [E^4(x)]^{(6)} + \frac{h_{1,T}^2}{7},$$

както и равенствата

$$(x - x_T)^3 = \frac{1}{420} [E^4(x)]^{(5)} + \frac{h_{1,T}^2}{210} [E^3(x)]^{(5)}, \tag{2.53}$$

$$(x - x_T)^4 = \frac{1}{4725} [E^5(x)]^{(6)} + \frac{h_{1,T}^2}{1890} [E^4(x)]^{(6)} + \frac{h_{1,T}^4}{21}.$$

Следващата лема дава важни интегрални представяния посредством функцията на грешката  $E(x)$ :

**Лема 2.2** Нека функцията  $v(x, y)$ , дефинирана върху  $\bar{T}$ ,  $T \in \tau_h$ , притежава достатъчна за нашите разглеждания гладкост. Тогава

(i) Ако  $\int_{l_i} v(x, y) dy = \int_{l_i} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dy = 0$ ,  $i = 2; 4$ , то

$$\begin{aligned} \int_T (x - x_T)v(x, y) dx dy &= -\frac{1}{90} \int_T E^3(x) \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(x, y) dx dy; \\ \int_T (x - x_T)^3 v(x, y) dx dy &= -\frac{1}{420} \int_T E^4(x) \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(x, y) dx dy \\ &\quad - \frac{h_{1,T}^2}{210} \int_T E^3(x) \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(x, y) dx dy; \end{aligned} \quad (2.54)$$

(ii) Ако  $\int_{l_i} v(x, y) dy = \int_{l_i} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dy = \int_T v(x, y) dx dy = 0$ ,  $i = 2; 4$ , то

$$\begin{aligned} \int_T (x - x_T)^2 v(x, y) dx dy &= \frac{1}{1260} \int_T E^4(x) \frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(x, y) dx dy; \\ \int_T (x - x_T)^4 v(x, y) dx dy &= \frac{1}{4725} \int_T E^5(x) \frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(x, y) dx dy \\ &\quad + \frac{h_{1,T}^2}{1890} \int_T E^4(x) \frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Доказателство. Четирите равенства (2.54) и (2.55) се доказват посредством тъждествата (2.52) и (2.53) за изразите  $(x - x_T)^i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Освен това използваме формулата на Грийн и условията на лемата. ■

Преди да получим следващия спомагателен резултат, нека запишем още две двойки зависимости, свързани с функциите на грешката  $E(x)$  и  $F(y)$ :

$$\begin{aligned} (x - x_T)^3 &= \frac{1}{15} [E^3(x)]^{(3)} + \frac{3h_{1,T}^2}{5}(x - x_T), \\ (x - x_T)^4 &= \frac{1}{105} [E^4(x)]^{(4)} + \frac{6h_{1,T}^2}{7}(x - x_T)^2 - \frac{3h_{1,T}^4}{35}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

и съответно

$$\begin{aligned}
(y - y_T)^3 &= \frac{1}{15} [F^3(y)]^{(3)} + \frac{3h_{2,T}^2}{5}(y - y_T), \\
(y - y_T)^4 &= \frac{1}{105} [F^4(y)]^{(4)} + \frac{6h_{2,T}^2}{7}(y - y_T)^2 - \frac{3h_{2,T}^4}{35}.
\end{aligned}
\tag{2.57}$$

**Лема 2.3** Нека за достатъчно гладката функция  $v(x, y)$  са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j}(p_k) = 0, \quad i, j = 0, 1;$$

$$\int_{l_k} v \, dl = \int_{l_k} \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dl = \int_T v \, dx \, dy = 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Тогава са в сила следните 6 релации, отнасящи се за

$$(x - x_T)^i (y - y_T)^j \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}$$

при  $i, j \in \{0, \dots, 4\}$ :

**(R<sub>1</sub>)** За  $i, j = 0, 1, 2$

$$\int_T (x - x_T)^i (y - y_T)^j \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy = 0;$$

**(R<sub>2</sub>)** За  $i := 3, j = 0, 1, 2$  и, аналогично за  $i = 0, 1, 2, j := 3$

$$\int_T (x - x_T)^3 (y - y_T)^j \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy = -\frac{1}{15} \int_T E^3(x) (y - y_T)^j \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} \, dx \, dy,$$

$$\int_T (x - x_T)^i (y - y_T)^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy = -\frac{1}{15} \int_T F^3(y) (x - x_T)^i \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^5} \, dx \, dy;$$

**(R<sub>3</sub>)** За  $i := 4, j = 0, 1, 2$  и  $i = 0, 1, 2, j := 4$ , съответно

$$\int_T (x - x_T)^4 (y - y_T)^j \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \frac{1}{105} \int_T E^4(x) (y - y_T)^j \frac{\partial^8 v}{\partial x^6 \partial y^2} dx dy,$$

$$\int_T (x - x_T)^i (y - y_T)^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \frac{1}{105} \int_T F^4(y) (x - x_T)^i \frac{\partial^8 v}{\partial x^2 \partial y^6} dx dy;$$

(R<sub>4</sub>)  $\exists a$   $i, j := 3$

$$\int_T (x - x_T)^3 (y - y_T)^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = -\frac{1}{15} \int_T E^3(x) (y - y_T)^3 \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} dx dy$$

$$-\frac{h_{1,T}^2}{25} \int_T F^3(y) (x - x_T) \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^5} dx dy;$$

(R<sub>5</sub>)  $\exists a$   $(i, j) := (3, 4)$  и  $(i, j) := (4, 3)$ , соответственно

$$\int_T (x - x_T)^4 (y - y_T)^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \frac{1}{105} \int_T E^4(x) (y - y_T)^3 \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} dx dy$$

$$-\frac{2h_{1,T}^2}{35} \int_T (x - x_T)^2 F^3(y) \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^5} dx dy + \frac{h_{1,T}^4}{175} \int_T F^3(y) \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^5} dx dy;$$

$$\int_T (x - x_T)^3 (y - y_T)^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \frac{1}{105} \int_T F^4(y) (x - x_T)^3 \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^5} dx dy$$

$$-\frac{2h_{2,T}^2}{35} \int_T (y - y_T)^2 E^3(x) \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} dx dy + \frac{h_{2,T}^4}{175} \int_T E^3(x) \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} dx dy;$$

(R<sub>6</sub>)  $\exists a$   $i, j := 4$

$$\int_T (x - x_T)^4 (y - y_T)^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \frac{1}{105} \int_T E^4(x) (y - y_T)^4 \frac{\partial^7 v}{\partial x^5 \partial y^2} dx dy$$

$$+\frac{2h_{1,T}^2}{245} \int_T (x - x_T)^2 F^4(y) \frac{\partial^7 v}{\partial x^2 \partial y^6} dx dy - \frac{h_{1,T}^4}{1225} \int_T F^4(y) \frac{\partial^8 v}{\partial x^2 \partial y^6} dx dy.$$

Доказателство. Първата релация доказваме чрез непосредствено пресмятане. За доказване на следващата ( $R_2$ ) използваме представянията на  $(x - x_T)^3$  и  $(y - y_T)^3$  от (2.56) и (2.57). След това интегрираме по части и използваме вече получената релация ( $R_1$ ).

Аналогично на доказателството на ( $R_2$ ), за да покажем, че ( $R_3$ ) е в сила, използваме представянията на  $(x - x_T)^4$  и  $(y - y_T)^4$  отново от (2.56) и (2.57).

За да докажем ( $R_4$ ) и ( $R_5$ ), изразяваме  $(x - x_T)^3$  и  $(x - x_T)^4$  посредством (2.56). След това интегрираме по части и вземаме предвид доказаното в ( $R_2$ ).

Последната зависимост ( $R_6$ ) следва от представянето на  $(x - x_T)^4$  в (2.56) и от съответното равенство в ( $R_3$ ). ■

Най-сетне, последните две лемни ни позволяват да докажем свойство на суперблизост на оператора  $i_h$ . Този важен резултат се съдържа в следната теорема :

**Теорема 2.7** Нека решението  $u(x, y)$  на задачата (2.49) да принадлежи на пространството  $H^7(\Omega)$ . Тогава за всяко  $v \in V_h(\Omega)$

$$a(i_h u - u, v) \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega} \|v\|_{2,\Omega}. \quad (2.58)$$

Доказателство. Означаваме  $U = i_h u - u$ . Трябва да оценим трите събираеми, участващи в  $a(U, v)$ . Нека отбележим, че за събираемите

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy$$

разглежданията са аналогични.

Етап 1 Разглеждаме

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy, \quad \forall v \in V_h.$$

И така, за  $(x, y) \in T$  вторият множител допуска развитието:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{s=0}^4 \frac{(x - x_T)^s}{s!} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y),$$

вземайки предвид, че  $v(x, y)|_T \in Q_4(T)$ .

Следователно

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy = \sum_{T \in \tau_h} \sum_{s=0}^4 \int_T \frac{(x-x_T)^s}{s!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) dx dy. \quad (2.59)$$

Първото събираемо ( $s=0$ ) в дясната страна на (2.59) се анулира. Това следва от дефиницията на  $U(x, y)$  и при използване на формулата на Грийн, т.е.

$$\int_T \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_T, y) dx dy = 0. \quad (2.60)$$

За да преобразуваме останалите събираеми от (2.59), трябва да проверим дали функциите

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y), \quad s = 1, \dots, 4$$

удовлетворяват условията на Лема 2.2. Тогава зависимостите (2.54) и (2.55) от лемата биха били изпълнени съответно за  $s=1; 3$  и  $s=2; 4$ .

Нека  $i=2; 4$  и  $s=1, \dots, 4$ . Интегрирайки по части, получаваме:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) dy &= \frac{\partial U}{\partial y}(x_T \pm h_{1,T}, y) \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) \Big|_{y_T-h_{2,T}}^{y_T+h_{2,T}} \\ - \int_{I_i} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^{s+3} v}{\partial x^s \partial y^3}(x_T, y) dy &= -U(x_T \pm h_{1,T}, y) \frac{\partial^{s+3} v}{\partial x^s \partial y^3}(x_T, y) \Big|_{y_T-h_{2,T}}^{y_T+h_{2,T}} \\ &+ \int_{I_i} U \frac{\partial^{s+4} v}{\partial x^s \partial y^4}(x_T, y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

По аналогичен начин, лесно се установява равенството:

$$\int_{I_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) \right] dy = \int_{I_i} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) dy = 0, \quad (2.62)$$

като се има предвид дефиницията на функцията  $U$ .

За  $s=2; 4$ , използвайки формулата на Грийн, получаваме:

$$\begin{aligned}
\int_T \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) dx dy &= \left( \int_{I_3} - \int_{I_1} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) dx \\
- \int_T \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^{s+3} v}{\partial x^s \partial y^3}(x_T, y) dx dy &= \left( \int_{I_3} - \int_{I_1} \right) U \frac{\partial^{s+3} v}{\partial x^s \partial y^3}(x_T, y) dx \\
+ \int_T U \frac{\partial^{s+4} v}{\partial x^s \partial y^4}(x_T, y) dx dy &= 0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Отчитайки (2.61) и (2.62), прилагайки (2.54) of Лема 2.2, за функцията  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y)$  при  $s = 1$  и  $s = 3$  получаваме съответно:

$$\begin{aligned}
&\int_T (x - x_T) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(x_T, y) dx dy \\
&= \frac{1}{90} \int_T E^3(x) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(x_T, y) dx dy;
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
&\int_T \frac{(x - x_T)^3}{3!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^5 v}{\partial x^3 \partial y^2}(x_T, y) dx dy \\
&= \frac{1}{420 \cdot 3!} \int_T E^4(x) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^5 v}{\partial x^3 \partial y^2}(x_T, y) dx dy \\
&+ \frac{h_{1,T}^2}{210 \cdot 3!} \int_T E^3(x) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^5 v}{\partial x^3 \partial y^2}(x_T, y) dx dy.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

По подобен начин, вземайки предвид (2.61)–(2.63), прилагайки (2.55) от Лема 2.2, за същата функция, но при  $s = 2$  и  $s = 4$ , съответно ще имаме:

$$\begin{aligned}
&\int_T \frac{(x - x_T)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}(x_T, y) dx dy \\
&= -\frac{1}{1260 \cdot 2!} \int_T E^4(x) \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}(x_T, y) dx dy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_T \frac{(x - x_T)^4}{4!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy \\
&= -\frac{1}{4725.4!} \int_T E^5(x) \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy \\
&\quad - \frac{h_{1,T}^2}{1890.4!} \int_T E^4(x) \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy.
\end{aligned}$$

Възможно е при това доказване да запазим точността на метода, като намалим изискването за гладкост на решението. Действително, използвайки тъждеството

$$[E^k(x)]' = kE^{k-1}(x) \cdot (x - x_T), \quad k = 4; 5,$$

последните две равенства бихме могли да запишем във вида

$$\begin{aligned}
& \int_T \frac{(x - x_T)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}(x_T, y) dx dy \\
&= \frac{1}{315.2!} \int_T E^3(x)(x - x_T) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}(x_T, y) dx dy;
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
& \int_T \frac{(x - x_T)^4}{4!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{945.4!} \int_T E^4(x)(x - x_T) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy \\
&\quad + \frac{h_{1,T}^2}{1890.3!} \int_T E^3(x)(x - x_T) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y^2}(x, y) dx dy.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Десните страни на (2.64), (2.65) и (2.66) могат да бъдат преработени, като за функцията  $v \in \tau_h$  използваме развитието

$$\frac{\partial^{s+2} v}{\partial x^s \partial y^2}(x_T, y) = \sum_{i=s}^4 \frac{(x_T - x)^{i-s}}{(i-s)!} \frac{\partial^{i+2} v}{\partial x^i \partial y^2}(x, y), \quad s = 1, 2, 3; (x, y) \in T.$$



От (2.60), (2.64)–(2.67), използвайки обратното неравенство [102], окончателно получаваме

$$\int_T \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy \leq Ch^5 \|u\|_{7,T} \|v\|_{2,T}.$$

Следователно

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega} \|v\|_{2,\Omega}, \quad (2.68)$$

и аналогично

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega} \|v\|_{2,\Omega}. \quad (2.69)$$

Етап 2 Сега ще преобразуваме и оценяваме смесения член в  $a$ -формата. Нека първо отбележим, че са в сила следните равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy &= \sum_{T \in \tau_h} \left( \int_{I_3} - \int_{I_1} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ - \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy &= - \sum_{T \in \tau_h} \left( \int_{I_2} - \int_{I_4} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} v dx \\ + \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} v dx dy &= \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} v dx dy. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Действително, функциите

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} v$$

са непрекъснати съответно върху страни на елемента  $T$ , успоредни на осите  $x$  и  $y$ . От друга страна, при интегриране върху страна, която е обща за два съседни елемента, подинтегралната функция е една и съща, но интегрирането се извършва в противоположни посоки. За линейните интеграли, при които страната е част от границата  $\Gamma$ , предвид граничните условия, функцията  $v$  се анулира.

Очевидно следното представяне на  $v \in V_h$  е в сила:

$$v(x, y) = \sum_{i,j=0}^4 \frac{1}{i!j!} (x - x_T)^i (y - y_T)^j \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j} (x_T, y_T) \quad \forall (x, y) \in T.$$

Комбинирайки това равенство с (2.70), достигаме до основната зависимост, свързана със смесения член на бихармоничния оператор:

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} v \, dx \, dy \\ &= \sum_{i,j=0}^4 \int_T \frac{(x - x_T)^i (y - y_T)^j}{i!j!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j} (x_T, y_T) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ще оценяваме всяко събираемо в дясната страна на (2.71), като използваме резултатите от Лема 2.3.

Най-напред, от  $(R_1)$  следва, че при  $i, j = 0, 1, 2$

$$\int_T \frac{(x - x_T)^i (y - y_T)^j}{i!j!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j} (x_T, y_T) \, dx \, dy = 0. \quad (2.72)$$

По-нататък, релацията  $(R_2)$  ни позволява да получим съответните две равенства при  $i, j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{(x - x_T)^3 (y - y_T)^j}{3!j!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{3+j} v}{\partial x^3 \partial y^j} (x_T, y_T) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{15 \cdot 3!j!} \int_T E^3(x) (y - y_T)^j \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^{3+j} v}{\partial x^3 \partial y^j} (x_T, y_T) \, dx \, dy; \\ & \int_T \frac{(x - x_T)^i (y - y_T)^3}{i!3!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{i+3} v}{\partial x^i \partial y^3} (x_T, y_T) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{15 \cdot i!3!} \int_T (x - x_T)^i F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^{i+3} v}{\partial x^i \partial y^3} (x_T, y_T) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.73)$$

По аналогия с горните две равенства (2.73), посредством  $(R_3)$  се получават следващите две равенства при  $i; j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_T \frac{(x - x_T)^4 (y - y_T)^j}{4! j!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{4+j} v}{\partial x^4 \partial y^j} (x_T, y_T) dx dy \\
 &= -\frac{1}{105 \cdot 4! j!} \int_T E^4(x) (y - y_T)^j \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \frac{\partial^{4+j} v}{\partial x^4 \partial y^j} (x_T, y_T) dx dy \\
 &= \frac{1}{105 \cdot 3! j!} \int_T E^3(x) (x - x_T) (y - y_T)^j \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^{4+j} v}{\partial x^4 \partial y^j} (x_T, y_T) dx dy;
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_T \frac{(x - x_T)^i (y - y_T)^4}{i! 4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^{i+4} v}{\partial x^i \partial y^4} (x_T, y_T) dx dy \\
 &= -\frac{1}{105 \cdot i! 4!} \int_T (x - x_T)^i F^4(y) \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \frac{\partial^{i+4} v}{\partial x^i \partial y^4} (x_T, y_T) dx dy \\
 &= \frac{1}{105 \cdot i! 3!} \int_T (x - x_T)^i (y - y_T) F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^{i+4} v}{\partial x^i \partial y^4} (x_T, y_T) dx dy.
 \end{aligned}$$

Като следствие от  $(R_4)$  имаме

$$\begin{aligned}
 & \int_T \frac{(x - x_T)^3 (y - y_T)^3}{3! 3!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^3 \partial y^3} (x_T, y_T) dx dy \\
 &= \frac{1}{15 \cdot 3! \cdot 3!} \int_T E^3(x) (y - y_T)^3 \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^3 \partial y^3} (x_T, y_T) dx dy. \\
 & \quad + \frac{h_{1,T}^2}{25 \cdot 3! \cdot 3!} \int_T (x - x_T) F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^6 v}{\partial x^3 \partial y^3} (x_T, y_T) dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Въвеждаме равенствата

$$\int_T E^4(x) \frac{\partial^6 U}{\partial x^6} dx dy = -4 \int_T (x - x_T) E^3(x) \frac{\partial^5 U}{\partial x^5} dx dy,$$

$$\int_T F^4(y) \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} dx dy = -4 \int_T (y - y_T) F^3(y) \frac{\partial^5 U}{\partial y^5} dx dy,$$

които са валидни, когато функцията  $U$  е достатъчно гладка. От тях и от релацията  $(R_5)$  ще получим

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{(x - x_T)^4 (y - y_T)^3}{4!3!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^7 v}{\partial x^4 \partial y^3}(x_T, y_T) dx dy \\ &= \frac{1}{105.3!3!} \int_T E^3(x) (x - x_T) (y - y_T)^3 \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^7 v}{\partial x^4 \partial y^3}(x_T, y_T) dx dy \quad (2.76) \\ &+ \frac{2h_{1,T}^2}{35.4!3!} \int_T (x - x_T)^2 F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^7 v}{\partial x^4 \partial y^3}(x_T, y_T) dx dy \\ &- \frac{h_{1,T}^4}{175.4!3!} \int_T F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^7 v}{\partial x^4 \partial y^3}(x_T, y_T) dx dy. \end{aligned}$$

Подобно на (2.76), от  $(R_4)$  следва

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{(x - x_T)^3 (y - y_T)^4}{3!4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^7 v}{\partial x^3 \partial y^4}(x_T, y_T) dx dy \\ &= \frac{1}{105.3!3!} \int_T (x - x_T)^3 (y - y_T) F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^7 v}{\partial x^3 \partial y^4}(x_T, y_T) dx dy \quad (2.77) \\ &+ \frac{2h_{2,T}^2}{35.3!4!} \int_T E^3(x) (y - y_T)^2 \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^7 v}{\partial x^3 \partial y^4}(x_T, y_T) dx dy \\ &- \frac{h_{2,T}^4}{175.3!4!} \int_T E^3(x) \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^7 v}{\partial x^3 \partial y^4}(x_T, y_T) dx dy. \end{aligned}$$

Най-сетне, аналогично, от  $(R_6)$  ще получим

$$\begin{aligned}
 & \int_T \frac{(x-x_T)^4(y-y_T)^4}{4!4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^8 v}{\partial x^4 \partial y^4} dx dy \\
 = & \frac{1}{105 \cdot 4! \cdot 3!} \int_T E^3(x)(x-x_T)(y-y_T)^4 \frac{\partial^7 u}{\partial x^5 \partial y^2} \frac{\partial^8 v}{\partial x^4 \partial y^4} dx dy \quad (2.78) \\
 & + \frac{2h_{1,T}^2}{245 \cdot 4!4!} \int_T (x-x_T)^2(y-y_T)F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^8 v}{\partial x^4 \partial y^4} dx dy \\
 & - \frac{h_{1,T}^4}{1225 \cdot 4!4!} \int_T (y-y_T)F^3(y) \frac{\partial^7 u}{\partial x^2 \partial y^5} \frac{\partial^8 v}{\partial x^4 \partial y^4} dx dy.
 \end{aligned}$$

В десните страни на (2.73)–(2.77) можем да използваме, че

$$\frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j}(x_T, y_T) = \sum_{i_0=i, j_0=j}^4 \frac{(x-x_T)^{i_0-i}(y-y_T)^{j_0-j}}{(i_0-i)!(j_0-j)!} \frac{\partial^{i_0+j_0} v}{\partial x^{i_0} \partial y^{j_0}}(x, y)$$

за съответните стойности на  $i$  и  $j$ .

Тогава, от (2.72)–(2.78), при използване на обратното неравенство, получаваме

$$\int_T \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \leq Ch_T^5 \|u\|_{7,T} \|v\|_{2,T}.$$

Окончателно

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega} \|v\|_{2,\Omega}. \quad (2.79)$$

И така, трите събираеми в разглежданата  $a$ -форма са оценени посредством (2.67), (2.68) и (2.79), което завършва доказателството на теоремата. ■

Като следствие от тази теорема достигаме до следния резултат по ултра-сходимост:

**Теорема 2.8** Нека условията на Теорема 2.7 са изпълнени. Тогава

$$\|i_h u - R_h u\|_{2,\Omega} \leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega}. \quad (2.80)$$

Доказателство. При  $\rho = \text{const}$  последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \rho \|i_h u - R_h u\|_{2,\Omega}^2 &\leq a(i_h u - R_h u, i_h u - R_h u) && \text{(от } V\text{-елиптичност)} \\ &= a(i_h u - u, i_h u - R_h u) && \text{(елиптичен проектор)} \\ &\leq Ch^5 \|u\|_{7,\Omega} \|i_h u - R_h u\|_{2,\Omega} && \text{(от (2.58)).} \end{aligned}$$

■

За да конструираме интерполационния оператор  $I_{2h}$ , се налага да се позволим на едномерния случай.

Нека запазим същото означение за едномерното крайноеlementно разделяне, а именно

$$\tau_h = \{[p_{i-1}, p_i], i = 1, \dots, m\}.$$

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че  $m$  е естествено четно число. Тогава можем да образуваме двойки от съседни елементи от  $\tau_h$ .

Новото крайноеlementно разделяне се дефинира по следния начин:

$$\tilde{\tau}_{2h} = \left\{ [p_{2k-2}, p_{2k-1}] \cup [p_{2k-1}, p_{2k}], k = 1, \dots, \frac{m}{2} \right\}.$$

Интерполационният оператор  $I_{2h}$  е определен от условията за всеки краен елемент, принадлежащ на  $\tilde{\tau}_{2h}$ . Така за всяка гладка функция  $v$  се налагат условията

$$I_{2h} v(p_j) = v(p_j), \quad j = 2k - 2, 2k - 1, 2k;$$

$$[I_{2h} v]'(p_j) = v'(p_j), \quad j = 2k - 2, 2k - 1, 2k;$$

$$\int_{p_j}^{p_{j+1}} I_{2h} v(x) dx = \int_{p_j}^{p_{j+1}} v(x) dx, \quad j = 2k - 2, 2k - 1.$$

Да представим базисните функции, дефинирани за основния елемент, т.е. за  $\hat{t} \in [-1, 0] \cup [0, 1]$ :

$$\psi_{1,7}(\hat{t}) = \frac{1}{16} \hat{t}^2 (1 - \hat{t})^2 (\pm 72 \hat{t}^3 + 95 \hat{t}^2 \mp 14 \hat{t} - 33),$$

$$\psi_{2,8}(\hat{t}) = \frac{1}{16} \hat{t}^2 (1 - \hat{t})^2 (8 \hat{t}^3 \pm 9 \hat{t}^2 - 2 \hat{t} \mp 33),$$

$$\psi_{3,6}(\hat{t}) = \frac{1}{16} \hat{t}^2 (1 - \hat{t})^2 (1 + \hat{t})^2 (35 \mp 64 \hat{t}),$$

$$\psi_4(\hat{t}) = (1 - \hat{t})^2 (1 + \hat{t})^2 (1 - 7 \hat{t}^2),$$

$$\psi_5(\hat{t}) = \hat{t} (1 - \hat{t})^2 (1 + \hat{t})^2 (1 - 2 \hat{t})(1 + 2 \hat{t}).$$

Посредством афинната трансформация

$$\hat{t} = \frac{x - p_{2k-1}}{h},$$

където

$$h = \begin{cases} p_{2k} - p_{2k-1}, & x \in [p_{2k-1}, p_{2k}], \\ p_{2k-1} - p_{2k-2}, & x \in [p_{2k-2}, p_{2k-1}], \end{cases}$$

лесно се получават базисните функции  $\psi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, 8$  за всеки елемент  $[p_{2k-2}, p_{2k-1}] \cup [p_{2k-1}, p_{2k}] \in \tilde{\tau}_{2h}$ .

Множеството от степени на свобода е

$$v(p_j), hv'(p_j), j = 2k - 2, 2k - 1, 2k;$$

$$\frac{1}{h} \int_{p_j}^{p_{j+1}} v(x) dx, j = 2k - 2, 2k - 1.$$

За двумерния случай базисните функции са произведения на двойки едномерни базисни функции, т.е. за всеки краен елемент те са от вида  $\psi_{i,j}(x, y) = \psi_i(x)\psi_j(y)$ ,  $i, j = 1, \dots, 8$ .

Следователно, степените на свобода в двумерния случай са: (i) Стойностите на

$$v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

във върховете на четирите правоъгълника  $T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$ , образуващи пач  $\bigcup_{s=1}^4 T_s \in \tilde{\tau}_{2h}$ ; (ii) стойностите на интегралите от функциите  $v$  и  $\frac{\partial v}{\partial \nu}$  върху страните  $l_j$  на четирите обединени елемента  $T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$ ; (iii) стойностите на двойните интеграли от  $v$  върху четирите обединени елемента  $T_s$ ,  $s = 1, \dots, 4$ . Трябва да се отбележи, че при наличие на интегриране (диференциране) относно  $x$  или  $y$  в съответната степен на свобода е необходимо да се раздели (умножи) със съответната мярка  $h_1$  или  $h_2$ , характерна за мрежата  $\tau_h$ .

По този начин операторът  $I_{2h}$  е определен върху мрежата  $\tilde{\tau}_{2h}$  с характерен параметър  $2h$ , получена чрез подходящо групиране по четворки на съседни елементи  $T_s \in \tau_h$ ,  $s = 1, \dots, 4$ .

Нека  $\tilde{V}_{2h} \subset V$  е крайноелементното функционално пространство, свързано с разделянето  $\tilde{\tau}_{2h}$ . Тогава  $\tilde{V}_{2h}$  се състои от по части полиномиални функции от степен най-много 7 по всяка променлива, т.е. от  $Q_7(T)$ .

Поради характера на пачовата конструкция и избраните степени на свобода,

$$I_{2h} \circ i_h = I_{2h}. \quad (2.81)$$

Очевидно  $I_{2h} : V_h \rightarrow \tilde{V}_{2h}$  е ограничен оператор, т.е.

$$\|I_{2h}v\|_{r,\Omega} \leq C\|v\|_{r,\Omega} \quad \forall v \in V_h, \quad r = 0, 1, 2. \quad (2.82)$$

Накрая, като се има предвид, че локалните полиноми са от седма степен, то стандартните интерполационни свойства показват, че (виж [102], Теорема 3.1.5)

$$\|I_{2h}v - v\|_{2,\Omega} \leq Ch^5\|v\|_{7,\Omega}. \quad (2.83)$$

Следващата теорема съдържа основната оценка от тип ултрасходимост:

**Теорема 2.9** Ако решението  $u \in H^7(\Omega)$ , то в сила е следната оценка:

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{2,\Omega} \leq Ch^5\|u\|_{7,\Omega}. \quad (2.84)$$

Доказателство. Свойството (2.81) ни дава

$$I_{2h} \circ R_h u - u = I_{2h} \circ (R_h u - i_h u) + (I_{2h} u - u).$$



От (2.82) получаваме

$$\|I_{2h} \circ R_h u - u\|_{2,\Omega} \leq \|R_h u - i_h u\|_{2,\Omega} + \|I_{2h} u - u\|_{2,\Omega}.$$

Прилагайки оценката (2.83) и Теорема 2.8, завършваме доказателството. ■

## 2.5 Суперблизост между елиптически проектор и приближена собствена функция

Резултатът от този параграф има фундаментален характер. Ще покажем, че приближената собствена функция, получена по метод на Галъоркин за даден самоспрегнат елиптически оператор от ред  $2m$  и съответният елиптически (Рицов) проектор на точното решение са суперблизки. Тази връзка между елиптически спектрални и елиптически гранични задачи е необходима при използване на суперсходящи пост-процедури. Нейното директно приложение ще бъде разгледано в следващия §2.6.

Нека  $(\lambda, u(x))$  е точна собствена двойка на елиптическата самоспрегната задача от ред  $2m$ : търсим число  $\lambda \in \mathbf{R}$  и ненулева функция  $u(x) \in V$ , такива, че

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (2.85)$$

където  $V$  е затворено подпространство на  $H^m(\Omega)$ , т.е.  $H_0^m(\Omega) \subseteq V \subseteq H^m(\Omega)$ , а  $\Omega$  е ограничена област в  $\mathbf{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  с Липшицова граница  $\Gamma$ .

Предполагаме, че  $a$ -формата в (2.85) удовлетворява следните условия:

(i) Тя е симетрична и коерцитивна във  $V$ :

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \rho \|v\|_{m,\Omega}^2 \leq a(v, v), \quad \forall u, v \in V, \quad (2.86)$$

където  $\rho$  е положителна константа;

(ii) Тя е непрекъсната, т.е.

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{m,\Omega} \|v\|_{m,\Omega}, \quad \forall u, v \in V.$$

Задачата (2.85) има изброимо множество от собствени стойности, които са положителни и с крайна кратност [104, 120].

Билинейната форма е породена от различни гранични условия и от следния самоспрегнат елиптически оператор:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{p_\alpha(x) D^\alpha u(x)\}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

За коефициентите  $p_\alpha(x)$  се предполага, че са реалнозначни функции от множеството  $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ , като производните им до ред  $|\alpha|$  върху  $\Omega$  могат да бъдат непрекъснато продължени в  $\overline{\Omega}$ .

Задачата (2.85) е породена от следната диференциална задача с хомогенни гранични условия :

$$\begin{aligned} Au(x) &= \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ Bu(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2.87}$$

където

$$B = \{B_j\}_{j=1}^m, \quad B_j u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} s_{j,\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad j = 1, \dots, m$$

са линейно независими гранични условия.

Задачата (2.87) се явява обща задача за собствени стойности от ред  $2m$ . Допускаме, че елиптическите оператори  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  са такива, че се удовлетворяват условията (2.86) за  $a$ -формата. Едномерният случай ( $d = 1$ , когато  $\Omega = (a, b)$ ) допуска  $2m$  по-обща хомогенни гранични условия.

На всяка двойка  $(\lambda, u(x))$ , която е решение на (2.85), ние съпоставяме нейното приближение  $(\lambda_h, u_h(x))$  по МКЕ, т.е. това е решение на задачата:

$$\lambda_h \in \mathbf{R}, \quad u_h \in V_h, \quad a(u_h, v) = \lambda_h(u_h, v) \quad \forall v \in V_h. \tag{2.88}$$

В нашия случай на крайноелементното разделяне  $\tau_h$  на областта  $\Omega$  ние съпоставяме крайномерното пространство  $V_h$ ,  $V_h \subset V \cap C^{m-1}(\overline{\Omega})$ , такова, че рестрикцията на всяка функция  $v \in V_h$  върху всеки краен елемент  $T \in \tau_h$  е полином от степен най-много  $n$ .

Нека да представим оптималните оценки за МКЕ, като е задължително неравенството  $n \geq 2m - 1$  (виж [30, 94, 104]):

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C(\lambda) h^{2(n+1-m)} \|u\|_{n+1, \Omega}^2, \tag{2.89}$$

$$\|u - u_h\|_{m, \Omega} \leq C(\lambda) h^{n+1-m} \|u\|_{n+1, \Omega}, \tag{2.90}$$

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq C(\lambda) h^{n+1} \|u\|_{n+1, \Omega}. \tag{2.91}$$

Решенията на (2.85) и (2.88) са свързани с отношението на Релей [104]:

$$\lambda = \frac{a(u, u)}{(u, u)} \quad \text{и} \quad \lambda_h = \frac{a(u_h, u_h)}{(u_h, u_h)}.$$

Нека  $R_h : V \rightarrow V_h$  да означава елиптически (Рицов) проекционен оператор, който е дефиниран чрез равенството:

$$\forall u \in V, \forall v \in V_h \quad a(u - R_h u, v) = 0.$$

Ако функцията  $u(x)$  принадлежи на пространството  $H^{n+1}(\Omega) \cap V$ , то [104]

$$\|u - R_h u\|_{m, \Omega} \leq Ch^{n+1-m} \|u\|_{n+1, \Omega}. \quad (2.92)$$

Нека  $(\lambda_h, u_h)$  е крайноеlementно приближение на точното решение  $(\lambda, u)$ . Нашата цел е да получим оценка на разликата  $u_h - R_h u$  в  $H^m$ -норма с порядък, по-висок от този в оценките (2.90) и (2.92). Така елиптическият проектор на точното решение ще апроксимира по-добре съответното крайноеlementно решение. Нека отбележим, че двете функции са от едно и също функционално пространство. Така ние ще докажем свойството суперблизост между тях. Същото свойство, когато става въпрос за спектъра на Лапласовия оператор, е доказано от Лин, Йан и Жоу [84].

Полученият тук резултат е много по-общ от този в [84] и използва коренно различен подход. Трябва да подчертаем, че свойството суперблизост съществува между приближената собствена функция  $u_h$  и съответния Лагранжев интерполант  $u_I$  (виж §1.5, както и [6, 17]). Този резултат позволява да се определят точките на суперсходимост за собствените функции на елиптическите самоспрегнати оператори.

Следващата теорема съдържа основния резултат на настоящия параграф:

**Теорема 2.10** *Нека собствената функция  $u(x)$  принадлежи на  $H^{n+1}(\Omega) \cap V$  и нека  $u_h(x)$  е съответното приближено решение, получено от (2.88). Тогава*

$$\|u_h - R_h u\|_{m, \Omega} \leq Ch^{n+1+s} \|u\|_{n+1, \Omega}, \quad (2.93)$$

където  $s$  е цяло число от интервала  $[0, m]$ .

*Доказателство.* Като използваме (2.86), ще получим

$$\rho \|u_h - R_h u\|_{m, \Omega}^2 \leq a(u_h - R_h u, u_h - R_h u).$$

Нека означим  $u_h - R_h u = z_h \in V_h$ . От свойството за ортогоналност на оператора  $R_h$  следва

$$\begin{aligned}
 \rho \|z_h\|_{m,\Omega} &\leq \lambda_h(u_h, z_h) - a(R_h u, z_h) \\
 &= (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h, z_h) - a(u, z_h) \\
 &= (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h - u, z_h) + \lambda(u, z_h) - a(u, z_h) \\
 &= (\lambda_h - \lambda)(u_h, z_h) + \lambda(u_h - u, z_h) \\
 &\leq |\lambda_h - \lambda| \|u_h\|_{0,\Omega} \|z_h\|_{m,\Omega} + \lambda \|u_h - u\|_{-s,\Omega} \|z_h\|_{m,\Omega}.
 \end{aligned}$$

В последната стъпка използвахме дуалността в пространства с отрицателни норми. Ограничението за параметъра  $s$  следва от (виж [106], стр. 81):

- $0 \leq s \leq n + 1 - 2m$ ;
- За  $z_h$  можем да получаваме най-много  $m$ -та норма.

Тогава (виж отново [106])

$$\|u - u_h\|_{-s,\Omega} \leq Ch^{n+1+s} \|u\|_{n+1,\Omega}.$$

Тъй като трябва да отчетем и оценката (2.89), то от горните ограничения за параметъра  $s$ , както и от основното ограничение  $n + 1 \geq 2m$ , следва

$$n + 1 + s \leq 2(n + 1 - m).$$

От това неравенство, след съкращаване на  $\|z_h\|_{m,\Omega}$ , ще получим оценката (2.93). ■

**Забележка 2.6** Оценка с най-висок порядък ще има при  $s = m$ , т.е. когато  $n + 1 - 2m \geq m$ , или  $n + 1 \geq 3m$ . Тогава оценката е с  $2m$  порядъка повече от оптималната (ултрасходимост). Другият екстремален случай е  $s = 0$ . Той се получава при използването на полиноми от възможно най-ниска степен. Например при  $m = 1$  и  $n = 1$  ще получим "само" суперсходимост, т.е. с един порядък повече от оптималния, а в общия случай степените на полиномите са  $n = 2m - 1$ .

**Забележка 2.7** Елиптическият проектор  $R_h u$  е по-близко до приближеното решение  $u_h$ , отколкото крайноелементния интерполант  $u_I$  (виж [6, 17]). Това се дължи на факта, че  $u_I$  не притежава ортогонално свойство по отношение на билинейната  $a$ -форма.

С оглед на нашите бъдещи приложения на резултата от Теорема 2.10, ще отделим по-голямо внимание на елиптическата самоспрегната задача от четвърти ред ( $m = 2$ ) [9]. Нашето обобщение се фокусира върху дясната част за задачите (2.85) и (2.87).

И така, да разгледаме задачата от четвърти ред: търсим  $\lambda \in \mathbf{R}$  и  $u(x) \in V$ ,  $u \neq 0$  така, че

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (2.94)$$

където  $H_0^2(\Omega) \subseteq V \subseteq H^2(\Omega)$ .

Предполагаме, че  $a$ -формата е непрекъсната и удовлетворява условията (2.86) при  $m = 2$ .

Освен това  $b$ -формата е симетрична и коерцитивна, т.е. ( $\rho_0 = \text{const} > 0$ )

$$b(u, v) = b(v, u), \quad \rho_0 \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq b(v, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Предполагаме също, че  $b$ -формата е ограничена в  $H^1(\Omega)$ :

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (2.95)$$

Задача (2.94) е породена от следната линейна диференциална задача с хомогенни гранични условия:

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda \mathcal{B}u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.96)$$

където

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^{|\alpha|} \{p_\alpha(x) D^{|\alpha|} u(x)\},$$

$$\mathcal{B}u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^{|\alpha|} \{q_\alpha(x) D^{|\alpha|} u(x)\}.$$

Коефициентите  $p_\alpha(x)$  и  $q_\alpha(x)$  са реалнозначни функции от пространството  $C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ .

**Забележка 2.8** Като пример за задача от типа (2.96) можем да посочим бихармоничната задача

$$\Delta^2 u(x) = \lambda \Delta u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

изследвана в [87].

Да разгледаме крайноелементната апроксимация на (2.94): търсим  $\lambda_h \in \mathbf{R}$  и  $u_h(x) \in V_h$ ,  $u_h(x) \neq 0$  такива, че

$$a(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v), \quad \forall v \in V_h, \quad (2.97)$$

където крайномерното пространство  $V_h \subset V \cap C^1(\bar{\Omega})$  се състои от такива функции, чиято рестрикция върху всеки краен елемент е полином от степен най-много  $n$  и  $n \geq 3$ .

Оптималните оценки за собствените функции и собствени стойности се определят от следните неравенства (виж [30, 94, 104]):

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C(\lambda) h^{2(n-1)} \|u\|_{n+1, \Omega}^2, \quad (2.98)$$

$$\|u - u_h\|_{s, \Omega} \leq C(\lambda) h^{n+1-s} \|u\|_{n+1, \Omega}, \quad s = 0, 1, 2. \quad (2.99)$$

Ако  $u \in H^{n+1}(\Omega) \cap V$ , то за елиптическия проектор е валидна оценката

$$\|u - R_h u\|_{s, \Omega} \leq C h^{n+1-s} \|u\|_{n+1, \Omega}, \quad s = 0, 1, 2. \quad (2.100)$$

За да докажем нашия основен резултат за задачата (2.96), ще предположим регулярност на точната и приближената задача в слаба формулировка, съответно (2.94) и (2.97), така че оценките (2.98), (2.99) и (2.100) да са валидни.

**Теорема 2.11** *Нека собствената функция  $u(x) \in H^{n+1}(\Omega) \cap V$  и нека  $u_h(x)$  е нейното крайноелементно приближение, получено от (2.97) при използване на апроксимирани полиноми от степен  $n$ . Тогава*

$$\|u_h - R_h u\|_{2, \Omega} \leq C h^n \|u\|_{n+1, \Omega}. \quad (2.101)$$

*Ако освен това коефициентите на диференциалния оператор  $\mathcal{B}$  принадлежат на  $W^{2, \infty}(\Omega)$  и  $u(x) \in H^{n+1}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , то*

$$\|u_h - R_h u\|_{2, \Omega} \leq C h^{n+1} \|u\|_{n+1, \Omega}. \quad (2.102)$$

Доказателство. Аналогично на доказателството на предходната Теорема 2.10, след полагане  $u_h - R_h u = z_h$  последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho \|z_h\|_{2,\Omega}^2 &\leq (\lambda_h - \lambda)b(u_h, z_h) + \lambda b(u_h - u, z_h) \\ &\leq C_1 |\lambda_h - \lambda| \|z_h\|_{2,\Omega} + C_2 |b(u_h - u, z_h)|. \end{aligned}$$

От (2.95) лесно следва

$$|b(u_h - u, z_h)| \leq C \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|z_h\|_{2,\Omega}.$$

Впрочем,

$$\|z_h\|_{2,\Omega}^2 \leq C(\lambda) (|\lambda - \lambda_h| + \|u - u_h\|_{1,\Omega}) \|z_h\|_{2,\Omega}.$$

Отчитайки (2.98) и (2.99), при  $n \geq 3$  ще получим оценката (2.101).

За да докажем (2.102), ще използваме условията на теоремата. При  $u_h \in H_0^2(\Omega)$  имаме:

$$\begin{aligned} b(u_h - u, z_h) &= (u_h - u, \mathcal{B}z_h) \\ &\leq \|u_h - u\|_{0,\Omega} \|\mathcal{B}z_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|u_h - u\|_{0,\Omega} \|z_h\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Оценката (2.102) следва от последното неравенство и (2.99). ■

## 2.6 Апостериорен процес от интерполационен тип за самоспрегнати спектрални задачи

Сега ще дадем директно приложение на резултатите от предходния параграф. Благодарение на Теорема 2.10 (или Теорема 2.11) е възможно прилагането на апостериорната техника, която разгледахме в тази глава. Освен това ще имаме възможност още веднъж (виж §1.5) да се убедим, че суперсходящият анализ за спектрални задачи се основава на доказателството за суперблизост на функции от крайномерно пространство.

Преди да докажем резултата за ултрасходимост (суперсходимост), ще ни бъде необходима следната лема:

**Лема 2.4** Нека  $(\lambda, u)$  е решение на (2.85), като собствените функции са нормирани посредством  $\|u\|_{0,\Omega} = 1$ . Тогава за всяка функция  $w \in H_0^m(\Omega)$  и  $w \neq 0$  е в сила неравенството

$$\left| \frac{a(w, w)}{(w, w)} - \lambda \right| \leq C \frac{\|w - u\|_{m,\Omega}^2}{(w, w)}. \quad (2.103)$$

Доказателство. Въвеждаме означението

$$w - u - \varphi \in H_0^m(\Omega).$$

Тогава  $w = u + \varphi$ . Така неравенството (2.103) е еквивалентно на

$$|a(u + \varphi, u + \varphi) - \lambda(u + \varphi, u + \varphi)| \leq C \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 \quad \forall \varphi \in H_0^m(\Omega).$$

Лесно преработваме лявата страна на горното неравенство:

$$\begin{aligned} & |a(u, u) + 2a(u, \varphi) + a(\varphi, \varphi) - \lambda(u, u) - 2\lambda(u, \varphi) - \lambda(\varphi, \varphi)| \\ &= |a(u, u) + a(\varphi, \varphi) - \lambda - \lambda(\varphi, \varphi)|. \end{aligned}$$

Като се отчете, че  $a(u, u) = \lambda$ , получаваме

$$\begin{aligned} |a(u + \varphi, u + \varphi) - \lambda(u + \varphi, u + \varphi)| &= |a(\varphi, \varphi) - \lambda(\varphi, \varphi)| \\ &\leq C_1 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 + \lambda \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C \|\varphi\|_{m,\Omega}^2, \end{aligned}$$

което завършва доказателството на лемата. ■

Ако направим същите разсъждения за задачата от четвърти ред (2.94), то, използвайки непрекъснатостта на  $a$  и  $b$ -формите, получаваме резултат, аналогичен на този от Лема 2.4:

Ако  $(\lambda, u)$  е някое точно решение на (2.94), то за всяка ненулева функция  $w \in H^2(\Omega)$

$$\left| \frac{a(w, w)}{b(w, w)} - \lambda \right| \leq C \frac{\|w - u\|_{2,\Omega}^2}{b(w, w)}. \quad (2.104)$$



Апостериорните SPR-методи са много подходящи за получаване на алгоритми, ускоряващи сходимостта на приближеното решение за спектрални задачи от разглежданите видове. В това отношение избраният от нас интерполационен подход не прави изключение. За тази цел, нашата ключова оценка е следната: За някоя функция  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $k \geq n + 1$ ,

$$\|I_{2h}R_h u - u\|_{m,\Omega} \leq Ch^k \|u\|_{k+1,\Omega}. \quad (2.105)$$

Тази оценка е от тип ултрасходимост. Тя беше обект на изследване в предходните параграфи на тази глава. Нека изброим различните случаи: оценка (2.22) за задача от втори ред с използване на 6-точкови триъгълни крайни елементи; Теорема 2.6 за едномерна елиптична задача от четвърти ред и Теорема 2.9 за елиптична задача от четвърти ред в равнината.

Ултрасходящият апостериорен процес за самоспрегната елиптична спектрална задача от ред  $2m$  е следствие от:

- Свойството суперблизост между Рицовия проектор на собствената функция  $R_h u$  и съответното крайномерно решение  $u_h$  (виж Теорема 2.10);
- Апостериорната процедура на базата на покритие от пачове, даваща ултрасходящата оценка (2.105).

Въвеждаме означението  $\alpha = \min(n + 1 + s, k)$ .

**Теорема 2.12** Нека  $(\lambda, u)$  е точна собствена двойка на задачата (2.85) и нека  $(\lambda_h, u_h)$  е нейното приближение по МКЕ от (2.88). Тогава, ако оценката (2.105) е изпълнена за функцията  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ , то

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{m,\Omega} \leq Ch^\alpha \|u\|_{k+1,\Omega}, \quad (2.106)$$

$$\left| \frac{\alpha(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda \right| \leq Ch^{2\alpha} \|u\|_{k+1,\Omega}^2. \quad (2.107)$$

**Доказателство.** За първата от оценките (2.106) последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \|I_{2h}u_h - u\|_{m,\Omega} &\leq \|I_{2h}u_h - I_{2h}R_h u\|_{m,\Omega} + \|I_{2h}R_h u - u\|_{m,\Omega} \\ &\leq \|I_{2h}\| \|u_h - R_h u\|_{m,\Omega} + \|I_{2h}R_h u - u\|_{m,\Omega}. \end{aligned}$$

Интерполационният оператор  $I_{2h} : V_h \rightarrow \tilde{V}_h$  има краен ранг, т.е.  $\dim \mathcal{R}(I_{2h}) < \infty$ . Следователно, той е компактен и

$$\|I_{2h}\| = \frac{\sup_{v_h \in V_h} \|I_{2h}v_h\|_{m,\Omega}}{\|v_h\|_{m,\Omega}} \leq C = \text{const.}$$

От Теорема 2.10 и оценката (2.105) следва

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{m,\Omega} \leq C_1 h^{n+1+s} \|u\|_{n+1,\Omega} + C_2 h^k \|u\|_{k+1,\Omega}.$$

Последното неравенство доказва оценката (2.106).

Резултатът (2.107) е директно приложение на Лема 2.4 с използване на предната оценка (2.106):

$$\begin{aligned} \left| \frac{a(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda \right| &\leq C \frac{\|I_{2h}u_h - u\|_{m,\Omega}^2}{\|I_{2h}u_h\|_{0,\Omega}^2} \\ &\leq Ch^{2\alpha} \|u\|_{k+1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

■

Накрая ще се спрем и на задачата от четвърти ред (2.94), за която дясната страна не е  $L_2$ -скаларно произведение [9].

**Теорема 2.13** Нека условията на Теорема 2.11 са изпълнени така, че оценката (2.102) е валидна. Нека освен това оценката (2.105) е изпълнена за  $m = 2$  и  $u(x) \in H^{k+1}(\Omega)$ . Тогава

$$\|I_{2h}u_h - u\|_{2,\Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{k+1,\Omega}, \quad (2.108)$$

$$\left| \frac{a(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)}{b(I_{2h}u_h, I_{2h}u_h)} - \lambda \right| \leq Ch^{2(n+1)} \|u\|_{k+1,\Omega}^2. \quad (2.109)$$

**Доказателство.** Доказателството е аналогично на това на предходната Теорема 2.12. За неравенството (2.108) използваме (2.105) при  $m = 2$  и (2.102). За да докажем ултрасходимост за собствените стойности, достатъчно е да приложим доказаната оценка (2.108) и неравенство (2.104).

■

**Забележка 2.9** В случай, при който вместо (2.102) е в сила оценката (2.101), ще получим порядък, който е с единица по-малък за собствените функции в  $H^2$ -норма и с два порядъка по-малък за собствените стойности в оценка (2.109).

**Забележка 2.10** Постпроцедурите от интерполационен тип могат успешно да се приложат за едномерни спектрални задачи с параметър в граничните условия. При тези задачи се получава  $\alpha$ -форма със стойности на функцията в точка (гранично условие). Това е отразено и в Забележка 2.4. Нестандартните условия в точки (върхове) при пачовото покритие могат да бъдат наложени съобразно граничните условия (виж Пример 2.4 от §2.7). Повишеният порядък на сходимост се запазва и в този случай. Такава процедура обаче е възможна само за едномерния случай. Едномерните гранични задачи, при които собствената честота се появява в някое от граничните условия, имат интересни и важни приложения в механиката. Вариационните представяния и свойства на такива проблеми от четвърти ред се дискутират в [98].

## 2.7 Числени примери

Числените примери за тази глава обхващат представените случаи, за които доказахме по-висока сходимост чрез интерполирани крайни елементи в SPR-методите. При задачите за собствени стойности е използван същият итерационен метод и същият стоп-критерий, както за примерите от предходната Глава 1.

**Пример 2.1** Ще започнем с едномерна задача от четвърти ред с хомогенни гранични условия (виж Забележка 2.3):

$$y^{IV} = x^3(1-x)^3, \quad x \in (0, 1),$$

$$y(x)|_{x=0;1} = y'(x)|_{x=0;1} = 0.$$

Точното решение на тази задача е

$$u(x) = \frac{1}{7!}(2x^2 - 3x^3 + 6x^7 - 9x^8 + 5x^9 - x^{10}).$$

Крайноелементното решение е получено чрез апроксимиращи полиноми от степен 4. Използваме апостериорна процедура чрез  $I_{2h}u_h$ , описана в §2.3, където  $u_h$  е решението на разглежданата задача по МКЕ.

Данните от Таблица 2.1 показват например, че резултатът при  $h = \frac{1}{16}$  при използване на оператора  $I_{2h}$  е с такава точност, каквато е постигната при 4 пъти по-гъста мрежа, без използване на апостериорна процедура.

Таблица 2.1

$h$	1/16	1/32	1/64
$\ u - u_h\ _{2,\Omega}$	$2.2 \times 10^{-7}$	$2.8 \times 10^{-8}$	$3.5 \times 10^{-9}$
$\ u - I_{2h}u_h\ _{2,\Omega}$	$2.8 \times 10^{-9}$	$4.9 \times 10^{-11}$	$7.9 \times 10^{-13}$

**Пример 2.2** В този пример се прилага апостериорна покриваща техника чрез интерполирани крайни елементи за уравнение от четвърти ред. Макар примерът да е едномерен, той би могъл да илюстрира теорията, изложена в §2.4 за правоъгълни крайни елементи, както и изложената в §2.6.

Да разгледаме моделен проблем, описващ непринудените колебания на еластичен прът с дължина  $l$ , подпрян в двата си края. Предполагаме, че неговата коравина на еластичност и плътността му са единици. Решаваме следната диференциална система:

$$u^{IV} = \lambda u, \quad x \in (0, l),$$

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

$$u(l) = u'(l) = 0.$$

Точните собствени стойности  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  удовлетворяват уравнението ( $k_j = \sqrt[4]{\lambda_j}$ ):

$$\cos k_j l \cosh k_j l = 1.$$

Съответните точни собствени функции са:

$$u_j(x) = C [(\sinh k_j l - \sin k_j l)(\cosh k_j x - \cos k_j x) - (\cosh k_j l - \cos k_j l)(\sinh k_j x - \sin k_j x)],$$

където коефициентът  $C$  се определя от нормировката на тези функции.

Когато  $l = 1$ , първите три точни собствени стойности са:

$$\lambda_1 = 500.563901740433,$$

$$\lambda_2 = 3803.53708049787,$$

$$\lambda_3 = 14617.6301311223.$$

Таблица 2.2 и Таблица 2.3 илюстрират ефективността на апостериорната техника.  $N_e$  означава броят на елементите в разделянето  $\tau_h$ .

**Таблица 2.2:** Стойности на грешката  $\|u_j - u_{h,j}\|_{2,\Omega}$

$N_e$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
8	0.88	0.16	$1.1 \times 10^{-2}$
16	0.19	$1.9 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$
32	$2 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-4}$

**Таблица 2.3:** Стойности на грешката  $\|u_j - I_{2h}u_{h,j}\|_{2,\Omega}$

$N_e$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
8	$6.8 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-5}$
16	$2.6 \times 10^{-2}$	$7.1 \times 10^{-3}$	$2.3 \times 10^{-5}$
32	$9.5 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-4}$	$9.1 \times 10^{-6}$

Нека означим

$$\tilde{\lambda}_{h,j} = \frac{a(I_{2h}u_{h,j}, I_{2h}u_{h,j})}{(I_{2h}u_{h,j}, I_{2h}u_{h,j})}.$$

Таблица 2.4 и Таблица 2.5 илюстрират теоретичните резултати, отнасящи се за собствените стойности. В получените оценки се забелязва ефективността на апостериорната процедура при груба мрежа.

Таблица 2.4: Стойности на грешката  $|\lambda_j - \lambda_{h,j}|_{2,\Omega}$

$N_e$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
8	0.78	$2.5 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-4}$
16	$3.8 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-6}$
32	$4.1 \times 10^{-4}$	$6.4 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-8}$

Таблица 2.5: Стойности на грешката  $|\lambda_j - \tilde{\lambda}_{h,j}|_{2,\Omega}$

$N_e$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
4	0.27	$1.8 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-6}$
8	$4.2 \times 10^{-3}$	$2.4 \times 10^{-6}$	$3.1 \times 10^{-9}$
16	$7 \times 10^{-4}$	$4.1 \times 10^{-9}$	$4.4 \times 10^{-10}$

**Пример 2.3** С този пример илюстрираме теорията, представена в §2.2, §2.5 и §2.6. Пресмятанията се извършват чрез използване на 6-точкови триъгълни и 8-точкови Серендипови правоъгълни крайни елементи. Разглеждаме следната задача:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

където  $\Omega = (0, l) \times (0, l)$  и  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Първите четири собствени двойки на разглеждания проблем са:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{l^2}, \quad u_1(x, y) = C \sin \frac{\pi}{l}x \sin \frac{\pi}{l}y;$$

$$\lambda_2 = \frac{5\pi^2}{l^2}, \quad u_2(x, y) = C \sin \frac{\pi}{l}x \sin \frac{2\pi}{l}y;$$

$$\lambda_3 = \frac{5\pi^2}{l^2}, \quad u_3(x, y) = C \sin \frac{2\pi}{l}x \sin \frac{\pi}{l}y;$$

$$\lambda_4 = \frac{8\pi^2}{l^2}, \quad u_4(x, y) = C \sin \frac{2\pi}{l}x \sin \frac{2\pi}{l}y.$$

В Таблица 2.6 са представени резултати от пресмятания с триъгълни 6-точкови елементи при  $l = 1$ . Пресмятанията са за  $N_e = 32; 128; 512$ , където  $N_e$  означава броят на използваните елементи. Първите четири точни собствени стойности са

$$\lambda_1 = 19.7392088022, \lambda_{2,3} = 49.3480220054, \lambda_4 = 78.9568352087.$$

В таблицата са сравнени стойностите на  $\lambda_{h,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , получени по МКЕ посредством споменатите крайни елементи (FE) и техните подобрени стойности, получени чрез използване на апостериорна покриваща техника (SPR). Иека подчертаем, че е разумно да прилагаме такава апостериорна техника само върху груба мрежа.

Таблица 2.6

$N_e$		$ \lambda_1 - \lambda_{h,1} $	$ \lambda_2 - \lambda_{h,2} $	$ \lambda_3 - \lambda_{h,3} $	$ \lambda_4 - \lambda_{h,4} $
32	FE	$6.6 \times 10^{-2}$	0.53	1.04	3.21
32	SPR	$5.7 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-2}$	0.23	1.21
128	FE	$4.4 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	$7.4 \times 10^{-2}$	0.28
128	SPR	$9.4 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-3}$	$4.7 \times 10^{-2}$
512	FE	$2.8 \times 10^{-4}$	$2.6 \times 10^{-3}$	$4.8 \times 10^{-3}$	$2.8 \times 10^{-2}$
512	SPR	$1.5 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-5}$	$9.2 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-3}$

Таблица 2.7 и Таблица 2.8 съдържат резултати от пресмятания по МКЕ и с използване на интерполационна процедура чрез 8-точкови правоъгълни елементи за  $N_e = 16; 36; 64$ . В Таблица 2.7 са сравнени крайноелементните приближения  $\lambda_{h,j}$  на собствените стойности и техните подобрения  $\tilde{\lambda}_{h,j}$ , получени посредством покриващата апостериорна процедура, която обединява всеки 4 съседни елемента в пач.

Таблица 2.7

$N_e$	16	36	64
$\lambda_{h,1}$ $\tilde{\lambda}_{h,1}$	19.7493180513 19.7392377680	19.7412403886 19.7392108553	19.7398555788 19.7392102567
$\lambda_{h,2}$ $\tilde{\lambda}_{h,2}$	49.6506604280 49.3494876511	49.4117157727 49.3488302530	49.3688522084 49.3482370004
$\lambda_{h,3}$ $\tilde{\lambda}_{h,3}$	49.7000190559 49.3990486874	49.4339097637 49.3710485246	49.3921333268 49.3584525122
$\lambda_{h,4}$ $\tilde{\lambda}_{h,4}$	102.195699803 93.8779184523	99.9313207004 90.6475349121	98.5022915765 88.7411349267



В Таблица 2.8 е показана ефективността на покриващата апостериорна процедура при пресмятане на собствени функции.

Таблица 2.8

$N_e$	16	36	64
$\ u_1 - u_{h,1}\ _{2,\Omega}$ $\ u_1 - I_{2h}u_{h,1}\ _{2,\Omega}$	0.14 $7.2 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-2}$ $1.9 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-2}$ $1.1 \times 10^{-3}$
$\ u_2 - u_{h,2}\ _{2,\Omega}$ $\ u_2 - I_{2h}u_{h,2}\ _{2,\Omega}$	0.77 $5.2 \times 10^{-2}$	0.33 $3 \times 10^{-2}$	0.19 $1.9 \times 10^{-2}$
$\ u_3 - u_{h,3}\ _{2,\Omega}$ $\ u_3 - I_{2h}u_{h,3}\ _{2,\Omega}$	0.82 0.29	0.39 0.19	0.26 0.12
$\ u_4 - u_{h,4}\ _{2,\Omega}$ $\ u_4 - I_{2h}u_{h,4}\ _{2,\Omega}$	6.79 4.46	6.43 4.13	6.15 3.42

**Пример 2.4** Последният числен пример се занимава със случая, когато собствените честоти участват линейно в граничните условия. Едномерните спектрални задачи от този вид допускат прилагането на постпроцедурата, разгледана в тази глава (виж Забележка 2.4, Забележка 2.10).

Еластичен прът с дължина  $l$  е подпрян в единия си край, а другият край е еластично ограничен [71]. Задачата за определяне на критичните натоварвания, действащи в десния край на пръта, довежда до решаването на следния проблем: да се намерят най-малките собствени честоти и съответните им функции на формата от следната диференциална система:

$$(\alpha u'')'' = -\lambda u'', \quad x \in (0, l),$$

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

$$u''(l) = 0, \quad [(cu'')' - cu' + \lambda u]_{x=l} = 0,$$

където  $\alpha(x)$  е коравината на еластичност, плътността на пръта е приета за единица, а  $c$  е коефициентът на твърдост за еластичния контакт в граничната точка.

Задачата има вариационна формулировка

$$a(u, v) = \lambda b(u, v),$$

където съответните билинейни форми са

$$a(u, v) = \int_0^l \alpha u'' v'' dx + cu(l)v(l); \quad b(u, v) = \int_0^l u' v' dx.$$

Нека подчертаем появата на стойност в точка (вследствие на граничните условия) в билинейната  $a$ -форма [10]. Когато  $\alpha \equiv 1$ , собствените стойности се определят от положителните корени  $k$  на трансцендентното уравнение  $\lambda = k^2$ :

$$c \sin kl = (ckl - k^3) \cos kl.$$

При  $l = 1$  и  $c = 0.7$  първите три собствени стойности са:

$$\lambda_1 = 3.032625505, \quad \lambda_2 = 22.27146216, \quad \lambda_3 = 61.70797316.$$

Числовите пресмятания за  $\lambda_{h,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  са представени в Таблица 2.9. Те са пресметнати по МКЕ, когато апроксимиращите полиноми са от четвърта степен. Съответните апостериорни апроксимиращи  $\tilde{\lambda}_{h,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  са получени чрез процедурата, описана в §2.3.

Таблица 2.9: Стойности на  $\lambda_{h,j}$  и  $\tilde{\lambda}_{h,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$

$h$		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1/4	$\lambda_{h,j}$	3.032625642	22.27202639	61.74053037
1/4	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	3.032625505	22.27146270	61.71066733
1/8	$\lambda_{h,j}$	3.032625508	22.27147131	61.70933954
1/8	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	3.032625505	22.27146217	61.70881957
1/16	$\lambda_{h,j}$	3.032625505	22.27146232	61.70802351
1/16	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	3.032625505	22.27146216	61.70801537

Лесно се вижда, че чувствително подобрение от интерполационната постпроцедура се забелязва при груба мрежа. Таблица 2.10 сравнява резултатите от SPR-метода при  $h = 1/8$  и тези на МКЕ при 8 пъти по-гъста мрежа. Резултатите показват, че чрез предложената апостериорна техника се получават ефективни изчислителни алгоритми.

Таблица 2.10

$h$		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1/8	$ \lambda_j - \tilde{\lambda}_{h,j} $	$8.94 \times 10^{-11}$	$5.73 \times 10^{-9}$	$8.46 \times 10^{-4}$
1/64	$ \lambda_j - \lambda_{h,j} $	$1.32 \times 10^{-10}$	$4.38 \times 10^{-9}$	$9.87 \times 10^{-4}$

## Глава 3

# Суперсходящи постпроцедури за спектрални задачи – оценки, методи и алгоритми

### 3.1 Въведение

Апостериорният метод, представен в настоящата глава, е принос в глобалната суперсходяща техника. Той е приложим за вариационните числени методи на Ритц-Гальоркин за елиптични самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ . Методът се основава на идеята за решаване на допълнителна задача с използване на вече намерено решение, която е значително по-лесна от изчислителна гледна точка. Тази идея е активно използвана за гранични задачи от параболичен и хиперболичен тип от Гарсия-Арчила, Тити [42]; Де Фрутос, Гарсия-Арчила и Нуово [112]; Де Фрутос и Нуово [113, 114]; Йан [66] и много други, които намират конкретна постпроцедура за различните задачи, зависещи от времевата променлива. Допълнителната задача обикновено се решава върху по-гъста мрежа [42, 66].

Друга идея за постпроцедура с цел повишаване точността на приближеното решение е екстраполиране (комбиниране) на решения, получени при две или повече мрежи (виж например [72, 119]).

Тази глава съдържа три основни направления:

(1) Постпроцедура, която е приложена за самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ : доказани са оценки от тип суперсходимост (ултрасходимост) при съгласувания МКЕ; предложен е ефективен алгоритъм за практическо използване на метода.

(2) Представена е постпроцедура в смесения метод на крайните елемен-

ти за бихармонична задача в равнината: доказани са оценки от тип суперсходимост и е предложен алгоритъм.

(3) Изопараметричен МКЕ за задача на Стеклов при произволна размерност на областта: получени са оптимални оценки на грешката; представена е постпроцедура за задачи със спектрален параметър в граничните условия, ускоряваща сходимостта на приближеното решение.

Освен основните направления, ние засягаме и два много важни аспекта във вариационните числени методи и по-специално в МКЕ:

- Възможността за симетризуемост на слабата формулировка при наличието на спектрален параметър в граничните условия;
- Възможността за диагонализиране на резултантните матрици и използването на този ефект при пресмятане на собствените стойности или улесняване на изчислителния процес при динамични задачи.

В този дух, изследванията на настоящата глава са насочени към възможно по-ефективно използване на изчислителните ресурси при пресмятане на спектрални задачи. Важно място е отделено на проблемите, при които собствената честота участва линейно в граничните условия. Тези задачи са интересни не само от математическа гледна точка, но имат и широко приложение в инженерната практика [1].

Организацията на настоящата Глава 3 е следната: В §3.2 е изложен апостериорния метод за съгласувания МКЕ при самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ . В следващия §3.3 се предлага нова апостериорна процедура в смесения МКЕ за задача от четвърти ред. По-нататък, в §3.4, се разглеждат вариационни аспекти за спектрални задачи, при които собствената стойност участва линейно в граничните условия. §3.5 е посветен на изопараметричния МКЕ за задачата на Стеклов. Доказани са априорни оценки, които се прилагат за апостериорните техники. Приложимостта на метода за по-широк клас самоспрегнати спектрални задачи е показан в §3.6. Някои алгоритмични аспекти, "сглобяващи" общата картина, са дадени в §3.7. В последния §3.8 са направени числени експерименти, които илюстрират апостериорния подход за доказаните теоретични резултати.

Апостериорната процедура за спектрални задачи има по-общ характер, т.е. тя е приложима за вариационните методи на Ритц-Галъоркин. Нашите резултати обаче ще бъдат доказани и илюстрирани чрез МКЕ. Това ни дава възможност да подчертаем, че решаването на спектралната (по-трудната) задача трябва да се извършва върху груба мрежа, а след това приближеното решение да се коригира чрез апостериорна процедура от представения вид.

### 3.2 Апостериорна техника и алгоритъм за елиптични спектрални задачи от ред $2m$

Теорията в този параграф е построена на базата на съгласования МКЕ. Едновременно с това нашите резултати са получени за възможно по-обща задача, а именно това е самоспрегнатата елиптична задача от ред  $2m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ .

Нека  $(\lambda, u)$  е точна собствена двойка на следната елиптична спектрална задача от ред  $2m$ : Търсим число  $\lambda \in \mathbf{R}$  и ненулева функция  $u(x) \in V$  такива, че

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (3.1)$$

където  $V$  е затворено подпространство на  $H^m(\Omega)$ , т.е.  $H_0^m(\Omega) \subseteq V \subseteq H^m(\Omega)$ . С  $a(\cdot, \cdot)$  и  $b(\cdot, \cdot)$  сме означили билинейни форми, които ще определим по-долу. Ще търсим приближение на  $(\lambda, u)$ , когато  $\Omega$  е ограничена област,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  с достатъчно гладка граница  $\Gamma$ . С цел избягване на технически затруднения, ще предполагаме, че  $\Omega$  е Липшицова област.

Предполагаме също, че билинейните форми  $a(\cdot, \cdot)$  и  $b(\cdot, \cdot)$  удовлетворяват следните условия:

(i)  $a$ -формата е симетрична и коерцитивна във функционалното множество  $V$ , т.е.

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \rho_1 \|v\|_{m, \Omega}^2 \leq a(v, v), \quad \forall u, v \in V, \quad (3.2)$$

където  $\rho_1$  е положителна константа;

(ii)  $a$ -формата е непрекъснатата, т.е.

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{m, \Omega} \|v\|_{m, \Omega}, \quad \forall u, v \in V;$$

(iii)  $b$ -формата е симетрична и коерцитивна в  $L_2(\Omega)$ , т.е.

$$b(u, v) = b(v, u), \quad \rho_0 \|v\|_{0, \Omega}^2 \leq b(v, v), \quad \forall u, v \in V, \quad (3.3)$$

като  $\rho_0 = \text{const} > 0$ .

Задачата (3.1) притежава изброимо множество от собствени стойности, които са строго положителни и с крайна кратност, като редицата от собствените стойности няма крайна точка на съгъстяване (виж [28, 93, 120]);

(iv)  $b$ -формата е непрекъсната в  $L_2(\Omega)$ :

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{0, \Omega} \|v\|_{0, \Omega}, \quad \forall u, v \in L_2(\Omega). \quad (3.4)$$

Разглежданата  $a$ -форма може да бъде породена, при съответни гранични стойности на функциите, от следния самоспрегнат елиптически оператор:

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{p_\alpha(x) D^\alpha u(x)\}, \quad m \in \mathbf{N},$$

Коефициентите  $p_\alpha(x)$  са реалнозначни функции от пространството  $C^{|\alpha|}(\Omega)$  и при това  $p_\alpha(x)$  притежават всички производни до ред  $m$ , допускащи непрекъснато продължение в  $\bar{\Omega}$ . Нашите разглеждания са за диференциалния оператор  $\mathcal{A}$ , който е строго елиптически (виж например [101], стр. 284-288), т.е. съществува константа  $\theta > 0$  така, че

$$\sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha p_\alpha(x) \xi^\alpha \geq \theta |\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\},$$

където  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ,  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}$ .

Така задачата (3.1) е породена от следното уравнение:

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda r(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

с хомогенни гранични условия

$$\mathcal{C}u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

където  $r(x) \in L_\infty(\Omega)$  е дадена функция, която е ограничена отдолу с положителна константа за всяко  $x \in \Omega$ . Линеино независимите гранични условия са от вида

$$\mathcal{C} = \{C_j\}_{j=1}^m, \quad C_j u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} s_{j, \alpha}(x) \cdot D^\alpha u(x), \quad j = 1, \dots, m.$$

Така ние разглеждаме обща задача за собствени стойности от ред  $2m$ . Операторите  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{C}$  предполагаме да са такива, че симетричността и коерцивността (3.2) за  $a$ -формата са осигурени.

Да дефинираме скаларното произведение

$$b(u, v) = \int_{\Omega} r u v dx.$$

Очевидно,  $b(\cdot, \cdot)$  удовлетворява неравенствата (3.3) и (3.4).

**Забележка 3.1** Условието за коерцитивност на  $a$ -формата може да бъде заменено с по-слабо изискване (неравенство на Гьординг [39]):

$$\rho_1 \|v\|_{m, \Omega}^2 - \beta \|v\|_{0, \Omega}^2 \leq a(v, v), \quad \forall v \in V, \beta > 0,$$

тъй като добавянето към  $a$ -формата на  $b(v, v)$ , умножена с положително число, ще доведе до изместване (транслация) на спектъра.

Нека с  $D$  означим множеството от функции  $u(x) \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ , които удовлетворяват хомогенните гранични условия  $Cu(x) = 0$ . Допускаме, че коефициентите на оператора  $C$  са достатъчно гладки и такива, че след използване на формулите на Грийн [89] можем да дефинираме симетрична билинейна  $a$ -форма:

$$(Au, v) = (u, Av) \equiv a(u, v) \quad \forall u, v \in D.$$

Сега ще използваме условието за коерцитивност (3.2) (елиптичността на оператора  $A$  не е достатъчна за целите, които си поставяме). Така можем да дефинираме Хилбертовото пространство  $H_A$  като попълнение на  $D$  относно нормата  $\|\cdot\|_A$ , където  $\|u\|_A = \sqrt{a(u, u)}$ . Нека  $V$  е затворено подпространство на  $H^m(\Omega) \cap H_A$ .

За някоя функция  $g \in L_2(\Omega)$  разглеждаме следната елиптична задача:

$$a(u, v) = b(g, v), \quad \forall v \in V.$$

Операторът  $T: L_2(\Omega) \rightarrow V$ , дефиниран чрез равенството  $u = Tg$ ,  $u \in V$ , е **разрешаващият оператор** на граничната (изходната) задача.

Да допуснем, че операторът  $A$  е самоспрегнат. Тогава  $a(u, v)$  и  $b(u, v)$  са симетрични или Ермитови форми, което следва непосредствено от дефинициите им. Ето защо  $a(u, v)$  е скаларно (вътрешно) произведение за пространството  $H_A$ , еквивалентно на скаларното (вътрешното) произведение в  $H^m(\Omega)$ . По подобен начин е видно, че  $b(u, v)$  е скаларно произведение в  $L_2(\Omega)$  (нека припомним, че функцията  $r(x)$  е ограничена отгоре и отдолу с положителни константи). Следователно

$$a(Tu, v) = a(u, Tv), \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$



$$b(Tu, v) = b(u, Tv), \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

Впрочем, операторът  $T$  е симетричен и положителен. Като непосредствено следствие от Теоремата на Рис получаваме  $(a(\cdot, \cdot))$  е скалярно произведение във  $V$ , че  $T$  е ограничен. От Теоремата на Рьолих следва, че  $T : V \rightarrow V$  е компактен. Както е показано в [100], §5.39,  $\lambda$  е собствена стойност, а  $u$  е съответната собствена функция тогава и само тогава, когато

$$u - \lambda Tu = 0, \quad u \neq 0.$$

Нека  $\tau_h$  е регулярно крайноеlementно разделяне на  $\bar{\Omega}$  при известните стандартни предположения, както в предходните две глави (виж [102]). На  $\tau_h$  съпоставяме крайномерното пространство  $V_h$ , което е подпространство на  $V \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$  така, че рестрикцията на всяка функция  $v \in V_h$  върху всеки красен елемент  $K \in \tau_h$  е полином от степен най-много  $n$  (т.е. от  $P_n(K)$  или  $Q_n(K)$ ).

Нека пространството  $V_h$  да удовлетворява следното апроксимационно свойство: За всяко  $g \in H^l(\Omega)$ ,  $l > 0$  и  $0 \leq s \leq \min\{l, m\}$  съществува функция  $v \in V_h$  такава, че

$$\|g - v\|_{s, \Omega} \leq C.h^\mu \|g\|_{l, \Omega},$$

където  $\mu = \min\{n + 1 - s, l - s\}$  и  $C$  не зависи от  $g$  и  $h$ .

**Забележка 3.2** Апроксимационните свойства на крайноеlementните пространства са разгледани например в книгите [39, 102, 104] и много други. За дефиницията на така наречената  $(t, k)$ -система от апроксимиращи функции в равнината виж [28], Глава 4.

Приближената собствена двойка  $(\lambda_h, u_h)$  по МКЕ определяме от:

$$\lambda_h \in \mathbf{R}, \quad u_h \in V_h, \quad a(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5)$$

Известно е (виж [30] или [104]), че оптималните оценки при условие, че  $n + 1 \geq 2m$  са:

$$|\lambda - \lambda_h| \leq K(\lambda) h^{2(n+1-m)} \|u\|_{n+1, \Omega}^2. \quad (3.6)$$

Тази оценка означава още

$$|\lambda - \lambda_h| = \mathcal{O}\left(\|u - u_h\|_{\mathcal{A}}^2\right), \quad (3.7)$$

където  $u$  и  $u_h$  са точната и приближена собствена функция, получени съответно от (3.1) и (3.5).

Тогава

$$\lambda = \frac{a(u, u)}{b(u, u)} \quad \text{и} \quad \lambda_h = \frac{a(u_h, u_h)}{b(u_h, u_h)}.$$

Също така [30],

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+1,\Omega}.$$

Апостериорният метод, който ще изложим в настоящия параграф 3.2, замества нормата в оценката (3.7) със съответната  $L_2$ -норма. Дуалният принцип на Обен-Нитше (виж например [102]) за елиптични задачи води до повишаване скоростта на сходимост в по-слаба от енергетичната норма  $\|\cdot\|_A$  при известни условия за регулярност. Апостериорната техника се свежда до решаване на линейно елиптично уравнение върху крайноеlementно пространство с полиноми от по-висока степен (или върху по-гъста мрежа) [99].

Да допуснем, че  $u_h$  е някоя приближена собствена функция, получена от (3.5), като  $b(u_h, u_h) = 1$ .

Тъй като крайноеlementното решение  $u_h$  е вече намерено, то можем да решим следната елиптична задача:

$$a(\tilde{u}, v) = b(u_h, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.8)$$

Очевидно  $a(\tilde{u}, u_h) = 1$ . Тогава можем да получим числото

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{b(\tilde{u}, u_h)},$$

където  $\tilde{u}$  е решението на (3.8).

**Теорема 3.1** *Нека крайноеlementното пространство  $V_h$  съдържана по части полиномиални функции от степен  $n$ ,  $n \geq 2m-1$ . Ако  $(u, \lambda)$  е собствена двойка на задачата (3.1),  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ , а  $(u_h, \lambda_h)$  е съответното приближено решение от (3.5), като при това функциите са нормирани  $b(u, u) = b(u_h, u_h) = 1$ , то*

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = \mathcal{O}(\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2).$$

*Ако освен това крайноеlementното разделяне е регулярно, то в сила е следната оценка от тип ултрасходимост:*

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq Ch^{2n+2} \|u\|_{n+1,\Omega}. \quad (3.9)$$

Доказателство. От свойствата на разрешаващия оператор  $T$  следва

$$a(Tu, v) = b(u, v) \quad \forall v \in V,$$

откъдето

$$a(Tu, u) = b(u, u) = 1.$$

От друга страна,  $u(x)$  е решение на задачата (3.1), т.е.

$$a(u, Tu) = \lambda b(u, Tu).$$

Тогава

$$\lambda = \frac{1}{b(Tu, u)}$$

предвид симетричността на оператора  $T$ , така че последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} &= b(Tu, u) - b(Tu_h, u_h) \\ &= b(Tu, u) - b(Tu_h, u_h) \\ &\quad + b(T(u - u_h), u - u_h) - b(T(u - u_h), u - u_h) \\ &= 2b(Tu, u) - 2b(Tu, u_h) - b(T(u - u_h), u - u_h). \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} = 2b(Tu, u - u_h) - b(T(u - u_h), u - u_h). \quad (3.10)$$

Ще оценим двете събираеми в дясната страна на (3.10). От неравенство (3.4) с константа  $C = \|r\|_{\infty, \Omega}$  получаваме:

$$\begin{aligned} 2b(Tu, u - u_h) &= \frac{2}{\lambda} (1 - b(u, u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda} (b(u, u) - 2b(u, u_h) + b(u_h, u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda} b(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq \frac{\|r\|_{\infty, \Omega}}{\lambda} \|u - u_h\|_{0, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тъй като операторът  $T$  е ограничен, то:

$$|b(T(u - u_h), u - u_h)| \leq \|T\| \|r\|_{\infty, \Omega} \|u - u_h\|_{0, \Omega}^2. \quad (3.12)$$

Накрая, от (3.10), (3.11) и (3.12) окончателно получаваме:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq C \|u - u_h\|_{0, \Omega}^2,$$

където  $C = \tilde{\lambda} \|r\|_{\infty, \Omega} (1 + \lambda \|T\|)$ .

Нека билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  е регулярна върху  $V \times V$ . Тогава

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+1, \Omega}.$$

С това неравенство завършваме доказателството на оценката (3.9). ■

**Забележка 3.3** Резултатът от Теорема 3.1 е валиден не само за МКЕ, но и изобщо за вариационните методи на Ритц-Гальоркин.

За да се реализира апостериорната процедура, трябва да се реши въпросът как да бъде пресметнато решението  $\tilde{u}$ , а оттам и стойността  $\tilde{\lambda}$ . За целта се разглежда съответното приближено решение, отговарящо на (3.8).

Нека използваме същото разделяне  $\tau_h$  и да дефинираме крайноеlementното пространство  $\tilde{V}_h$  такова, че е подпространство на  $V \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$  и рестрикцията на всяка функция от  $\tilde{V}_h$  върху всеки краен елемент  $K \in \tau_h$  е полином от степен най-много  $n_1$ , където  $n_1 > n$ .

Разглеждаме приближената елиптическа задача

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = b(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h. \quad (3.13)$$

Тогава можем да пресметнем числото

$$\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{b(\tilde{u}_h, u_h)},$$

където  $u_h$  и  $\tilde{u}_h$  са съответно решенията на (3.5) и (3.13).

**Теорема 3.2** Нека условията на Теорема 3.1 са изпълнени. При апроксимация по МКЕ с използване на пространството  $\tilde{V}_h$  е в сила следната оценка:

$$|\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2(n_1+1-m)}. \quad (3.14)$$

Доказателство. Лесно получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_h} &= b(\tilde{u}, u_h) - b(\tilde{u}_h, u_h) \\ &= a(\tilde{u}, \tilde{u}) - a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) \\ &= a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u}) + a(\tilde{u}_h, \tilde{u}) - a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) \\ &= a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u}) - a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u}_h). \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_h} = a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) = \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}}^2.$$

Тогава

$$|\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h| \leq C\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}}^2.$$

Непрекъснатостта на  $a$ -формата води до неравенството

$$|\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h| \leq C\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{m,\Omega}^2.$$

Стандартното предположение за гладкост на  $\tilde{u}$  при оценки в МКЕ за елиптични уравнения доказва (3.14).

Нека да сравним оценката (3.14) с (3.9). Очевидно е, че за да се запази ултрасходящата оценка от Теорема 3.1, минималната възможна стойност на степента  $n_1$  на полиномите, участващи в пространството  $\tilde{V}_h$ , е  $n_1 = n + m$ . ■

**Забележка 3.4** Представената апостериорна техника използва идеята, която в МКЕ се нарича  $p$ -версия. Същността ѝ е, че нужната точност се достига върху същото крайноелементно разделяне чрез увеличаване на степента  $n_1$ . Използват се по-сложни елементи, но за по-лесната задача (3.13). Освен  $p$ -версията, класическата  $h$ -версия е също приложима за апостериорния подход, както и съчетанието между двете.

Разгледаният метод може да бъде приложен за по-обща самоспрегната спектрална задача, а именно за уравнението

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda \mathcal{B}u(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.15)$$

където  $\mathcal{B}$  е подходящ (съобразно граничните условия) самоспрегнат елиптичен оператор от ред  $2r$ ,  $0 \leq r < m$ . В този случай [18]

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^{2(n+1-r)}),$$

а за апроксимиращите полиноми е минимално необходимо

$$n_1 = n + m - r.$$

Очевидно и в този случай апостериорният метод води до оценка от тип ултрасходимост.

Сега ще направим аналогични разсъждения, отнасящи се за собствените функции. Ще повишим скоростта на сходимост, т.е. ще получим по-висок порядък, отколкото в (3.6), прилагайки апостериорната процедура, реализирана чрез решаване на по-простите задачи (3.8) и (3.13) [16].

Нека  $\tilde{R}_h : V \rightarrow \tilde{V}_h$  е елиптичен проектор, дефиниран чрез равенството

$$\forall u \in V, \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h, \quad a(u - \tilde{R}_h u, v_h) = 0.$$

От тази дефиниция следва добре познатото свойство (виж [102] или [104]):

$$\forall u \in H^{n_1+1}(\Omega) \cap V, \quad \|u - \tilde{R}_h u\|_{m,\Omega} = \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|u - v_h\|_{m,\Omega}. \quad (3.16)$$

Нека за някое приближение  $u_h$  на задачата (3.5) да дефинираме следните функции:

$$\tilde{w} = \tilde{\lambda}_h \cdot \tilde{u} = \tilde{\lambda}_h \cdot T u_h,$$

$$\tilde{w}_h = \tilde{R}_h \tilde{w} = \tilde{\lambda}_h \cdot \tilde{R}_h \circ T u_h.$$

Следващата теорема доказва суперсходяща (ултрасходяща) оценка за собствени функции след прилагане на описаната апостериорна процедура.

**Теорема 3.3** Нека условията от Теорема 3.1 са изпълнени. Тогава е в сила апостериорната оценка:

$$\|u - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} \leq C.h^{n+1-r} \|u\|_{n+1,\Omega}. \quad (3.17)$$

Доказателство. Първо ще оценим  $\|u - \tilde{w}\|_{m,\Omega}$ . Разглеждаме равенството

$$a(u - \tilde{w}, u - \tilde{w}) = a(u, u) - 2a(u, \tilde{w}) + a(\tilde{w}, \tilde{w}).$$

Ще преработим трите събираеми в дясната му страна посредством (3.1), дефиницията на  $\tilde{w}$  и свойствата на разрешаващия оператор  $T$ :

$$a(u, u) = \lambda b(u, u) = \lambda a(Tu, u) = \lambda^2 a(Tu, Tu),$$

$$a(u, \tilde{w}) = \lambda b(u, \tilde{w}) = \lambda \tilde{\lambda}_h a(Tu, Tu_h),$$

$$a(\tilde{w}, \tilde{w}) = \tilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h, Tu_h).$$

Каго вземем предвид, че собствените функции  $u$  и  $u_h$  са нормирани относно  $b$ -формата, получаваме:

$$\begin{aligned} a(u - \tilde{w}, u - \tilde{w}) &= \lambda^2 a(Tu, Tu) - 2\lambda \tilde{\lambda}_h a(Tu, Tu_h) + \tilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h, Tu_h) \\ &= \lambda a(Tu, u) - 2\tilde{\lambda}_h a(Tu_h, u) + \tilde{\lambda}_h^2 a(Tu_h, Tu_h) \\ &= \lambda - 2\tilde{\lambda}_h b(u_h, u) + \frac{\tilde{\lambda}_h^2}{\lambda} \\ &= 2\tilde{\lambda}_h - 2\tilde{\lambda}_h b(u, u_h) + \lambda - \tilde{\lambda}_h + \frac{\tilde{\lambda}_h^2}{\lambda} - \tilde{\lambda}_h \\ &= \tilde{\lambda}_h [b(u, u) - 2b(u, u_h) + b(u_h, u_h)] + \lambda - \tilde{\lambda}_h + \frac{\tilde{\lambda}_h}{\lambda} (\tilde{\lambda}_h - \tilde{\lambda}) \\ &= \tilde{\lambda}_h b(u - u_h, u - u_h) + (\lambda - \tilde{\lambda}_h) + \frac{\tilde{\lambda}_h}{\lambda} (\tilde{\lambda}_h - \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

Последните три събираеми оценяваме, използвайки резултатите от предходните две теореми, както и

$$|b(u - u_h, u - u_h)| \leq C \|u - u_h\|_{r,\Omega}^2.$$

Накрая, в съответствие с  $V$ -елиптичността на  $a(\cdot, \cdot)$ , при  $n_1 \geq n + m - r$  достигаеме до неравенството

$$\|u - \tilde{w}\|_{m,\Omega}^2 \leq C(\lambda) \cdot h^{2(n+1)}. \quad (3.18)$$

По-нататък, от апроксимационните свойства на проектора  $\tilde{R}_h$ , както и от стандартните предположения за гладкост на решението  $\tilde{w}$ , следва

$$\|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega}^2 \leq C(\lambda) \cdot h^{2(n_1+1-m)}.$$

Комбинирайки това неравенство с (3.18), получаваме оценката (3.17). ■

Както и при собствените стойности, за да запазим високия порядък на сходимост на постпроцедурата за собствените функции, достатъчно е да вземем

$$n_1 = n + m - r.$$

Това е и най-правилната стратегия за избор на  $\tilde{V}_h$ .

**Забележка 3.5** Приближената собствена стойност, участваща в Теорема 3.3, може да се замени със съответната стойност, получена по МКЕ. Действително, нека означим  $\hat{w} = \lambda_h T u_h$ . Тогава

$$\|\hat{w} - \tilde{w}\|_{m,\Omega} = |\lambda_h - \tilde{\lambda}_h| \|T u_h\|_{m,\Omega}.$$

От ограничеността на оператора  $T$  и от неравенството

$$|\lambda_h - \tilde{\lambda}_h| \leq C |\lambda_h - \lambda|$$

при  $n_1 \geq n + m - r$  следва, че  $\hat{w}$  приближава точната собствена функция със същата точност, както и  $\tilde{w}$ .

**Забележка 3.6** Апостериорната техника, използваща  $h$ -метода, изисква да сгъстим мрежата, т.е. да намалим по подходящ начин мрежовия параметър  $h$  при решаване на линейното елиптично (изходно) уравнение. Така новата стойност  $\tilde{h}$  на този параметър трябва да отговаря на условието

$$\tilde{h} \sim h^{\frac{n+1}{n+1-m}}.$$



Сравняването на двата подхода, а именно – увеличаване степента на апроксимиращите полиноми и намаляване на мрежовия параметър ще бъде дискутирано в последния параграф на тази глава, с оглед числовата реализация на постпроцедурата.

Що се отнася до по-общата елиптична спектрална задача (3.15), при постпроцедура за собствени функции ще получим оценката [18]:

$$\|u - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} = \mathcal{O}(h^{n+1-r}),$$

където  $0 \leq r < m$ , а  $n_1 = n + m - r$ .

**Забележка 3.7** Важно е да отбележим, че целочислените параметри  $n$  и  $n_1$  се подбират така, че  $\tilde{u}$  да има нужната гладкост, която е необходима според апостериорната техника. Тези параметри зависят от  $m$  (и от  $r$ ), както и от факта, че дясната страна на допълнителната задача е функция  $u_h \in H^m(\Omega)$ .

### Алгоритъм 3.1

Ще представим алгоритъма на апостериорния метод за ускоряване на сходимостта на собствените стойности и функции, когато търсим спектъра на линеен самоспрегнат оператор от ред  $2m$ :

(i) Намира се някоя собствена функция  $u_h$  и съответната ѝ собствена стойност  $\lambda_h$  за задача (3.5) при  $V_h = V_h(n)$ ,  $n \geq 2m - 1$  и  $b(u_h, u_h) = 1$ ;

(ii) Използвайки разделянето  $\tau_h$  на областта  $\Omega$ , се съставя крайноелементното пространство  $\tilde{V}_h = \tilde{V}_h(n_1)$ , където  $n_1 = n + m$ ;

(iii) Намира се решението  $\tilde{u}_h$  на допълнителното елиптично уравнение (3.13);

(iv) По формулата

$$\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{b(\tilde{u}_h, u_h)}$$

се пресмята приближената собствена стойност  $\tilde{\lambda}_h$ ;

(v) Приближената собствена функция се определя от

$$\tilde{w}_h = \tilde{\lambda}_h \tilde{u}_h \quad \text{или} \quad \hat{w}_h = \lambda_h \tilde{u}_h.$$

### Заклучение

1. Алгоритъм 3.1 дава "евтин" начин за точно пресмятане на спектъра на самоспрегнат елиптичен оператор от четен ред. Това се дължи на факта, че пресмятаме спектралната задача с крайни елементи от ниска степен върху груба мрежа, а след това използваме по-сложни крайни елементи, но за много по-лесна за пресмятане задача.

2. Известно е, че при оценките в МКЕ за спектрални задачи заедно с параметъра  $h$  участва като множител с порядък  $\frac{n+1}{m}$  и съответната точна стойност  $\lambda$  (виж например [94, 104]). Обикновено в задачите от практиката редицата от стойностите на  $\lambda$  нараства много бързо. Ето защо собствените двойки от висок ред се изчисляват неточно. Едно от предимствата на предложени апостериорен метод е, че не преекспонира точното собствено число  $\lambda$  при решаване на допълнителната елиптична задача. Тогава в константите  $C$  при получените оценки  $\lambda$  влияе с по-ниска степен.

## 3.3 Суперсходящ апостериорен метод за смесения МКЕ, приложен към бихармоничната задача за собствени стойности

Ще представим един нов подход към смесения метод на крайните елементи за бихармоничната спектрална задача [14]. Той е продиктуван от идеята, която използвахме при конвенционалния (съгласуван) МКЕ, разгледана в предходния параграф. Изследванията са направени за бихармоничен оператор в равнината, но методът може да бъде приложен и за по-общ самоспрегнат оператор от четвърти ред.

Ще разгледаме следната бихармонична задача за собствени стойности: за дадена ограничена област  $\Omega \in \mathbf{R}^2$  с Липшицова граница  $\Gamma$ , да се намери функция  $u(x) \neq 0$  и число  $\lambda \in \mathbf{R}$ , удовлетворяващи диференциалното уравнение

$$\Delta^2 u(x) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.19)$$

с хомогенни гранични условия

$$\begin{aligned} u(x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В граничното условие  $\nu$  е външен нормален вектор за границата  $\Gamma$ . Задачата (3.19), (3.20) описва собствените форми при вибрации на хомогенна изотропна плоча с постоянна дебелина и подпряна граница.

Диференциалното уравнение (3.19) може да бъде представено в смесена форма като система уравнения от втори ред (т.е. с две неизвестни компоненти) [40, 102, 111]:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sigma, \\ -\Delta \sigma &= \lambda u, \end{aligned} \quad (3.21)$$

удовлетворяващи хомогенните гранични условия (3.20). Известно е, че ако областта  $\Omega$  има гладка граница или е изпъкнала многоъгълна област, то спектралната задача (3.21) има безброй много решения  $(\lambda_i, (\sigma_i, u_i))$  такива, че  $\sigma_i = -\Delta u_i, i = 1, 2, \dots$  (виж например [30]), като

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \nearrow \infty.$$

Ако  $(\lambda, (\sigma, u))$  е собствена двойка на (3.21), то  $(\lambda, u)$  е собствена двойка на (3.19), (3.20) и  $\sigma = -\Delta u$ . Така за регулярността на наредената двойка функции  $(\sigma, u)$  може да се съди от регулярните свойства на задачата (3.19), (3.20). Гладкостта на решенията и условията за регулярност на тези проблеми се разглеждат от Гривард [45] (Глава 7, стр. 301).

Първите публикации, засягащи бихармоничната спектрална задача в смесена формулировка (3.21), са на Кануто [68] и Ишихара [64]. Там са доказани оценки на грешката за приближените собствени стойности и собствени функции, като се използват подходи, предложени от Бреци [40] и Миуоши [88].

По-късно Мерсие, Осборн, Рапаз и Равиар [87] развиха абстрактен анализ на приближените собствени двойки, използвайки смесен/хибриден МКЕ на базата на общата теория за компактните оператори (виж също

[30, 120]). Освен това Кануто [69] и Ранахер [96] разглеждат приближаване на собствените двойки за елиптични самоспрегнати уравнения от четвърти ред чрез неконформни и хибридни крайни елементи.

В последните години се развива разнообразни и ефективни методи, използващи естиматори, които контролират грешката. Те позволяват построяването на адаптивни алгоритми (виж [73, 76, 99]). Ларсон [76] съчетава апостериорни оценки с априорна оценка от остатъците. Ксю и Жоу [73] представят интересна техника върху две мрежи и съответно две крайноеlementни пространства, използвани за елиптични спектрални задачи от втори ред. Рачева и Андреев [99] предлагат апостериорна процедура, която повишава сходимостта на числовото решение. Този метод е приложим за елиптични самоспрегнати спектрални задачи от ред  $2m$ .

В този параграф ще продължим идеята от предходния, но приложена за смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача. Това означава, че:

1. Решаваме по смесения МКЕ разглежданата задача;
2. Решаваме допълнителна изходна елиптична задача върху променено крайноеlementно пространство, като за дясна част се използва намереното в предходния пункт решение.

Това е нова процедура в смесения МКЕ, която предлага по-точен метод само чрез добавяне на една лесно реализуема задача.

Слабата формулировка на (3.21) ще получим, като умножим първото уравнение с функция  $\psi \in H^1(\Omega)$ , а второто – с функция  $v \in H_0^1(\Omega)$  и интегрираме по части върху  $\Omega$ . Така стигаме до системата:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla v \, dx &= \lambda \int_{\Omega} uv \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx &= \int_{\Omega} \sigma \psi \, dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Очевидно тези две уравнения са дефинирани за  $u \in H_0^1(\Omega)$  и  $\sigma \in H^1(\Omega)$ . Те представят слабата смесена формулировка на бихармоничната задача за собствени стойности. В следващите параграфи ще дискутираме вариационните аспекти на по-общи спектрални задачи.

Следвайки идеята на Бабушка и Осборн [30], ще разгледаме (3.22) като частен случай на задачата за седловата точка, приложена към спектрален проблем от четвърти ред. Задачите от този тип са свързани с три реални Хилбертови пространства  $V$ ,  $\Sigma$  и  $H$  с вътрешни (скаларни) произведения

$(\cdot, \cdot)_V$ ,  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$  и  $(\cdot, \cdot)_H$  и съответно с норми  $\|\cdot\|_V$ ,  $\|\cdot\|_\Sigma$  и  $\|\cdot\|_H$ . Двете билинейни форми  $a(\sigma, \psi)$  и  $b(\psi, v)$  са дефинирани съответно върху  $(H \times H)$  и  $(\Sigma \times V)$ .

Допускаме, че

$$V \subset H \text{ и } \Sigma \subset H.$$

Бабушка и Осборн (виж [30], стр. 752) изследват следния проблем: Търсим  $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ ,  $(\sigma, u) \neq (0, 0)$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  такива, че

$$\begin{aligned} -a(\sigma, \psi) + b(\psi, u) &= 0 & \forall \psi \in \Sigma, \\ b(\sigma, v) &= \lambda a(u, v) & \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тази задача е разгледана в [30] при следните предположения:

(A1):  $b(\psi, v)$  е дефинирана върху  $\Sigma \times V$  и удовлетворява

$$|b(\psi, v)| \leq C_1 \|\psi\|_\Sigma \|v\|_V, \quad \forall \psi \in \Sigma, \quad \forall v \in V, \quad (3.24)$$

$$\sup_{\psi \in \Sigma} |b(\psi, u)| > 0, \quad \forall 0 \neq u \in V; \quad (3.25)$$

(A2): Билинейната форма  $a(\sigma, \psi)$  е симетрична върху  $H \times H$  и удовлетворява

$$a(\sigma, \psi) \leq C_2 \|\sigma\|_H \|\psi\|_H, \quad \forall \psi, \sigma \in H, \quad (3.26)$$

$$a(\sigma, \sigma) > 0, \quad \forall 0 \neq \sigma \in H. \quad (3.27)$$

Ако положим, че  $H = L^2(\Omega)$ ,  $\Sigma = H^1(\Omega)$  и  $V = H_0^1(\Omega)$ , като при това

$$b(\sigma, v) = \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla v \, dx, \quad a(\sigma, \psi) = \int_{\Omega} \sigma \psi \, dx,$$

то слабата формулировка (3.22) може да бъде записана, предвид абстрактната форма (3.23), във вида: Търсим  $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ ,  $(\sigma, u) \neq (0, 0)$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  такива, че

$$-a(\sigma, \psi) + b(\psi, u) + b(\sigma, v) = \lambda a(u, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \quad (3.28)$$

Скалярните произведения (и съответните норми) в пространствата  $V$ ,  $\Sigma$  и  $H$  са:

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$(\sigma, \psi)_{\Sigma} = \int_{\Omega} (\nabla \sigma \cdot \nabla \psi + \sigma \psi) \, dx,$$

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

По дефиниция следва, че билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  съвпада със скалярното произведение на  $H$  и следователно  $a$ -формата е симетрична и коерцитивна в  $H$ . Аналогично, билинейната форма  $b(\cdot, \cdot)$  е симетрична и коерцитивна върху  $V$  и следователно тя определя скалярно произведение, което е еквивалентно на скалярното произведение във  $V$  (т.е. в  $H_0^1(\Omega)$ ).

В нашия случай условията (3.24), (3.26) и (3.27) от абстрактния проблем са очевидно удовлетворени. Остава да проверим само (3.25). Действително, понеже  $V \subset \Sigma$ , ние ще докажем даже строгото неравенство от тип inf-sup за билинейната форма  $b(\cdot, \cdot)$ :

$$\sup_{0 \neq \psi \in \Sigma} \frac{|b(\psi, u)|}{\|\psi\|_{\Sigma}} \geq \sup_{0 \neq \psi \in V} \frac{|b(\psi, u)|}{\|\psi\|_V} \geq \frac{|b(u, u)|}{\|u\|_V} = \|u\|_V, \quad \forall u \in V. \quad (3.29)$$

Ако  $(\lambda, (\sigma, u))$  е собствена двойка на (3.23), то  $(\lambda, u)$  е собствена двойка на (3.19), (3.20), като  $\sigma = -\Delta u$ . Така гладкостта на  $(\sigma, u)$  може да бъде определена от регулярността на (3.19), (3.20) (виж Гривард [45], Глава 7, стр. 301).

**Забележка 3.8** Можем да разгледаме и други гранични условия, различни от (3.20). Например, при изследване на деформациите на плоча с неподвижна граница моделната задача се описва с уравнението (3.19), като граничните условия са:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ако  $\Omega$  е многоъгълник, то второто условие в (3.30) ще се трансформира в  $\Delta u = 0$  върху  $\Gamma$  и така граничната задача ще има следната слаба формулировка: Търсим  $(\sigma, u) \in V \times V$ ,  $(\sigma, u) \neq (0, 0)$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  такива, че

$$-a(\sigma, \psi) + b(\psi, u) + b(\sigma, v) = \lambda a(u, v), \quad \forall (\psi, v) \in V \times V. \quad (3.31)$$

Този проблем е от класа, който разглеждаме. В действителност, от гледна точка на смесения метод той е по-прост и е интересен с факта, че двете форми  $a(\sigma, \psi)$  и  $b(\psi, u)$  са симетрични съответно в  $H \times H$  и  $V \times V$ .

Сега ще се спрем на крайноелементното приближение на (3.23). Нека  $\mathcal{T}_h$  е разделяне на  $\Omega$  на краен брой крайни елементи (триъгълни или четириъгълни), което е квазиравномерно и има мрежов параметър  $h$ . Да допуснем, че  $\mathcal{T}_h$  удовлетворява стандартните предположения за крайноелементна триангулация (виж например Сиарле [102], стр. 38). С триангулацията  $\mathcal{T}_h$  се свързват дефинициите на крайноелементните пространства  $V_h \subset V$  и  $\Sigma_h \subset \Sigma$ , състоящи се от по части полиномиални функции от степен най-много  $n$  (виж например [30], стр. 758).

Предвид това, че крайноелементните пространства са подпространства на  $H^1(\Omega)$ , трябва функциите от  $V_h$  и  $\Sigma_h$  да са непрекъснати, следователно  $n \geq 1$ .

И така, ще използваме само апроксимационните свойства на тези пространства. Именно, ще приемем, че

$$\inf_{v \in V_h} \{ \|u - v\|_{0,\Omega} + h \|\nabla(u - v)\|_{0,\Omega} \} \leq Ch^{n+1} \|u\|_{n+1,\Omega},$$

а също

$$\inf_{\tau \in \Sigma_h} \{ \|\sigma - \tau\|_{0,\Omega} + h \|\nabla(\sigma - \tau)\|_{0,\Omega} \} \leq Ch^{n+1} \|\sigma\|_{n+1,\Omega}.$$

Добре известно е, че редът на сходимост на приближените собствени стойности и собствени функции зависи от гладкостта на точните собствени функции. За области от най-общ вид собствените функции на бихармоничния оператор принадлежат на  $H^2(\Omega)$ . По-висока гладкост на решението може да се очаква при области с гладки граници. При наличие на такава област най-добрата стратегия е да се използват изопараметрични крайни елементи. В такъв случай  $V_h \not\subset V$  и  $\Sigma_h \not\subset \Sigma$  (виж [99, 102]).

Нашата цел е да представим апостериорна техника за бихармоничната задача (3.19), ускоряваща сходимостта както за собствените стойности, така



и за собствените функции. Допускането, че  $\Omega$  е изпъкнал многоъгълник, прави представянето на идеята по-лесно за разбиране, след като имаме възможност да работим със съгласувани елементи. От друга страна обаче, това ограничава възможността да предполагаме нужната регулярност на проблема, което прави доказателството за сходимост по-трудно. Добре известно е, че (виж [45]) при зададена функция  $f \in L^2(\Omega)$ , решението на съответната изходна бихармонична гранична задача

$$\begin{aligned} \Delta^2 w &= f && \text{в } \Omega, \\ w &= \frac{\partial w}{\partial n} = 0 && \text{върху } \Gamma \end{aligned} \tag{3.32}$$

принадлежи на  $H^3(\Omega)$ . За по-подробно изследване относно гладкостта на решението на първа гранична бихармонична задача би могло да се използват или теглови Соболеви пространства (виж например [35]), или Соболеви пространства с дробни показатели [31, 45]. Например, в [35] е показано, че ако най-големият вътрешен ъгъл на границата  $\Gamma$  е по-малък от  $126.28^\circ$  и  $f \in L^2(\Omega)$ , то  $w \in H^4(\Omega)$ . Друг резултат е показан в [45] чрез използване на интерполация на Банахови пространства. Той гласи, че ако  $\Omega$  е изпъкнала многоъгълна област, то  $w \in H^{3+s}(\Omega)$ , където параметърът  $s$  зависи от най-големия вътрешен ъгъл на  $\Gamma$  и  $0 < s \leq 1$ . Лесна процедура за определяне на  $s$  във функция от многоъгълника  $\Omega$  е предложена в [45]. Регулярността на (3.32) е свързана с гладкостите на собствените функции.

Ще определим приближението на собствената двойка  $(\lambda, (\sigma, u))$  чрез смесен МКЕ като  $\lambda_h \in \mathbf{R}, (\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$  такива, че удовлетворяват уравнението

$$-a(\sigma_h, \psi) + b(\psi, u_h) + b(\sigma_h, v) = \lambda_h a(u_h, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma_h \times V_h \tag{3.33}$$

и при това  $a(u_h, u_h) = 1$ .

Доказано е (виж [30], Теорема 11.4, стр. 763; виж също [68, 87, 111]), че ако крайноелементните пространства съдържат полиноми от степен  $n \geq 2$  и  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ , то

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &\leq C h^{2n-2} \|u\|_{n+1, \Omega}^2, \\ \|u - u_h\|_{0, \Omega} &\leq C h^n \|u\|_{n+1, \Omega} \end{aligned} \tag{3.34}$$

и



$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + h\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq C h^n \|u\|_{n+1,\Omega}. \quad (3.35)$$

Когато обаче  $\Omega$  е изпъкнала многоъгълна област и  $n \geq 3$ , вместо (3.34) и (3.35) имаме (виж [87])

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &\leq C h^{2+2s} \|u\|_{3+s,\Omega}, \\ \|u - u_h\|_{1,\Omega} + h\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} &\leq C h^{2+s} \|u\|_{3+s,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тук  $0 < s \leq 1$  и този параметър зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата [45, 35]. Случаят  $s = 1$  (оптимална оценка) се получава, когато  $\Omega$  е правоъгълник.

Случаят  $n = 1$  е разгледан от Ишихара [65], който доказва основната оценка за този случай

$$|\lambda - \lambda_h| + \|u - u_h\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h^{1/2}).$$

**Забележка 3.9** Неравенствата (3.34) и (3.35) показват, че оптимална оценка на грешката за собствените стойности и собствените функции при решаване на спектрална задача от четвърти ред се получава за  $n = 2$ , защото тогава се получава оптималност както по отношение на регулярността на задачата, така и по отношение на скоростта на сходимост. Това се наблюдава също и при МКЕ за спектрални задачи от втори ред. Именно, скоростта на сходимост за собствените стойности е два пъти по-голяма от скоростта на сходимост за собствените функции в енергетична норма. Все пак, в случай на многоъгълна област и крайни елементи от степен, по-голяма или равна на 3, се получава леко понижаване на скоростта, дължащо се на понижаване гладкостта на точното решение. В заключение, за многоъгълна област е разумно използването на апроксимиращи полиноми от степен най-много 3.

Сега ще изложим идеята за апостериорната техника, повишаваща скоростта на сходимост за собствените стойности и собствените функции при смесения МКЕ. Тази техника изисква първо да решим задачата с използване на крайни елементи от степен  $n$ , а след това да решим допълнителна елиптична (изходна) задача, използвайки "обогатено" крайноелементно пространство. Ще разгледаме две възможности – пространство върху по-гъста мрежа и пространство, построено върху полиноми от степен  $n + 1$ , т.е. с единица по-висока.

За да мотивираме нашия подход, първо изследваме съответната изходна елиптична задача, т.е. разгледаме смесената формулировка на елиптичната задача с дясна част  $f \in L^2(\Omega)$ : Търсим  $(\tau, w) \in \Sigma \times V$  такива, че

$$-a(\tau, \psi) + b(\psi, w) + b(\tau, v) = a(f, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \quad (3.37)$$

Решението  $(\tau, w)$  на тази задача определя два компонентни разрешаващи оператора:

$$S : L^2(\Omega) \rightarrow \Sigma, \quad Sf = \tau,$$

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow V, \quad Tf = w.$$

Решението  $(\lambda, (\sigma, u))$  на задачата (3.23) ще удовлетворява следните зависимости, изразени посредством операторите  $T$  и  $S$ :

$$\sigma = \lambda Su, \quad u = \lambda Tu.$$

Действително, да разгледаме (3.37) при  $f = \lambda u$ , където  $(\lambda, (\sigma, u))$  е решението на (3.23). В този случай решението на (3.37) е  $(S(\lambda u), T(\lambda u)) = (\lambda Su, \lambda Tu)$ , т.е.

$$-a(\lambda Su, \psi) + b(\psi, \lambda Tu) + b(\lambda Su, v) = a(\lambda u, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma \times V. \quad (3.38)$$

От сравняването на (3.38) с (3.28) се вижда, че  $(\lambda Su, \lambda Tu)$  и  $(\sigma, u)$  са решения на една и съща изходна задача. От единствеността на решението следва, че те съвпадат, т.е.  $\sigma = \lambda Su$  и  $u = \lambda Tu$ .

Аналогично, съответното приближение по МКЕ е: Да се намери  $(\tau_h, w_h) \in \Sigma_h \times V_h$  такава, че

$$-a(\tau_h, \psi) + b(\psi, w_h) + b(\tau_h, v) = a(f, v), \quad \forall (\psi, v) \in \Sigma_h \times V_h$$

определя дискретни компонентни разрешаващи оператори:

$$S_h : L^2(\Omega) \rightarrow \Sigma_h, \quad S_h f = \tau_h,$$

$$T_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h, \quad T_h f = w_h.$$

Операторите  $S$ ,  $T$ ,  $S_h$  и  $T_h$  очевидно удовлетворяват равенствата

$$-a(Sf, \psi) + b(\psi, Tf) + b(Sf, v) = a(f, v), \quad \forall \psi \in \Sigma, \quad \forall v \in V$$

и

$$-a(S_h f, \psi) + b(\psi, T_h f) + b(S_h f, v) = a(f, v), \quad \forall \psi \in \Sigma_h, \forall v \in V_h.$$

Впрочем,  $(S_h f, T_h f)$  е "Рицов проектор" на  $(Sf, Tf)$  върху крайноеlementното пространство  $\Sigma_h \times V_h$  и удовлетворява ортогоналното свойство

$$-a(Sf - S_h f, \psi) + b(\psi, Tf - T_h f) + b(Sf - S_h f, v) = 0, \quad \forall \psi \in \Sigma_h, \forall v \in V_h.$$

Нека сега да разгледаме оператора  $T$  и множеството от оператори  $\{T_h\}$  в пространството  $L^2(\Omega)$ . За тях е в сила [111]

$$\|Tf - T_h f\|_{0,\Omega} = \|w - w_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|Tf\|_{3,\Omega}.$$

От регулярността на задачата се получава неравенството

$$\|Tf\|_{3,\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega},$$

така че

$$\|T - T_h\| = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|(T - T_h)f\|_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \leq Ch^2.$$

Следователно

$$\|T - T_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Предвид крайномерния ранг на оператора  $T_h$ , т.е.  $\dim \mathcal{R}(T_h) < \infty$ ,  $T_h$  е компактен. От последната сходимост следва, че  $T$  е също компактен, така че собствената двойка  $(\lambda, (\sigma, u))$  от (3.23) може да бъде представена посредством оператора  $T$ . Това означава, че ако  $(\lambda, (\sigma, u))$  е собствена двойка на (3.23), то  $\lambda Tu = u$ ,  $u \neq 0$ . Обратно, ако  $\lambda Tu = u$ ,  $u \neq 0$ , то съществува  $\sigma = S(\lambda u)$ ,  $\sigma \in \Sigma$  така, че  $(\lambda, (\sigma, u))$  е собствена двойка на (3.23). По такъв начин  $\lambda$  е собствена стойност на (3.23) тогава и само тогава, когато  $\lambda^{-1}$  е собствена стойност на  $T$ .

Операторите  $T$  и  $T_h$  са симетрични относно скаларното произведение, дефинирано чрез билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$ . Действително, за някои  $u, v \in V$  ще получим следната последователност от равенства:

$$\begin{aligned}
a(u, Tv) &= b(Su, Tv) \quad (\text{от дефиницията на оператора } S) \\
&= a(Su, Sv) \quad (\text{от дефиницията на оператора } T) \\
&= a(Sv, Su) \quad (\text{поради симетричността на } a(\cdot, \cdot)) \\
&= b(Sv, Tu) \quad (\text{от дефиницията на оператора } T) \\
&= a(v, Tu) \quad (\text{от дефиницията на оператора } S) \\
&= a(Tu, v).
\end{aligned}$$

Подобни разглеждания могат да бъдат направени и за дискретната задача. Така че  $T_h$  е симетричен относно скаларното произведение  $a(\cdot, \cdot)$  и приближените собствени стойности, определени от (3.33), могат да бъдат характеризирани в термините на  $T_h$ . По-конкретно,  $\lambda_h$  е собствена стойност на (3.33) тогава и само тогава, когато  $\lambda_h^{-1}$  е собствена стойност на  $T_h$ . Както е показано от Фалк и Осборн [111], в сила е оценката

$$\begin{aligned}
\|(T - T_h)f\|_{1,\Omega} + h\|(S - S_h)f\|_{0,\Omega} \\
+ h^2\|\nabla(S - S_h)f\|_{0,\Omega} \leq Ch^n \|Tf\|_{n+1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Нека сега разгледаме едно вече намерено решение  $(\lambda_h, (\sigma_h, u_h))$  на смесената крайноелементна задача (3.33). Тогава можем да решаваме елиптическата задача (3.37) с дясна страна  $u_h$  и решение  $(\tilde{\tau}, \tilde{w}) \in \Sigma \times V$ :

$$-a(\tilde{\tau}, \psi) + b(\psi, \tilde{w}) + b(\tilde{\tau}, v) = a(u_h, v), \quad \forall \psi \in \Sigma, \forall v \in V. \tag{3.40}$$

Позлвайки операторите  $S$  и  $T$ , решението на (3.40) може да се запише като  $(\tilde{\tau}, \tilde{w}) = (Su_h, Tu_h)$ .

Ако допуснем, че решението  $(\tilde{\tau}, \tilde{w})$  на (3.40) е намерено, можем да пресметнем числото

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{a(u_h, Tu_h)} = \frac{1}{a(u_h, \tilde{w})}. \tag{3.41}$$

В следващата теорема е показано, че  $\tilde{\lambda}$  приближава с добра точност числото  $\lambda$ :

**Теорема 3.4** Нека  $(\lambda, (\sigma, u))$  да е собствена двойка на задачата (3.23), а  $(\lambda_h, (\sigma_h, u_h)) \in \mathbf{R} \times \Sigma_h \times V_h$  да е нейното крайноелементно приближение, получено чрез (3.33) при предположение, че собствените функции са нормирани посредством  $\|u\|_{0,\Omega} = \|u_h\|_{0,\Omega} = 1$ .

Нека числото  $\tilde{\lambda}$  да е пресметнато чрез (3.41), където  $\tilde{u}$  е решение на (3.40). Тогава

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq C \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.42)$$

**Доказателство.** Вземайки предвид симетричността на оператора  $T$  относно скаларното произведение, дефинирано чрез  $a(\cdot, \cdot)$ , равенството  $u = \lambda T u$  и нормировката  $a(u, u) = a(u_h, u_h) = 1$  на собствените функции, лесно получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tilde{\lambda}} &= a(u, T u) - a(u_h, T u_h) \\ &= a(u, T u) + a(u - u_h, T(u - u_h)) \\ &\quad - a(u_h, T u_h) - a(u - u_h, T(u - u_h)) \\ &= 2a(u, T u) - 2a(u_h, T u) - a(u - u_h, T(u - u_h)) \\ &= \frac{1}{\lambda} a(u - u_h, u - u_h) - a(u - u_h, T(u - u_h)). \end{aligned}$$

Тъй като

$$a(u - u_h, T(u - u_h)) \leq \|u - u_h\|_{0,\Omega} \|T(u - u_h)\|_{0,\Omega} \leq \|T\| \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2,$$

то получаваме

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \lambda \tilde{\lambda} \left[ \frac{1}{\lambda} + \|T\| \right] \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Ограничеността на оператора  $T$  доказва (3.42). ■

Като следствие от оценките (3.42) и (3.34) ние можем да получим, че при  $n \geq 2$

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq C h^{2n}, \quad \text{ако } u \in H^{n+1}(\Omega),$$

Това е чувствително повишение на порядъка при приближаване на собствените стойности в сравнение с оценката (3.34).

Когато  $\Omega$  е изпъкнала многоъгълна област, ще получим малко по-лош резултат при  $n = 3$  (понеже се нуждаем от оценките (3.36)):

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq Ch^{2(2+s)}, \quad \text{тъй като } u \in H^{3+s}(\Omega).$$

Нека припомним, че  $0 < s \leq 1$  и  $s$  зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата на областта.

Предходната теорема е много важна от теоретична гледна точка. Нейното практическо приложение обаче е силно ограничено, тъй като точното решение на изходната задача (3.40) почти никога не може да бъде намерено. За да направим резултата от Теорема 3.4 полезен в изчислителната практика, се нуждаем от подходяща апроксимация на  $\tilde{\lambda}$ . Сега ще представим два възможни подхода в това отношение.

Първият подход ("подход на двете мрежи") е представен от Ксю и Жоу [73] и е приложен за интегрални уравнения и уравнения от втори ред. Вторият подход е предложен от Андреев и Рачева в [99] и използва същото крайноелементно разделяне, но с полиноми от по-висока степен.

Предимството при първия подход е, че се използват крайноелементни пространства от една и съща степен и това не води до изискването за по-висока регулярност на допълнителната задача. Недостатъкът е, че трябва да се генерира нова, по-гъста мрежа. Вторият подход изключва генерирането на по-гъста мрежа, но се налага да смятаме допълнителната задача с полиноми от степен  $n + 1$ . Също така, този подход повишава изискването за регулярност на допълнителната задача. Така например при многоъгълна област този подход е приложим при  $n = 2, 3$ .

Ще се отнесем към двата подхода по един и същ абстрактен начин. Именно, ще въведем едно добавъчно крайноелементно пространство от непрекъснати функции  $\tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$  така, че  $\Sigma_h \times V_h \subset \tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h \subset \Sigma \times V$ . Разглеждаме следната дискретна (изходна) задача: Да се намери  $(\tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h) \in \tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$  така, че

$$-a(\tilde{\tau}_h, \psi) + b(\psi, \tilde{w}_h) + b(\tilde{\tau}_h, v) = a(u_h, v), \quad \forall \psi \in \tilde{\Sigma}_h, \quad \forall v \in \tilde{V}_h. \quad (3.43)$$

Решението  $(\tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h)$  на тази задача може да бъде представено във вида  $\tilde{\tau}_h = \tilde{S}_h u_h$  и  $\tilde{w}_h = \tilde{T}_h u_h$ , където  $\tilde{S}_h$  и  $\tilde{T}_h$  са компонентни разрешаващи оператори, свързани с крайноелементното пространство  $\tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$ .

Сега ще представим апостериорния алгоритъм, който подобрява приближенията на собствените стойности и функции на задачата (3.28) в смесена формулировка.

### Алгоритъм 3.2

(i) Да се реши задачата (3.33) и да се получи  $\lambda_h \in \mathbf{R}$  и  $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ .

(ii) Да се реши изходната задача (3.43) и да се намери  $(\tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h) \in \tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$ .

(iii) Да се пресметне

$$\tilde{\lambda}_h = a(u_h, \tilde{w}_h)^{-1}. \quad (3.44)$$

(iv) Да се намерят функциите  $\tilde{u}_h$  и  $\tilde{\sigma}_h$  от  $\tilde{u}_h = \tilde{\lambda}_h \tilde{w}_h$  и  $\tilde{\sigma}_h = \tilde{\lambda}_h \tilde{\tau}_h$ .

Собствената двойка  $(\tilde{\lambda}_h, (\tilde{\sigma}_h, \tilde{u}_h))$  представлява нова (и по-добра) апроксимация на точното решение  $(\lambda, (\sigma, u))$ .

Основната цел, която предстои до края на този параграф, е да докажем оценки на приближените собствени двойки, получени от Алгоритъм 3.2.

**Теорема 3.5** Нека  $(\lambda, (\sigma, u))$  е собствена двойка на задачата (3.23), а  $(\tilde{\lambda}_h, (\tilde{\sigma}_h, \tilde{u}_h))$  е получена чрез представения Алгоритъм 3.2. Тогава, ако собствените функции са нормирани посредством  $\|u\|_{0,\Omega} = \|u_h\|_{0,\Omega} = 1$ , то

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq C \left[ \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2 \right]. \quad (3.45)$$

Константата  $C$  може да зависи от  $\lambda$ , но не и от  $h$ .

Доказателство. Нека най-напред забележим, че

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq |\lambda - \tilde{\lambda}| + |\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h|.$$

Първото събираемо в дясната страна на горното неравенство е вече оценено в (3.42), така че остава да оценим само  $|\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h|$ .

Използвайки дефинициите на  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\lambda}_h$ , както и свойствата на операторите  $T$  и  $\tilde{T}_h$ , получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_h} &= a(u_h, \tilde{w}) - a(u_h, \tilde{w}_h) \\
&= [2b(\tilde{\tau}, \tilde{w}) - a(\tilde{\tau}, \tilde{\tau})] - [2b(\tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h) - a(\tilde{\tau}_h, \tilde{\tau}_h)] \\
&= 2b(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{w} - \tilde{w}_h) - a(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h) \\
&\quad + 2[b(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{w}_h) - a(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{\tau}_h) + b(\tilde{\tau}_h, \tilde{w} - \tilde{w}_h)] \\
&= 2b(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{w} - \tilde{w}_h) - a(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h).
\end{aligned}$$

Тогава, предвид следното свойство на ортогоналност на крайноелементната задача (3.43):

$$b(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, v) - a(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \psi) + b(\psi, \tilde{w} - \tilde{w}_h) = 0, \quad \forall (\psi, v) \in \tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$$

при избрани  $\psi = \tilde{\tau}_h$  и  $v = \tilde{w}_h$ , горното равенство довежда до

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_h} \right| &\leq 2|b(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{w} - \tilde{w}_h)| + |a(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h, \tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h)| \\
&\leq 2\|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

което, заедно с (3.42) завършва доказателството на оценката (3.45). ■

Ключов момент в алгоритъма е изборът на подходящи крайноелементни пространства  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  за решаване на допълнителната дискретна задача (3.43). Ще представим по-долу двата подхода при тази конструкция.

**Метод 1** ("метод на двете мрежи" на Ксю и Жоу [73]):

Нека  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  са пространства от непрекъснати функции, които са по части полиноми от степен  $n$ , но върху разделянето  $\tilde{T}_h$  с характеристичния мрежов параметър  $h^\beta$ , като  $\beta > 1$  (по-долу ще бъде определен). Това е по-фина мрежа, която може да бъде генерирана чрез разбиване на изходното разделяне  $T_h$  (виж [73]).

Първо, нека разгледаме случая, при който задачата (3.32) има гладки решения. Нашият анализ се ограничава до  $n \leq 4$ , тъй като  $H^5(\Omega)$  е максималната регулярност на решението  $\tilde{w}$  на (3.32) с дясна страна, принадлежаща на  $H^1(\Omega)$ .



Избирайки  $\beta = n/(n-1)$  и прилагайки Теорема 3.5 и оценката (3.39) за  $\tilde{w}_h$ , ще получим:

$$\begin{aligned} |\lambda - \tilde{\lambda}_h| &\leq C(\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}\|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2) \\ &\leq Ch^{2n}(\|Tu\|_{n+1,\Omega}^2 + \|Tu_h\|_{n+1,\Omega}^2), \quad n \leq 4. \end{aligned}$$

Тази оценка е в сила при изпъкнала многоъгълна област и пространства, породени от полиноми от степен  $n = 2$ . В този случай решението е от  $H^3(\Omega)$  и можем да вземем  $\beta = 2$ , така че редът на сходимост за собствените стойности е  $\mathcal{O}(h^4)$ . Това е значително ускоряване на сходимостта, сравнена с оценката (3.34) – тя осигурява скорост на сходимост, определена от  $|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^2)$ .

Когато  $n = 3, 4$  и  $\Omega$  е многоъгълна изпъкнала област, използваме (3.36), за да получим:

$$\begin{aligned} |\lambda - \tilde{\lambda}_h| &\leq C[\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{1,\Omega}\|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_h\|_{0,\Omega}^2] \\ &\leq C[h^{2(2+s)}\|Tu\|_{3+s,\Omega}^2 + h^{2\beta(1+s)}\|Tu_h\|_{3+s,\Omega}^2]. \end{aligned}$$

Параметърът  $\beta$  се избира така, че да балансира събираемите отдясно на горното неравенство, като е известно, че  $u(x) \in H^{3+s}(\Omega)$ ,  $0 < s \leq 1$ . При фиксирана (известна) стойност на  $s$  определяме  $\beta$  от равенството  $\beta = (2+s)/(1+s)$ . Тъй като обаче в най-общ случай стойността на  $s$  не е известна предварително, винаги можем да изберем  $\beta = 2$  (това е най-лошият случай от гледна точка на съгъстяване на мрежата) и ще получим:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^{4+2s}) \quad \text{за } u \in H^{3+s}(\Omega) \quad 0 < s \leq 1.$$

Тази оценка за собствените стойности е от тип ултрасходимост, защото получаваме ред на сходимост  $\mathcal{O}(h^{4+2s})$ , вместо  $\mathcal{O}(h^{2+2s})$ . Това подобрение е за сметка на решаване на допълнителна изходна задача върху фина мрежа с параметър  $h^2$ . Въпреки това, решаването на изходната задача е много "по-евтино" от изчислителна гледна точка, отколкото решаването на оригиналния проблем.

**Метод 2** ("метод на двете пространства" на Андреев и Рачева [99]):

Нека  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  са пространства от по части полиномиални непрекъснати функции от степен  $n+1$  върху първоначалното разделяне на областта  $T_h$ , върху което сме решили поставения бихармоничен проблем. Ако задачата (3.32) има решение от  $H^{n+2}(\Omega)$ , то оценката (3.39) за апроксимацията (3.44) ще даде

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2n} (\|Tu\|_{n+1,\Omega}^2 + \|Tu_h\|_{n+2,\Omega}^2), \quad n = 2, 3.$$

Ограничението  $n \leq 3$  се дължи на максималната регулярност, която се осигурява на решението на изходната задача (3.40) с дясна страна  $u_h \in H^1$ . Това е също оценка от тип ултрасходимост, понеже (3.34) ни дава скорост на сходимост  $\mathcal{O}(h^{2n-2})$ .

Ако  $\Omega$  е изпъкнала и многоъгълна област, то методът дава добър резултат при  $n = 2$ . Тогава пространствата  $V_h, \Sigma_h$ , и  $\tilde{V}_h, \tilde{\Sigma}_h$  се състоят от полиноми от степен съответно 2 и 3. Като отчетем (3.24), ще получим оценката

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq C [h^4 \|Tu\|_{3,\Omega}^2 + h^{2+2s} \|Tu_h\|_{3+s,\Omega}^2].$$

Неравенството (3.34), отнасящо се за по части квадратични полиноми, осигурява  $|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^2)$ . Подобрената оценка от метода дава  $\mathcal{O}(h^{2+2s})$ . Цената на тази повишена сходимост с решаване на изходната елиптична задача с кубични крайни елементи.

Сега ще докажем оценката за суперсходящата постпроцедура, приложена за бихармоничните собствени функции.

Най-напред ще дефинираме едно приближение  $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$  на точните собствени функции  $(u, \sigma)$  по следния начин:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{\lambda}_h \tilde{w} := \tilde{\lambda}_h Tu_h, \\ \tilde{\sigma} &= \tilde{\lambda}_h \tilde{\tau} := \tilde{\lambda}_h Su_h. \end{aligned} \tag{3.46}$$

**Теорема 3.6** *Нека условията на Теорема 3.4 са изпълнени. Тогава е валидна следната оценка за функциите  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\sigma}$ , определени от (3.46):*

$$|u - \tilde{u}|_{1,\Omega}^2 \leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{0,\Omega}^2 = \left[ |\tilde{\lambda}_h - \lambda| + \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\tilde{\lambda}_h}{\lambda} |\tilde{\lambda}_h - \lambda| \right] \tag{3.47}$$

**Доказателство.** Ще започнем със следното равенство:

$$\begin{aligned} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma - \tilde{\sigma}) &= -a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma - \tilde{\sigma}) + 2b(\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}) \\ &= 2[-a(\sigma, \sigma) + 2b(\sigma, u)] \\ &+ [a(\sigma, \tilde{\sigma}) - b(\tilde{\sigma}, u) - b(\sigma, \tilde{u})] \\ &+ [-a(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}) + 2b(\tilde{\sigma}, \tilde{u})]. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ще преработим изразите в скобите. Най-напред, от (3.28) при  $(\psi, v) = (\sigma, u)$  получаваме:

$$-a(\sigma, \sigma) + 2b(\sigma, u) = \lambda a(u, u) = \lambda. \quad (3.49)$$

Вземайки предвид дефинициите на  $(\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{u})$  от (3.46), получаваме

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tilde{\sigma}) - b(\tilde{\sigma}, u) - b(\sigma, \tilde{u}) &= \tilde{\lambda}_h [a(\sigma, \tilde{\tau}) - b(\tilde{\tau}, u) - b(\sigma, \tilde{u})] \\ &= -\tilde{\lambda}_h a(u_h, u), \end{aligned} \quad (3.50)$$

а също и

$$-a(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}) + 2b(\tilde{\sigma}, \tilde{u}) = \tilde{\lambda}_h^2 [-a(\sigma, \tilde{\tau}) + 2b(\tilde{\tau}, \tilde{w})] = \frac{\tilde{\lambda}_h^2}{\lambda}. \quad (3.51)$$

Като заместим (3.49), (3.51) и (3.50) в (3.48), имаме следния резултат:

$$\begin{aligned} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma - \tilde{\sigma}) &= \lambda - 2\tilde{\lambda}_h a(u_h, u) + \frac{\tilde{\lambda}_h^2}{\lambda} \\ &= [\lambda - \tilde{\lambda}_h] + \tilde{\lambda}_h [2 - 2a(u_h, u)] + \left[ \frac{\tilde{\lambda}_h^2}{\lambda} - \tilde{\lambda} \right] \\ &= [\lambda - \tilde{\lambda}_h] + \tilde{\lambda}_h \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\tilde{\lambda}_h}{\lambda} [\tilde{\lambda}_h - \lambda], \end{aligned}$$

което дава оценката за  $\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{0,\Omega}$ .

За да оценим  $u - \tilde{u}$ , използваме тъждеството

$$b(\psi, u - \tilde{u}) = a(\sigma - \tilde{\sigma}, \psi)$$

за  $\psi \in \Sigma$ , inf-sup условието (3.29), както и неравенството за  $\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{0,\Omega}$

$$\|u - \tilde{u}\|_{1,\Omega} \leq \sup_{\psi \in \Sigma} \frac{|b(\psi, u - \tilde{u})|}{\|\psi\|_{\Sigma}} \leq \sup_{\psi \in \Sigma} \frac{|a(\sigma - \tilde{\sigma}, \psi)|}{\|\psi\|_{\Sigma}} \leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{0,\Omega}.$$

■

**Забележка 3.10** Оценката (3.47) показва подобряване на сходимостта за собствените функции вследствие на апостериорната техника. Ако за решението имаме гладкост  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ , то вземайки предвид ограничени-

ята за регулярност, които дискутирахме при собствените стойности (т.е. ограничени за  $n$ ), получаваме

$$\|u - \tilde{u}\|_{1,\Omega} + \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^n).$$

Сега ще докажем оценка на грешката за приближената собствена функция  $\tilde{u}_h$ , определена в представения Алгоритъм 3.2.

Нека най-напред отбележим, че функцията  $\tilde{u}_h$  не е нормирана по отношение на  $a$ -формата, т.е., изобщо  $a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) \neq 1$ . Този факт е следствие от равенството (3.44). Очевидно имаме  $\tilde{\lambda}_h a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = 1$  и следователно  $a(u_h, \tilde{u}_h) = 1$ .

Ще покажем, че  $(\tilde{\sigma}_h, \tilde{u}_h)$  е проектор на Галъоркин на приближеното решение  $(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$  върху крайноеlementното пространство  $\tilde{\Sigma}_h \times \tilde{V}_h$ . Действително, от (3.40) и (3.43) лесно получаваме съответните две равенства:

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_h} [-a(\tilde{\sigma}_h, \psi) + b(\psi, \tilde{u}_h) + b(\tilde{\sigma}_h, v)] = a(u_h, v) \quad \forall \psi \in \Sigma_h, \quad \forall v \in V_h,$$

$$\frac{1}{\lambda_h} [-a(\tilde{\sigma}, \psi) + b(\psi, \tilde{u}) + b(\tilde{\sigma}, v)] = a(u_h, v) \quad \forall \psi \in \Sigma, \quad \forall v \in V.$$

Тогава за всяко  $\psi \in \Sigma_h$  и  $v \in V_h$  следва

$$-a(\tilde{\sigma}_h - \tilde{\sigma}, \psi) + b(\psi, \tilde{u}_h - \tilde{u}) + b(\tilde{\sigma}_h - \tilde{\sigma}, v) = 0.$$

Следващата теорема доказва оценките, получени за собствените функции от Алгоритъма 3.2.

**Теорема 3.7** *Нека условията от предходната Теорема 3.6 са изпълнени. Тогава оценката на грешката за бихармоничните собствени функции при използване на суперсходящата постпроцедурна техника, описана в Алгоритъм 3.2, е:*

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq C \cdot h^\mu,$$

където  $\mu = n$  за случая на "гладко решение" и  $\mu = n - 1 + s$  в случай на полигонална област.

**Доказателство.** И тук могат да бъдат разгледани двата подхода, както при собствените стойности. Ако пространствата  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  се състоят от непре-

къснати функции, които са по части полиноми от степен  $n$  и мрежовия параметър, характеризиращ разделянето на областта е  $h^\beta$ ,  $\beta > 1$ , то (виж [102], Теорема 7.1.6):

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq C.h^{\beta(n-1)} (\|Tu_h\|_{n+1,\Omega} + \|Su_h\|_{n,\Omega}). \quad (3.52)$$

За да запазим същия порядък, както в (3.47), избираме  $\beta = n/(n-1)$ . Имайки предвид, че решението  $\tilde{u}$  има максимална регулярност  $H^5(\Omega)$ , то  $n = 2$  или  $n = 3$  и съответно  $\beta = 2$  или  $\beta = 3/2$ .

Случаят на полигонална област и  $n = 3$  от (3.36) ни дава неравенството

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\beta(s+1)} \|Tu_h\|_{3+s,\Omega}. \quad (3.53)$$

Следователно, достатъчно е да вземем

$$\beta = \frac{2+s}{1+s}, \quad 0 < s \leq 1.$$

Що се касае до втория подход [99], приложимостта на метода е оправдана при  $n = 2$ . Тогава пространствата  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  съдържат непрекъснати функции, които са по части полиноми от степен 3 върху същото крайноелементно разделяне  $T_h$  на областта. Използвайки тогава стандартната оценка за елиптичната (изходна) задача, получаваме:

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 (\|Tu_h\|_{4,\Omega} + \|Su_h\|_{3,\Omega}). \quad (3.54)$$

По аналогия, за изпъкнала многоъгълна област имаме

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{1+s} \|Tu_h\|_{3+s,\Omega}. \quad (3.55)$$

Така от (3.52) и (3.54) следва, че

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^n, \quad (3.56)$$

където  $n = 2$  или  $n = 3$ .

За "многоъгълния" случай от (3.53) и (3.55) получаваме оценката

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n-1+s}, \quad (3.57)$$

където  $0 < s \leq 1$  зависи от максималния вътрешен ъгъл на границата  $\Gamma$  и  $n = 2$  или  $n = 3$ .

Крайният резултат за повишения ред на сходимост на крайноелементната апроксимация за бихармоничната спектрална задача при използване на

дву-нивов апостериорен процес следва от неравенството на триъгълника и от оценките (3.47), (3.56) и (3.57). ■

### Заключителни бележки и изводи

От сравнението между резултатите от апостериорния анализ на предложения метод и оптималните оценки в МКЕ за първа бихармонична задача (виж [30, 68, 87, 88]) се вижда, че повишаването на скоростта на сходимост на приближените собствени двойки става с използване на сравнително проста апостериорна процедура, изискваща относително малки изчислителни усилия. Това ще бъде илюстрирано с числов пример в последния параграф на тази глава.

Представената апостериорна техника може да бъде приложена и за следните задачи от четвърти ред, като:

- Едномерни задачи с различни хомогенни гранични условия, например

$$u^{IV}(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, l),$$

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

$$u''(l) = u'''(l) = 0.$$

- Изследване на непринудените колебания на плоча с променлива плътност. Именно, тогава членът  $\lambda u$  може да бъде заместен с  $\lambda \rho u$ , където  $\rho$  е строго положителна и ограничена функция в  $\Omega$ .
- Спектралният проблем

$$\Delta^2 u = -\lambda \Delta u \quad \text{в } \Omega,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{върху } \Gamma,$$

който се разглежда в [87], също попада в класа от задачи, за които може да се приложи суперсходяща апостериорна техника.

Нека отбележим, че линейните крайни елементи (т.е.  $n = 1$ ), макар и рядко, също се използват в смесения метод за бихармонични задачи (виж Ишихара [64, 65]). За проблема, който разглеждаме, редът на сходимост за собствените функции в някоя от Соболевите норми  $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ ,  $k = 0, 1, 2$  е  $\mathcal{O}(h^{1/2})$  (виж [65]). Апостериорна процедура би могла да се разглежда и за линейни крайни елементи.

### 3.4 Вариационни аспекти за някои спектрални задачи

Качественият анализ за методите от типа Ритц-Гальоркин се основава на вариационната формулировка за даден проблем и по-специално на участващите в нея линейни форми (виж например [89]). Някои гранични задачи допускат различни слаби формулировки. Типичен пример за това са спектралните задачи, при които собствената стойност участва в граничните условия. В този параграф ще се интересуваме именно от такива задачи.

Целта ни е да изследваме проблеми, които са по-общи от разгледаните в §3.2 и §3.3, за да можем да дискутираме апостериорни процедури за задачи с параметър в граничните условия. Ще разгледаме въпроса за симетризуемост на билинейните форми, а също и възможността за дефиниране на подходящо Хилбертово пространство, свързано със собствените функции и отчитащо граничните условия.

Задачите, в които спектралният параметър  $\lambda$  участва линейно в граничните условия, са интересни не само от математическа гледна точка. Те моделират важни за инженерната практика процеси. Да изброим някои от тях:

- Задачи с динамични гранични условия: Времевата променлива ще участва в граничните условия на моделния проблем. При определяне на собствените двойки се получават и интеграли по границата на областта. Такива реални процеси се наблюдават в динамиката, топло-техниката и други (виж например [34, 52]).
- Задачи от динамика на флуидите: Такива задачи моделират движение на флуид в област със свободна граница или динамиката на контейнер (ограничен обем), който е изцяло или частично запълнен с флуид (така наречените sloshing problems [67]).

- Спектрални задачи в случаи на маса, съсредоточена в точка или върху линия: Този клас от проблеми заема важно място в анализа за устойчивост на прътови или плочевы конструкции. Като пример в едномерния случай може да се спомене конзолно закрепена греда, в свободния край на която е съсредоточена маса [85]. За двумерния случай може да се посочи за пример плоча с усилващи ребра (стифнери) [85, 90].

Ясно е, че съществува голямо разнообразие на моделни задачи, описвани с диференциална система, при която собствените стойности участват линейно в граничните условия. За нашите цели ще разгледаме само два класа от такива задачи. Именно, вариационни аспекти за задача от втори ред [26] и смесена формулировка на задачи от четвърти ред [19]. Тези разглеждания са направени за произволна размерност на областта  $\Omega$ .

#### А Вариационни аспекти на спектрални задачи от втори ред

Това са едни от най-често срещаните проблеми със спектрален параметър, участващ в граничните условия. Те се отнасят към така наречените **задачи на Стеклов** [36, 67]. Класически е случаят, при който, върху границата на областта, нормалната производна на неизвестната функция е пропорционална на нейната производна относно времевата променлива. Подробен крайноелементен анализ на този проблем ще направим в следващия параграф.

Нека  $\Omega$  е ограничена област в  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 1$  с Липшицова граница  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ . Разглеждаме следната задача: Търсим число  $\lambda$  и ненулева функция  $u(x)$  такива, че

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.58)$$

$$-\mathcal{B}_1 u(s) = \lambda \mathcal{B}_2 u(s), \quad s \in \Gamma, \quad (3.59)$$

където

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u,$$

а  $a_{ij}(x)$  и  $a_0(x)$  принадлежат на  $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ .

Ще предполагаме, че операторът  $\mathcal{A}$  е строго елиптически, т.е. съществува константа  $\alpha > 0$  такава, че  $\forall \xi \in \mathbf{R}^d, \forall x \in \Omega$



$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{j=1}^d \xi_j^2, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$1 \leq i, j \leq d, \quad a_0 > 0, \quad x \in \Omega.$$

Впрочем, операторът  $\mathcal{A}$  е дефиниран в  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Нека да дефинираме и граничните оператори ( $s \in \Gamma$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 u(s) &= \alpha_1(s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \beta_1(s) u(s), \\ \mathcal{B}_2 u(s) &= \alpha_2(s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \beta_2(s) u(s), \end{aligned} \tag{3.60}$$

където  $\alpha_i(s), \beta_i(s) \in C(\Gamma), i = 1, 2$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_j),$$

а  $\nu$  е външен единичен нормален на границата  $\Gamma$  вектор.

Така че разглеждаме обща задача на Стеклов за линеен елиптичен и самоспрегнат оператор [30].

Да въведем означението

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \alpha_1(s) & \beta_1(s) \\ \alpha_2(s) & \beta_2(s) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 3.8** Нека непрекъснатите функции  $\alpha_i(s), \beta_i(s), i = 1, 2, s \in \Gamma$  удовлетворяват условието:

$$\Delta(s) > 0, \quad \forall s \in \Gamma. \tag{3.61}$$

Тогавашното решение на (3.58), (3.59) принадлежи на определено Хилбертово пространство и спектърът е реален.

**Доказателство.** Нека параметрите  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $\lambda \neq \mu$  са такива, че  $(\lambda, u(x))$  и  $(\mu, v(x))$  са две различни собствени двойки на (3.58), (3.59). Прилагайки формулата на Грийн [89], получаваме:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Au.v - Av.u) dx &= (\lambda - \mu) \int_{\Omega} u(x).v(x) dx \\ &= \int_{\Gamma} \left( u(s) \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} - v(s) \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.62)$$

За улеснение на записа, отгук нататък ще пропускаме аргумента  $s$ . От равенствата  $\mathcal{B}_1 u = \lambda \mathcal{B}_2 u$  и  $\mathcal{B}_1 v = \mu \mathcal{B}_2 v$ , следва:

$$\mathcal{B}_1 u.\mathcal{B}_2 v - \mathcal{B}_1 v.\mathcal{B}_2 u = -\lambda \mathcal{B}_2 u.\mathcal{B}_2 v + \mu \mathcal{B}_2 v.\mathcal{B}_2 u. \quad (3.63)$$

От тук имаме следното твърждение:

$$(\lambda - \mu)\mathcal{B}_2 u.\mathcal{B}_2 v = \mathcal{B}_1 v.\mathcal{B}_2 u - \mathcal{B}_1 u.\mathcal{B}_2 v. \quad (3.64)$$

Ще преработим дясната страна на (3.64):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 v.\mathcal{B}_2 u - \mathcal{B}_1 u.\mathcal{B}_2 v &= (\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} - \beta_1 v) (\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} - \beta_2 u) \\ &- (\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} - \beta_1 u) (\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} - \beta_2 v) \\ &= u \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} (-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + v \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \left( \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} v - \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} u \right). \end{aligned}$$

Тогава можем да запишем (3.64) във вида:

$$(\lambda - \mu)\mathcal{B}_2 u.\mathcal{B}_2 v = -\Delta(s) \left( \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} v - \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} u \right).$$

Интегрирайки върху  $\Gamma$ , от (3.63) и (3.64) получаваме равенство между двете различни решения  $(\lambda, u)$  и  $(\mu, v)$ :

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{\Delta(s)} \mathcal{B}_2 u.\mathcal{B}_2 v ds = 0.$$

От условието (3.61) ще дефинираме следното Хилбертово пространство:

$$H(\tilde{\Omega}) \equiv L^2(\Omega) \oplus L^2_{\frac{1}{\Delta(s)}}(\Gamma).$$

Нека означим  $\mathcal{B}_2 u = \bar{u}(s)$  и  $\mathcal{B}_2 v = \bar{v}(s)$ ,  $s \in \Gamma$ . Така скалярното произведение в  $H(\tilde{\Omega})$  е:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{\Delta(s)} \bar{u}(s) \bar{v}(s) ds.$$

Съответната норма ще бъде

$$\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{\Delta(s)} \bar{u}^2(s) ds.$$

Да разгледаме вектор-функцията  $\tilde{u} = (u(x), \bar{u}(s))^T$  и оператора  $L\tilde{u} = (\mathcal{A}u, -\mathcal{B}_1 u)^T$  (тук  $T$  означава транспониране).

Очевидно, задачата (3.58), (3.59) е еквивалентна на:

$$L\tilde{u} = \lambda \tilde{u}$$

в Хилбертовото пространство  $H$ .

Операторът  $\mathcal{A}$  е самоспрегнат, а операторът  $L$  е симетричен, ограничен и положително определен. Тогава  $\mathcal{A}$  има изброимо безкрайно множество от собствени функции (виж [30], стр. 683). ■

Следващата ни цел е да представим (3.58), (3.59) в слаба формулировка, за да могат да бъдат прилагани различни числени методи от вариационен тип и специално МКЕ. Нека  $v \in H^1(\Omega)$ . Тогава, прилагайки отново формулата на Грийн, ще получим:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega} a_0 uv dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx. \quad (3.65)$$

Сега ще докажем достатъчни условия за симетричност и елиптичност на билинейната форма в лявата страна на (3.65). От условията (3.60) и неравенство (3.61) следва (отново пропускаме аргумента  $s \in \Gamma$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} = \frac{\beta_2 \mathcal{B}_1 u - \beta_1 \mathcal{B}_2 u}{\Delta}, \quad (3.66)$$

$$u = \frac{\alpha_2 \mathcal{B}_1 u - \alpha_1 \mathcal{B}_2 u}{\Delta}. \quad (3.67)$$

Като отчетем, че  $\mathcal{B}_1 u = -\lambda \mathcal{B}_2 u$ , от последните две равенства лесно достигаем до

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_1 + \lambda\beta_2)\mathcal{B}_2 u,$$

$$u = -\frac{1}{\Delta}(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\mathcal{B}_2 u.$$

Замествайки (3.66) и (3.67) в (3.65), получаваме

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma} \frac{v\mathcal{B}_2 u \beta_1}{\Delta} ds + \int_{\Omega} a_0 uv dx \quad (3.68)$$

$$= \lambda \left( \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Gamma} \frac{v\mathcal{B}_2 u \beta_2}{\Delta} ds \right),$$

или накратко

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Така получихме вариационната формулировка на задачата на Стеклов от общ вид.

Очевидно, билинейните форми  $a(\cdot, \cdot)$  и  $b(\cdot, \cdot)$  са непрекъснати. Да дефинираме изпъкналото подмножество  $H^1(\bar{\Omega})$ :

$$V^* = \{v \in H^1(\bar{\Omega}) : \int_{\Gamma} \frac{v\mathcal{B}_2 v \beta_1}{\Delta} ds > 0\}.$$

Билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  в общия случай не е симетрична. Нека разгледаме интеграла

$$a_{\Gamma}(u, v) = \int_{\Gamma} \frac{v\mathcal{B}_2 u \beta_1}{\Delta} ds.$$

От (3.66) и (3.67) следва

$$\begin{aligned}
a_{\Gamma}(u, v) - a_{\Gamma}(v, u) &= \int_{\Gamma} \frac{\beta_1}{\Delta} (v \mathcal{B}_2 u - u \mathcal{B}_2 v) ds \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\beta_1}{\Delta} \left[ v \mathcal{B}_2 u + \frac{1}{\Delta} (\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \mathcal{B}_2 u \cdot \mathcal{B}_2 v \right] ds \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\beta_1 \alpha_2 \mathcal{B}_2 u}{\Delta^2} \left[ \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} - \beta_1 v + \lambda (\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \mathcal{V}} - \beta_2 v) \right] ds \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\beta_1 \alpha_2 \mathcal{B}_2 u}{\Delta^2} [\mathcal{B}_1 v + \lambda \mathcal{B}_2 v] ds.
\end{aligned}$$

Горните разсъждения ни позволяват да формулираме следната теорема:

**Теорема 3.9** *Нека е изпълнено неравенството (3.61). Ако функцията  $v$  принадлежи на пространството  $V^*$ , то билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  в (3.68) е равномерно  $V$ -елиптична. Ако пак вариационната функция  $v$  удовлетворява граничните условия (3.59), то задачата (3.68) е симетрична.*

**Забележка 3.11** *Вариационните аспекти за самоспрегнати спектрални задачи от четвърти ред са разгледани от Рачсва в [97] (виж също [98]).*

### Б Вариационни аспекти в смесената формулировка за елиптични спектрални задачи от четвърти ред

Както в съгласувания случай, и тук ще предпологаме същите условия за областта  $\Omega$  и нейната граница  $\Gamma$ . Разглеждаме следните строго елиптични оператори от втори ред

$$\mathcal{A}_i u(x) = p_i(x) \Delta u(x) + \sum_{j=1}^d q_{ij}(x) \partial_j u(x) + r_i(x) u(x), \quad i = 1, 2,$$

където  $\Delta$  е операторът на Лаплас,

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, d, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

Коефициентите са реалнозначни функции в  $\bar{\Omega}$ , такива, че  $p_i(x) \in C^2(\Omega)$ ,  $q_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $r_i(x) \in C(\Omega)$ ,  $p_i(x) > 0$ ,  $q_{ij}(x) \geq 0$ ,  $r_i(x) \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, d$ .

Ще изследваме следната смесена формулировка за елиптична спектрална задача от четвърти ред:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 u(x) - \lambda c_1(x)u(x) &= \sigma(x), \\ \mathcal{A}_2 \sigma(x) - \lambda c_2(x)\sigma(x) &= b(x)u(x) + \lambda c_3(x)u(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.69}$$

с гранични условия ( $s \in \Gamma$ )

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_1(s) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1(s)\sigma + \delta_1(s)u &= \lambda(\varphi_1(s)\sigma + \psi_1(s)u), \\ \alpha_2(s) \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_2(s) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_2(s)\sigma + \delta_2(s)u &= \lambda(\varphi_2(s)\sigma + \psi_2(s)u), \end{aligned} \tag{3.70}$$

където коефициентите в (3.70) принадлежат на  $C(\Gamma)$  и  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  е производна по външната нормала [28]. Поради линейната независимост на граничните условия (3.70) без ограничение на общността можем да приемем, че  $\alpha_2(s) = 0$ , ако  $\alpha_1(s) \neq 0$  и при това  $(\varphi_i, \psi_i) \neq (0, 0)$  само при  $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$ ,  $i = 1; 2$ .

В (3.69), (3.70) ние търсим число  $\lambda$ , така че решението  $(\sigma, u)$  на (3.69) да е нетривиално и да удовлетворява граничните условия (3.70). За тази цел, представяме тази задача в смесена вариационна формулировка. При нея, за да приближим точното решение чрез процедура на Галъоркин, са необходими две неизвестни функции. Едно от предимствата на смесеното представяне е, че при решаване по МКЕ се избягва изискването за удовлетворяване на  $C^1$ -условието (виж Мерсие [86]).

Елиптичната задача (3.69), (3.70) е от типа проблеми, при които собствена стойност  $\lambda$  участва линейно в граничните условия [1, 52]. За нея ще получим някои достатъчни условия, отнасящи се за вариационните свойства на смесената формулировка.

Нека  $W \times V$  е затворено подпространство на  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , т.е.  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \subset W \times V \subseteq H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

За облекчаване на записа в повечето случаи ще пропускаме аргументите  $x$  и  $s$ . След интегриране по части върху областта  $\Omega$ , за всяко  $\psi \in W$ ,  $v \in V$  получаваме:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1 u, \psi) - \lambda(c_1 u, \psi) &= (\sigma, \psi), \\ (\mathcal{A}_2 \sigma, v) - \lambda(c_2 \sigma, v) &= (bu, v) + \lambda(c_3 u, v). \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_1 u, \psi) + (\mathcal{A}_2 \sigma, v) - (\sigma, \psi) - (bu, v) \\ &= \lambda \{ (c_1 u, \psi) + (c_2 \sigma, v) + (c_3 u, v) \}. \end{aligned}$$

Като се използват граничните условия (3.70), изходната система може да се запише във вида [102]:

$$a((\sigma, u), (\psi, v)) = \lambda b((\sigma, u), (\psi, v)), \quad \forall (\psi, v) \in W \times V. \quad (3.71)$$

Вариационните  $a$  и  $b$ -форми ще бъдат прецизирани по-нататък. Нашата цел е да намерим условия за симетризуемост на (3.71).

Вземайки предвид, че  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ , и прилагайки формулата на Грийн, получаваме (възприемаме означението  $\sum_j = \sum_{j=1}^d$ ):

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_1 u, \psi) + (\mathcal{A}_2 \sigma, v) - (\sigma, \psi) - (bu, v) \\ &= \int_{\Omega} [p_1 \Delta u \psi + \sum_j q_{1j} \partial_j u \psi + r_1 u \psi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [p_2 \Delta \sigma v + \sum_j q_{2j} \partial_j \sigma v + r_2 \sigma v] dx - \int_{\Omega} \sigma \psi dx - \int_{\Omega} uv dx \\ &= \int_{\Gamma} [p_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p_2 \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v + \sum_j q_{2j} \nu_j \sigma v] ds \\ &+ \int_{\Omega} [-p_1 \nabla u \cdot \nabla \psi + \sum_j q_{1j} \partial_j u \psi + r_1 u \psi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [-p_2 \nabla \sigma \cdot \nabla v - \sum_j q_{2j} \sigma \partial_j v + r_2 \sigma v] dx - \int_{\Omega} \sigma \psi dx - \int_{\Omega} uv dx, \end{aligned}$$

където  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$ .

Търсим условия, при които изразите в горното равенство са симетрични по отношение на двойките функции  $(\sigma, u)$  и  $(\psi, v)$ . Преди всичко, симетричност има, ако

$$p_1 = p_2 =: p; \quad q_{1j} = -q_{2j} =: q_j, \quad j = 1, \dots, d; \quad r_1 = r_2 =: r. \quad (3.72)$$

За да преработим интеграла върху границата

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [p_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p_2 \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v + \sum_j q_{2j} \nu_j \sigma v] ds \\ &= \int_{\Gamma} [M((\sigma, u), (\psi, v)) + \lambda N((\sigma, u), (\psi, v))] ds, \end{aligned}$$

използваме условията (3.70), където  $M$  и  $N$  ще бъдат определени по-нататък.

За симетричност на  $b$ -формата в (3.71) е необходимо

$$c_1 = c_2 = c. \quad (3.73)$$

Въвеждаме следното означение:

$$\Delta_{\alpha, \beta}(s) = \begin{vmatrix} \alpha_1(s) & \beta_1(s) \\ \alpha_2(s) & \beta_2(s) \end{vmatrix}, \quad s \in \Gamma,$$

а също възприемаме означенията  $\Delta_{\alpha, \gamma}$ ,  $\Delta_{\beta, \gamma}$ ,  $\Delta_{\alpha, \varphi}$  и т.н. за други подобни детерминанти.

**Теорема 3.10** *Нека коефициентите в уравненията (3.69), (3.70) притежават нужната гладкост, дискутирана при смесената формулировка на задачата. Ако (3.72), (3.73) и равенствата*

$$p(\Delta_{\alpha, \delta} + \Delta_{\beta, \gamma}) = \sum_j q_j \nu_j \Delta_{\alpha, \beta}, \quad (3.74)$$

$$\Delta_{\alpha, \psi} + \Delta_{\beta, \varphi} = 0 \quad (3.75)$$

са изпълнени, то задачата за собствени стойности и собствени функции (3.71) притежава симетрична смесена вариационна формулировка.



Доказателство. Случай 1 Нека първоначално параметърът  $\lambda$  участва линейно в граничните условия. Тогава  $\alpha_1(s) \neq 0$  и  $\alpha_2(s) = 0$ .

Случай 1.1  $\Delta_{\alpha,\beta} \neq 0$ , т.е.  $\beta_2(s) \neq 0$ .

Като пресметнем производните по външната нормала (в записа пропускаме аргумента  $s \in \Gamma$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{ \Delta_{\beta,\gamma} \sigma + \Delta_{\beta,\delta} u - \lambda \Delta_{\beta,\varphi} \sigma - \lambda \Delta_{\beta,\psi} u \}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{ -\Delta_{\alpha,\gamma} \sigma - \Delta_{\alpha,\delta} u + \lambda \Delta_{\alpha,\varphi} \sigma + \lambda \Delta_{\alpha,\psi} u \},\end{aligned}$$

получаваме

$$\begin{aligned}& p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v \\ &= \frac{p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{ -\Delta_{\alpha,\gamma} \sigma \psi - \Delta_{\alpha,\delta} u \psi + \Delta_{\beta,\gamma} \sigma v + \Delta_{\beta,\delta} u v \} - \sum_j q_j \nu_j \sigma v \\ & \quad + \frac{\lambda p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{ \Delta_{\alpha,\varphi} \sigma \psi + \Delta_{\alpha,\psi} u \psi - \Delta_{\beta,\varphi} \sigma v - \Delta_{\beta,\psi} u v \}.\end{aligned}$$

Сега вече можем да въведем следните изрази за  $M$  и  $N$ :

$$M = \frac{1}{\Delta_{\alpha,\beta}} \left\{ -p \Delta_{\alpha,\gamma} \sigma \psi - p \Delta_{\alpha,\delta} u \psi + (p \Delta_{\beta,\gamma} - \Delta_{\alpha,\beta} \sum_j q_j \nu_j) \sigma v + p \Delta_{\beta,\delta} u v \right\},$$

$$N = \frac{p}{\Delta_{\alpha,\beta}} \{ \Delta_{\alpha,\varphi} \sigma \psi + \Delta_{\alpha,\psi} u \psi - \Delta_{\beta,\varphi} \sigma v - \Delta_{\beta,\psi} u v \}.$$

Лесно се вижда, че условията (3.74) и (3.75) осигуряват симетричност на билинейните форми  $a(\cdot, \cdot)$  и  $b(\cdot, \cdot)$ , а оттам и на задачата (3.71).

Случай 1.2  $\Delta_{\alpha,\beta} = 0$  и  $\Delta_{\alpha,\gamma} \neq 0$ , т.е.  $\beta_2(s) = 0$ ,  $\gamma_2(s) \neq 0$ . Тогава

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} &= \frac{1}{\Delta_{\alpha,\gamma}} \left\{ -\Delta_{\beta,\gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \Delta_{\gamma,\delta} u + \lambda \frac{\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}} u - \lambda \Delta_{\gamma,\psi} u \right\}, \\ \sigma &= -\frac{\Delta_{\alpha,\delta}}{\Delta_{\alpha,\gamma}} u.\end{aligned}$$

По този начин имаме

$$\begin{aligned}
 & p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v \\
 &= \frac{p}{\Delta_{\alpha, \gamma}} \left\{ -\Delta_{\alpha, \delta} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \Delta_{\beta, \gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v + \Delta_{\gamma, \delta} uv \right\} + \frac{1}{\Delta_{\alpha, \gamma}} \sum_j q_j \nu_j \Delta_{\alpha, \delta} uv \\
 & \quad + \frac{\lambda p}{\Delta_{\alpha, \gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma, \varphi} \Delta_{\alpha, \delta}}{\Delta_{\alpha, \gamma}} - \Delta_{\gamma, \psi} \right\} uv.
 \end{aligned}$$

В такъв случай

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{\Delta_{\alpha, \gamma}} \left\{ -p(\Delta_{\alpha, \delta} + \Delta_{\beta, \gamma}) \frac{\partial u}{\partial \nu} v + (p\Delta_{\gamma, \delta} + \sum_j q_j \nu_j \Delta_{\alpha, \delta}) uv \right\}, \\
 N &= \frac{p}{\Delta_{\alpha, \gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma, \varphi} \Delta_{\alpha, \delta}}{\Delta_{\alpha, \gamma}} - \Delta_{\gamma, \psi} \right\} uv.
 \end{aligned}$$

Условието (3.74), при допускането, че  $\Delta_{\alpha, \beta} = 0$  (и следователно  $\Delta_{\alpha, \varphi} = \Delta_{\alpha, \psi} = 0$ ), води до

$$p\Delta_{\alpha, \delta} + p\Delta_{\beta, \gamma} = 0.$$

Случай 1.3  $\Delta_{\alpha, \beta} = \Delta_{\alpha, \gamma} = 0$ ,  $\Delta_{\alpha, \delta} \neq 0$ .

В този случай граничните условия ще имат следното представяне:

$$\alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1 \sigma = \lambda \varphi_1 \sigma,$$

$$u = 0,$$

следователно

$$p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v = p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi.$$

Тогава условието (3.74) не е изпълнено и задачата не е симетрична.

Случай 2 Да разгледаме случая, когато  $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = 0$ ,  $\beta_1(s) \neq 0$ ,  $\beta_2(s) = 0$  и  $\varphi_2(s) = \psi_2(s) = 0$ .

Случай 2.1  $\Delta_{\beta, \gamma} \neq 0$ , т.е.  $\gamma_2(s) \neq 0$ .

Тогава имаме

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\Delta_{\beta,\gamma}} \left\{ \Delta_{\gamma,\delta} u - \lambda \frac{\Delta_{\gamma,\varphi} \Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} u + \lambda \Delta_{\gamma,\psi} u \right\},$$

$$\sigma = -\frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} u.$$

В такъв случай ще получим

$$p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v$$

$$= \frac{p}{\Delta_{\beta,\gamma}} \left\{ -\frac{\Delta_{\gamma,\delta} \Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} uv + \Delta_{\beta,\gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v \right\} + \frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} \sum_j q_j \nu_j uv$$

$$- \frac{\lambda p}{\Delta_{\beta,\gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma,\varphi} \Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi} \right\} uv.$$

Нека при това отбележим, че

$$M = \frac{\Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} \left\{ \sum_j q_j \nu_j - p \frac{\Delta_{\gamma,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} \right\} uv + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v,$$

$$N = -\frac{p}{\Delta_{\beta,\gamma}} \left\{ \frac{\Delta_{\gamma,\varphi} \Delta_{\beta,\delta}}{\Delta_{\beta,\gamma}} - \Delta_{\gamma,\psi} \right\} uv.$$

Ясно е, че и при този случай условието (3.74) не е изпълнено.

Случай 2.2  $\Delta_{\beta,\gamma} = 0$ ,  $\Delta_{\beta,\delta} \neq 0$ , т.е.  $\delta_2(s) \neq 0$ . Тогава граничните условия имат вида:

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma_1 \sigma = \lambda \varphi_1 \sigma,$$

$$u = 0.$$

Следователно

$$p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v = \frac{p}{\beta_1} \{-\gamma_1 + \lambda \varphi_1\} \sigma \psi,$$

и условията (3.74), (3.75) са изпълнени.

Случай 3 Най-сетне, нека  $(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) = (0, 0)$ ,  $\gamma_1(s) \neq 0$ . Тогава  $\gamma_2(s) = 0$  и  $(\varphi_i(s), \psi_i(s)) = (0, 0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Всъщност, граничните условия, съответстващи на така зададени коефициенти, са  $u = 0$ ,  $\sigma = 0$  и

$$p \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi + p \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} v - \sum_j q_j \nu_j \sigma v = 0.$$

■

**Забележка 3.12** Резултатът от последната теорема е в сила, ако  $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$  с мярка  $\text{meas}(\Gamma_k) \neq 0$ , като условията (3.74) и (3.75) са изпълнени за всяка част  $\Gamma_k$  от границата.

В Теорема 3.10 се съдържат достатъчни условия за представяне на една спектрална задача от четвърти ред в симетрична смесена формулировка. Ако условията на теоремата са изпълнени, то (3.69) има следното общо представяне в смесен вид:

$$p \Delta u + \sum_j q_j \partial_j u + r u - \lambda c u = \sigma,$$

$$p \Delta \sigma - \sum_j q_j \partial_j \sigma + r \sigma - \lambda c \sigma = b u + \lambda c_3 u.$$

Следователно, в този случай оригиналното диференциално уравнение е:

$$\begin{aligned} p^2 \Delta^2 u + 2pr \Delta u - \sum_{i,j=1}^d q_i q_j \partial_{ij}^2 u + (r^2 - b) u \\ = \lambda [2pc \Delta u + 2rcu + c_3 u] - \lambda^2 c^2 u. \end{aligned}$$

Последното показва, че нашите разсъждения включват някои случаи, при които спектралният параметър  $\lambda$  участва нелинейно (при условие, че  $c(x) \neq 0$ ). Тогава в горното уравнение се съдържа  $\lambda^2$ . Нека обаче да подчертаем, че смесеният метод трансформира този член в линеен. Задачи-

те, съдържащи  $\lambda$  и  $\lambda^2$  имат интересни и полезни приложения, особено в уравненията на Шурм-Лиувил и са разгледани в [46].

Общият вид се записва с едно уравнение [30]:

$$a((\sigma, u), (\psi, v)) = \lambda b((\sigma, u), (\psi, v)), \quad \forall (\psi, v) \in W \times V,$$

където

$$\begin{aligned} a((\sigma, u), (\psi, v)) &= \int_{\Omega} [-p(\nabla u \cdot \nabla \psi + \nabla \sigma \cdot \nabla v + \sum_j q_j (\partial_j u \psi + \sigma \partial_j v) \\ &\quad + r(u\psi + \sigma v))] dx - \int_{\Omega} (\sigma \psi + buv) dx + \int_{\Gamma} M((\sigma, u), (\psi, v)) ds, \\ b((\sigma, u), (\psi, v)) &= \int_{\Omega} [c(u\psi + \sigma v) + c_3 uv] dx - \int_{\Gamma} N((\sigma, u), (\psi, v)) ds. \end{aligned}$$

### 3.5 Изопараметричен МКЕ и оценка на грешката за задача на Стеклов

В предходния параграф разгледахме общи самоспрегнати спектрални задачи, при които спектралният параметър  $\lambda$  участва линейно в граничните условия. Численият анализ на такива "нестандартни" задачи в много случаи не може да се извърши чрез познатите в МКЕ подходи (виж [34, 104]) или чрез класическата теория на компактните оператори (виж [93, 120]). Този проблем се пренася върху постпроцедурите, които искаме да приложим, защото апостериорните оценки и алгоритми често зависят от доказаните априорни оценки (виж например §3.2 и §3.3). Ето защо априорните оценки в МКЕ имат място в теорията и алгоритмизацията, произтичаща от апостериорния анализ в МКЕ.

Целта на този параграф е да се изследва и докаже оценка на грешката в изопараметричния вариант на МКЕ за възможно "най-класическия" случай на задачата на Стеклов [36, 67]. Изследването има достатъчно голяма общност при криви граници на област с произволна размерност [24].

Нека ограничената област  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 1$  притежава **криволинейна** граница  $\Gamma$ , която е непрекъсната по Липшиц, така че  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  не е многоъгълник. В нашите разглеждания операторът

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + a \cdot u$$

е строго елиптически. За коефициентите имаме, че  $a_{ij}(x)$  и  $a(x)$  принадлежат на  $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , а  $a(x) \geq a_0 > 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

Предполагаме, че границата  $\Gamma$  се състои от две части, т.е.

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset, \quad \text{meas}(\Gamma_1) > 0.$$

Разглеждаме следната задача: Търсим  $\lambda \in \mathbf{R}$  така, че да съществува нетривиална функция  $u(x)$ , която удовлетворява граничната задача

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3.76}$$

$$u = 0 \quad \text{върху } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \quad \text{върху } \Gamma_1, \tag{3.77}$$

където

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i$$

е производна по външната нормала за функцията  $u$  върху границата  $\Gamma_1$  и  $\nu_i$  с  $i$ -та компонента на единичния нормален вектор на  $\Gamma_1$ .

Да дефинираме функционалното пространство  $V$ , което е затворено подпространство на  $H^1(\Omega)$ :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ върху } \Gamma_0 \right\}.$$

Очевидно  $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ .

Въвеждаме  $L_2(\Gamma)$ -скаларно произведение чрез равенството:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} u \cdot v \, dl.$$

Билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  върху  $V \times V$  се определя от

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a(x) uv \, dx.$$

Нека  $(\lambda, u) \in (\mathbf{R}, V)$  да е една собствена двойка на задачата на Стеклов (3.76), (3.77). Слабата формулировка, породена от тази задача, е (виж [36, 30]):

$$a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.78)$$

Като използваме, че полунормата  $|v|_{1,\Omega}$  е норма във  $V$ , която е еквивалентна на нормата  $\|v\|_{1,\Omega}$  (виж [95], Теорема 2.3-1), можем да твърдим, че билинейната форма  $a(\cdot, \cdot)$  е  $V$ -елиптична. Това означава, че съществува константа  $\beta_1 > 0$ , така че за всяко  $v \in V$

$$\beta_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq a(v, v).$$

Тъй като коефициентите на оператора  $\mathcal{L}$  са ограничени, то съществува (друга) константа  $\beta_2 > 0$ , за която

$$|a(u, v)| \leq \beta_2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Следвайки класическата теория на елиптичните спектрални задачи [30, 93], ние можем да открием следните факти:

- (i) За задачата (3.78) съществува безкрайна числова редица от собствени стойности, всичките строго положителни и с крайна кратност, като тази редица няма крайна точка на съгъстяване. Ако собствените стойности са наредени по големина:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \rightarrow \infty,$$

то всяка от тях се появява точно толкова пъти, колкото е нейната кратност;

- (ii) Съществува Хилбертов базис на  $L_2(\bar{\Omega})$ , образуван от ортонормираните собствени функции  $u_m$ ,  $m \geq 1$ .

Нашата цел е първо да намерим приближение на собствените двойки на (3.78) чрез изопараметричния МКЕ.

Подходът се състои в това, че ще съотнесем собствените стойности на Стеклов за оператора  $\mathcal{L}$  към тези на подходящ компактен оператор. За целта ще разгледаме следния смесен (Дирихле-Нойман) проблем, свързан с оператора  $\mathcal{L}$ : За дадена функция  $g \in L_2(\Gamma)$  търсим  $u \in V$  така, че

$$a(u, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.79)$$

Понеже  $a(\cdot, \cdot)$  е  $V$ -елиптична, то тази задача допуска единствено решение. Освен това, тъй като границата може да е достатъчно гладка, за  $g \in L_2(\Gamma)$  решението  $u$  ще принадлежи на  $H^{3/2}(\Omega)$ .

Дефинираме разрешаващ оператор  $\mathcal{B} : L_2(\Gamma) \rightarrow H^{3/2}(\Omega)$  чрез равенството  $\mathcal{B}g = u$ . Операторът  $T$  определяме като рестрикцията на  $\mathcal{B}$  върху  $\Gamma$ , т.е.

$$Tg = (\mathcal{B}g)|_{\Gamma}.$$

От теорията за следата (виж [45, 95]) следва, че  $(\mathcal{B}g)|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$ . Впрочем,  $T : L_2(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)$ . Оттук получаваме, че съществува константа  $C_s$ , такава, че

$$\|Tg\|_{s+1, \Gamma} \leq C_s \|g\|_{s, \Gamma}.$$

за някое реално  $s$  и за всяко  $g \in H^s(\Gamma) \cap L_2(\Gamma)$ . Последното неравенство ни позволява да продължим оператора  $T$  от  $L_2(\Gamma)$  към  $H^s(\Gamma)$  за  $s < 0$ . След като по този начин вече сме разширили действието на  $T$ , т.е. върху  $H^s(\Gamma)$ , то можем да означим с  $T^0$  рестрикцията на  $T$  върху пространството  $H^0(\Gamma) \equiv L_2(\Gamma)$ .

Нека числото  $\mu \geq 0$  е реална и проста собствена стойност на оператора  $T^0$  и  $z \in L_2(\Gamma)$  е съответната собствена функция, която е нормирана относно  $L_2(\Gamma)$ . Тогава  $T^0 z = \mu z$  и още

$$a(\mathcal{B}z, v) = (z, v) = \frac{1}{\mu} (T^0 z, v) = \frac{1}{\mu} (\mathcal{B}z, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

По този начин  $\frac{1}{\mu}$  се явява собствена стойност на (3.78) със съответна собствена функция  $\mathcal{B}z$ .

Обратно, ако  $\lambda \neq 0$  е някоя собствена стойност на задачата (3.78) и  $u \neq 0$  е съответната собствена функция, то  $\frac{1}{\lambda}$  е собствена стойност на  $T^0$  и  $z : \mathcal{B}z = u$  е съответната собствена функция. Изводът е, че собствените стойности на Стеклов са реципрочни на собствените стойности на оператора  $T^0$ .

Оттук нататък ще пропускаме горния индекс на  $T^0$  и ще го обозначаваме просто като оператор  $T$ .

Задачата (3.78) ще приближим с крайни елементи от Лагранжев тип. Нека  $n$  е цяло положително число и  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  е основен краен елемент, дефиниран както следва:

$$\widehat{K} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_d) : \hat{x}_i \geq 0, \sum_{i=1}^d \hat{x}_i \leq 1\} \text{ е единичният } d\text{-симплекс;}$$



$$\widehat{P} = P_n(\widehat{K});$$

$\widehat{\Sigma} = \{\hat{x} : \hat{x} = \frac{l_i}{n}, \sum_{i=1}^d l_i \leq d, l_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$  е множеството от Лагранжеви интерполационни възли.

В нашите разсъждения важна роля играе регулярната изопараметрична триангулация  $\tau_h$  (виж [103, 102]). Произволен елемент  $(K, P_K, \Sigma_K) \in \tau_h$  се дефинира чрез  $K = F_K(\widehat{K})$ , където  $F_K \in \widehat{P}^2$  е обратима трансформация. Областта  $\Omega_h = \cup_{K \in \tau_h} K$  апроксимира областта  $\Omega$ .

Разглеждаме крайноелементното пространство

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega_h) : v_h|_K = p(x), p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \widehat{P}, K \in \tau_h\}.$$

За някоя функция  $v \in V$  ще получим  $v_h = \pi_h(v \circ \Phi_h)$ ,  $v_h \in V_h$  посредством обратимо изображение  $\Phi_h : \Omega_h \rightarrow \Omega$ , конструирано от Леноар [80] и чрез интерполационния оператор  $\pi_h$ , действащ върху цялата триангулация  $\tau_h$ .

Да въведем рестрикцията  $\mathcal{H}_h : \Gamma_h \rightarrow \Gamma$  на изображението на Леноар  $\Phi_h$  и да разгледаме още една рестрикция на пространството  $V_h$  върху границата  $\Gamma_h$ , т.е.

$$W_h = \{w_h \in W_h : w_h = v|_{\Gamma_h}, v \in V_h\}.$$

По аналогичен начин ще определим апроксимацията  $g_h \in W_h$  на функцията  $g \in C(\Gamma) \cap H^s(\Gamma)$ , т.е.  $g_h = \chi_h(g \circ \mathcal{H}_h)$ , където  $\chi_h$  е интерполационен оператор върху границата на областта.

И така, вече сме готови да разгледаме следния апроксимационен проблем на Нойман: Търсим  $u_h \in V_h$  така, че за всяко  $v_h \in V_h$

$$a_h(u_h, v_h) = \langle g_h, v_h \rangle_h, \quad (3.80)$$

където

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^d (a_{ij})_h \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega_h} a_h u_h v_h dx,$$

$$\langle g_h, v_h \rangle_h = \int_{\Gamma_h} g_h v_h dl, \quad \Gamma_h = \partial\Omega_h.$$

Очевидно,  $V_h$  не е подпространство на  $H^1(\Omega)$ . Тогава ще дефинираме функционалното пространство

$$S_h = \{\mathcal{V}_h = v_h \circ \Phi_h^{-1} : v_h \in V_h\}.$$

Функцията  $U_h = u_h \circ \Phi_h^{-1}$  е решение на проблема на Нойман

$$a_h(U_h \circ \Phi_h, \mathcal{V}_h \circ \Phi_h) = \langle g_h, \mathcal{V}_h \circ \Phi_h \rangle_h, \quad \forall \mathcal{V}_h \in S_h. \quad (3.81)$$

Да отбележим, че  $S_h \subset V$ . Посредством изображението  $\Phi_h$  можем да получаваме оценки на (3.80), като използваме функции, дефинирани в  $\Omega$  (и съответно върху  $\Gamma$ ). Следователно (3.81) може да се запише чрез билинейните форми  $a(\cdot, \cdot)$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Дефинираме приближения разрешаващ оператор  $\mathcal{B}_h : L_2(\Gamma_h) \rightarrow S_h$  посредством  $\mathcal{B}_h g_h = U_h$ . Нека да означим

$$\partial S_h = \{\mathcal{V}_h|_\Gamma : \mathcal{V}_h \in S_h\}.$$

Тогава приближеният оператор

$$T_h : L_2(\Gamma_h) \rightarrow \partial S_h \subset L_2(\Gamma)$$

се определя чрез

$$T_h g_h = (\mathcal{B}_h g_h)|_\Gamma.$$

Идеологията на тези трансформации, в крайна сметка, е да работим само с функции, дефинирани върху областта  $\Omega$ . Ето защо приближената задача на Стеклов, отговаряща на (3.78), ще се запише по следния начин: Търсим число  $\lambda_h$  и ненулева функция  $U_h \in S_h$  така, че

$$a(U_h, \mathcal{V}_h) = \lambda_h \langle U_h, \mathcal{V}_h \rangle, \quad \forall \mathcal{V}_h \in S_h. \quad (3.82)$$

В съответствие с представената изопараметрична техника, ще въведем два оператора, определени върху  $\Gamma$  и съответстващи на  $\mathcal{B}_h$  и  $T_h$ , с използване на интерполацията  $\chi_h$ :

$$\tilde{\mathcal{B}}_h : L_2(\Gamma) \rightarrow S_h, \quad \tilde{\mathcal{B}}_h = \mathcal{B}_h \circ \chi_h.$$

Тогава операторът

$$\tilde{T}_h : L_2(\Gamma) \rightarrow \partial S_h$$

е определен от рестрикцията

$$\tilde{T}_h g = (\tilde{\mathcal{B}}_h g)|_\Gamma, \quad g \in L_2(\Gamma).$$

Ако (3.82) е изпълнено, то  $\lambda_h \neq 0$  и  $\tilde{T}_h(U|_\Gamma) = (\tilde{\mathcal{B}}_h(U_h|_\Gamma))|_\Gamma = \frac{1}{\lambda_h} U_h|_\Gamma$ , т.е.  $\frac{1}{\lambda_h}$  е собствена стойност на  $\tilde{T}_h$  и  $z_h = U_h|_\Gamma \in \partial S_h$  е съответната собствена функция.

Обратно, ако  $\tilde{T} z_h = \mu_h z_h$  и  $\mu_h \neq 0$ , то

$$a(\tilde{\mathcal{B}}_h z_h, \mathcal{V}_h) = \langle z_h, \mathcal{V}_h \rangle = \frac{1}{\mu_h} \langle \tilde{T}_h z_h, \mathcal{V}_h \rangle = \frac{1}{\mu_h} \langle \tilde{\mathcal{B}}_h z_h, \mathcal{V}_h \rangle \quad \forall \mathcal{V}_h \in S_h.$$

Следователно  $\frac{1}{\mu_h}$  е собствена стойност и  $\mathcal{B}_h z_h$  е съответната собствена функция на (3.82).

В заключение, оценките на собствените стойности, получени от (3.78) и (3.82), ще бъдат следствие от сравняване на собствените функции на операторите  $T$  и  $\tilde{T}$ . Този основен резултат е залегнал в следната теорема:

**Теорема 3.11** *Нека  $\Omega$  е ограничена област в  $\mathbf{R}^d$  с непрекъсната по Липшиц граница  $\Gamma$ , която е по части  $C^{n+1}$ . Ако  $(\lambda, u)$  и  $(\lambda_h, U_h)$  са решения съответно на (3.78) и (3.82), получени с използване на изопараметрични елементи от степен  $n$  и решението  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ , то са валидни следните оценки за собствените стойности и собствените функции на Стеклов:*

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{2n},$$

$$\|u - U_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{n+\frac{1}{2}}.$$

**Доказателство.** Най-напред използваме компактността на разглежданите оператори (виж например [93, 120]). За някое реално число  $s \leq n$  съществува константа  $C$  такава, че

$$\|\mathcal{B}g\|_{s+\frac{3}{2},\Omega} \leq C\|g\|_{s,\Gamma}, \quad (3.83)$$

за всяко  $g \in L_2(\Gamma) \cap H^s(\Gamma)$ . Нека  $\mathcal{B}^*$  да е спрегнатият оператор на  $\mathcal{B}$  относно  $L_2$ -скаларното произведение така, че за всяко  $\varphi \in H^1(\Omega)$ ,

$$a(\varphi, \mathcal{B}^*g) = \langle \varphi, g \rangle.$$

Сега се нуждаем от едно апроксимационно свойство на изопараметричното крайноеlementно пространство  $S_h$  от степен  $n$  (виж [102]): Съществува константа  $C$ , независеща от  $h$ , такава, че за всяко  $v \in H^t(\Omega)$  при  $1 \leq t \leq n+1$  е в сила неравенството:

$$\inf_{\mathcal{V}_h \in S_h} \|v - \mathcal{V}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{t-1} \|v\|_{t,\Omega}. \quad (3.88)$$

Да приложим следния резултат на Леноар, отнасящ се за изопараметрична крайноеlementна апроксимация на задачата на Нойман (виж [80], Теорема 3): Ако  $u \in H^{n+1}(\Omega)$  и  $u_h$  са съответно решения на (3.79) и (3.80) и  $g \in H^n(\Gamma)$ , то

$$\|u - u_h \circ \Phi_h^{-1}\|_{1,\Omega} \leq Ch^n (\|u\|_{n+1,\Omega} + \|g\|_{n,\Gamma}).$$

От последното неравенство и от (3.88) за  $0 \leq t \leq n$  можем да твърдим, че

$$\|(\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}_h)g\|_{1,\Omega} \leq \inf_{\mathcal{V}_h \in S_h} \|\mathcal{B}g - \mathcal{V}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^t \|\mathcal{B}g\|_{t+1,\Omega}. \quad (3.89)$$

Нека  $\varphi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  е произволна функция при  $\frac{1}{2} \leq s \leq n$ . Тогава

$$\begin{aligned} |\langle (T - \tilde{T}_h)g, \varphi \rangle| &= |a((\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}_h)g, \mathcal{B}^*\varphi)| \\ &= |a((\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}_h)g, \mathcal{B}^*\varphi - \mathcal{V}_h)| \leq C \|(\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}_h)g\|_{1,\Omega} \|\mathcal{B}^*\varphi - \mathcal{V}_h\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

за всяко  $\mathcal{V}_h \in S_h$ . От (3.89) получаваме

$$|\langle (T - \tilde{T}_h)g, \varphi \rangle| \leq Ch^{s+t} \|\mathcal{B}g\|_{t+1,\Omega} \|\mathcal{B}^*\varphi\|_{s+1,\Omega}.$$

Поради (3.83) и (3.84) е в сила оценката

$$|\langle (T - \tilde{T}_h)g, \varphi \rangle| \leq Ch^{s+t} \|g\|_{t-\frac{1}{2},\Gamma} \|\varphi\|_{s-\frac{1}{2},\Gamma}.$$

От последното неравенство следва

$$\sup_{\substack{\varphi \in H^{s-\frac{1}{2}} \\ \varphi \neq 0}} \frac{|((T - \tilde{T}_h)g, \varphi)|}{\|\varphi\|_{s-\frac{1}{2}, \Gamma}} \leq Ch^{s+1} \|g\|_{t-\frac{1}{2}, \Gamma},$$

$$\|(T - \tilde{T}_h)g\|_{\frac{1}{2}-s, \Gamma} \leq Ch^{s+1} \|g\|_{t-\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Като разделим още веднъж и вземем sup, ще получим

$$\sup_{\substack{g \in H^{t-\frac{1}{2}} \\ g \neq 0}} \frac{\|(T - \tilde{T}_h)g\|_{\frac{1}{2}-s, \Gamma}}{\|g\|_{t-\frac{1}{2}, \Gamma}} \leq Ch^{s+1}.$$

Така от дефиницията за норма на оператор (3.85) имаме

$$\|T - \tilde{T}_h\|_{t-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-s} \leq Ch^{s+1}, \quad (3.90)$$

където  $\frac{1}{2} \leq s, t \leq n$ .

Нека да отбележим още, че

$$\|T - \tilde{T}_h\|_{0,0} \leq Ch.$$

Да разгледаме три случая, които ни интересуват в неравенство (3.90):

$$\|T - \tilde{T}_h\|_{n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-n} \leq Ch^{2n}, \quad \text{когато } s = t = n,$$

$$\|T - \tilde{T}_h\|_{n-\frac{1}{2}, 0} \leq Ch^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{когато } s = \frac{1}{2}, t = n,$$

$$\|T - \tilde{T}_h\|_{0, \frac{1}{2}-n} \leq Ch^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{когато } s = n, t = \frac{1}{2}.$$

Накрая остава само да приложим неравенствата (3.86) и (3.87) за  $s_0 = s_1 = n + \frac{1}{2}$ , за да завършим доказателството. ■

**Забележка 3.13** Да отбележим, че резултатът от Теорема 3.11 не дава отговор на въпроса каква е оценката за собствените функции в  $H^1(\Omega)$ -норма. Можем да твърдим само, че тя не е по-висока от  $\mathcal{O}(h^n)$  при същите

условия на теоремата. Оценки за задачи с параметър по границата има сравнително малко, въпреки очевидната им приложимост при моделиране на инженерни проблеми (виж [30, 71]).

### 3.6 Пост-процедура за задачи със спектрален параметър върху границата

Разглежданията, които направихме в §3.4 могат да бъдат обобщени за елиптични спектрални задачи от ред  $2m$ . В практиката съществуват редица моделни проблеми, при които основният елиптичен оператор е от ред, по-висок от втори и спектралният параметър  $\lambda$  участва линейно в граничните условия (виж [71, 90, 98]). В този параграф ще се спрем на приложимостта на метода от §3.2 за общи самоспрегнати спектрални задачи от произволен четен ред [18].

Нека  $\Omega$  е ограничена област в  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 1$  с граница  $\partial\Omega \equiv \Gamma$ , която, с цел избягване на технически затруднения, предполагаме достатъчно гладка.

Допускаме, че  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  са самоспрегнати елиптични оператори от ред съответно  $2m$  и  $2r$ , като  $m > r \geq 0$ . В §3.2  $\mathcal{B} \equiv r(x)$ , където  $r(x)$  е функция, ограничена в  $\bar{\Omega}$  с положителни константи.

Разглеждаме следния линеен проблем: Търсим число  $\lambda$  и ненулева функция  $u(x)$  такива, че

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda \mathcal{B}u(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.91)$$

$$\mathcal{C}u(x) = \lambda \mathcal{D}u(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3.92)$$

Операторът  $\mathcal{C}$  е от ред най-много  $2m - 1$ . Тогава

$$\mathcal{D} = \{D_j\}_{j=1}^m, \quad D_j u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} t_{j,\alpha}(x) D^\alpha u(x).$$

Коефициентите  $t_{j,\alpha}(x)$  са неотрицателни и принадлежат на  $C^r(\Gamma)$ .

Предполагаме, че операторите и граничните условия на общия проблем са такива, че:

- (i) Спектралните задачи в слаба формулировка са симетрични и притежават реален спектър (за втори ред виж резултатите от §3.4).

(ii) Съответните изходни елиптични задачи имат разрешаващ оператор, който е самоспрегнат, ограничен и компактен.

За операторите  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  от (3.91) определяме билинейните форми:

$$(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}v) = a_1(u, v) + a_2(u, v) + \lambda a_3(u, v), \quad \forall u, v \in \widetilde{D},$$

$$(\mathcal{B}u, v) = (u, \mathcal{B}v) = b_1(u, v) + b_3(u, v), \quad \forall u, v \in \widetilde{D},$$

където  $\widetilde{D}$  е множеството от функции от  $C^{2m}(\overline{\Omega})$ , които удовлетворяват граничните условия (3.92).

Да означим  $b_2(u, v) = b_3(u, v) - a_3(u, v)$ . Тогава

$$a_1(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} p_{\alpha}^1 D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx, \quad a_2(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Gamma} p_{\alpha}^2 D^{\alpha} u D^{\alpha} v d\gamma,$$

$$b_1(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Omega} q_{\alpha}^1 D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx, \quad b_2(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Gamma} q_{\alpha}^2 D^{\alpha} u D^{\alpha} v d\gamma,$$

където за целите числа  $s, r, m$  имаме условието  $0 \leq s \leq r < m$ .

За коефициентите  $p_{\alpha}^k$  и  $q_{\alpha}^k$ ,  $k = 1, 2$  се предполага, че са такива, че да може да се дефинират Хилбертовите пространства  $H_{\mathcal{A}}$  и  $H_{\mathcal{B}}$  с норми  $\|u\|_{\mathcal{A}} = a(u, u)$  и  $\|u\|_{\mathcal{B}} = b(u, u)$ , където

$$a(u, u) = a_1(u, u) + a_2(u, u),$$

$$b(u, u) = b_1(u, u) + b_2(u, u).$$

Следователно  $H_{\mathcal{A}}$  и  $H_{\mathcal{B}}$  са попълнения на пространството  $\widetilde{D}$  по отношение съответно на нормите  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  и  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ .

Очевидно  $H^m(\Omega) \cap H_{\mathcal{A}} \subset H^r(\Omega) \cap H_{\mathcal{B}}$ . Нека  $V$  означава затворено подпространство на  $H^m(\Omega) \cap H_{\mathcal{A}}$ .

На задачата (3.91), (3.92) съпоставяме нейната слаба формулировка: Търсим  $\lambda \in \mathbf{R}$  и ненулева функция  $u(x)$ , удовлетворяващи интегралното твърждение

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.93)$$

Както обикновено (виж §3.2), за  $a$  и  $b$ -формите в уравнение (3.93) предполагаме, че са елиптични и непрекъснати.

Сега да използваме идеята, която представихме в §3.2. Ще работим с две крайноелементни пространства  $V_h$  и  $\tilde{V}_h$ , които са подпространства на  $H^m(\Omega) \cap C^{m-1}(\Omega)$ . Апроксимиращите полиноми върху всеки краен елемент са от степен съответно  $n$  и  $n_1 > n$ , където

$$n \geq 2m - 1 \quad \text{и} \quad n_1 = n + m - r.$$

Приближената собствена двойка  $(\lambda_h, u_h)$ , получена чрез МКЕ в пространството  $V_h$  е определена с равенството:

$$a\langle u_h, v_h \rangle = \lambda_h b\langle u_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.94)$$

Ще следваме идеята на Алгоритъм 3.1 от §3.2. И така, нека  $(\lambda_h, u_h)$  е някое решение на (3.94), като  $b\langle u_h, u_h \rangle = 1$ . Разглеждаме следните две линейни елиптични задачи:

$$a\langle \tilde{u}, v \rangle = b\langle u_h, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (3.95)$$

$$a\langle \tilde{u}_h, v_h \rangle = b\langle \tilde{u}_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h.$$

Тогава можем да дефинираме числата

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{b\langle \tilde{u}, u_h \rangle}, \quad \tilde{\lambda}_h = \frac{1}{b\langle \tilde{u}_h, u_h \rangle},$$

където  $\tilde{u}$  и  $\tilde{u}_h$  са съответните решения на двете елиптични задачи от (3.95).

**Теорема 3.12** *Нека  $(\lambda, u)$  е решение на задачата (3.93) от ред  $2m$ , а  $(\lambda_h, u_h)$  е съответното му приближение по МКЕ, получено от (3.94). Правим следните предположения:*

(i)  $u \in H^{n+1}(\Omega)$ ,  $\tilde{u} \in H^{n_1+1}(\Omega)$ ,  $n_1 = n + m - r$ ;

(ii) Собствените функции са нормирани:  $b\langle u, u \rangle = b\langle u_h, u_h \rangle = 1$ ;

(iii) Рестрикциите на решенията  $u$  и  $u_h$  върху границата  $\Gamma$  принадлежат на пространството  $H^s(\Gamma)$ ,  $m > r \geq s \geq 0$ .

Тогава:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq C \left( \|u - u_h\|_{r,\Omega}^2 + \|u - u_h\|_{s,\Omega} \|u - u_h\|_{s+1,\Omega} \right),$$

$$|\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_h| \leq C \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{m,\Omega}^2.$$



Доказателство. За да докажем оценката на  $|\lambda - \tilde{\lambda}|$ , провеждаме същите разсъждения, както в Теорема 3.1. Тогава от дефиницията и непрекъснатостта на  $b(\cdot, \cdot)$  следва:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq Cb(u - u_h, u - u_h) \leq C \left( \|u - u_h\|_{r,\Omega}^2 + \|u - u_h\|_{s,\Gamma}^2 \right).$$

Остава да приложим Теоремата за следата [2, 39, 45]:

$$\|u - u_h\|_{s,\Gamma}^2 \leq C \|u - u_h\|_{s,\Omega} \|u - u_h\|_{s+1,\Omega},$$

за да получим първата от оценките в настоящата теорема.

Аналогично на Теорема 3.2, при апроксимация по МКЕ на второто уравнение в (3.95) с използване на пространството  $\tilde{V}_h$  ще получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_h} &= a(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &\leq C \left( \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{m,\Omega}^2 + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{s,\Gamma}^2 \right). \end{aligned}$$

К както и по-горе, остава да приложим Теоремата за следата за събирателното  $\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{s,\Gamma}^2$  и да отчетем, че  $s < m$ , т.е.

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{s+1,\Omega} \leq C \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{m,\Omega}$$

при достатъчно малко  $h$ . ■

От доказаната теорема е видно, че в крайна сметка в оценката на грешката не е получен порядък. По този начин изискването (i) не изпълнява до края своето предназначение. Това се дължи на обстоятелството, че не разполагаме с оценки на приближеното към точното решение в най-общия случай в МКЕ, т.е. за задачите (3.94) и (3.95). В предходния §3.5 бяха получени оценки за задачата на Стеклов, които могат да послужат при апостериорната процедура (виж също Забележка 3.13).

Оптимални оценки на грешката при някои спектрални задачи със собствена стойности в граничните условия са получени от Пирс и Варга [94], а за задача (3.95) оптимална оценка е доказана в [104]. Тогава, като следствие от Теорема 3.12 се получава, че:

Ако  $\|u - u_h\|_{k,\Omega} \leq Ch^{n+1-k}\|u\|_{n+1,\Omega}$ , за  $0 \leq k \leq m$ ,

то  $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq Ch^\sigma\|u\|_{n_1+1,\Omega}$ ,

където  $\sigma = \min\{2(n+1-r), 2(n-s)+1\}$ .

Аналогично, при  $\tilde{u} \in H^{n_1+1}(\Omega)$  за (3.95) имаме, че

Ако  $\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{k,\Omega} \leq Ch^{n_1+1-k}\|\tilde{u}\|_{n_1+1,\Omega}$ , за  $0 \leq k \leq m$ ,

то  $|\lambda - \tilde{\lambda}_h| \leq Ch^{2(n+1-r)}\|\tilde{u}\|_{n_1+1,\Omega}$ , като  $n_1 = n + m - r$ .

На практика в апостериорната техника се решава само втората задача от (3.95). Така при гореописаните условия ще имаме оценката:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_h| = \mathcal{O}(h^\sigma),$$

където  $\sigma = \min\{2(n+1-r), 2(n-s)+1\}$ . Получената оценка е от тип ултрасходимост (суперсходимост). Порядъкът се повишава с  $2(m-r)$  или  $2(m-s)-1$  в зависимост от разглежданата задача. Ускоряването на сходимостта се получава с цената на решаване по МКЕ на допълнителна елиптическа задача. Подходът за конструиране на пространството  $\tilde{V}_h$  може да се състои например в повишаване степента на апроксимиращите полиноми с  $(m-r)$  единици. Нека подчертаем, че в повечето случаи  $m-r=1$ .

Нека сега дефинираме функциите

$$\tilde{w} = \tilde{\lambda}_h \cdot \tilde{u}, \quad \tilde{w}_h = \tilde{\lambda}_h \cdot \tilde{u}_h.$$

Очевидно  $\tilde{w}_h = \tilde{R}_h \tilde{w}$ , където  $\tilde{R}_h$  е елиптическият проектор относно скаларното произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  върху пространството  $\tilde{V}_h$ , състоящо се от по части полиномиални функции от степен  $n_1 = n + m - r$ .

**Теорема 3.13** *Нека условията на Теорема 3.12 са изпълнени. В сила е следната апостериорна оценка за собствени функции:*

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} \leq C (\|u - u_h\|_{r,\Omega} &+ \|u - u_h\|_{s,\Omega}^{1/2} \|u - u_h\|_{s+1,\Omega}^{1/2} \\ &+ \|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Доказателство. От неравенството на триъгълника

$$\|u - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} \leq \|u - \tilde{w}\|_{m,\Omega} + \|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega}.$$

За второто събираемо всъщност имаме:

$$\|\tilde{w} - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} = \|\tilde{w} - \tilde{R}_h \tilde{w}\|_{m,\Omega} = \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|\tilde{w} - v_h\|_{m,\Omega}$$

за всяко  $\tilde{w} \in H^{n_1+1}(\Omega) \cap V$ .

Аналогично на Теорема 3.3, получаваме

$$a(u - \tilde{w}, u - \tilde{w}) = \tilde{\lambda}_h b(u - u_h, u - u_h) + (\lambda - \tilde{\lambda}_h) + \frac{\tilde{\lambda}_h}{\lambda} (\tilde{\lambda}_h - \tilde{\lambda}),$$

като трите събираеми в дясната страна на последното равенство оценяваме посредством неравенствата в Теорема 3.12, вследствие на което получаваме нормите в дясната страна на (3.96). За завършване на доказателството на теоремата е достатъчно да отчетем елиптичността на  $a$ -формата. ■

Ако направим същите разсъждения, както след доказателството на Теорема 3.12, то очевидно ще направим заключение, че

$$\|u - \tilde{w}_h\|_{m,\Omega} = \mathcal{O}(h^{\sigma/2}),$$

където  $\sigma = \min\{2(n+1-r), 2(n-s)+1\}$ .

### Изводи относно апостериорната техника

1. До тук в тази глава предложихме оригинална процедура, която ускорява сходимостта на приближеното решение за широк клас самоспрегнати спектрални задачи. Този подход като цяло засяга вариационните числени методи.

2. Математическият анализ бе извършен върху известни моделни задачи, т.е. със сравнително неголяма допълнителна техническа трудност, която не произтича от апостериорния процес (виж например §3.3).

3. Възможността за симетризуемост на спектралните задачи в слаба формулировка беше показана в §3.4. Това позволява да се разшири прило-

жимостта на апостериорната техника. Именно тази приложимост бе изложена в настоящия §3.6.

4. Както бе подчертано, успехът на представените алгоритми зависи от доказаните априорни оценки. За класическата задача на Стеклов, съдържаща спектралния параметър в граничните условия, бяха доказани априорни оценки за изопараметричния МКЕ. Съгласно този резултат, може да се твърди, че постпроцедурата ускорява сходимостта поне с  $\frac{1}{2}$  за собствените стойности.

5. При задачи от втори ред, ако степента на апроксимиращите полиноми е достатъчно голяма, вместо Лагранжева интерполация можем да използваме приближена собствена функция  $u_h$  по МКЕ, която е гладка, т.е. от  $C^1$ . По този начин се получава много по-добър резултат в апостериорната процедура (виж Теорема 3.2).

### 3.7 Алгоритмични и изчислителни аспекти

При всяка апостериорна идея и доказана теория в крайна сметка се стига до въпроса за нейната числена реализация. Тя е съществен момент за тези, които използват суперсходящи алгоритми или методи, икономисващи изчислителен ресурс.

В този параграф ще засегнем три важни въпроса, които по един или друг начин резонират в предложената постпроцедура. Въпреки това, въпросите имат и общ характер и тематиката е обект на отделни изследвания в числения анализ.

#### А Алгоритмични аспекти при задачи с различна размерност

Терминът **задача с различна размерност** за вариационните числени методи се използва тогава, когато в интегралното твърждение на слабата формулировка участват интеграли с различна размерност. Типична е ситуацията, когато решаваме задачи с условия на Нойман или Робин.

Съобразявайки се с тематиката на настоящата глава, ние ще визираще задачи с линейно участващ в граничните условия спектрален параметър. В §3.4 отделихме място на вариационните аспекти за такива задачи. Тук ще се спрем на числовата реализация, която е основна стъпка в МКЕ.

С цел по-ясно представяне на идеята, ще съсредоточим разглежданията върху моделната задача на Стеклов за елиптически самоспрегнат оператор от втори ред, която изследвахме подробно в §3.5.

Първо ще въведем някои означения. Ще отбелязваме с  $\mathcal{N}_h$  множеството от възли за триангулацията  $\tau_h$ .  $\mathcal{N}_{Bh}$  е множеството от възли върху границата с изключение на точките на Дирихле (т.е. там, където граничното условие е нула). Тогава приемаме означението  $\mathcal{N}_{Ih} = \mathcal{N}_h \setminus \Gamma_h$ . Нека  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\text{card}(\mathcal{N}_h)$  е възловият базис във  $V_h$ , свързан с  $a_i \in \mathcal{N}_h$ . Дефинираме функционалните пространства

$$V_{Bh} = \text{Span} \{\varphi_i\}_{i: a_i \in \mathcal{N}_{Bh}}, \quad V_{Ih} = \text{Span} \{\varphi_i\}_{i: a_i \in \mathcal{N}_{Ih}}.$$

В нашите разглеждания ще използваме следните вектори и матрици:

$$\begin{aligned} \underline{u}_I &= (u(a_i))_{i: a_i \in \mathcal{N}_{Ih}}, & \underline{u}_B &= (u(a_i))_{i: a_i \in \mathcal{N}_{Bh}}, \\ \mathcal{A} &= (a_h(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j: a_i, a_j \in \mathcal{N}_{Ih}}, & \mathcal{B} &= (a_h(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j: a_i, a_j \in \mathcal{N}_{Bh}}, \\ \mathcal{C} &= (a_h(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j: a_i \in \mathcal{N}_{Ih}, a_j \in \mathcal{N}_{Bh}}, & \mathcal{D} &= (\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j: a_i, a_j \in \mathcal{N}_{Bh}}. \end{aligned}$$

Приближената задача на Стеклов (3.82) по МКЕ можем да запишем в матричен вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^t & \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_B \end{pmatrix} = \lambda_h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_B \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Да приложим факторизацията на Холески за матрицата  $\mathcal{A} = L_{\mathcal{A}} L_{\mathcal{A}}^t$ , където  $L_{\mathcal{A}}$  е долна триъгълна матрица. Тогава за съответното допълнение на Шур ще имаме:

$$S = \mathcal{B} - \mathcal{C}^t L_{\mathcal{A}}^{-t} L_{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{C}.$$

Елиминирайки вектора  $\underline{u}_I$  в (3.97), ще получим

$$S \underline{u}_B = \lambda_h \mathcal{D} \underline{u}_B. \quad (3.98)$$

По-нататък ще използваме познат алгоритъм [43] за решаване на матричната задача за собствени стойности (3.98). Тъй като матрицата  $\mathcal{D}$  е симетрична и положително определена, то съществува матрица  $X$  такава, че

$$X^t \mathcal{D} X = I_{n_{\mathcal{N}}} \quad \text{и} \quad X^t S X = \text{diag}\{\lambda_1^h, \lambda_2^h, \dots, \lambda_{n_{\mathcal{N}}}^k\},$$

$$n_{\mathcal{N}} = \text{card}(\mathcal{N}_{Bh}).$$

Векторът  $(\lambda_1^h, \lambda_2^h, \dots, \lambda_{n_{\mathcal{N}}}^k)$  се състои от собствените стойности на задача (3.98). Матрицата  $X$  може да бъде определена, следвайки метода, описан от Голуб и Ван Лоан (виж [43], стр. 463).

### Б Концентрация на масата

Теорията на МКЕ препоръчва при пресмятане на собствените двойки, ако е възможно, да се диагонализира матрицата на маса [104]. Този въпрос бе дискутиран и в §1.5. Там беше подчертано, че при подходяща квадратура в дясната страна на интегралното твърждение

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (3.99)$$

ще получим съответното приближение чрез lumped mass (LM) метода

$$a(\bar{u}_h, v_h) = \bar{\lambda}_h(\bar{u}_h, v_h)_h, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.100)$$

Точността на LM-метода съществено зависи от точността на квадратурната формула. В уравнението (3.100) символът  $(\cdot, \cdot)_h$  означава използване на числено интегриране. Оценки на грешката при LM са разгледани например в [23] и [11], но пие няма да дискутираме този въпрос, а ще разгледаме друг аспект на LM-метода.

Нека  $\lambda_h$  да е проста собствена стойност на (3.99). Ако използваме съгласуван МКЕ (т.е. интегралите в слабата формулировка се пресмятат точно), то от принципа на минимакса ще имаме:

$$\lambda_h^k = \min_{E^k \subset V_h} \max_{v_h \in E^k} \frac{a(v_h, v_h)}{(v_h, v_h)}.$$

Добре известен факт е, че  $\lambda_h^k$  приближава  $\lambda^k$  отгоре, тъй като търсим минимум върху по-малко функционално пространство (виж [95, 104]).

Съответното приближение чрез LM е:

$$\bar{\lambda}_h^k = \min_{E^k \subset V_h} \max_{v_h \in E^k} \frac{a(v_h, v_h)}{(v_h, v_h)_h}. \quad (3.101)$$

Като се използват двете представяния на  $\lambda_h^k$  и  $\bar{\lambda}_h^k$ , в [11] и [22] се доказва сходимост на приближеното решение  $\bar{\lambda}_h^k$  към  $\lambda_h^k$ , т.е.

$$|\bar{\lambda}_h^k - \lambda_h^k| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Квадратурната формула в (3.101) е с положителни коефициенти и за разглеждания случай тя повишава стойността на знаменателя (виж [104]).

Ето защо  $\bar{\lambda}_h^k$  приближава  $\lambda^k$  отдолу. Това явление е характерно за LM-метода и се потвърждава от числените експерименти (виж [23] и [11]). В алгоритмичен аспект сходимостта на  $\bar{\lambda}_h^k$  отдолу може да се използва в комбинация с някое крайноеlementно или апостериорно приближение.

От друга страна, апостериорната техника се базира на факта, че крайноеlementното решение е по-точно, когато правим оценки в по-слаби норми. При метода с диагонална матрица на маса обаче (виж [11, 23])

$$\|u^k - \bar{u}_h^k\|_{0,\Omega} \sim \|u^k - \bar{u}_h^k\|_{1,\Omega}.$$

Следователно в първата стъпка на Алгоритъм 3.1, представен в §3.2, ако използваме  $(\bar{\lambda}_h^k, \bar{u}_h^k)$  вместо  $(\lambda_h^k, u_h^k)$ , теоретично не бихме получили ускоряване на сходимостта поне за задачите от втори ред.

Получаването на диагонални матрици в разрешаващата система на МКЕ е често срещан и препоръчителен подход при решаване на инженерни проблеми (виж [105]). Диагонализиране на матрицата на маса може да бъде постигнато не само чрез използване на подходяща квадратурна формула. Ще изложим един подход за диагонализация, който използва ортогоналността на собствените функции [15]. В механиката той е известен като **метод на нормалните форми** (normal shapes method).

Ще използваме моделна задача на тънка огъвна плоча, подложена на динамични натоварвания. При отчитане ефекта на демпфиране се получава диференциалното уравнение спрямо неизвестния вектор  $\{X\}$  [15, 90]:

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{P(t)\}, \quad (3.102)$$

където  $[M]$  и  $[K]$  са глобалните матрици на маса и коравина,  $[C]$  е матрица на демпфиране, която обикновено се приема пропорционална на матрицата на коравина  $[K]$ , т.е.  $[C] = \alpha [K]$ ,  $\alpha = \text{const}$ , а  $\{P(t)\}$  е векторът на натоварване. В уравнение (3.102) точките над неизвестния вектор означават производни относно времевата променлива  $t$ .

И така, целта ни е да диагонализираме матриците в (3.102). Решаваме матричното спектрално уравнение

$$[K] \cdot \{\bar{X}\} = \lambda^2 [M] \cdot \{\bar{X}\},$$

където числото  $\lambda$  е собствена честота на плочата. Определяме матрицата  $[\bar{X}]$ , чиито стълбове са първите няколко различни собствени вектори. Тази матрица дефинира главните координати посредством уравнението

$$[\bar{X}]^{-1} \cdot \{X\} = \{X_G\}, \quad (3.103)$$

като  $\{X_G\}$  е векторът на главните координати.

Ще диагонализираме матриците на маса и коравина  $[K]$  и  $[M]$ , като използваме ортогоналността на собствените вектори ( $T$  е знак за транспониране):

$$[\bar{X}]^T \cdot [M] \cdot [\bar{X}] = [M_G], \quad (3.104)$$

$$[\bar{X}]^T \cdot [K] \cdot [\bar{X}] = [K_G].$$

Така се получават матриците на маса и коравина в главни координати. Приемайки, че  $[C] = \alpha [K]$ , от (3.103) и (3.104) следва:

$$[M_G] \cdot \{\ddot{X}_G\} + \alpha [K_G] \cdot \{\dot{X}_G\} + [K_G] \cdot \{X_G\} = [\bar{X}]^T \cdot \{\mathcal{P}(t)\}.$$

Ролята на диагоналните матрици се разбира при решаване на последната система. Например от  $i$ -то уравнение на преместване, ще получим  $i$ -та функция на формата:

$$\ddot{x}_{G,i} + 2\xi_i \lambda_i \dot{x}_{G,i} + \lambda_i^2 x_{G,i} = q_i(t),$$

където  $\xi_i = \frac{1}{2} \alpha \lambda_i$  е коефициент на демпфиране, а

$$q_i = \frac{1}{m_{G,i}} \{\bar{X}\}^T \cdot \{\mathcal{P}(t)\}$$

е  $i$ -та главна координата на силата, приложена върху единица маса.

Решението на последното обикновено диференциално уравнение може лесно да се получи например чрез формулата на Дюамел [105].

Определяйки неизвестния вектор  $\{X_G\}$ , ние лесно можем да трансформираме решението в оригиналните (физически) координати посредством



$$\{X\} = [\bar{X}] \cdot \{X_G\}.$$

### В Още един поглед върху апостериорния алгоритъм

Лесно се вижда, че апостериорният алгоритъм при съгласуван МКЕ дава приближение на собствената стойност отгоре. Действително, при общата спектрална задача имаме

$$\lambda = \inf_{v \in V} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} = \inf_{\substack{v \in V \\ b(v, v)=1}} a(v, v).$$

От друга страна, след използване на пост-процедура съответно имаме

$$\tilde{\lambda}_h = \tilde{\lambda}_h^2 b(u_h, \tilde{u}_h) = \tilde{\lambda}_h^2 a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) =: a(\tilde{w}_h, \tilde{w}_h),$$

където  $\tilde{w}_h = \tilde{\lambda}_h \cdot \tilde{u}_h$  и тогава  $\tilde{w}_h \in \tilde{V}_h \subset V$ .

От тези разсъждения следва, че ако за някоя точна собствена стойност  $\lambda$  имаме нейното апостериорно приближение  $\tilde{\lambda}_h$  и освен това сме получили приближението  $\bar{\lambda}_h$  чрез използване на метода с концентрация масата, то

$$\bar{\lambda}_h < \lambda < \tilde{\lambda}_h. \quad (3.105)$$

Следователно, Алгоритъм 3.1 може да бъде модифициран по следния начин:

### **Алгоритъм 3.3**

- (i) Намираме  $(\lambda_h, u_h)$  върху груба мрежа,  $u_h \in V_h$ ;
- (ii) Прилагаме апостериорната техника върху пространството  $\tilde{V}_h(n_1)$ , където  $n_1 = n + m$ , намираме  $\tilde{\lambda}_h$ ;
- (iii) Върху същото разделяне решаваме приближената задача по МКЕ с диагонална матрица на маса и определяме съответно  $\bar{\lambda}_h$ ;

(iv) Изчисляваме приближената собствена стойност  $\lambda_h^*$  по формулата

$$\lambda_h^* = \frac{\tilde{\lambda}_h + \bar{\lambda}_h}{2}.$$

Нека илюстрираме горния алгоритъм с конкретна ситуация. Нека да решаваме спектрална задача от втори ред в двумерна област. Тогава:

- При дадено разделяне  $\tau_h$  ще използваме най-простите линейни триъгълни елементи ( $n = 1$ ). Теоретично имаме

$$\lambda - \lambda_h = \mathcal{O}(h^2).$$

- Върху същото разделяне повишаваме степента ( $n_1 = 2$ ) и чрез 6-точкови крайни елементи решаваме елиптическа задача съгласно Алгоритъм 3.1. Тогава получаваме  $\tilde{\lambda}_h$ , като

$$\lambda - \tilde{\lambda}_h = \mathcal{O}(h^4).$$

- Пак върху същото разделяне използваме числено интегриране за скаларното произведение с добавяне на центъра на тежестта за елемента (виж [22] или [102], формула 4.1.8). Така се получава схема с концентрация на масата и съответно  $\bar{\lambda}_h$ , където (виж [23])

$$\lambda - \bar{\lambda}_h = \mathcal{O}(h^3).$$

- Пресмятаме

$$\lambda_h^* = \frac{\tilde{\lambda}_h + \bar{\lambda}_h}{2}.$$

Предвид неравенство (3.105), очакваме числото  $\lambda_h^*$  да приближава по-добре собствената стойност  $\lambda$ .

### 3.8 Числени примери

Примери в настоящия параграф са представени с цел да илюстрират и подкрепят теоретичните резултати, апостериорната техника и различните алгоритмични аспекти при ускоряване на сходимостта или улесняване на пресмятането на различни спектрални задачи.

**Пример 3.1** Целта на този пример е да се подчертае ролята на численото интегриране, както и особеностите на задачи с различна размерност.

Разглеждаме уравнението

$$-\Delta u = 0 \quad (3.106)$$

върху единичния четвърт кръг със смесени гранични условия на Нойман ( $N$ ) и Дирихле ( $D$ ) (Фигура 3.1):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u, \quad \text{когато} \quad x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}, \quad (3.107)$$

$$u(x) = 0, \quad \text{когато} \quad x_1 x_2 = 0.$$

Точните собствени стойности на тази задача на Стеклов са:

$$\lambda_i = 2i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Задачата (3.106), (3.107) има слаба формулировка

$$\int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lambda_h \int_{\Gamma_h} uv dl. \quad (3.108)$$

Решаването ще извършим на базата на 6-точковите изопараметрични крайни елементи. Началната триангулация на областта  $\Omega$  съдържа 4 крайни елемента (Фигура 3.1). За съгъстяване на мрежата разделяме всеки елемент на 4 по-малки елемента от същия клас.

Въвеждаме следните количества:

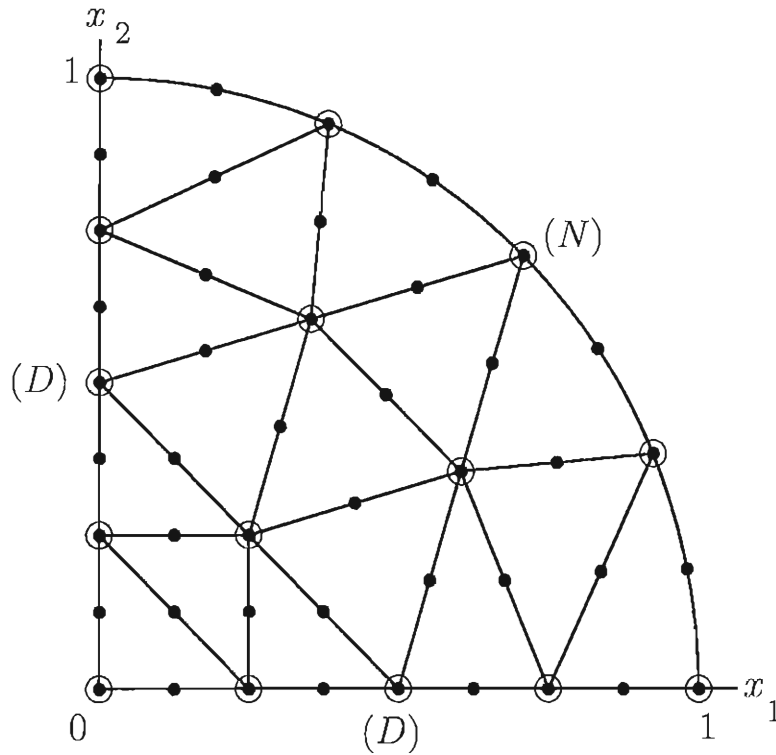
$n_{FE}$  - брой на елементите в триангулацията;

$n_I$  - брой на вътрешните възли;

$n_D$  - брой на граничните възли на Дирихле;

$n_N$  - брой на граничните възли на Нойман;

$n_A$  - общ брой на всички възли от триангулацията.



Фигура 3.1: Разделяне на областта  $\Omega$ . С  $\circ$  са отбелязани възлите от началната триангулация, а с  $\bullet$  - възлите от триангулацията след сгъстяване

Таблица 3.1: Параметрите на дадена триангулация  $\tau_h$

$n_{FE}$	$n_I$	$n_D$	$n_N$	$n_A$
4	3	9	3	15
16	21	17	7	45
64	105	33	15	153
256	465	65	31	561
1024	1953	129	63	2145

Връзката между отделните параметри на триангулацията се дава със следните зависимости:

$$n_I = 2n_s^2 - 3n_s + 1, \quad n_D = 4n_s + 1, \quad n_N = 2n_s - 1, \quad n_A = 2n_s^2 + 3n_s + 1,$$

където  $n_s = \sqrt{n_{FE}}, n_{FE} \geq 4$ .

Нека  $\lambda_i^3$ ,  $i = 1, \dots, 7$  е решение на уравнението (3.98), получено с използване на квадратурна формула, точна за полиноми от  $P_3$ , но без да се диагонализира матрицата  $D$ . С  $\tilde{\lambda}_i^3$  ще бележим собствените стойности, пресметнати както  $\lambda_i^3$ , при същата точност, но с концентрирана матрица  $D$ .

**Таблица 3.2:** Резултати от изчислените собствени стойности при двете квадратурни формули, точни за полиноми от  $P_3$

$n_{FE}$	16	64	256	1024
$\lambda_1^3$	2.00117506	2.000071321229	2.000004345113	2.000000267154
$\tilde{\lambda}_1^3$	1.99872816	1.999914117137	1.999994418153	1.999999644207
$\lambda_2^3$	4.05318877	4.003408902509	4.000212255694	4.000013121123
$\tilde{\lambda}_2^3$	3.98186587	3.998562630154	3.999895269017	3.999992893010
$\lambda_3^3$	6.44081662	6.030123344767	6.001970366484	6.000124671693
$\tilde{\lambda}_3^3$	5.93583618	5.996009682155	5.999654867251	5.999973781629
$\lambda_4^3$	10.9031409	8.133705959182	8.009089688573	8.000587654165
$\tilde{\lambda}_4^3$	7.31509363	7.997994041998	7.999695921010	7.999963774142
$\lambda_5^3$	17.5269290	10.405223930216	10.028549556992	10.001890575746
$\tilde{\lambda}_5^3$	10.75405217	10.010500649914	10.001035485692	10.000026467948
$\lambda_6^3$	37.4098317	13.005271576801	12.072325128481	12.004884261048
$\tilde{\lambda}_6^3$	12.61596625	12.028191043269	12.006071787320	12.000333150273
$\lambda_7^3$	143.0944504	16.105897153629	14.155428248498	14.010712024038
$\tilde{\lambda}_7^3$	13.90285023	13.951925414802	14.016857483708	14.001073787180

Нека подчертаем (виж Таблица 3.2), че малките собствени стойности, получени с диагонална матрица (LM-метод), приближават отдолу точните решения. Този ефект бе дискутиран в предходния параграф (виж също примерите в [11] и [23]).

Извършени са и пресмятания с квадратурна формула на Радон, която е точна за полиноми от  $P_5$ .

Таблица 3.3: Резултати от изчислените собствени стойности при използване на квадратурна формула, точна за полиноми от  $P_5$

$n_{FE}$	16	64	256	1024
$\lambda_1^5$	2.00017456	2.000007383607	2.000000333874	2.000000016583
$\lambda_2^5$	4.02679302	4.001538789835	4.000087368065	4.000005082881
$\lambda_3^5$	6.26891361	6.017616172696	6.001082271913	6.000065499946
$\lambda_4^5$	9.12240262	8.085936807393	8.005571734475	8.000345927669
$\lambda_5^5$	13.79168832	10.271149449982	10.018470245444	10.001176581294
$\lambda_6^5$	20.90377760	12.686071293742	12.048536519474	12.003160164728
$\lambda_7^5$	30.50421040	15.466485630407	14.106592029658	14.007099685498
$\lambda_8^5$		18.717939118492	16.209704089113	16.014260176430

Таблица 3.4: Резултати от най-големите изчислени собствени стойности

	1024 елемента	отклонение от точното решение
$\lambda_{61}^3$	8643.14766513583	8521.14766513583
$\lambda_{62}^3$	19413.84064567029	19289.84064567028
$\lambda_{63}^3$	77274.79692058056	77148.79692058055
$\tilde{\lambda}_{61}^3$	123.75822409097	1.75822409097
$\tilde{\lambda}_{62}^3$	124.97614371464	0.97614371464
$\tilde{\lambda}_{63}^3$	124.97707832096	1.02292167903
$\lambda_{61}^5$	303.60601187718	181.60601187718
$\lambda_{62}^5$	308.17512412645	184.17512412645
$\lambda_{63}^5$	309.66609726459	183.66609726459

При задача с различна размерност на интегралите пресмятанията са чувствителни към използваната квадратурна формула.

Таблица 3.4 ясно показва, че за големи собствени стойности само схемата с концентрация на масата е приложима.

**Пример 3.2** Да пресметнем напречните непринудени трептения на квадратна хомогенна мембрана  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , на която едната страна е неподвижна, а другите три са свободни. Съответната гранична задача е:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u, & (x, y) \in \Omega, \\ u &= 0, & (x, y) \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, & (x, y) \in \Gamma \setminus \Gamma_1, \end{aligned}$$

където  $\Gamma$  е границата на  $\Omega$ ,  $\Gamma_1 = \{(x, y) : x = 1, y \in [0, 1]\}$ , а  $\nu$  е единичен нормален вектор.

Използвайки означенията от §3.2, имаме  $m = 1$ ,  $r = 0$ . Билинейните форми са:

$$a(u, v) = \int \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx; \quad b(u, v) = \int \int_{\Omega} uv \, dx.$$

В случая точните собствени стойности се пресмятат по формулата:

$$\lambda_j = (2p + 1)^2 \frac{\pi^2}{4} + q^2 \pi^2, \quad p = 0, 1, 2, \dots; \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Тогава за първите три собствени стойности имаме:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\pi^2 = 2.4674010, \quad \lambda_2 = \frac{5}{4}\pi^2 = 12.337006,$$

$$\lambda_3 = \frac{9}{4}\pi^2 = 22.206610.$$

Резултатите в Таблица 3.5 са получени при равномерна мрежа за областта  $\Omega$ . За пресмятане на  $\lambda_{h,j}$  сме използвали билинейни крайни елементи ( $n = 1$ ). След това, чрез 8-точкови правоъгълни Серендипови крайни елементи ( $n_1 = 2$ ), при използване на същата мрежа и съгласно Алгоритъм 3.1, са пресметнати  $\tilde{\lambda}_{h,j}$ .

Таблица 3.5: Първите три собствени стойности, получени съответно чрез МКЕ ( $\lambda_{h,j}$ ) и Алгоритъм 3.1 ( $\tilde{\lambda}_{h,j}$ )

$n_{FE}$		j=1	j=2	j=3
16	$\lambda_{h,j}$	2.4992701641	12.8859121932	24.8736649345
	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	2.4675678663	12.3505345722	22.3523700195
64	$\lambda_{h,j}$	2.4753384196	12.4724190771	22.8625076710
	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	2.4674113461	12.3377895611	22.2189737390
256	$\lambda_{h,j}$	2.4693835294	12.3707372094	22.3737898689
	$\tilde{\lambda}_{h,j}$	2.4674017379	12.3370535660	22.2113558811

**Пример 3.3** Разглеждаме моделната задача за прът с дължина  $l$ , за който плътността и еластичната коравина са обезразмерени, т.е. са равни на единица. Прътът е закрепен в двата си края. Непринудените колебания и функциите на формата се дават със следната диференциална система[71]:

$$u^{IV}(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, l), \quad (3.109)$$

$$u(0) = u''(0) = 0, \quad u(l) = u''(l) = 0.$$

При  $l = 1$  точните решения са:

$$\lambda_j = (\pi j)^4, \quad u_j(x) = \sqrt{2} \sin \pi j x, \quad \sigma_j(x) = -\sqrt{2}(\pi j)^2 \sin \pi j x, \quad j = 1, 2, \dots,$$

като собствените функции са нормирани чрез  $a(u_j, u_j) = 1$  (виж §3.3).

Първите 4 собствени стойности с 8 значещи цифри са:

$$\lambda_1 = 97.409091, \quad \lambda_2 = 1558.5454, \quad \lambda_3 = 7890.1363, \quad \lambda_4 = 24936.727.$$



Таблица 3.6 и Таблица 3.8 дават оценка на грешката при решаване на задача (3.109) по смесен МКЕ и едномерни крайни елементи. Пространствата  $V_h$  и  $\Sigma_h$  съдържат  $C^0$ -непрекъснати по части квадратични полиноми, т.е.  $n = 2$ . Решаването на съответния елиптически (изходен) проблем става върху пространствата  $\tilde{V}_h$  и  $\tilde{\Sigma}_h$ , дефинирани върху същото крайноелементно разделяне и състоящи се от непрекъснати по части кубични функции.

Таблица 3.6: Оценка на грешката  $|\lambda_j - \lambda_{j,h}|$  за задача (3.109)

$n_{FE}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
16	$4.01 \times 10^{-4}$	$1.02 \times 10^{-1}$	2.58	25.6
32	$2.51 \times 10^{-5}$	$6.42 \times 10^{-3}$	$1.64 \times 10^{-1}$	1.63
64	$1.57 \times 10^{-6}$	$4.02 \times 10^{-4}$	$1.03 \times 10^{-2}$	$1.03 \times 10^{-1}$
128	$9.83 \times 10^{-8}$	$2.51 \times 10^{-5}$	$6.44 \times 10^{-4}$	$6.43 \times 10^{-3}$

Таблица 3.7: Оценка на грешката  $|\lambda_j - \tilde{\lambda}_{j,h}|$  за задача (3.109)

$n_{FE}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
16	$5.47 \times 10^{-7}$	$5.44 \times 10^{-4}$	$2.98 \times 10^{-2}$	$4.97 \times 10^{-1}$
32	$8.63 \times 10^{-9}$	$8.76 \times 10^{-6}$	$4.99 \times 10^{-4}$	$8.69 \times 10^{-3}$
64	$1.36 \times 10^{-10}$	$1.38 \times 10^{-7}$	$7.93 \times 10^{-6}$	$1.40 \times 10^{-4}$
128	$2.13 \times 10^{-12}$	$5.42 \times 10^{-9}$	$4.93 \times 10^{-8}$	$7.25 \times 10^{-5}$

Съответните Таблица 3.7 и Таблица 3.9 дават оценка на грешката за първите 4 собствени стойности и функции, когато се приложи Алгоритъм 3.2, ускоряващ апостериорно сходимостта. Очевидно е, че ефектът от пост-процедурата най-добре се проявява при 16 и 32 крайни елемента.

Таблица 3.8: Оценка на грешката  $(\|u_j - u_{j,h}\|_{1,\Omega}^2 + \|\sigma_j - \sigma_{j,h}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$  за собствените функции на задача (3.109)

$n_{FE}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
16	$4.29 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-2}$	$1.04 \times 10^{-1}$	$4.37 \times 10^{-1}$
32	$1.13 \times 10^{-3}$	$9.18 \times 10^{-3}$	$3.31 \times 10^{-2}$	$1.03 \times 10^{-1}$
64	$2.82 \times 10^{-4}$	$2.27 \times 10^{-3}$	$7.79 \times 10^{-3}$	$2.34 \times 10^{-2}$
128	$7.05 \times 10^{-5}$	$5.65 \times 10^{-4}$	$1.92 \times 10^{-3}$	$5.54 \times 10^{-3}$

Таблица 3.9: Оценка на грешката  $(\|u_j - \tilde{u}_{j,h}\|_{1,\Omega}^2 + \|\sigma_j - \tilde{\sigma}_{j,h}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$  при използване на постпроцедурата от Алгоритъм 3.2

$n_{FE}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
16	$1.36 \times 10^{-4}$	$2.28 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-2}$	$5.57 \times 10^{-2}$
32	$1.70 \times 10^{-5}$	$2.76 \times 10^{-4}$	$1.56 \times 10^{-3}$	$6.37 \times 10^{-2}$
64	$2.27 \times 10^{-6}$	$1.01 \times 10^{-4}$	$8.19 \times 10^{-4}$	$2.33 \times 10^{-3}$
128	$1.53 \times 10^{-7}$	$2.25 \times 10^{-5}$	$3.17 \times 10^{-5}$	$2.05 \times 10^{-4}$

**Пример 3.4** (Тази моделна задача ми бе предоставена от проф. М. Касчиев, за което изказвам благодарност.)

Разглеждаме двумерна бихармонична задача за собствени стойности:

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.110}$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{върху} \quad \Gamma,$$

където  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  и  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ . Тази задача бе дискутирана в Забележка 3.8 и нейната слаба формулировка е представена с уравнение (3.31).

Точните собствени стойности на (3.110) се пресмятат по формулата  $\lambda = (l^2 + m^2)^2 \pi^4$ ,  $l, m \in \mathbf{N}$ , при съответстващи собствени функции  $u(x, y) = 4 \sin l\pi x \sin m\pi y$ , нормирани посредством  $a(u, u) = 1$ .

По този начин първите 4 собствени двойки са:

$$\lambda_1 = 4\pi^4 = 389.6363641, \quad u_1 = 4 \sin \pi x \sin \pi y, \quad (l = 1, m = 1),$$

$$\lambda_2 = 25\pi^4 = 2435.227276, \quad u_2 = 4 \sin \pi x \sin 2\pi y, \quad (l = 1, m = 2),$$

$$\lambda_3 = 25\pi^4 = 2435.227276, \quad u_3 = 4 \sin 2\pi x \sin \pi y, \quad (l = 2, m = 1),$$

$$\lambda_4 = 64\pi^4 = 6234.181826, \quad u_4 = 4 \sin 2\pi x \sin 2\pi y, \quad (l = 2, m = 2).$$

В Таблица 3.10 са дадени собствените стойности, пресметнати чрез смесения метод върху равномерна правоъгълна мрежа. Пространствата  $\Sigma_h$  и  $V_h$  се състоят от непрекъснати функции, които са биквадратични върху всеки краен елемент.

**Таблица 3.10:** Приблизжени собствени стойности на задача (3.110), пресметнати по смесен МКЕ

$n_{FE}$	$\lambda_{1,h}$	$\lambda_{2,h}$	$\lambda_{3,h}$	$\lambda_{4,h}$
9	391.6563	2522.890	2522.890	6510.286
16	390.8524	2465.127	2465.127	6416.349
25	390.0355	2447.942	2447.942	6324.614

За апостериорния метод, даден с Алгоритъм 3.2, ние използваме пространствата  $\tilde{\Sigma}_h$  и  $\tilde{V}_h$  от непрекъснати функции, които са бикубични правоъгълни крайни елементи.

Таблица 3.11 показва, че е разумно да използваме алгоритъма при по-груба мрежа. Също така, за постпроцедурния метод е достатъчно при първоначално изчисляване на приближените собствени стойности по смесения МКЕ те да бъдат получавани след малко на брой итерации. Да отбележим накрая, че постпроцедурата приближава отгоре стойностите на  $\lambda_j$ .

Таблица 3.11: Приближени собствени стойности на задача (3.110), пресметнати чрез апостериорния Алгоритъм 3.2

$n_{FE}$	$\tilde{\lambda}_{1,h}$	$\tilde{\lambda}_{2,h}$	$\tilde{\lambda}_{3,h}$	$\tilde{\lambda}_{4,h}$
9	390.1023	2450.109	2464.251	6412.786
16	389.8916	2441.264	2444.357	6328.817
25	389.6961	2434.270	2435.012	6244.637

## Заклучение

Получените в дисертацията резултати могат да бъдат резюмирани в следните няколко пункта:

1. Предложена е апостериорна покриваща процедура за квадратични и кубични триъгълни крайни елементи. Доказани са оценки от тип суперсходимост на базата на естествените точки на суперсходимост на градиента за задачи от втори ред. Представена е подробна картина за приложение на тези точки за различни гранични задачи.
2. Дадена е оригинална идея за суперсходящо частично апостериорно покритие и съгласувано свързване на квадратични и кубични триъгълни крайни елементи.
3. Съществен принос е направен в теорията на интерполираните крайни елементи. Разширяването на този апостериорен подход се състои в доказването на оценки от тип ултрасходимост при задачи от втори ред, използващи триъгълни крайни елементи; за едномерни елементи при задачи от четвърти ред и за правоъгълни крайни елементи, приложени за бихармонични задачи.
4. Доказани са теореми за суперблизост, които са "мост" между апостериорните SPR-методи за елиптични уравнения и МКЕ за спектрални задачи.
5. Представена е нова апостериорна техника, която е приложима за апроксимация при широк клас самоспрегнати спектрални задачи. Важна стъпка в развитието на този метод е изложената в дисертационния труд теория за смесения МКЕ. Предложени са също и съответни алгоритми.
6. Доказани са теореми за оценка на грешката и теореми за симетризуемост при спектрални задачи, съдържащи собствената стойност в граничните условия. Тези резултати намират приложение в постпроцедурите за задачи от този вид.

## Библиография

- [1] АГРАНОВИЧ М., Б. КАТСЕНЕЛЕНБАУМ, А. СИВОВ, Н. ВОЙТОВИЧ  
M.S. Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov and N.N. Voitovich,  
Generalized Method for Eigenoscillations in Diffraction Theory - WILEY-  
VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 1999.
- [2] АДАМС Р.А.  
R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [3] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Superconvergence of the gradient for linear triangle elements  
for elliptic and parabolic equations, C.R. Acad. Bulgare Sci., **37**, 1984, 293-  
296.
- [4] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Error estimate of type superconvergence of the gradient for  
quadretic trianglular elements, C.R. Acad. Bulgare Sci., **37**, 1984, 1179-  
1182.
- [5] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Superconvergence du gradient des solutions approchées pour  
les equations paraboliques, Serdica, **11**, 1985, 359-368.
- [6] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Superconvergence of the gradient of finite element eigen-  
functions, C.R.Acad.Bulgare Sci., **43**, 9-11, 1990.
- [7] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, On a superconvergent recovery technique for finite element  
eigenvalue problems, Proceedings of the Fifth International Conf. on Dif-  
ferential Equations and Applications - CDE'V (1995), 1-6.
- [8] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Supercloseness between the elliptic projection and the ap-

proximate eigenfunction and its application to a postprocessing of finite element eigenvalue problems, Lecture Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, 2004 (to appear).

- [9] АНДРЕЕВ А.Б.  
A.B. Andreev, Superclose property and application for fourth-order eigenvalue problems, *Comp. rend. Acad. bulg. Sci.* **57**, No6, 2004, 37-42.
- [10] АНДРЕЕВ А.Б., Т.Т. ДИМОВ, М.Р. РАЧЕВА  
A.B. Andreev, T.T. Dimov and M.R. Racheva, One-dimensional patch-recovery finite element method for fourth-order elliptic problems, Lecture Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, 2004 (to appear).
- [11] АНДРЕЕВ А.Б., В.А. КАСЧИЕВА И М. ВАН МАЕЛЕ  
A.B. Andreev, V.A. Kascieva and M. Vanmaele, Some results in lumped mass finite-element approximation of eigenvalue problems using numerical quadrature formulas, *J. Comp. Appl. Math.*, **43**, 1992, 291-311.
- [12] АНДРЕЕВ А.Б., Р.Д. ЛАЗАРОВ  
A.B. Andreev and R.D. Lazarov, Superconvergence of the gradient for quadratic triangular finite elements, *Numer. Methods for PDEs*, **4**, 15-32, 1988.
- [13] АНДРЕЕВ А.Б., Р.Д. ЛАЗАРОВ  
A.B. Andreev, R.D. Lazarov, Lumped mass finite element method for parabolic and eigenvalue problems, *Mathematica Balkanica*, Vol. 2, 1988, Fasc.1, 85-92.
- [14] АНДРЕЕВ А.Б., Р.Д. ЛАЗАРОВ, М.Р. РАЧЕВА  
A.B. Andreev, R.D. Lazarov and M.R. Racheva, Postprocessing and higher order convergence of mixed finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems, Technical Report Series, The Texas A & M University, ISC-04-04-MATH (to appear in Elsevier Science).
- [15] АНДРЕЕВ А.Б., Й.Т. МАКСИМОВ, М.Р. РАЧЕВА  
A.B. Andreev, J.T. Maximov and M.R. Racheva, Finite element method for plates with dynamic loads, *Lecture Notes in Comp. Sci.* 2179, Springer-Verlag, 445-453, 2001.
- [16] АНДРЕЕВ А.Б., М.Р. РАЧЕВА  
A.B. Andreev, M.R. Racheva, Superconvergence FE postprocessing for eigenfunctions, *Comp. rend. Acad. bulg. Sci.* **55**, 17-22, No2, 2002.

- [17] АНДРЕЕВ А.Б., М.Р. РАЧЕВА  
A. Andreev, M. Racheva, On the points of superconvergence for fourth-order eigenvalue problems, *Comp. rend. Acad. bulg. Sci.* **55**, 23-28, No6, 2002.
- [18] АНДРЕЕВ А.Б., М.Р. РАЧЕВА  
A. Andreev, M. Racheva, On the postprocessed technique for eigenvalue problems, *Lecture Notes in Comp. Sci.* 2542, Springer-Verlag, 363-371, 2003.
- [19] АНДРЕЕВ А., М. РАЧЕВА  
A. Andreev, M. Racheva, Variational aspects of the mixed formulation for fourth-order elliptic eigenvalue problems, *Mathematica Balkanica*, Vol.18, 2004, Fasc. 1-2, pp. 41-51.
- [20] АНДРЕЕВ А., М. РАЧЕВА  
A. Andreev, M. Racheva, Superconvergence of the interpolated quadratic finite elements on triangular meshes, *Mathematica Balkanica*, 2004 (to appear).
- [21] АНДРЕЕВ А., М. РАЧЕВА  
A. Andreev, M. Racheva, Ultraconvergence of an Interpolated Finite Element Method for Some Fourth-Order Elliptic Problems, *Chalmers FE Center*, Preprint 2004-17.
- [22] АНДРЕЕВ А.Б., Т.Д. ТОДОРОВ  
A.B. Andreev and T.D. Todorov, Lumped mass approximation for an isoparametric finite element eigenvalue problem, *Sib. J. of Numerical Mathematics*, No4(2), 1999, 295-308.
- [23] АНДРЕЕВ А.Б., Т.Д. ТОДОРОВ  
A.B. Andreev and T.D. Todorov, Lumped mass error estimates for an isoparametric finite element eigenvalue problem, *Sib. J. of Numerical Mathematics*, No3, 2000, 215-228.
- [24] АНДРЕЕВ А.Б., Т.Д. ТОДОРОВ  
A.B. Andreev and T.D. Todorov, Isoparametric finite element approximation of a Steklov eigenvalue problem, *IMA Journal of Numerical Analysis*, (2004) **24**, 309-322.
- [25] АНДРЕЕВ А.Б., М. ЕЛ ХАТРИ, Р.Д. ЛАЗАРОВ  
Сверхсходимость градиента в методе конечных элементов для



некоторых эллиптических и параболических задач, Вариационно-разностные методы в математической физике, Москва 1984, 13-25.

- [26] АНДРЕЕВ А.Б., А.Х. ХРИСТОВ  
A.B. Andreev, A.H. Hristov, On the variational aspects for elliptic problems with parameter on the boundary, *Advances in Numer. Methods and Applications II*, World Scientific, 587-593, 1998.
- [27] АНСУЪРТ М., Д.Т. ОДЕН  
M. Ainsworth, J.T. Oden, *A posteriori* Error Estimation in Finite Element Analysis, Wiley Interscience, New York, 2000.
- [28] БАБУШКА И., А.К. АЗИЗ  
I. Babuška, A.K. Aziz, Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method, *The Math. Foundations of the FEM with Applications to PDE*, A.K. Aziz ed., Academic Press, New York, 1972.
- [29] БАБУШКА И., Т. СТРОУБУЛИС, К. УПАДХИАИ, С. ГАНГАРАШ  
I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K. Gangaraj, Validation of recipes for the recovery of stresses and derivatives by a computer-based approach, *Math. Comput. Mode.* **20**, 45, 1994.
- [30] БАБУШКА И., Д. ОСБОРН  
I. Babuška, J. Osborn, Eigenvalue Problems, *Handbook of Numer. Anal.*, Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [31] К. БАКУТА, ДЖ. БРАМБЪЛ, Ж. ПАШЕК  
C. Bacuta, J.H. Bramble, and J.E. Pasciak, Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem, *Proceedings of the International Symposium on Computational and Applied PDEs*, ZhangJiaJie, Hunan, China, July 2001.
- [32] БАРЛОУ Ж.  
J. Barlow, Optimal stress location in finite-element models, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **102** (1976), 243-251.
- [33] БЕЙКЪР М.  
M. Bakker, One-dimensional Galerkin methods and superconvergence at interior nodal points, *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1984), 101-110.
- [34] БЕРЕЗАНСКИЙ Ж.М.  
J.M. Berezanskii, Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, *Math. Monographs 17*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

- [35] БЛУМ Х., Р. РАНАХЕР  
H. Blum and R. Rannacher, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, **2** (1980), 556-581.
- [36] БРАМВЪЛ ДЖ., ДЖ. ОСВОРН  
J.H. Bramble, J.E. Osborn, Approximation of Steklov eigenvalues of non-selfadjoint second order elliptic operator, *Mathematical Foundations of the FEM with Applications to PDEs* (A.K. Aziz, editor), pp. 387-408, Academic Press, New York, 1972.
- [37] БРАМВЪЛ ДЖ., С. ХИЛБЕРТ  
J.H. Bramble, S. Hilbert, Bounds for the class of linear functionals with application to Hermite interpolation, *Numer. Math.* v.16, 1971, No4, 362-369.
- [38] БРАНДТС Я., М. КШИЖЕК  
J. Brandts and M. Křížek, Gradient superconvergence on uniform simplicial partitions of polytopes, *IMA J. of Numer. Analysis* (2003) **23**, 489-505.
- [39] БРЕНЕР С.К., Л.Р. СКОТ  
S.C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Texts in Appl. Math., Springer-Verlag, 1994.
- [40] БРЕЦИ Ф.  
F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, R2, **8** (1974), 129-151.
- [41] ВЕРФИОРТ Р.  
Verfürth T., *A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques*, Teubner Skripten zur Numerik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [42] ГАРСИЯ-АРЧИЛА Б., Е.С. ТИТИ  
B. Garcia-Archilla and E.S. Titi, Postprocessing the Galerkin method: The finite element case, *SIAM J. Numer. Anal.* **37**, 470-499, 2000.
- [43] ГОЛУВ Г., С. ВАН ЛОАН  
G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*, London: John Hopkins (1996).
- [44] ГРИВАРД П.  
P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1985.

- [45] ГРИВАРД П.  
P. Grisvard, Singularities in Boundary Problems. MASSON and Springer-Verlag, 1985.
- [46] ГРИЙНБЕРГ Л., И. БАБУШКА  
L. Greenberg and I. Babuška, A continuous analogue of Sturm sequences in the context of Sturm-Liouville equations, SIAM J. Numer. Anal., **26** (1989), No4, 920-945.
- [47] ГУДСЕЛ Г., ДЖ.А. УАЙТМАН  
G. Goodsell and J.R. Whiteman, A unified treatment of superconvergent recovered gradient functions for piecewise linear finite element approximations, Internat. J. Numer. Methods, Eng., **27**, 469-481, 1989.
- [48] ГУДСЕЛ Г., ДЖ.А. УАЙТМАН  
G. Goodsell and J.R. Whiteman, Superconvergence of recovered gradients of piece-wise quadratic finite element approximations, I, II. Numer. Methods PDE **761-83**, 87-99, 1991.
- [49] ДАУТОВ А.З.  
Суперсходимость схем МКЕ с численным интегрированием для квазилинейных эллиптических уравнений четвертого порядка, ДУ **7** т.XVII, 1172-1181, 1982.
- [50] ДАУТОВ А.З., А.Г. ЛАПИН  
Исследование сходимости в сеточных нормах схем МКЕ с численным интегрированием для эллиптических уравнений четвертого порядка, ДУ, т.17, 1256-1269, 1981.
- [51] ДЪГЛАС ДЖ., Т. ДЮПОН И М. УИЛЪР  
J. Douglas, T. Dupont, M. Wheeler, An  $L^\infty$  estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor product, RAIRO Anal. Numer. **8**, 61-66, 1977.
- [52] ЕШЕР ДЖ.  
J. Escher, Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions, Commun. in PDEs, **18(788)**, 1309-1364, 1993.
- [53] ЖАНГ Ж., Н. ЯН, Т. СУН  
Z. Zhang, N, Yan, T. Sun, Superconvergent derivative recovery for the intermediate finite element family of the second type, IMA J. of Numerical analysis, **21**, 2001, 643-665.

- [54] ЖАНГ Ж., А. НАГА  
Z. Zhang and A. Naga, A new finite element gradient recovery method: Superconvergence property, SIAM J. Numer. Anal. (to appear).
- [55] ЖАНГ Ж., Р. ЛИН  
Zh. Zhang, R. Lin, Ultraconvergence of ZZ patch recovery at mesh symmetry points, Numer. Math. (2003), 95: 781-801.
- [56] ЖАНГ Т.  
T. Zhang, The derivative patch interpolating recovery technique and superconvergence, Chinese J. Numer. Math. Appl. **2**, 2001, 1-10.
- [57] ЖУ К., К. ЖАО  
Q. Zhu, Q. Zhao, SPR technique and finite element correction, Numer. Math. (2003) 96: 185-196.
- [58] ЗЕНКЕВИЧ О., Ж. ЖУ  
O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, The superconvergence patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1: The recovery technique, Int. J. Numer. Methods Eng., **33**, 1331-1364 (1992).
- [59] ЗЕНКЕВИЧ О., Ж. ЖУ  
O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, The superconvergence patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity, Int. J. Numer. Methods Eng., **33**, 1365-1382 (1992).
- [60] ЗЕНКЕВИЧ О., Ж. ЖУ  
O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, Int. J. Numer. Methods Eng., **24**, 337-357 (1987).
- [61] ЗЕНКЕВИЧ О., Ж. ЖУ  
O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, The superconvergence patch-recovery (SPR) and adaptive finite element refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **101**, 207-224, 1992.
- [62] ЗЕНКЕВИЧ О., Й.К. ЧЕНГ  
O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheng, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967.
- [63] ЗЛАМАЛ М.  
M. Zlamal, Superconvergence and reduced integration in the FEM, Math of Comp. **32**, 663-685, 1978.

- [64] ИШИХАРА К.  
K. Ishihara, A mixed finite element method for the biharmonic eigenvalue problem of plate bending, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University*, **14** (1978), 399-414.
- [65] ИШИХАРА К.  
K. Ishihara, On the mixed finite element approximation for the buckling of plates, *Numer. Math.*, **33** (1979), 195-210.
- [66] ЙАН Ю.  
Y. Yan, Postprocessing the finite element method for semilinear parabolic problems, *Chalmers FE Center*, Preprint 2003-06.
- [67] КАНАВАТИ Д., А. МИНСОНИ  
J. Kanavati, A. Minsoni, A discontinuous Steklov problem with an application to water waves, *J. Math. Anal. and Appl.* **69**, 540-558, 1979.
- [68] КАКУТО К.  
C. Canuto, Eigenvalue approximation by mixed methods, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **R3**, **12** (1978), 27-50.
- [69] КАКУТО К.  
C. Canuto, A hybrid finite element method to compute the free vibration frequencies of a clamped plate, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **15**(2) (1981), 101-118.
- [70] КЕРИ Г.Ф., Д. ХЪМФРИ, М.Ф. УИЛЪР  
G.F. Carey, D. Humphrey and M.F. Wheeler, Galerkin and collocation-Galerkin methods with superconvergence and optimal fluxes, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **17** (1981), 939-950.
- [71] КОЛЛАТЦ Л.  
Collatz L.: *Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen*. Leipzig, Acad. Verlag, 1963.
- [72] КСЮ Ж.  
J. Xu, Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**, 1759-1777, 1996.
- [73] КСЮ Ж., А. ЖОУ  
J. Xu and A. Zhou, A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems, *Math. of Comput.*, **70** (233) (2001), 17-25.

- [74] КШИЖЕК М., П. НЕЙТААНМАКИ  
M. Křížek and P. Neittaanmäki, Superconvergence phenomenon in the finite element method arising from averaging gradients, Numer. Math., **45** (1984), 105-116.
- [75] КШИЖЕК М., П. НЕЙТААНМАКИ  
M. Křížek and P. Neittaanmäki, On a Global Superconvergence of the Gradient of Linear Triangular Elements, J. Comput. Appl. Math. (1987).
- [76] ЛАРСОН М.  
M.G. Larson, *A-posteriori* and *A-priori* Error Analysis for Finite Element Approximations of Self-adjoint Eigenvalue Problems, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), 562-580.
- [77] ЛЕВИН Н.  
N. Levin, Stress sampling points for linear triangles in the finite element method, Numerical approximation rep. IMA, Numer. Anal. **5** (1985), 407-427.
- [78] ЛЕВИН Н.Д.  
N.D. Levin, Superconvergent recovery of the gradient from piecewise linear finite element approximations, IMA J. Numer. Anal., **5**, 407-427, 1985.
- [79] ЛЕЗЕН П., М. ЗЛАМАЛ  
P. Lesaint, M. Zlamal, Superconvergence of the gradient of FEM, RAIRO Anal. Numer. **13**, 139-166, 1979.
- [80] ЛЕНОАР М.  
M. Lenoir, Optimal isoparametric finite elements and error estimates for domains involving curved boundaries, SIAM J. Numer. Anal., Vol. **23**, 3(1986), 562-580.
- [81] ЛИ Б., Ж. ЖАНГ  
B. Li, Z. Zhang, Analysis of a class of superconvergence patch-recovery techniques for linear and bilinear finite elements, Numer. Methods for Partial Differential Equations **15** (1999), 151-167.
- [82] ЛИН Р., Ж. ЖАНГ  
R. Lin and Zh. Zhang, Natural superconvergent points of triangular finite elements, Numer. Meth. PDEs (to appear).

- [83] ЛИН К., Т. ЛЮ И С. ШЕН  
K. Lin, T. Lu and S. Shen, Asymptotic expansion for finite element approximations, Research Report I MS-11, Inst. Math. Sci. Chengdu Branch of Academia Sinica, 1983.
- [84] ЛИН К., Н. ЯАН И А. ЖОУ  
K. Lin, N. Yan and A. Zhou, A rectangle test for interpolated finite elements, Proc. Systems Science & Systems Engineering, 217-229 (1991).
- [85] ЛИУ У., К. ХУАНГ  
W. Liu, C. Huang, Vibrations of a constrained beam carrying a heavy tip body, Journal of Sound and Vibration, **123**, 15-19, 1989.
- [86] МЕРСИЕ Г.  
B. Mercier, Numerical solution of the biharmonic problem by mixed finite elements of class  $C^0$ , Bull. Un. Math. Ital., Vol.10, 133-149, 1974.
- [87] МЕРСИЕ Б., ДЖ. ОСВОРН, Д. РАПАЗ И П. РАВИАР  
B. Mercier, J. Osborn, J. Rappaz and P.A. Raviart, Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods, Math. Comput., **36**(154) (1981), 427-453.
- [88] МИУОШИ Т.  
T. Miyoshi, A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations, Kumamoto J. Sci. (Math.), **9** (1973), 87-116.
- [89] МИХЛИН С.  
S.G. Mikhlin, Variational Methods in Mathematical Physics, Oxford: Pergamon, 1964.
- [90] МУКХЕРЖИ А., М. МИКХОПАДХИЯЙ  
A. Mukherjee and M. Mikhopadhyay, Finite element free vibration analysis of stiffened plates, The Aeronautical Journal, 267-273, 1986.
- [91] НАКАО М.Т.  
M.T. Nakao, Superconvergence of the gradient of Galerkin approximations for elliptic problems, RAIRO Model. Math. Anal. Numer., **21** (1987), 679-695.
- [92] ОГАНЕСЯН Л.А., Л.А. РУХОВЕЦ  
Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ереван, издательство АН АрмССР, 1979.



- [93] ОСБОРН ДЖ.  
J.E. Osborn, Spectral approximation for compact operators, *Math. of Comp.* **26**, 712-725, 1975.
- [94] ПИРС ДЖ., Р. ВАРГА  
J.G. Pierce and R.S. Varga, Higher order convergence results for the Rayleigh - Ritz method applied to eigenvalue problems: Improved error bounds for eigenfunctions, *Numer Math.* **19** (1972), 155-169.
- [95] РАВИАР П.А., Ж.-М. ТОМА  
P.A. Raviart and J.-M. Thomas, *Introduction a l'Analyse Numerique des Equations aux Derivées Partielles*, Masson, Paris, 1988.
- [96] РАНАХЕР Р.  
R. Rannacher, Nonconforming Finite Element Method for Eigenvalue Problems in Linear Plate Theory, *Numer. Math.*, **32**, 1979.
- [97] РАЧЕВА М.Р.  
Числов анализ и приложения на елиптически спектрални задачи от четвърти ред - Дисертация, София, 2002.
- [98] РАЧЕВА М.Р., А.Б. АНДРЕЕВ  
Racheva M.R., Andreev A.B., Variational aspects of one-dimensional fourth-order problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Sib. J.N.M.*, No4(5), 2002, 373-380.
- [99] РАЧЕВА М.Р., А.Б. АНДРЕЕВ  
M.R. Racheva, A.B. Andreev, Superconvergence postprocessing for eigenvalues, *Comp. Meth. in Appl. Math.*, **2**(2) (2002), 171-185.
- [100] РЕКТОРИС К.  
Вариационные методы в математической физике и технике, Москва: "Мир", 1985.
- [101] М. РЕНАРДИ, Р. РОДЖЪРС  
M. Renardy, R. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [102] СИАРЛЕ Ф.  
P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.



- [103] СИАРЛЕ Ф.Г., Ф.А. РАВИАР  
P.G. Ciarlet and P.A. Raviart, The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element method, Math. Foundation of the FEM with Applications to PDEs, A.K. Aziz, Ed., New York, Academic Press, 1972, 409-474.
- [104] СТРЕНГ Г., Г. ФИКС  
G. Strang, G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [105] ТИМОШЕНКО С.П., Д. ЮНГ, У. УИВЪР  
S.P. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [106] ТОМЕ В.  
V. Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer, 1997.
- [107] УАЙТМЪН Ж.А., Г. ГУДСЕЛ  
J.R. Whiteman and G. Goodsell, Some gradient superconvergence results in the finite element method, P.R. Turner, ed., Proc. Numerical Analysis Summer School, Lancaster, 1987, Lecture Notes in Mathematics 1397, Springer-Verlag, Berlin, 182-260.
- [108] УАНГ К., К. ЙЕ  
X. Wang and Xin Ye, Superconvergence analysis for the Navier-Stokes problems, Applied Numer. Mathematics **41** (2002), 515-527.
- [109] УИЛЪР М.Ф., Ж.А. УАЙТМЪН  
M.F. Wheeler and J.R. Whiteman, Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise finite element approximations, Numer. Meth. Partial Diff. Equat., **3**, 65-82 (1987).
- [110] УОЛВИН Л.  
L.B. Wahlbin, Superconvergence in Galerkin FEM, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [111] ФАЛК Р., ДЖ. ОСБОРН  
R. Falk and J. Osborn, Error estimates for mixed methods, R.A.I.R.O. Anal. Numer., **14** (3) (1980), 249-277.
- [112] ДЕ ФРУТОС Ж., Б. ГАРСИЯ-АРЧИЛА, Ж. НУОВО  
J. de Frutos, B. Garcia-Archilla and J. Novo, A postprocessed Galerkin

- method with Chebyshev or Legendre polynomials, Numer. Math. **86**, 419-442, 2000.
- [113] ДЕ ФРУТОС Ж., Ж. НУОВО  
J. de Frutos, J. Novo, Postprocessing the linear finite element method, SIAM J. Numer. Anal. **40**, 805-819, 2000.
- [114] ДЕ ФРУТОС Ж., Ж. НУОВО  
J. de Frutos, J. Novo, A spectral element method for the Navier-Stokes equations with improved accuracy, SIAM J. Numer. Anal. **38**, 799-819, 2000.
- [115] ЧЕН С.М.  
C.M. Chen, The superconvergence for triangular elements, Science in China, 29:6 (1999), 501-508.
- [116] ЧЕН С.М.  
C.M. Chen, Optimal points of the stresses for triangular linear elements, Numer. Math. J. Chinese Univ., Vol.2, pp. 12-20, 1980.
- [117] ЧЕН С.М., В. ТОМЕ  
C.M. Chen, V. Thomée, The lumped mass finite element method for a parabolic problem, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, **26**, 1985, 329-354.
- [118] ЧЕНГ Й.  
Y. Cheng, Superconvergence of the full-discrete FEM for compressible miscible displacement: The full tensor case, Num. Mathematics, Vol. 9, No1, May 2000, 71-82.
- [119] ШАЙДУРОВ В.В.  
Многосеточные методы конечных элементов, М. "Наука", 1989.
- [120] ШАТЛЕН Ф.  
F. Chatelin, Spectral Approximations of Linear Operators, Academic Press, New York, 1983.
- [121] ШАТЦ А., И. СЛОАН, Л. УОЛБИН  
A.H. Schatz, I.H. Sloan, L.B. Wahlbin, Superconvergence in finite element methods and meshes that are locally symmetric with respect to a point, SIAM J. Numer. Anal. **33**, 505-521 (1996).