

Българска Академия на Науките
Институт по Математика и Информатика

Ирина Красимирова Георгиева

Многомерни апроксимации
ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен „Доктор“

специализация: 01. 01. 13

научен ръководител: acad. Борислав Боянов

София, 2004 г.

Съдържание

Увод	4
1 Апроксимация на диференцируеми функции с блендинг- функции	27
§1 Предварителни сведения за блендинг-функции	27
§2 Оптимално възстановяване на диференцируеми функции	30
2 Двумерна интерполация с (m, n)-сплайни	47
§1 Предварителни сведения	47
§2 Интерполационна теорема	50
§3 Частни случаи	53
3.1 Оценка на грешката в случая: $(m, n) = (1, 1)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$	53
3.2 Случай $(m, n) = (1, 2)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$	57
3.3 Случай $(m, n) = (2, 2)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$	66
3 Интерполация чрез полиноми на две променливи основана на Радонови проекции	72
§1 Предварителни сведения за хребетни функции	72
§2 Интерполационна теорема	78
§3 Една забележка за обръщането на Радоновата трансформация . . .	87
§4 Върху представянето на Шинцел	90
§5 Първи метод за реконструкция	95
5.1 Възстановяване на полиноми, основано на Радонови проекции	95

5.2 Алгоритъм за реконструкция	98
§6 Втори метод за реконструкция	104
Библиография	107

Увод

Теория на апроксимациите е класическа област от математическия анализ, която има бурно и дългогодишно развитие. Основите са положени от Чебишев, Вайерщрас, Бернщайн и техни ученици. Първите изследвания са посветени на апроксимационните свойства на алгебричните и тригонометричните полиноми и намират отражение в известните книги на Джексън [27], Ахиезер [1] и Натансон [4].

Създаването на компютрите предизвиква нови направления в теория на апроксимациите. Те са свързани с приложенията.

Основен елемент при решаването на практически апроксимационни задачи е възстановяването на криви и повърхнини по таблица от стойности. Класическият подход се базира на интерполация с алгебрични полиноми.

Докато в едномерния случай повечето интерполационни задачи допускат удобно третиране, често водещо до компактен израз за интерполиращата функция, то изучаването на съответните многомерни задачи създава сериозни трудности. Например, поточковата интерполация с алгебрични полиноми на много променливи не винаги е разрешима (регулярна).

В последно време се разработват разнообразни методи и алгоритми за приближаване на функции, които използват като приближаващ апарат сплайни [41], уейвлети [15], обобщени полиноми, полихармонични функции [34] и блендинг-функции [26].

Дисертационният труд е посветен на приближено възстановяване на функции на две променливи чрез интерполиране със сплайни, блендинг-функции

и алгебрични полиноми, по различни типове данни.

Нашият основен резултат е в теорията на интерполациите с алгебрични полиноми на две променливи. Ние разглеждаме интерполационна задача, при която данните са интеграли по линейни сегменти. Такъв тип информация се получава при измервания в томографията, електронната микроскопия, инженерни задачи. Първият резултат в това отношение е на Акопян — той предлага една конфигурация от хорди, при която задачата за интерполиране с алгебрични полиноми на средните стойности на функцията по хордите е регулярна. Това е един от най-известните и красиви резултати в съвременната теория на многомерните интерполации.

Ние построяваме друга конфигурация от хорди, регулярна за всяко n . Предлагаме и числени методи за възстановяване на функции на две променливи в единичния кръг.

Приложната част на дисертационния труд е свързана с разработването на алгоритми за приближаване на функции в равнината чрез сплайни и блендинг-функции.

Сплайните са доминираща тема в числените методи и апроксимациите през последните 40 години [41, 13, 10, 38, 32, 6, 7].

Ние разглеждаме интерполационна задача при стандартната точкова информация. Т.к. обща интерполационна задача със сплайни все още не е напълно характеризирана, интересна е всяка една конфигурация от точки, която поражда разрешима интерполационна задача. В дисертацията се предлагат ефективни поточкови методи, базирани на интерполиране с многомерни сплайни и блендинг-функции.

Като следствие от интерполационните теореми са построени съставни кубатурни формули за приближено пресмятане на двумерни интеграли. Дадени са и оценки на грешката за класове от функции с ограничени частни производни от нисък ред.

Разработените в дисертацията алгоритми за възстановяване на повърхнини могат да се използват в компютърния геометричен дизайн — едно бурно

развиващо се направление на границата на математиката и информатиката.

В глава 1 се занимаваме с апроксимация на функции от пространството

$$C_{[0,1]^2}^{m,n} = \left\{ f : \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \in C_{[0,1]^2}, k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n \right\}$$

с блендинг-функции в единичния квадрат.

Казваме, че една функция f от $C_{[0,1]^2}^{m,n}$ е блендинг-функция от ред (m, n) , ако $f^{(m,n)} := \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \equiv 0$. С $B_{[0,1]^2}^{m,n}$ ще означаваме пространството от всички блендинг-функции от ред (m, n) .

Всеки алгебричен полином $p(x, y)$ от степен по-малка от m по отношение на x или от степен по-малка от n по отношение на y , е блендинг-функция от ред (m, n) . Следователно блендинг-функциите могат да бъдат разглеждани като обобщение на алгебричните полиноми.

Означаваме с $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ множеството на всички реални полиноми на две променливи от обща степен, не по-висока от n , т.е.

$$\Pi_n(\mathbb{R}^2) := \left\{ \sum_{i+j \leq n} \alpha_{ij} x^i y^j : \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Множеството на полиномите на една променлива от степен, не по-висока от n ще означаваме както обикновено с $\Pi_n(\mathbb{R})$.

Пространството от блендинг-функциите $B_{[0,1]^2}^{m,n}$ има безкрайна размерност. Това ни позволява да решаваме значително по-богати интерполационни задачи в сравнение с класическата полиномиална интерполация и да разглеждаме данни, далеч по-сложни от стандартната крайна точкова информация.

Нека са дадени $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ и $0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1$. Да означим с $G_{m,n}$ мрежата, определена с помощта на тези точки, а именно

$$G_{m,n} = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \prod_{i=1}^m (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j) = 0 \right\}.$$

Разглеждаме следната задача:

За дадено $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$ да се построи блендинг-функция $INT_{m,n}(f) \in B_{[0,1]^2}^{m,n}$, която удовлетворява интерполационните условия

$$f|_{G_{m,n}} = INT_{m,n}(f)|_{G_{m,n}}.$$

Тук $f|_G$ означава следата на f върху кривата G .

Функцията $INT_{m,n}(f)$ ще наричаме блендинг-интерполанта от ред (m, n) . Съгласно един резултат от [26] интерполантата $INT_{m,n}(f)$ се записва в явен вид:

$$INT_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=1}^m f(x_i, y) L_i(x) + \sum_{j=1}^n f(x, y_j) M_j(y) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) L_i(x) M_j(y),$$

където $L_i(x)$ и $M_j(y)$ са базисните полиноми на Лагранж, т.е. $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, m$ и $M_j(y_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$.

В [26] също така е доказано, че всяка блендинг-функция от $B_{[0,1]^2}^{m,n}$ е еднозначно определена от следата си по мрежата $G_{m,n}$.

В първа глава се разглежда задачата за оптимален избор на мрежата при приближаване на функции от класа

$$\Omega_{p,M} = \{f \in C_{[0,1]^2}^{1,1} : \|f^{(1,1)}\|_p \leq M\}, \quad 1 < p \leq \infty,$$

с интерполационни блендинг-функции от $B_{[0,1]^2}^{1,1}$ по информация за следите им върху две перпендикулярни отсечки.

Както обикновено,

$$\|g\|_p := \left(\int_0^1 \int_0^1 |g(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

е L_p -нормата на g в $[0, 1]^2$, а $\|g\|_\infty := \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} |g(x, y)|$.

Грешката се минимизира по отношение на нормите $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_q$, където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

С други думи, решава се екстремалната задача

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{x_1, y_1} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_{(\infty)^q},$$

където $INT_{1,1}(f; x, y)$ е блендинг-интерполантата на f , построена по мрежата

$$G_{1,1} = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : (x - x_1)(y - y_1) = 0 \right\}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1.$$

В Теорема 1.4 се дава решението на горната екстремална задача. Построена е оптималната блендинг-интерполантата $INT_{1,1}^*(f; x, y)$. Доказано е, че оптималната мрежа е

$$G_{1,1}^* = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

В доказателството се използва следното представяне, доказано в [26], а именно

$$(1.1) \quad f(x, y) = INT_{m,n}(f; x, y) +$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x-t)_+^{m-1} (y-v)_+^{n-1} - INT_{m,n} \left((x-t)_+^{m-1} (y-v)_+^{n-1}; x, y \right) \right\} f^{(m,n)}(t, v) dt dv,$$

където

$$(x-t)_+^r := \begin{cases} (x-t)^r & \text{при } x \geq t. \\ 0 & \text{при } x < t. \end{cases}$$

Междувременно се получава, че

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{(x_1, y_1) \in [0,1]^2} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_q = M \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{(x_1, y_1) \in [0,1]^2} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_\infty = M \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Използвайки резултата от Теорема 1.4 и идеята за съставни формули в Теорема 1.6 предлагаме един метод за интерполиране в квадрата $[0, 1]^2$ с на части блендинг-функции.

За $f \in C_{[0,1]^2}^{1,1}$ строим функция $PINT(f)$, която е от класа $B^{1,1}$ във всеки от правоъгълниците на мрежата

$$\left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \prod_{i=0}^m \left(x - \frac{i}{m}\right) \prod_{j=0}^n \left(y - \frac{j}{n}\right) = 0 \right\}.$$

Тази на части блендинг-функция удовлетворява интерполационните условия

$$f|_{G_{m,n}^0} = PINT(f)|_{G_{m,n}^0},$$

където

$$G_{m,n}^0 = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \prod_{i=1}^m \left(x - \frac{2i-1}{2m} \right) \prod_{j=1}^n \left(y - \frac{2j-1}{2n} \right) = 0 \right\}.$$

Даваме и ефективна оценка за грешката на приближението на f с $PINT(f)$.

Тя се изразява чрез величината

$$s_{ij} = \left(\int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} |f^{(1,1)}(x, y)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

и е приведена в следната теорема.

Теорема 1.6. Нека $f \in C_{[0,1]^2}^{1,1}$.

i) Ако $s_{ij} \leq 1$ за $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$, то

$$\|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\sqrt{mn}};$$

ii) Ако $\|f^{(1,1)}\|_{2,[0,1]^2} \leq 1$, то

$$\|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_2 \leq \frac{1}{4mn}.$$

По-нататък, като използваме полученото по-горе, построяваме интерполационна кубатурна формула въз основа на информацията по две перпендикулярни отсечки в $[0, 1]^2$ и даваме оценка на грешката за класа $\Omega_{p,M}$. Използваме получената елементарна кубатурна формула, за да построим съответната съставна кубатурна формула:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \approx \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right) dy + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right) dx - \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2m}, \frac{2j+1}{2n}\right).$$

Доказваме следната

Теорема 1.7. Нека f е функция от класа $C_{[0,1]^2}^{1,1}$ – такава, че $\|f^{(1,1)}\|_{p,[0,1]^2} \leq 1$. Тогава за грешката на съставната кубатурна формула е вярна оценката

$$R_{\text{съст.}} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}} mn},$$

където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Често в задачите от практиката следите на функцията върху отсечки не са достъпни, а имаме само точкова информация. Затова в края на първа глава разглеждаме въпроса за интерполиране на таблицата $\{f(x_i, y_j)\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, с блендинг-функция, принадлежаща на $B_{[0,1]^2}^{m,n}$.

За целта възстановяваме следите $\{f(x_i, y)\}_{i=1}^m$ и $\{f(x, y_j)\}_{j=1}^n$ с кубични сплайни $s_i(y)$ и $t_j(x)$, осъществяващи пълната кубична сплайнова интерполация (или с естествени кубични сплайни) в точките y_1, \dots, y_n , и съответно в точките x_1, \dots, x_m . Въз основа на информацията $\{s_i(y)\}_{i=1}^m$ и $\{t_j(x)\}_{j=1}^n$ строим блендинг-интерполантата

$$\tilde{INT}_{m,n}(x, y) = \sum_{i=1}^m s_i(y)L_i(x) + \sum_{j=1}^n t_j(x)M_j(y) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)L_i(x)M_j(y).$$

При условие, че $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$ даваме оценка на грешката $|f(x, y) - \tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)|$.

Втора глава е посветена на интерполация с двумерни сплайни. Тази задача е интересна от чисто теоретична гледна точка. Нашето изследване е мотивирано и от практически съображения. Известно е [8, 31], че в едномерния случай оптималното възстановяване на диференцируеми функции по точкова информация е интерполацията със сплайни. В двумерния случай екстремалните задачи, до които води постановката за оптимално възстановяване са много трудни и съществуват само единични частни случаи на решението им. Те обаче също подсказват, че интерполацията със сплайни е добър метод за възстановяване и следователно е подходящо да се построят методи за интерполиране и на функции на две променливи със сплайни.

Интерполация с двумерни сплайни е едно от основните направления в теорията на многомерните сплайни. Общата интерполационна задача за двумерни сплайни все още не е напълно характеризирана. От интерес е всяка схема от възли, която поражда регулярна интерполация. Ние предлагаме един тип такива регулярни схеми.

Нека в правоъгълната област $G := [a, b] \times [c, d]$ е въведена мрежата от прави $x_i = a + i \frac{b-a}{M}, y_j = c + j \frac{d-c}{N}$ $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$. Тази мрежа дели G на малки правоъгълници $\square_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Дефиниция 2.1. Казваме, че една функция $s(x, y)$ е (m, n) -сплайн върху G , ако

$$\frac{\partial^{m+n} s}{\partial x^m \partial y^n}(x, y) = c_{ij} \text{ за } (x, y) \in \square_{ij},$$

където c_{ij} са константи.

Ние даваме едно удобно представяне за (m, n) -сплайните.

Да означим с T_x^m и T_y^n операторите от Тейлъргов тип, определени като Тейлъровото развитие на $f(x, y)$ от ред m в $(0, y)$, и от ред n в $(x, 0)$ съответно. По-точно

$$T_x^m f := f(0, y) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial x} f(0, y) x + \dots + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f(0, y) x^{m-1}.$$

В Лема 2.1 доказваме следното представяне за всяка функция $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= T_x^m f(x, y) + T_y^n f(x, y) - T_x^m T_y^n f(x, y) \\ &+ \frac{1}{(m-1)!(n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^{m-1} (y-\tau)_+^{n-1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} f(t, \tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Ясно е, че

$$B_f(x, y) := T_x^m f(x, y) + T_y^n f(x, y) - T_x^m T_y^n f(x, y)$$

е блендинг-функция от ред (m, n) . Нещо повече, рестрикцията на B_f и нейните частни производни $B_f^{(i,j)}$ върху правите $x = 0$ и $y = 0$ съвпадат със съответните стойности на f и нейните производни там за $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$.

Лема 2.1 показва, че всеки (m, n) -сплайн в $G = [0, 1]^2$ може да се представи като сума на блендинг-функция B_f от ред (m, n) и интеграл от ядрото

$$K(x, y, t, \tau) := \frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-\tau)_+^{n-1}}{(n-1)!},$$

умножено със стъпаловидната функция $c(t, \tau)$,

$$c(t, \tau) := c_{ij} \quad \text{за } (t, \tau) \in \square_{ij}.$$

Нека в равнината е зададена безкрайна мрежа:

$$\{x_i = i/M, y_j = j/N, -\infty < i, j < \infty, i, j - \text{естествено число}\}.$$

С $S_{m,n}$ ще означаваме линейното пространство от всички (m, n) -сплайни, определени от тази мрежа.

За всяка двойка (i, j) B -сплайните на две променливи от ред (m, n) се дефинират така

$$B_{ij}^{(m,n)}(x, y) := (\cdot - x)_+^n [x_i, \dots, x_{i+m+1}] (\cdot - y)_+^n [y_j, \dots, y_{j+n+1}] = B_i^{(m)}(x) B_j^{(n)}(y).$$

Да припомним, че разделена разлика $g[t_0, \dots, t_k]$ в случай на различни t_i се дефинира индуктивно:

$$\begin{aligned} g[t_0, t_1] &= \frac{g(t_1) - g(t_0)}{t_1 - t_0}; \\ g[t_0, \dots, t_k] &= \frac{g[t_1, \dots, t_k] - g[t_0, \dots, t_{k-1}]}{t_k - t_0}. \end{aligned}$$

B -сплайните на две променливи от ред (m, n) образуват клас от (m, n) -сплайни с краен носител.

Да разгледаме следното подпространство на $S_{m,n}$

$$S_{m,n}^0 = \left\{ s \in S_{m,n} : \frac{\partial^i s}{\partial y^i}(0, y) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \right. \\ \left. \frac{\partial^j s}{\partial x^j}(x, 0) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Доказваме, че B -сплайните $\{B_{ij}^{(m,n)}\}_{i=0}^{M-1} \}_{j=0}^{N-1}$ образуват базис на $S_{m,n}^0$ (Следствие 2.1).

Разглеждаме задача за интерполация на функции на две променливи върху правоъгълна мрежа с (m, n) -сплайни. Разрешимостта на подобна задача за функции на една променлива се характеризира напълно с условието за преплитане на Шоенберг и Уйтни, [39, 40]. То гласи, че задачата за интерполиране на таблицата $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ с едномерни сплайни $s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(x)$ е разрешима тогава и само тогава, когато $x_i \in \text{supp} B_i, \forall i$. Досега все още няма пълна характеристика на интерполационната задача в многомерния случай. Резултати в тази насока има например в [29]. В Теорема 2.1 даваме един доста общ клас конфигурации, който поражда регулярна интерполация. Да формулираме интерполационната задача.

Дадена е достатъчно гладка функция f и множество от MN различни точки $\{t_{ij}\}$ в $G = [0, 1]^2$. Да се намери (m, n) -сплайн $s(x, y)$ такъв, че

$$(2.1) \quad s(t_{ij}) = f(t_{ij}), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N,$$

и удовлетворяващ граничните условия

$$\frac{\partial^k s}{\partial y^k}(0, y) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(0, y), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad y \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial^l s}{\partial x^l}(x, 0) = \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, 0), \quad l = 0, \dots, n-1, \quad x \in [0, 1].$$

Нека $t_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$.

Теорема 2.1. Ако

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i-1} < \xi_{ij} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, M \\ y_{j-1} < \eta_{ij} \leq y_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{array} \right\}$$

то интерполационната задача (2.1) има единствено решение.

Показваме, че решението на задача (2.1) се дава от интерполиращия сплайн

$$s(f, x, y) = B_f(x, y) + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N f(t_{pq}) \lambda_{pq}(x, y),$$

където $\{\lambda_{pq}\}_{p=1}^M \{q=1}^N$ е Лагранжевият базис на $S_{m,n}^0$.

По-нататък се разглежда поведението на интерполацияния сплайн за някои малки m и n .

Приближаваме $f(x, y)$ с $(1, 1)$ -сплайни, т.е. с функции от вида,

$$s(f, x, y) = f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) + \int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv,$$

където

$$c(u, v) = \{c_{ij} \text{ за } (u, v) \in \square_{ij}, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N\},$$

а константите $\{c_{ij}\}_{i=1}^M \{j=1}^N$ са подбрани така, че да удовлетворяват интерполационните условия

$$s(f, x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N.$$

Получаваме явен израз за решението:

$$c_{ij} = MN [f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)]$$

за $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, x_0 = y_0 = 0$.

В сила е следната оценка на грешката чрез модула за непрекъснатост

$$|f(x, y) - s(f, x, y)| \leq 2 \left[\omega_{1,1} \left(f, 1, \frac{1}{N} \right) + \omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, 1 \right) + 2\omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, \frac{1}{N} \right) \right].$$

В този случай ($(m, n) = (1, 1)$, $t_{ij} = (i/M, j/N)$) можем да дадем явно Лагранжевия базис за интерполационната задача за пространството

$$S_{1,1}^0 = \{s : \frac{\partial^2 s}{\partial x^1 \partial y^1}(x, y) = c_{ij}, (x, y) \in \square_{ij}, \\ i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, s(0, y) = 0, s(x, 0) = 0\}.$$

А именно, построяваме функциите $\lambda_{pq}(x, y) \in S_{1,1}^0$ така, че

$$\lambda_{pq} \left(\frac{k}{M}, \frac{l}{N} \right) = \delta_{pk} \delta_{ql}, \quad k = 1, \dots, M, l = 1, \dots, N.$$

Тези функции образуват базис на $S_{1,1}^0$. Те се търсят във вида

$$\lambda_{pq}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^0 (y-v)_+^0 c(t, v) dt dv,$$

където $c(t, v) = c_{ij}$ за $(t, v) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. След пресмятането на $\lambda_{pq}(x, y)$ можем да дадем явно решението на интерполационната задача, т.е. намираме $s(f, x, y)$ по формулата

$$s(f, x, y) = f(0, y) + f(x, 0) - f(0, 0) + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N f(t_{pq}) \lambda_{pq}(x, y).$$

Тъй като решаването на нехомогенната задача лесно се свежда до решаването на хомогенната (т.е. $B_f(x, y) = 0$), то е важно да оценим грешката за този случай.

За оценка на скоростта на апроксимация разглеждаме оператора $I_{mn}[f]$, който на функцията f съпоставя нейния интерполиращ (m, n) -сплайн във фиксирано множество от възли $\{t_{pq}\}$. Тогава

$$I_{mn}[f](x, y) = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \lambda_{pq}(x, y) f(t_{pq}),$$

където $\{\lambda_{pq}\}_{p=1}^M \sum_{q=1}^N$ е построеният вече Лагранжев базис.

За оценка на грешката използваме известното неравенство

$$\|f - If\|_X \leq (1 + \|I\|_{L_\infty \rightarrow X}) E_f^\infty(m, n),$$

където $E_f^\infty(m, n)$ е най-доброто L_∞ приближение с (m, n) -сплайни.

В параграф 3.2 разглеждаме друг частен случай, а именно $(m, n) = (1, 2)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$. Построени са Лагранжевите базисни функции $\lambda_{pq}(x, y) \in S_{1,2}^0$.

Като оценяваме $\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_X$ получаваме за $X = L_1, L_2, L_\infty$ следните оценки:

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{N}{3} \left(1 - \frac{1}{2M} \right) \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) + 1 \right] E_f^\infty(1, 2),$$

$$\|f - If\|_{L_2} \leq \left[\sqrt{(M - 1/2)(N + 2)N} \sqrt{\frac{2}{45}} + 1 \right] E_f^\infty(1, 2),$$

и

$$\|f - If\|_{L_\infty} \leq (MN + 1) E_f^\infty(1, 2).$$

Нещо повече, в случая $X = L_1$ можем да получим по-добра оценка, оценявайки $\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2$. Получаваме

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{(2 - 1/M)\sqrt{(N+1)(N+2)}}{3\sqrt{10}} + 1 \right] E_f^\infty(1, 2).$$

В случая $(m, n) = (2, 2)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$, функцията $\lambda_{pq}(x, y)$ се търси във вида

$$\lambda_{pq}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^1 (y-v)_+^1 c(t, v) dt dv,$$

където $c(t, v) = c_{ij}$ за $(t, v) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. И в този случай намираме константите c_{ij} в явен вид от интерполационните условия

$$\lambda_{pq}(t_{ij}) = \delta_{pi}\delta_{qj}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

За грешката получаваме следната оценка

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{1}{9MN} (M^2 + M - 1) (N^2 + N - 1) + 1 \right] E_f^\infty(2, 2),$$

$$\|f - If\|_{L_2} \leq \left[\frac{8}{15} \sqrt{\left(M^2 + 2M - \frac{21}{8}\right) \left(N^2 + 2N - \frac{21}{8}\right)} + 1 \right] E_f^\infty(2, 2)$$

и

$$\|f - If\|_{L_\infty} \leq (MN + 1) E_f^\infty(2, 2).$$

Трета глава се занимава с интерполация, основана на Радонови проекции. Разглеждат се отново функции на две променливи и съответно интерполационни теореми, основани на информация за интеграли по хорди в единичния кръг. Една интересна математическа задача, до която водят изследвания от хуманната медицина, е да се анализира структурата на тяло без деструкция (т.е. с така наречените неинвазивни методи за диагностика). Такъв проблем е важен напоследък и в много други изследователски области, като например подпочвени изследвания, проучванията на атмосферата и дефектоскопията. В

компютърната томография, работата с електронни микроскопи и други техники информацията за търсената функция се получава като таблица функционални стойности. Често пъти данните се състоят от стойностите на интеграли по отсечки („плътност“ и т.н.). В много ситуации най-естественият тип данни за многомерни функции е таблица от средни значения на функцията на d променливи върху $(d - 1)$ -мерни хиперравнини. Известната формула на Акопян [22] (вж. също [23]) е достатъчно важно основание да се разглеждат апроксимационни задачи, основаващи се на такава информация.

Акопян е доказал, че за произволни дадени $n+2$ различни точки X_0, \dots, X_{n+1} на границата на изпъкнало тяло (да кажем, на кръг) множеството от интегралите от f по всички отсечки $[X_i, X_j]$ определя еднозначно всеки полином f на две променливи от тотална степен n . Всъщност това е частен случай ($d = 2$) на по-общ многомерен резултат, който той е доказал в [22]. В двумерния случай интерполацията на Акопян съвпада с друга (по-ранна) интерполация, разглеждана от Каварета, Мичели и Шарма [14]. Фактически, първият метод за възстановяване на полином от степен n по неговите интеграли по хордите, определени от равноотдалечени точки X_i на границата ∂B на единичния кръг $B := \{x : \|x\| \leq 1\}$, е била описана от Мар в [30]. Интерполационните теореми, основани на интеграли по хорди може да се използват за (приближена) реконструкция на функции по техните Радонови проекции. Заради важността на такива методи за възстановяване за приложения в томографията, те са изучавани интензивно (вж. например [30, 25, 29, 43, 16] и библиографията в тях).

Интерполационната теорема на Акопян е единственият известен резултат, описващ обща конфигурация от $\binom{n+2}{2}$ хорди, която поражда разрешима интерполация за всяка степен n на полинома. Нашата цел е да представим друга интерполационна теорема, основана на стойностите на интегралите по $\binom{n+2}{2}$ хорди взети в $n + 1$ различни посоки.

Ще припомним дефиницията на Радонова проекция. При дадени θ и t нека

правата ℓ е определена чрез уравнението

$$\ell(x, y) := x \cos \theta + y \sin \theta - t = 0.$$

Означаваме с $I(\theta, t)$ отсечката $\ell \cap \mathbf{B}$. За $t \in [-1, 1]$ с формулата

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta(f; t) &:= \int_{I(\theta, t)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) \, ds \end{aligned}$$

се определя Радоновата проекция $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ на f по посока θ .

Всяка диференцируема функция се определя еднозначно от фамилията си от Радонови проекции

$$f \rightarrow \{ \mathcal{R}_\theta(f; t) : -1 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta < \pi \},$$

съгласно един класически резултат на Радон [36] и Джон [28]. От по-скорошен резултат [43] следва, че ако $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ и f има компактен носител, то тя се определя еднозначно от произволно безкрайно множество от Радонови проекции (Теорема на Солмон [43]).

Ние се занимаваме най-напред със задачата за възстановяване на алгебрични полиноми по техните Радонови проекции. Особено интересен е фактът, че при фиксирано направление $\theta \in [0, \pi)$, за всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, съществува полином на една променлива p от степен не по-висока от n такъв, че

$$\mathcal{R}_\theta(P; t) = \sqrt{1-t^2} p(t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

(вж. например [12], Лема 4.1)

Като използваме теоремата на Радон показваме, че ако $\theta_0 < \dots < \theta_n$ са произволни дадени ъгли в $[0, \pi)$, то проекциите

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad k = 0, \dots, n,$$

определят P еднозначно. В частност, ако $\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t) = 0$ за $k = 0, \dots, n$, то $P \equiv 0$.

Целта ни е да интерполираме функцията f с алгебрични полиноми от $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ като използваме краен брой интеграли $\mathcal{R}_{\theta_k}(f; t_j)$. Да припомним, че размерността на $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ е равна на $d(n) = \binom{n+2}{2}$. Естествено е да търсим начин за възстановяване на полинома $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ по $d(n)$ проекции. Използваме разлагане на P по хребетни полиноми. Да припомним, че функция $f(\mathbf{x})$ се нарича хребетна с профил $\rho(t)$, ако $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x} \cdot \xi)$, където $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$. Важна роля в теорията на двумерните полиноми играят хребетните полиноми

$$U_m(\theta; \mathbf{x}) := U_m(\mathbf{x} \cdot \xi) = U_m(x \cos \theta + y \sin \theta),$$

породени от знаменитите полиноми на Чебишев (от втори род)

$$U_m(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta}, \quad t = \cos \theta.$$

Формулата на Мар [30] дава в явен вид Радоновата проекция на хребетен полином на Чебишев. Имаме

$$\mathcal{R}_\varphi(U_m(\theta; \cdot); t) = \frac{2}{m+1} \sqrt{1-t^2} U_m(t) \frac{\sin(m+1)(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi - \theta)}.$$

Като следствие се получава полезното равенство

$$\int_{\mathbf{B}} U_m(\theta; \mathbf{x}) U_m(\varphi; \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{m+1} \frac{\sin(m+1)(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi - \theta)},$$

което се използва в Чебишево-Фуриеровия анализ. Хребетните полиноми на Чебишов

$$U_{mj}(\mathbf{x}) := U_m(\theta_{mj}; \mathbf{x})$$

с равноотдалечени ъгли:

$$\theta_{mj} := \frac{j\pi}{m+1}, \quad \forall m, \quad j = 0, \dots, m,$$

образуват ортонормален базис в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ върху \mathbf{B} . (Вж. например [11]).

Поставяме си въпроса: съществува ли конфигурация от $d(n)$ хорди $\{I(\theta_i, t_j)\}_{(i,j) \in J}$, ($|J| = d(n)$) в кръга \mathbf{B} така, че интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_i, t_j)} P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \gamma_{ij}, \quad (i, j) \in J, \quad P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

да има единствено решение за всяка дадена таблица от стойности $\{\gamma_{ij}\}$.

Единствената известна нетривиална конфигурация от хорди за разрешима интерполационна задача е разгледаният от Акоюн случай когато $I(\theta_i, t_j)$ са отсечките, свързващи всеки две от зададени $n + 2$ точки X_0, \dots, X_{n+1} върху границата на \mathbf{B} .

Друг интересен от практическа гледна точка случай е, когато имаме групи от успоредни лъчи. Именно тази ситуация се разглежда тук.

Нека са дадени ъгли $\theta_0 < \dots < \theta_n$ в $[0, \pi)$ и триъгълна матрица $T = \{t_{ki}\}$ от точки

$$t_{kk} < \dots < t_{kn}, \quad k = 0, \dots, n,$$

съответстващи на ъглите. Въпросът е какви трябва да бъдат възлите $\{t_{kj}\}$, че интерполацията на данните $\{\mathcal{R}_{\theta_k}(\cdot; t_{kj})\}_{j=k}^n$ с полиноми от степен n да бъде регулярна. Да отбележим, че броят на разглежданите проекции е точно равен на размерността на алгебричните полиноми от $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$. В най-простия случай $n = 1$, $\theta_0, \theta_1 \in [0, \pi)$ се оказва, че задачата е разрешима тогава и само тогава, когато $t_{00} \neq 0$. (Последното условие може да бъде записано като $U_1(t_{00}) \neq 0$.)

Основният резултат в дисертацията се съдържа в следната Теорема 3.1.

Теорема 3.1. *За дадени ъгли $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_n < \pi$ и съответни точки $T = \{t_{ki}\}_{k=0, i=k}^n$, интерполационната задача*

$$\int_{I(\theta_k, t_{ki})} P(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \gamma_{ki}, \quad k = 0, \dots, n, \quad i = k, \dots, n, \quad P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

е регулярна тогава и само тогава, когато

$$\det \mathbf{U}_k := \det \begin{pmatrix} U_k(t_{kk}) & U_{k+1}(t_{kk}) & \dots & U_n(t_{kk}) \\ U_k(t_{k,k+1}) & U_{k+1}(t_{k,k+1}) & \dots & U_n(t_{k,k+1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_k(t_{kn}) & U_{k+1}(t_{kn}) & \dots & U_n(t_{kn}) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{за } k = 0, \dots, n.$$

В доказателството на този факт Радоновата проекция на полинома P се представя като

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{i=0}^n b_{ki}(P) U_i(t),$$

където

$$b_{ki}(P) = 2 \int_{-1}^1 \mathcal{R}_{\theta_k}(P; t) U_i(t) dt = 2 \int_{\mathbf{B}} P(\mathbf{x}) U_i(\theta_k; \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Доказва се, че за произволни числа $\{\beta_{kj}\}_{k=0, j=k}^n$, съществува единствен полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ такъв, че

$$b_{kj}(P) = \beta_{kj}, \quad k = 0, \dots, n, \quad j = k, \dots, n.$$

При условието $\det \mathbf{U}_k \neq 0$ се показва, че всеки от функционалите $\{b_{kj}(P)\}$ може да бъде пресметнат от $\binom{n+2}{2}$ Радонови проекции $\{\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{kj})\}_{k=0, j=k}^n$.

Частен случай на Теорема 3.1 е Теорема 3.2, която показва, че множеството от $\binom{n+2}{2}$ Радонови проекции, състоящи се от k успоредни X -лъча във всяко направление θ_k , $k = 0, \dots, n$, определя еднозначно алгебричните полиноми на две променливи от степен по-малка или равна на n .

Теорема 3.2. Нека $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_n < \pi$ са произволни дадени ъгли и нека T е множество от произволни $n+1$ различни точки в $(-1, 1)$. Тогава съществува номерация (подреждане) t_0, \dots, t_n на точките от T такава, че интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_i, t_j)} P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \gamma_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = i, \dots, n,$$

е регулярна в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$.

Както споменахме вече, всяка функция се определя от своите Радонови проекции. Естествено е да се постави въпросът как да се осъществи това. За практиката е важно да разполагаме с метод за обръщане. Съществува формула, която дава функцията f чрез сложен диференциален оператор (вж. [35] и библиографията там). Извеждаме проста формула за обръщане в случай на гладки функции.

Нека предположим сега, че функцията f може да бъде представена като сума на равномерно сходящ в \mathbf{B} ред от вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{mj}(f) U_{mj}(\mathbf{x}).$$

Тогава парциалната сума

$$S_n(f; \mathbf{x}) := \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m a_{mj}(f) U_{mj}(\mathbf{x}).$$

апроксимира $f(\mathbf{x})$. Коефициентите $b_m(f; \theta)$ от реда на Чебишев-Фурие от равенството

$$\mathcal{R}_\theta(f; t) = \sqrt{1-t^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m(f; \theta) U_m(t) \right)$$

са тригонометрични полиноми от степен m съответно и могат да бъдат пресметнати от $\{\mathcal{R}_\theta(f; t)\}$ по формулата

$$b_m(f; \theta) = 2 \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta(f; t) U_m(t) dt.$$

Вярна е следната

Формула за обръщане: Ако редът

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{mj}(f) U_{mj}(\mathbf{x})$$

е равномерно сходящ в \mathbf{B} , то

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m b_m(f; \theta_{mj}) U_{mj}(\mathbf{x})$$

и еквивалентно,

$$(3.11) \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \int_0^{2\pi} b_m(f; \theta) U_m(\theta; \mathbf{x}) d\theta,$$

за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$.

Ако f е полином от $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$, то на него се съпоставят $n+1$ тригонометрични полинома $b_m(f, \theta)$. И обратно, всяка съвкупност от $n+1$ тригонометрични полиноми (като $b_m(f, \theta)$ е от степен m) определя еднозначно алгебричен полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$.

Методът на доказателство на основната ни теорема ни позволява да разгледаме и една друга задача от теорията на двумерните алгебрични полиноми.

Тя е свързана с представяне на алгебричен полином като сума на хребетни полиноми. Един такъв резултат е получен от Вострецов и Крейнес.

За всяко дадено множество от $n + 1$ неколинеарни единични вектори ξ_j и (произволен) полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, съществуват едномерни полиноми r_0, \dots, r_n от степен n такива че

$$(3.12) \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n r_j(\mathbf{x} \cdot \xi_j).$$

В параграф 4 на трета глава се дава ново (конструктивно) доказателство на лемата на Вострецов-Крейнес [45] като се следва идеята на доказателството на интерполационната теорема 3.1. Този вариант на лемата на Вострецов-Крейнес се използва за подобряване на един резултат на Шинцел за полиноми $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ в случай на нечетна степен.

Тъй като $\{U_m(\mathbf{x} \cdot \xi_j)\}_{j=0}^m \}_{m=0}^n$ е базис в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$, то всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ се записва еднозначно във вида:

$$(3.13) \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n \sum_{m=j}^n c_{mj} U_m(\mathbf{x} \cdot \xi_j), \quad \xi_j := (\cos \theta_j, \sin \theta_j).$$

Формулата (3.13) всъщност е едно представяне от вида (3.12), тъй като $\sum_{m=j}^n c_{mj} U_m(\mathbf{x} \cdot \xi_j)$ е хребетна функция. При решаване на интерполационната задача ние предлагаме ефективен начин за пресмятане на $\{c_{mj}\}$. Той ни позволява да прецизираме един скоросен резултат на Шинцел.

Шинцел доказва в [37], че за всеки даден полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ броят на хребетните функции $\{r_j\}$ в (3.12) може да бъде намален с 1 чрез подходящ избор на посоките ξ_1, \dots, ξ_n . Нещо повече, Осколков [34] показва, че n е минималният брой с това свойство.

Ние използваме представянето (3.13) и избираме направленията ξ по такъв начин, че да се анулира c_{nn} . Така получаваме исканото n -членно представяне на P с хребетни функции. Нещо повече, този подход води до прецизиране на резултата на Шинцел — той е установил, че съществуват n подходящи

посоки, докато тук в случай на нечетно n , ние можем да получим представяне с n члена за всяка система $\{\theta_j\}$ от посоки само като я завъртим на определен ъгъл. При това представянето е явно, както се вижда от (3.13). В случай на четно n е даден контрапример, показващ, че горното подобрене на резултата на Щинцел може да не е в сила.

Контрапример: Нека $m \geq 1$, $n = 2m$, и $\theta_1 < \dots < \theta_n$ е произволно дадено множество от посоки — такава, че $\theta_n - \theta_1 < \frac{\pi}{2}$. Тогава полиномът $F_m = (x^2 + y^2)^m$ не притежава представяне с n члена, основано на ротация на $\theta_1 < \dots < \theta_n$.

Може да се заключи, че в случая на четни n всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ може да бъде представен в една от следните форми:

i) n -членно представяне за ротация на произволна дадена система от посоки $\theta_1 < \dots < \theta_n$;

ii) радиална функция + n -членно представяне за произволна система от посоки $\theta_1 < \dots < \theta_n$.

По-нататък в трета глава предлагаме числени методи за реконструкция на функции на две променливи върху единичния кръг \mathbf{B} въз основа на Радонови проекции по краен брой хорди.

В секция 5.1 възстановяваме полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ по Радоновите проекции $\{\mathcal{R}_\theta(f; t)\}_{i=1}^n$ за множеството от $n + 1$ ъгъла θ_i . Разглеждаме следната задача:

Нека са дадени $\theta_0, \dots, \theta_n$, $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j, \theta_i \in [0, \pi)$ и нека функциите $f_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, са такива, че се явяват Радонови проекции на някакъв полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ по протежение на отсечките

$$I(\theta_i, t) = \{(x, y) : x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = t\}, t \in [-1, 1],$$

т.е. $f_i(t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f; t)$.

Задачата е да се възстанови f в единичния кръг.

Както в доказателството на Теорема 3.1 стигаме до решаването на система за $\{a_{r,l}\}$. Тук даваме друго доказателство на факта, че тази система е разрешима за произволни данни.

Един резултат на Осколков твърди, че всяка функция $f \in L_2(\mathbf{B})$ може да бъде възстановена чрез съответния ред на Чебишев-Фурие. Да предположим, че $\theta_0, \dots, \theta_n$, са дадени ъгли, $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j, \theta_i \in [0, \pi)$, и за функциите $f_i(t), i = 0, \dots, n$, се знае, че са проекции на някаква функция f по хордите $I(\theta_i, t)$, т.е. $f_i(t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f; t)$. Като използваме тази информация построяваме полинома

$$(3.18) \quad S_n(f; x, y) = \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{r,l} U_{r,l}(x, y)$$

където $a_{r,l} = \langle f, U_{r,l} \rangle := \iint_{\mathbf{B}} f U_{r,l}$.

В последната секция на трета глава предлагаме метод за реконструкция на полином f по неговите проекции по хорди, започващи от $n + 1$ точки $M_i(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$, върху единичната окръжност $\partial \mathbf{B}$ за $i = 0, \dots, n$, и $0 \leq \alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n < 2\pi$. В Теорема 3.3 показваме, че полиномът f може да бъде възстановен еднозначно по тази информация.

Намираме явна форма за решението на интерполационната задача.

Решението на тази полиномиална задача също може да се използва за апроксимация на функции.

Всички методи за апроксимация, предложени в дисертацията са илюстрирани с компютърни експерименти. Разглеждаме пример, който обичайно се използва за тестване на нови методи за реконструкция на повърхнини. Това е така наречената „Мексиканска шапка“: $\frac{\sin(3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}})}{3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}}}$, $x^2 + y^2 \leq 1$ или $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, в зависимост от метода.

Резултатите, включени в дисертацията са докладвани на семинара по „Теория на апроксимациите“ на секция Математическо моделиране на ИМИ-БАН и на специализирания международен конгрес MASSEE 2003.

Резултатите, представени в първа глава са част от [18].

Резултатите, представени във втора глава са публикувани в [20].

Резултатите, представени в трета глава са публикувани в [9, 19].

Изказвам сърдечна благодарност на научния си ръководител акад. Борислав Боянов за предложените задачи, постоянното внимание и съдействие по разработваните теми.

Глава 1

Апроксимация на диференцируеми функции с блендинг- функции

§1 Предварителни сведения за блендинг-функции

Блендинг-функциите широко се използват за приближено представяне на гладки повърхнини, смесвайки (blending) наличната информация, зададена върху мрежа от прави. Да напомним дефиницията от [26].

Дефиниция 1.1. *Блендинг-функция от ред (m, n)* ще наричаме функция от пространството

$$C_{[0,1]^2}^{m,n} = \left\{ f : \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \in C_{[0,1]^2}, k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n \right\},$$

удовлетворяваща условието

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \equiv 0.$$

Ще означаваме пространството на блендинг-функциите от ред (m, n) с $B_{[0,1]^2}^{m,n}$.

Известно е (виж напр. [26]), че при произволно избрани базиси $\{L_i(x)\}_{i=1}^m$ и $\{M_j(y)\}_{j=1}^n$ на $\Pi_{m-1}(x)$ и $\Pi_{n-1}(y)$ съответно, всяка функция $g \in B_{[0,1]^2}^{m,n}$ може

да бъде представена във вида

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^m a_i(y)L_i(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)M_j(y) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}L_i(x)M_j(y),$$

с някакви $a_i(y) \in C_{[0,1]}^n$, $i = 1, \dots, m$, $b_j(x) \in C_{[0,1]}^m$, $j = 1, \dots, n$, $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Това представяне не е еднозначно, но е много удобно за решаване на следната задача за интерполация:

За дадени $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ и $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, принадлежащи на $[0, 1]$ и $f \in C_{[0,1]^2}^{(m,n)}$, да се намери $g \in B_{[0,1]^2}^{m,n}$ такава, че

$$g(x_i, y) = f(x_i, y) \text{ за } y \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, m,$$

$$g(x, y_j) = f(x, y_j) \text{ за } x \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, n.$$

Ще търсим решението $g(x, y)$ във вида, даден по-горе, като за целта изберем $L_i(x)$ и $M_j(y)$ да бъдат базисните полиноми на Лагранж, т.е. $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, m$ и $M_j(y_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$. Тогава веднага се вижда, че функцията

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^m f(x_i, y)L_i(x) + \sum_{j=1}^n f(x, y_j)M_j(y) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)L_i(x)M_j(y)$$

е от класа $B_{[0,1]^2}^{m,n}$ и удовлетворява исканите интерполационни условия. Понякога ще я означаваме с $INT_{m,n}(f; x, y)$.

В [26] например е доказано, че всяка блендинг-функция от ред (m, n) е еднозначно определена от следата си по мрежата

$$G_{m,n} = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \prod_{i=1}^m (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j) = 0 \right\}.$$

Оттук следва единственост на разглежданата интерполационна задача.

По аналогия с едномерния случай, като се използва отсечената степенна функция

$$(x - t)_+^r := \begin{cases} (x - t)^r & \text{при } x \geq t \\ 0 & \text{при } x < t \end{cases}$$

може да се намери явен израз за остатъка при интерполиране. Това е направено в [26], където са изведени формулите в следващите две теореми.

Теорема 1.1. Нека $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$. Тогава

$$(1.1) \quad f(x, y) = INT_{m,n}(f; x, y) + \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (x-t)_+^{m-1} (y-v)_+^{n-1} - INT_{m,n} \left((x-t)_+^{m-1} (y-v)_+^{n-1}; x, y \right) \right\} f^{(m,n)}(t, v) dt dv.$$

Теорема 1.2. Нека $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$. Тогава за всяка точка $(x, y) \in [0, 1]^2$ съществува точка $(\xi, \eta) \in [0, 1]^2$, такава, че

$$(1.2) \quad f(x, y) - INT_{m,n}(f; x, y) = \frac{f^{(m,n)}(\xi, \eta)}{m!n!} \prod_{i=1}^m (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j).$$

Ще напомним и една известна теорема, отнасяща се до интерполиране с кубични сплайни.

Теорема 1.3. Нека g е дефинирана в $[0, 1]$, притежава абсолютно непрекъсната първа и втора производна, за която $\int_0^1 [g''(x)]^2 dx < \infty$. Нека $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ и $s(x)$ е кубичният сплайн, интерполиращ g в точките $\{x_i\}_{i=1}^m$ и удовлетворяващ едно от условията:

а) $s'(0) = g'(0)$, $s'(1) = g'(1)$, т.е. $s(x)$ е сплайн, осъществяващ пълна кубична сплайнова интерполация.

б) $s''(0) = g''(0) = 0$, т.е. $s(x)$ е естествен кубичен сплайн.

Тогава

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - s(x)| \leq \left(\int_0^1 [g''(x)]^2 dx \right) \Delta^{\frac{3}{2}},$$

където

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq m-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Доказателството на тази теорема се основава на теоремата на Холидей [2, 41] за естествени кубични сплайни и съответната теорема за кубични сплайни, осъществяващи пълната кубична сплайнова интерполация [2].

За естествени кубични сплайни (условие б) твърдението е установено в хода на доказателството на Теорема 8 в подточка 2.1.15 на [5], а за кубични сплайни при условие а) доказателството е аналогично.

§2 Оптимално възстановяване на диференцируеми функции

В този параграф ще приближаваме класа

$$\Omega_{p,M} = \{f \in C_{[0,1]^2}^{1,1} : \|f^{(1,1)}\|_p \leq M\}, \quad 1 < p \leq \infty,$$

посредством $B_{[0,1]^2}^{1,1}$.

При допълнителни условия за функцията $f \in C_{[0,1]^2}^{1,1}$ ще построим на части блендинг-интерполанта и ще дадем оценка за грешката в $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$.

Разглеждаме екстремалните задачи

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{x_1, y_1} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{x_1, y_1} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_\infty,$$

където $INT_{1,1}(f; x, y)$ е блендинг-интерполантата на f , построена по мрежата

$$G_{1,1} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x - x_1)(y - y_1) = 0\}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1.$$

Възлите (x_1, y_1) , при които се достига инфимумът, се наричат оптимални, а съответната интерполираща блендинг функция — най-добра. Нашата първа задача е да намерим оптималните възли.

Теорема 1.4. *Най-добрата относно $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_q$ блендинг-интерполанта, принадлежаща на $B_{[0,1]^2}^{1,1}$ за класа $\Omega_{p,M}$, построена по мрежа от вида*

$$G_{1,1} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x - x_1)(y - y_1) = 0\}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1,$$

е блендинг-интерполантата, построена по

$$G_{1,1}^* = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Д о к а з а т е л с т в о . Нека $f \in \Omega_{p,M}$ и $INT_{1,1}(f)$ е построена по $G_{1,1}$.
Тогдава

$$INT_{1,1}(f; x, y) = f(x_1, y) + f(x, y_1) - f(x_1, y_1).$$

По формула (1.1) при $m = n = 1$ получаваме

$$\begin{aligned} f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y) = \\ \int_0^1 \int_0^1 \{(x-t)_+^0 (y-v)_+^0 - INT_{1,1}((x-t)_+^0 (y-v)_+^0; x, y)\} f^{(1,1)}(t, v) dt dv. \end{aligned}$$

Нека q е спрегнатото на p , т. е., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тъй като

$$\begin{aligned} \|(x-t)_+^0 (y-v)_+^0 - INT_{1,1}((x-t)_+^0 (y-v)_+^0; x, y)\|_q = \\ \|(x-t)_+^0 (y-v)_+^0 - (x_1-t)_+^0 (y-v)_+^0 - (x-t)_+^0 (y_1-v)_+^0 + (x_1-t)_+^0 (y_1-v)_+^0\|_q \\ := R(x_1, y_1, x, y), \end{aligned}$$

то по неравенството на Хьолдер,

$$(1.3) \quad |f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)| \leq R(x_1, y_1, x, y) \|f^{(1,1)}(x, y)\|_p.$$

Тъй като неравенството на Хьолдер се достига, то съществува $h(t, v) = \tilde{f}^{(1,1)}(t, v)$, при която имаме равенство в (1.3). По $h(t, v)$ възстановяваме $\tilde{f}(t, v)$.

Без ограничение на общността можем да смятаме, че $\|\tilde{f}^{(1,1)}\|_p = M$ (константата в определението на класа $\Omega_{p,M}$.) Следователно

$$\|\tilde{f}(x, y) - INT_{1,1}(\tilde{f}; x, y)\|_{(\infty)^q} = M \|R(x_1, y_1, x, y)\|_{(\infty)^q}.$$

Тъй като

$$(1.4) \quad \inf_{x_1, y_1} \|\tilde{f}(x, y) - INT_{1,1}(\tilde{f}; x, y)\|_{(\infty)^q} = M \inf_{x_1, y_1} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_{(\infty)^q},$$

то

$$(1.5) \quad \sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{x_1, y_1} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_{(\infty)}^q = M \inf_{x_1, y_1} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_{(\infty)}^q$$

защото от (1.3) следва, че

$$\|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_{(\infty)}^q \leq M \|R(x_1, y_1, x, y)\|_{(\infty)}^q.$$

Ще пресметнем $R^q(x_1, y_1, x, y)$. За целта разделяме квадрата $[0, 1]^2$ чрез правите $x = x_1$ и $y = y_1$ на четири правоъгълника

$$\square_1 = \{(t, v), 0 \leq t \leq x_1, 0 \leq v \leq y_1\}, \quad \square_2 = \{(t, v), x_1 \leq t \leq 1, 0 \leq v \leq y_1\},$$

$$\square_3 = \{(t, v), x_1 \leq t \leq 1, y_1 \leq v \leq 1\}, \quad \square_4 = \{(t, v), 0 \leq t \leq x_1, y_1 \leq v \leq 1\}.$$

Означаваме

$$F_i(x_1, y_1, x, y) = \int \int_{\square_i} |(x-t)_+^0 (y-v)_+^0 - (x_1-t)_+^0 (y-v)_+^0 - (x-t)_+^0 (y_1-v)_+^0 + (x_1-t)_+^0 (y_1-v)_+^0|^q dt dv.$$

Ясно е, че

$$R^q(x_1, y_1, x, y) = \sum_{i=1}^4 F_i(x_1, y_1, x, y).$$

За $(t, v) \in \square_1$ имаме $(x_1 - t)_+^0 = 1$, $(y_1 - v)_+^0 = 1$ и следователно

$$F_1(x_1, y_1, x, y) = \int \int_{\square_1} |[(x-t)_+^0 - 1][(y-v)_+^0 - 1]|^q dt dv.$$

Аналогично получаваме

$$F_2(x_1, y_1, x, y) = \int \int_{\square_2} |(x-t)_+^0 [(y-v)_+^0 - 1]|^q dt dv,$$

$$F_3(x_1, y_1, x, y) = \int \int_{\square_3} |(x-t)_+^0 (y-v)_+^0|^q dt dv,$$

$$F_4(x_1, y_1, x, y) = \int \int_{\square_4} |[(x-t)_+^0 - 1](y-v)_+^0|^q dt dv.$$

Ще пресметнем $R^q(x_1, y_1, x, y)$ за $(x, y) \in \square_1$. Стойностите на $R^q(x_1, y_1, x, y)$ за $(x, y) \in \square_i$, $i = 2, 3, 4$, се намират по същия начин.

За $(x, y) \in \square_1$ имаме

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, y_1, x, y) &= \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} |[(x-t)_+^0 - 1][(y-v)_+^0 - 1]|^q dt dv \\
 &= \int_0^x \int_0^y |(1-1)(1-1)|^q dt dv + \int_x^{x_1} \int_0^y |(0-1)(1-1)|^q dt dv \\
 &+ \int_x^{x_1} \int_y^{y_1} |(0-1)(0-1)|^q dt dv + \int_0^x \int_y^{y_1} |(1-1)(0-1)|^q dt dv \\
 &= (x_1 - x)(y_1 - y), \\
 F_2(x_1, y_1, x, y) &= \int_{x_1}^1 \int_0^{y_1} |(x-t)_+^0 [(y-v)_+^0 - 1]|^q dt dv \\
 &= \int_{x_1}^1 \int_0^y |0(1-1)|^q dt dv + \int_{x_1}^1 \int_y^{y_1} |0(0-1)|^q dt dv = 0, \\
 F_3(x_1, y_1, x, y) &= \int_{x_1}^1 \int_{y_1}^1 |(x-t)_+^0 (y-v)_+^0|^q dt dv = \int_{x_1}^1 \int_{y_1}^1 |0 \cdot 0|^q dt dv = 0, \\
 F_4(x_1, y_1, x, y) &= \int_0^{x_1} \int_{y_1}^1 |[(x-t)_+^0 - 1](y-v)_+^0|^q dt dv \\
 &= \int_0^x \int_{y_1}^1 |(1-1)0|^q dt dv + \int_x^{x_1} \int_{y_1}^1 |(0-1)0|^q dt dv = 0.
 \end{aligned}$$

Следователно за $(x, y) \in \square_1$ получихме, че

$$R^q(x_1, y_1, x, y) = (x_1 - x)(y_1 - y) + 0 + 0 + 0.$$

Изобщо

$$R^q(x_1, y_1, x, y) = \begin{cases} (x_1 - x)(y_1 - y) & \text{при } (x, y) \in \square_1 \\ -(x_1 - x)(y_1 - y) & \text{при } (x, y) \in \square_2 \\ (x_1 - x)(y_1 - y) & \text{при } (x, y) \in \square_3 \\ -(x_1 - x)(y_1 - y) & \text{при } (x, y) \in \square_4. \end{cases}$$

Да разгледаме величината

$$\begin{aligned}
 \|R(x_1, y_1, x, y)\|_g^q &= \int_0^1 \int_0^1 R^q(x_1, y_1, x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} (x_1 - x)(y_1 - y) dy dx - \int_{x_1}^1 \int_0^{y_1} (x_1 - x)(y_1 - y) dy dx \\
 &+ \int_{x_1}^1 \int_{y_1}^1 (x_1 - x)(y_1 - y) dy dx - \int_0^{x_1} \int_{y_1}^1 (x_1 - x)(y_1 - y) dy dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x_1^2 y_1^2}{4} + \frac{(1-x_1)^2 y_1^2}{4} + \frac{(1-x_1)^2 (1-y_1)^2}{4} + \frac{x_1^2 (1-y_1)^2}{4}.$$

Търсим $\inf_{(x_1, y_1) \in [0, 1]^2} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_q$.

За целта първо ще намерим $\min_{(x_1, y_1) \in [0, 1]^2} N(x_1, y_1)$, където

$$N(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \left((x_1^2 y_1^2 + (1-x_1)^2 y_1^2 + (1-x_1)^2 (1-y_1)^2 + x_1^2 (1-y_1)^2 \right).$$

Решението на системата

$$\begin{cases} \frac{\partial N(x_1, y_1)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial N(x_1, y_1)}{\partial y_1} = 0 \end{cases}$$

е $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, а $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$.

Разглеждаме например

$$N(0, y_1) = \frac{1}{4} (y_1^2 + (1-y_1)^2) \geq N(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}.$$

Аналогично заключаваме, че $\min N(x_1, y_1)$ по границите на квадрата $[0, 1]^2$ е $\frac{1}{8}$. Следователно

$$\min_{(x_1, y_1) \in [0, 1]^2} N(x_1, y_1) = N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Тези пресмятания и (1.5) ни дават, че

$$\sup_{f \in \Omega_{p, M}} \inf_{(x_1, y_1) \in [0, 1]^2} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_q = M \inf_{x_1, y_1} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_q$$

$$= M \|R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x, y)\|_q = M \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Означаваме с $INT_{1,1}^*$ блендинг-интерполантата построена по мрежата $G_{1,1}^*$.

Тъй като от (1.4) следва, че за $f = \tilde{f}$ имаме

$$\|\tilde{f}(x, y) - INT_{1,1}(\tilde{f}; x, y)\|_q = M \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{q}},$$

то $INT_{1,1}^*$ е най-добрата блендинг-интерполанта от $B_{[0,1]^2}^{1,1}$ за класа $\Omega_{p,M}$ въз основа на информацията по мрежата $G_{1,1}$.

Нека сега разгледаме

$$\begin{aligned} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_\infty &= \max \begin{cases} \|((x_1 - x)(y_1 - y))^{\frac{1}{q}}\|_\infty & \text{за } (x, y) \in \square_1 \\ \|(-(x_1 - x)(y_1 - y))^{\frac{1}{q}}\|_\infty & \text{за } (x, y) \in \square_2 \\ \|((x_1 - x)(y_1 - y))^{\frac{1}{q}}\|_\infty & \text{за } (x, y) \in \square_3 \\ \|(-(x_1 - x)(y_1 - y))^{\frac{1}{q}}\|_\infty & \text{за } (x, y) \in \square_4 \end{cases} \\ &= \max \left\{ (x_1 y_1)^{\frac{1}{q}}, ((1 - x_1) y_1)^{\frac{1}{q}}, ((1 - x_1)(1 - y_1))^{\frac{1}{q}}, (x_1(y_1 - y))^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &= \begin{cases} (x_1 y_1)^{\frac{1}{q}} & \text{за } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{2} \leq y_1 \leq 1 \\ ((1 - x_1) y_1)^{\frac{1}{q}} & \text{за } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y_1 \leq 1 \\ ((1 - x_1)(1 - y_1))^{\frac{1}{q}} & \text{за } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2} \\ (x_1(1 - y_1))^{\frac{1}{q}} & \text{за } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Търсим

$$\begin{aligned} \inf_{x_1, y_1} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_\infty &= \min \begin{cases} \min(x_1 y_1)^{\frac{1}{q}} & \text{за } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{2} \leq y_1 \leq 1 \\ \min((1 - x_1) y_1)^{\frac{1}{q}} & \text{за } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y_1 \leq 1 \\ \min((1 - x_1)(1 - y_1))^{\frac{1}{q}} & \text{за } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2} \\ \min(x_1(1 - y_1))^{\frac{1}{q}} & \text{за } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Тогава от (1.5) следва, че

$$\sup_{f \in \Omega_{p,M}} \inf_{(x_1, y_1) \in [0,1]^2} \|f(x, y) - INT_{1,1}(f; x, y)\|_\infty = M \inf_{x_1, y_1} \|R(x_1, y_1, x, y)\|_\infty$$

$$= M \|R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x, y)\|_{\infty} = M \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отново получаваме, че $INT_{1,1}^*$ е най-добрата блендинг-интерполанта, принадлежаща на $B_{[0,1]^2}^{1,1}$ за класа $\Omega_{p,M}$ въз основа на информацията по мрежата $G_{1,1}$.

Нека

$$\Omega_{p,M}^{h_1,h_2} = \left\{ f \in C_{[0,h_1] \times [0,h_2]}^{1,1} : \|f^{(1,1)}\|_p \leq M \right\}, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Ако направим аналогични разсъждения за правоъгълника $[0, h_1] \times [0, h_2]$ вместо за $[0, 1]^2$, то Теорема 1.4 може да бъде модифицирана по следния начин.

Теорема 1.5. *Най-добрата блендинг-интерполанта от ред $(1, 1)$ за класа $\Omega_{p,M}^{h_1,h_2}$, построена въз основа на информацията по мрежи от вида*

$$G_{1,1} = \{(x, y) \in [0, h_1] \times [0, h_2] : (x - x_1)(y - y_1) = 0\}$$

в $\|\cdot\|_{\infty}$ и $\|\cdot\|_q$ е

$$INT_{1,1}^*(f; x, y) = f\left(\frac{h_1}{2}, y\right) + f\left(x, \frac{h_2}{2}\right) - f\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right),$$

построена по мрежата

$$G_{1,1}^* = \left\{ (x, y) \in [0, h_1] \times [0, h_2] : \left(x - \frac{h_1}{2}\right) \left(y - \frac{h_2}{2}\right) = 0 \right\}.$$

В сила са оценките за грешката

$$(1.6) \quad \|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)\|_{\infty} \leq M \frac{(h_1 h_2)^{\frac{1}{q}}}{4^{\frac{1}{q}}}$$

и

$$(1.7) \quad \|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)\|_q \leq M \frac{(h_1 h_2)^{\frac{2}{q}}}{16^{\frac{1}{q}}}.$$

Доказателството на това твърдение е съвсем аналогично на това на Теорема 1.4, като правоъгълникът $[0, 1]^2$ е заменен с $[0, h_1] \times [0, h_2]$ и мрежата също е съответно заменена. В този случай аналогът на (1.3) приема вида

$$|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)| \leq \tilde{R}(x_1, y_1, x, y) \|f^{(1,1)}(x, y)\|_{p, [0, h_1] \times [0, h_2]},$$

където \tilde{R} е аналогът на R в случая на правоъгълника $[0, h_1] \times [0, h_2]$.

Следователно

$$|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)| \leq M \tilde{R} \left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}, x, y \right).$$

Оттук

$$\|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)\|_\infty \leq M \|\tilde{R}(\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}, x, y)\|_\infty = M \frac{(h_1 h_2)^{\frac{1}{q}}}{4^{\frac{1}{q}}}$$

и

$$\|f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)\|_q \leq M \|\tilde{R}(\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}, x, y)\|_q = M \left(\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Разделяме квадрата $[0, 1]^2$ на mn правоъгълника $\square_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$, посредством правите $x = x_i = ih_1 = i\frac{1}{m}$, $i = 0, \dots, m$, $y = y_j = jh_2 = j\frac{1}{n}$, $j = 0, \dots, n$.

Нека $f \in C_{[0,1]^2}^{1,1}$. Означаваме

$$s_{ij} = \|f^{(1,1)}\|_{2,\square_{ij}} = \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f^{(1,1)}(x, y)|^2 dy dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ще приближаваме $f(x, y)$ посредством на части блендинг-функция $PINT(f; x, y)$, такава, че $PINT(f; x, y)$ съвпада в \square_{ij} със съответната $INT_{1,1}^*$, която означаваме с $INT_{1,1}^*_{ij}$.

Следващата теорема дава ефективни оценки за грешката при интерполиране с части блендинг-функции.

Теорема 1.6. Нека $f \in C_{[0,1]^2}^{1,1}$.

i) Ако $s_{ij} \leq 1$ за $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$, то

$$\|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{mn}}.$$

ii) Ако $\|f^{(1,1)}\|_{2,[0,1]^2} \leq 1$, то

$$\|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_2 \leq \frac{1}{4mn}.$$

Доказателство. По построение

$$f(x, y)|_{G_{m,n}^0} = PINT(f; x, y)|_{G_{m,n}^0},$$

където

$$G_{m,n}^0 = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \prod_{i=1}^m \left(x - \frac{2i-1}{2m} \right) \prod_{j=1}^n \left(y - \frac{2j-1}{2n} \right) = 0 \right\}.$$

Ще прилагаме оценки от тип (1.6), (1.7) за $h_1 = \frac{1}{m}$, $h_2 = \frac{1}{n}$ за всяко \square_{ij} .

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_{\infty} &= \max_{i=0, \dots, m-1, j=0, \dots, n-1} \|f(x, y) - INT_{1,1}^*{}_{ij}(f; x, y)\|_{\infty} \\ &\leq \max_{i=0, \dots, m-1, j=0, \dots, n-1} s_{ij} \left(\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{mn}}. \end{aligned}$$

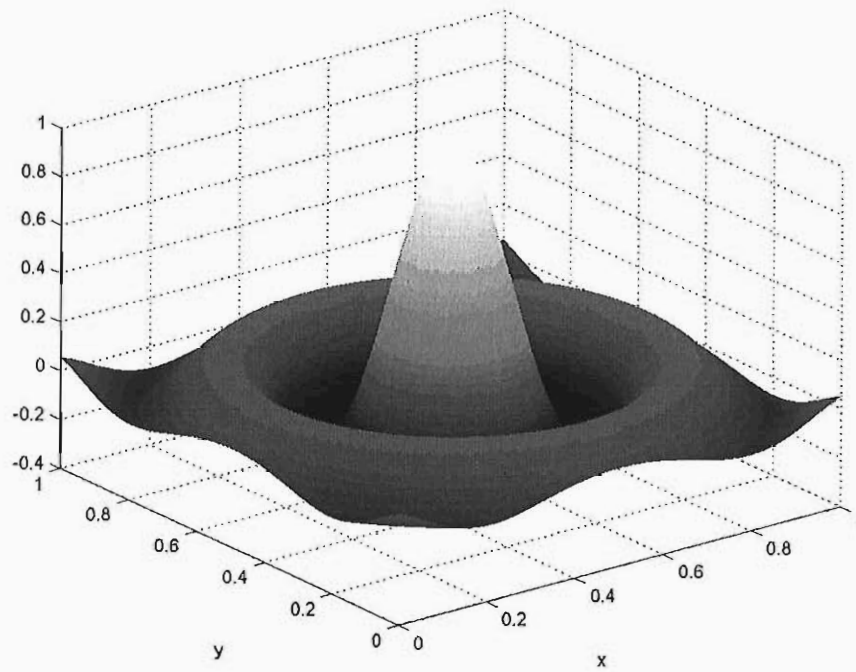
Т. к. $\|f^{(1,1)}\|_{2,[0,1]^2}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{ij}^2 \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_2^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|f(x, y) - INT_{1,1}^*{}_{ij}(f; x, y)\|_{2,\square_{ij}}^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[s_{ij} \left(\frac{h_1^2}{4} \cdot \frac{h_2^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leq \frac{1}{16m^2n^2}, \end{aligned}$$

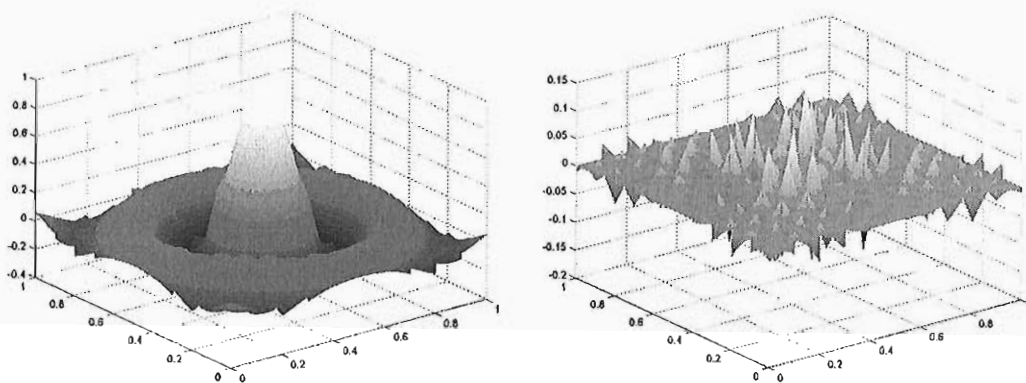
т. е.

$$\|f(x, y) - PINT(f; x, y)\|_2 \leq \frac{1}{4mn}.$$

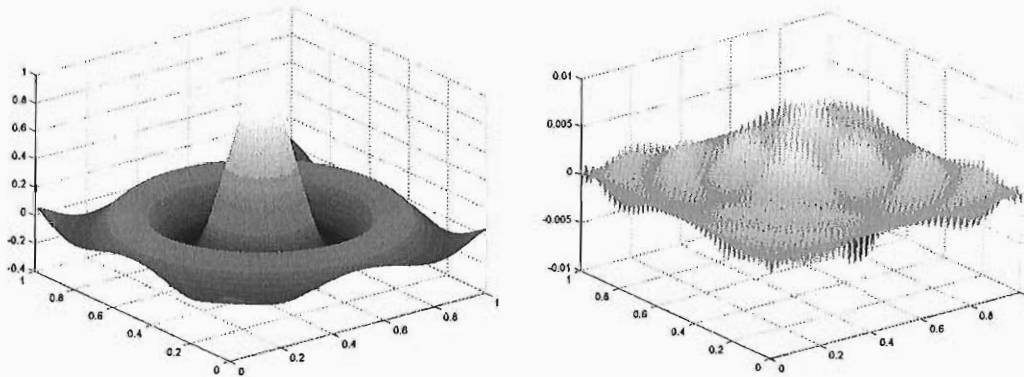
Ще илюстрираме ефективността на предложения метод за апроксимация с един пример, върху който обичайно се тестват новите методи за възстановяване на повърхнини, а именно така наречената „Мексиканска шапка“ : $f(x, y) = \frac{\sin(3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}})}{3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}}}$ $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Графиките са резултат от програма на MatLab 5.2, реализираща метода.



Фигура 1.1: Графика на функцията „Мексиканска шапка“



Фигура 1.2: Графика на $PINT(f; x, y)$ за $m = n = 10$ и графика на грешката $f(x, y) - PINT(f; x, y)$.



Фигура 1.3: Графика на $PINT(f; x, y)$ за $m = n = 40$ и графика на грешката $f(x, y) - PINT(f; x, y)$.

Оптимална кубатурна формула (въз основа на информацията по две перпендикулярни отсечки) за класа $\Omega_{p,M}$.

Знаем, че най-добрата блендинг-интерполанта за класа $\Omega_{p,M}^{h_1,h_2}$ е блендинг-интерполантата, построена въз основа на информацията по мрежата

$$G_{1,1}^* = \left\{ (x, y) \in [0, h_1] \times [0, h_2] : \left(x - \frac{h_1}{2}\right)\left(y - \frac{h_2}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Нека $f \in \Omega_{p,M}^{h_1,h_2}$. Тогава тази интерполанта е

$$INT_{1,1}^*(f; x, y) = f\left(\frac{h_1}{2}, y\right) + f\left(x, \frac{h_2}{2}\right) - f\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right).$$

Можем да построим следната интерполационна кубатурна формула:

$$\begin{aligned} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} f(x, y) dy dx &\approx \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} INT_{1,1}^*(f; x, y) dy dx \\ &= h_1 \int_0^{h_2} f\left(\frac{h_1}{2}, y\right) dy + h_2 \int_0^{h_1} f\left(x, \frac{h_2}{2}\right) dx - h_1 h_2 f\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Като използваме (1.7), за грешката получаваме

$$\left| \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} f(x, y) dy dx - \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} INT_{1,1}^*(f; x, y) dy dx \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^{h_1} \int_0^{h_2} 1^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{h_1} \int_0^{h_2} |f(x, y) - INT_{1,1}^*(f; x, y)|^q dy dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (h_1 h_2)^{\frac{1}{p}} \frac{M}{16^{\frac{1}{q}}} (h_1 h_2)^{\frac{2}{q}} = \frac{M}{16^{\frac{1}{q}}} (h_1 h_2)^{1+\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Това е най-добрата интерполационна кубатурна формула за класа $\Omega_{p,M}^{h_1,h_2}$, построена въз основа на информацията по мрежи от вида

$$G_{1,1} = \{(x, y) \in [0, h_1] \times [0, h_2] : (x - x_1)(y - y_1) = 0\}.$$

Въз основа на получената кубатурна формула ще построим съставна кубатурна формула.

Теорема 1.7. Нека f е функция от клас $C_{[0,1]^2}^{1,1}$, такава, че $\|f^{(1,1)}\|_{p,[0,1]^2} \leq 1$.
1. Тогава за грешката на съставната кубатурна формула

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &\approx \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right) dy + \\ &\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right) dx - \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2m}, \frac{2j+1}{2n}\right) \end{aligned}$$

е вярна оценката

$$R_{\text{сът.}} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}} mn},$$

където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказателство. Нека най-напред $p < \infty$. Да означим с s_{ij} величината $\|f^{(1,1)}\|_{p,\square_{ij}}$. Тогава

$$\|f^{(1,1)}\|_{p,[0,1]^2}^p = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{ij}^p.$$

За всеки правоъгълник \square_{ij} да разгледаме интерполантата $INT_{1,1,ij}^*(f; x, y)$, построена въз основа на следите $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2m}, y\right) = f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right)$ и $f\left(x, \frac{y_j + y_{j+1}}{2n}\right) = f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right)$.

Имаме

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} INT_{1,1,ij}^*(f; x, y) dy dx$$

$$= \frac{1}{m} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right) dy + \frac{1}{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right) dx - \frac{1}{mn} f\left(\frac{2i+1}{2m}, \frac{2j+1}{2n}\right).$$

Следователно

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{m} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right) dy + \frac{1}{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{mn} f\left(\frac{2i+1}{2m}, \frac{2j+1}{2n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 f\left(\frac{2i+1}{2m}, y\right) dy + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(x, \frac{2j+1}{2n}\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2m}, \frac{2j+1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Ако с R_{ij} означим грешката на кубатурната формула

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} INT_{1,1}^* (f; x, y) dy dx,$$

то $R_{ij} \leq \frac{s_{ij}}{16^{\frac{1}{q}}(mn)^{1+\frac{1}{q}}}$ и следователно за грешката на съставната кубатурна формула имаме

$$R_{\text{съст.}} \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} R_{ij} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}}(mn)^{1+\frac{1}{q}}} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{ij}.$$

Продължаваме оценките, използвайки неравенството на Хьолдер, и окончателно получаваме

$$R_{\text{съст.}} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}}(mn)^{1+\frac{1}{q}}} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

т. е. $R_{\text{съст.}} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}} mn}$.

В случая $\|f^{(1,1)}\|_{\infty, [0,1]^2} \leq 1$, то $\|f^{(1,1)}\|_{p, [0,1]^2} \leq 1$ за произволно $p < \infty$ и по горното $R_{\text{съст.}} \leq \frac{1}{16^{\frac{1}{q}} mn}$ за произволно $q > 1$, откъдето $R_{\text{съст.}} \leq \frac{1}{16mn}$.

§3 Интерполация на дискретни данни

(За случай, когато следите на функцията не са достъпни, а имаме само точкова информация)

Нека $0 = x_1 < x_2 < \dots, x_m = 1$, $0 = y_1 < y_2 < \dots, y_n = 1$ и нека са известни стойностите $\{f(x_i, y_j)\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Ще построим блендинг-функция $\tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)$, принадлежаща на класа $B_{[0,1]^2}^{m,n}$ и такава, че $\tilde{INT}_{m,n}(f; x, y) = f(x, y)$. За целта за всяко $i = 1, \dots, m$ построяваме $s_i(y)$ -кубичния сплайн, който осъществява пълната кубична сплайнова интерполация на $f(x_i, y)$ в точките y_1, \dots, y_n (или $s_i(y)$ -естественния кубичен сплайн, интерполиращ $f(x_i, y)$ в точките y_1, \dots, y_n). Нека $t_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, е кубичният сплайн, осъществяващ пълната кубична сплайнова интерполация на $f(x, y_j)$ в точките x_1, \dots, x_m (или $t_j(x)$ -естественният кубичен сплайн, интерполиращ $f(x, y_j)$ в точките x_1, \dots, x_m).

Да отбележим, че $s_i(y_j) = t_j(x_i) = f(x_i, y_j)$.

Строим блендинг-интерполантата $\tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)$ въз основа на информацията $\{s_i(y)\}$ за $x = x_i$, $i = 1, \dots, m$ и $\{t_j(x)\}$ за $y = y_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\tilde{INT}_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=1}^m s_i(y)L_i(x) + \sum_{j=1}^n t_j(x)M_j(y) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j)L_i(x)M_j(y).$$

Имаме $\tilde{INT}_{m,n}(f; x_i, y_j) = s_i(y_j) + t_j(x_i) - f(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$.

Преминаваме към оценка на грешката за функции $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$. Прилагайки Теорема 1.3, получаваме следните неравенства

$$\max_{0 \leq y \leq 1} |f(x_i, y) - s_i(y)| \leq \left(\int_0^1 (f^{(0,2)}(x_i, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max_{1 \leq j \leq n-1} |y_{j+1} - y_j| \right)^{\frac{3}{2}}$$

и

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x, y_j) - t_j(x)| \leq \left(\int_0^1 (f^{(2,0)}(x, y_j))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max_{1 \leq i \leq m-1} |x_{i+1} - x_i| \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Нека $INT_{m,n}(f; x, y)$ е блендинг-интерполантата на $f(x, y)$, построена въз основа на информацията $\{f(x_i, y)\}_{i=1}^m$ и $\{f(x, y_j)\}_{j=1}^n$. Тогава, като използваме

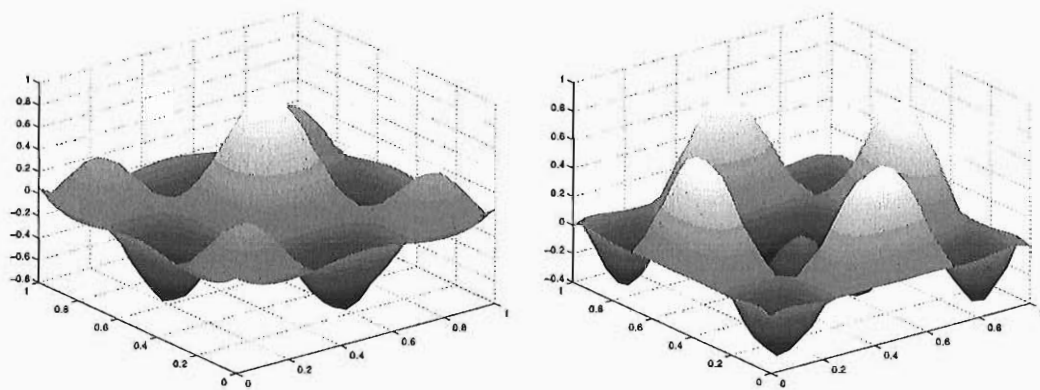
горните неравенства и формула (1.2), получаваме

$$\begin{aligned}
 & |f(x, y) - \tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)| \\
 & \leq |f(x, y) - INT_{m,n}(f; x, y)| + |INT_{m,n}(f; x, y) - \tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)| \\
 & \leq \left| \frac{f^{(m,n)}(\xi, \eta)}{m!n!} \prod_{i=1}^m (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j) \right| + \left| \sum_{i=1}^m L_i(x) [f(x_i, y) - s_i(y)] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=1}^n M_j(y) [f(x, y_j) - t_j(x)] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x) M_j(y) [f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j)] \right| \\
 & \leq \frac{1}{m!n!} \left| f^{(m,n)}(\xi, \eta) \prod_{i=1}^m (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j) \right| \\
 & \quad + \sum_{i=1}^m |L_i(x)| \left(\int_0^1 (f^{(0,2)}(x_i, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max_{1 \leq j \leq n-1} |y_{j+1} - y_j| \right)^{\frac{3}{2}} \\
 & \quad + \sum_{j=1}^n |M_j(y)| \left(\int_0^1 (f^{(2,0)}(x, y_j))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max_{1 \leq i \leq m-1} |x_{i+1} - x_i| \right)^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

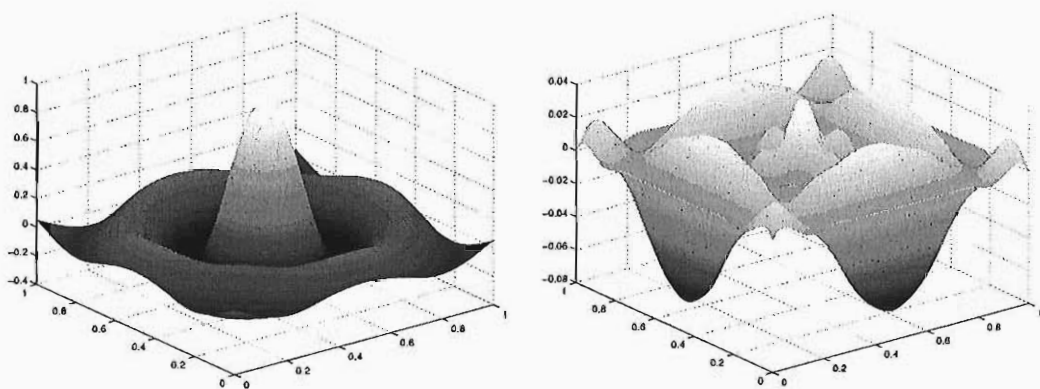
При $m = n$ и $x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \frac{1}{n-1}$ (за произволни i, j) имаме

$$\begin{aligned}
 & |f(x, y) - \tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)| \leq \frac{1}{(n!)^2} \left| f^{(n,n)}(\xi, \eta) \prod_{i=1}^n (x - x_i) \prod_{j=1}^n (y - y_j) \right| \\
 & \quad + \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^n \left\{ |L_i(x)| \left(\int_0^1 (f^{(0,2)}(x_i, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + |M_i(y)| \left(\int_0^1 (f^{(2,0)}(x, y_i))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

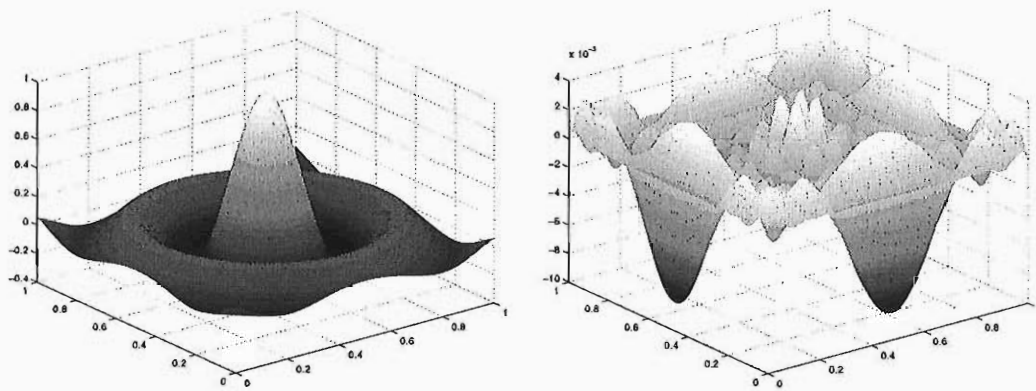
И този метод ще илюстрираме с графики на интерполиращата функция и грешката, получени като резултат от програма на MatLab 5.2.



Фигура 1.4: Графика на блендинг-интерполантата $\tilde{I}NT_{m,n}(f; x, y)$ за $m = n = 5$ на функцията „Мексиканска шапка“ и графика на грешката $f(x, y) - \tilde{I}NT_{m,n}(f; x, y)$.



Фигура 1.5: Графика на блендинг-интерполантата $\tilde{I}NT_{m,n}(f; x, y)$ за $m = n = 10$ на функцията „Мексиканска шапка“ и графика на грешката $f(x, y) - \tilde{I}NT_{m,n}(f; x, y)$.



Фигура 1.6: Графика на блендинг-интерполантата $\tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)$ за $m = n = 15$ на функцията „Мексиканска шапка“ и графика на грешката $f(x, y) - \tilde{INT}_{m,n}(f; x, y)$.

Глава 2

Двумерна интерполация с (m, n)-сплайни

§1 Предварителни сведения

Понятието блендинг-функция се използва често и в тази глава. Ще работим с дефиницията на $B_{[0,1]^2}^{m,n}$, дадена в Глава 1.

Следното представяне (дадено в [18]) на всякаква достатъчно гладка функция $f(x, y)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ в термините на блендинг-функциите от ред (m, n) , $m, n \geq 1$ ще бъде използвано по-нататък. Представянето е основано на операторите от Тейлър тип T_x^m, T_y^n , определени като Тейлъровото развитие на $f(x, y)$ в $(0, y)$, $(x, 0)$, съответно, от ред m , съответно от ред n . С други думи,

$$T_x^m f := f(0, y) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial x} f(0, y)x + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f(0, y)x^{m-1}.$$

Лема 2.1. *За всяка функция $f \in C_{[0,1]^2}^{m,n}$, е в сила следното представяне*

$$f(x, y) = T_x^m f(x, y) + T_y^n f(x, y) - T_x^m T_y^n f(x, y) + \frac{1}{(m-1)!(n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^{m-1} (y-\tau)_+^{n-1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} f(t, \tau) dt d\tau.$$

Доказателство. Като използваме интегралното представяне на свободния

член във формулата на Тейлър, получаваме

$$f(x, y) = T_x^m f(x, y) + \int_0^1 \frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t, y) dt.$$

Прилагаме отново формулата на Тейлър към $f^{(m,0)}(t, y)$, този път по отношение на y в $y = 0$ и получаваме

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t, y) = T_y^n \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t, y) + \int_0^1 \frac{(y-v)_+^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial v^n} f(t, v) dv.$$

Като заместим последния израз за $\frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t, y)$ в първото равенство и вземем пред вид комутативността на диференциалния оператор и T_n^y ,

$$\int_0^1 \frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!} T_y^n \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t, y) dt = T_y^n \left[f(x, y) - T_x^m (f(x, y)) \right],$$

получаваме търсеното равенство.

Да отбележим, че

$$B_f(x, y) := T_x^m f(x, y) + T_y^n f(x, y) - T_x^m T_y^n f(x, y)$$

е блендинг-функция от ред (m, n) . Нещо повече, рестрикцията на B_f и нейните частни производни $B_f^{(i,j)}$ върху правите $x = 0$ и $y = 0$ съвпадат със съответните стойности на f и нейните производни там за $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$.

Нека дадем точна дефиниция на (m, n) -сплайн.

Да допуснем, че $G := [a, b] \times [c, d]$ е дадена правоъгълна област в равнината. Нека въведем една мрежа на G определена от правите $x_i = a + i \frac{b-a}{M}$, $y_j = c + j \frac{d-c}{N}$, $i = 0, \dots, M$, $j = 0, \dots, N$. По този начин получаваме деление на G на сума от малки правоъгълници $\square_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Дефиниция 2.1. Казваме, че една функция $s(x, y)$ е (m, n) -сплайн върху G , ($s \in S_{m,n}$), ако

$$\frac{\partial^{m+n} s}{\partial x^m \partial y^n}(x, y) = c_{ij} \text{ за } (x, y) \in \square_{ij},$$

където c_{ij} са константи.

По-нататък, за определеност, предполагаме, че G е единичният квадрат, т.е. $G = [0, 1]^2$.

Да отбележим, че пред вид Лема 2.1, всеки (m, n) -сплайн може да се представи като сума от подходяща блендинг-функция B_f от ред (m, n) и интеграл от ядрото

$$K(x, y, t, \tau) := \frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-\tau)_+^{n-1}}{(n-1)!},$$

умножено със стъпаловидната функция $c(t, \tau)$,

$$c(t, \tau) := c_{ij} \quad \text{за } (t, \tau) \in \square_{ij}.$$

По-нататък въвеждаме клас от (m, n) -сплайни с краен носител, така наречените B -сплайни, които ще бъдат използвани като базис в пространството $S_{m,n}$ от (m, n) -сплайни. За да направим това, ще разгледаме една безкрайна правоъгълна мрежа в равнината:

$$\{x_i = i/M, y_j = j/N, -\infty < i, j < \infty, i, j - \text{естествено число}\}.$$

Означаваме

$$\square_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j\}.$$

С всяка двойка (ij) от индекси асоциираме B -сплайните $B_{ij}^{(m,n)}$ на две променливи от ред (m, n) , определени по следния начин

$$B_{ij}^{(m,n)}(x, y) := (\cdot - x)_+^m [x_i, \dots, x_{i+m+1}] (\cdot - y)_+^n [y_j, \dots, y_{j+n+1}] = B_i^{(m)}(x) B_j^{(n)}(y).$$

За простота на означенията често ще изпускаме горните индекси m, n , когато това е възможно. Нека означим с D_{ij} носителя на $B_{ij}(x, y)$. Той е декартово произведение на носителите на едномерните B -сплайни $B_i^{(m)}(x)$ и $B_j^{(n)}(y)$, а именно, $D_{ij} = (x_i, x_{i+m+1}) \times (y_j, y_{j+n+1})$.

Лема 2.2. *За всяко крайно множество $I := (I_1, I_2) \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ от индекси, B -сплайните $B_{ij}^{(m,n)}(x, y)$, $(i, j) \in I$ са линейно независими в \mathbb{R}^2 .*

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем противното. Тогава съществува линейна комбинация

$$g(x, y) := \sum_{(i,j) \in I} \alpha_{ij} B_{ij}(x, y)$$

с поне един ненулев коефициент α_{ij} , която се анулира тъждествено в равнината \mathbb{R}^2 . Въвеждаме лексикографска наредба в I . Нека (i_0, j_0) е първият член на I . Ако $t_{i_0 j_0}$ принадлежи на вътрешността на $\square_{i_0 j_0} \subset D_{i_0 j_0}$ имаме $B_{i_0 j_0}(t_{i_0 j_0}) \neq 0$ и следователно $\alpha_{i_0 j_0} = 0$. Нека (\tilde{i}, \tilde{j}) бъде следващият член на I . Съвсем аналогично получаваме $\alpha_{\tilde{i}, \tilde{j}} = 0$. Следователно $\alpha_{ij} = 0$ за всички $(i, j) \in I$.

Лема 2.3. *Функциите $\{B_{ij}\}_{i=0}^{M-1} \}_{j=0}^{N-1}$ са линейно независими в $[0, 1]^2$.*

Доказателството е подобно на това на Лема 2.2 и затова тук го пропускаме.

Да разгледаме подпространството на (m, n) -сплайните

$$S_{m,n}^0 = \left\{ s \in S_{m,n} : \frac{\partial^i s}{\partial y^i}(0, y) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \right. \\ \left. \frac{\partial^j s}{\partial x^j}(x, 0) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Следствие 2.1. *В-сплайните $\{B_{ij}\}_{i=0}^{M-1} \}_{j=0}^{N-1}$ образуват базис на $S_{m,n}^0$.*

Д о к а з а т е л с т в о. Докажем, че $\{B_{ij}\}_{i=0}^{M-1} \}_{j=0}^{N-1}$ са линейно независими. Очевидно е, че $B_{ij} \in S_{m,n}^0$ (т.к. $B_{ij}(x, y) = B_i^{(m)}(x)B_j^{(n)}(y)$). Освен това, $\dim S_{m,n}^0 = MN =$ броя на $B_{ij}(x, y)$.

§2 Интерполационна теорема

Разрешимостта на интерполационната задача за едномерни сплайни се характеризира напълно от *условието за преплитане* на Шоенберг и Уйтни [39, 40]. Досега все още няма пълна характеристика в многомерния случай. В следващата теорема доказваме регулярността на двумерната интерполация с (m, n) -сплайни за доста общ клас конфигурации на възли.

Разглеждаме следната интерполационна задача:

Дадена е достатъчно гладка функция f и множество от MN различни точки $\{t_{ij}\}$ в G . Да се намери (m, n) -сплайн $s(x, y)$ такъв, че

$$(2.1) \quad s(t_{ij}) = f(t_{ij}), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N,$$

и удовлетворяващ граничните условия

$$\frac{\partial^k s}{\partial y^k}(0, y) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(0, y), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad y \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial^l s}{\partial x^l}(x, 0) = \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x, 0), \quad l = 0, \dots, n-1, \quad x \in [0, 1].$$

Нека означим $t_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$.

Теорема 2.1. Ако

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i-1} < \xi_{ij} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, M \\ y_{j-1} < \eta_{ij} \leq y_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{array} \right\}$$

то интерполационната задача (2.1) има единствено решение.

Доказателство. Съществува единствена блендинг-функция $b(x, y) \in B_{[0,1]^2}^{m,n}$ такава, че

$$\frac{\partial^i b}{\partial y^i}(0, y) = \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(0, y), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad y \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial^j b}{\partial x^j}(x, 0) = \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, 0), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad x \in [0, 1].$$

Нека разгледаме стойностите $\tilde{f}_{ij} = f(t_{ij}) - b(t_{ij})$. Твърдим, че съществува единствен сплайн $s_{m,n}^0 \in S_{m,n}^0$, който удовлетворява интерполационните условия

$$s_{m,n}^0(t_{ij}) = \tilde{f}_{ij}.$$

Наистина, нека разгледаме съответната хомогенна задача $s_{m,n}^0(t_{ij}) = 0$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Следствие 2.1 дава едно представяне на $s_{m,n}^0$ във вида

$$s_{m,n}^0 = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij} B_{ij}.$$

Тогава

$$0 = s_{m,n}^0(t_{11}) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij} B_{ij}(t_{11}) = \alpha_{00} B_{00}(t_{11}).$$

Т.к. $t_{11} \in D_{00}$, то имаме $B_{00}(t_{11}) \neq 0$ и $\alpha_{00} = 0$. По-нататък

$$0 = s_{m,n}^0(t_{12}) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij} B_{ij}(t_{12}) = \alpha_{00} B_{00}(t_{12}) + \alpha_{01} B_{01}(t_{12}) = 0 + \alpha_{01} B_{01}(t_{12}),$$

следователно $\alpha_{01} = 0$. Продължаваме този процес и накрая получаваме диагонална матрица с $B_{i-1,j-1}(t_{ij})$ по диагонала. Тези числа са различни от нула т.к. $t_{ij} \in D_{i-1,j-1}$. Следователно хомогенната задача има само тривиалното нулево решение, а нехомогенната задача има единствено решение. Твърдим, че $s(x, y) = s_{m,n}^0(x, y) + b(x, y)$ е решение на първоначалната интерполационна задача. Наистина,

$$\begin{aligned} s^{(m,n)}(x, y) &= \left(s_{m,n}^0 \right)^{(m,n)}(x, y) + b^{(m,n)}(x, y) \\ &= \left(s_{m,n}^0 \right)^{(m,n)}(x, y) + 0 = c_{ij}, \end{aligned}$$

когато $(x, y) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Следователно $s(x, y) \in S_{m,n}$. Освен това

$$s(t_{ij}) = s_{m,n}^0(t_{ij}) + b(t_{ij}) = f(t_{ij}) - b(t_{ij}) + b(t_{ij}) = f(t_{ij})$$

за $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$. Очевидно $s(x, y)$ удовлетворява също условията за съвпадение по отсечките $[0, y]$, $0 \leq y \leq 1$ и $[x, 0]$, $0 \leq x \leq 1$, т.к. $s_{m,n}^0(x, y)$ беше избрано да удовлетворява нулевите условия.

Да допуснем, че има две решения на интерполационната задача: $s_1(x, y)$ и $s_2(x, y)$. Ако $s(x, y) = s_1(x, y) - s_2(x, y)$, то s удовлетворява нулеви гранични условия (на отсечките). Следователно $s \in S_{m,n}^0$ и от условието $s(t_{ij}) = 0$, $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ получаваме, че $s \equiv 0$. Единствеността е доказана.

С $\lambda_{pq}(x, y)$ ще означаваме Лагранжевия базис на

$$S_{m,n}^0 = \left\{ s \in S_{m,n} : \begin{aligned} \frac{\partial^k s}{\partial y^k}(0, y) &= 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad y \in [0, 1], \\ \frac{\partial^l s}{\partial x^l}(x, 0) &= 0, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \right.$$

свързан със задачата (2.1), т.е.

$$\lambda_{pq}(t_{kl}) = \delta_{pk}\delta_{ql}, \quad k = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N.$$

(Очевидно $\{\lambda_{pq}\}_{p=1}^M \}_{q=1}^N$ са линейно независими и т.к. техният брой е $M \cdot N$, то те наистина образуват базис на $S_{m,n}^0$.)

Да отбележим, че решението на задача (2.1) може да се напише във вида

$$s(f, x, y) = B_f(x, y) + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N f(t_{pq}) \lambda_{pq}(x, y).$$

§3 Частни случаи

3.1 Оценка на грешката в случая: $(m, n) = (1, 1)$ и

$$t_{ij} = (i/M, j/N)$$

По-нататък анализираме интерполацията сплайн в случай на малки стойности на m и n .

Разглеждаме правоъгълната мрежа от точки

$$x_i = i/M, \quad y_j = j/N, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

Нека означим

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} &= f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y), \\ \Delta_{ij} &= f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j), \\ \Delta_1 &= f(x_{i-1}, y) + f(0, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(0, y), \\ \Delta_2 &= f(x, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, 0) - f(x, 0) - f(x_{i-1}, y_{j-1}), \\ \Delta_3 &= f(x, y) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y). \end{aligned}$$

Ще приближаваме функцията $f(x, y)$ с $(1, 1)$ -сплайни, т.е. с функции от вида

$$s(f, x, y) = f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) + \int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv,$$

където

$$c(u, v) = \{c_{ij} \text{ за } (u, v) \in \square_{ij}, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N\}$$

и константите $\{c_{ij}\}_{i=1}^M \{j=1}^N$ са избрани така, че

$$s(f, x_i, y_j) = f(x_i, y_j), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N.$$

Ще изведем израза за грешката в термините на модула на непрекъснатост $\omega(f, \delta_1, \delta_2)$. Да припомним, че

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{|h_1| \leq \delta_1} \sup_{|h_2| \leq \delta_2} |f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)|.$$

Ще пресметнем стойностите на $\{c_{ij}\}_{i=1}^M \{j=1}^N$, съответстващи на горните интерполационни условия. За да оценим грешката се нуждаем от стойностите на $\{c_{ij}\}$, които пресмятаме по-долу използвайки гореспоменатите интерполационни условия.

От първото интерполационно условие получаваме

$$s(f, x_1, y_1) = f(x_1, 0) + f(0, y_1) - f(0, 0) + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} c_{11} du dv = f(x_1, y_1),$$

което лесно може да се сведе до $\Delta_{11} = hc_{11}$, където $h = \frac{1}{MN}$. Следователно $c_{11} = \frac{\Delta_{11}}{h}$. От интерполационното условие в точката (x_1, y_2) получаваме

$$f(x_1, y_2) = f(x_1, 0) + f(0, y_2) - f(0, 0) + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} c_{11} du dv + \int_0^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} c_{12} du dv.$$

За да намерим c_{12} използваме горната формула и току що намерената стойност на c_{11} . Получаваме $c_{12} = \frac{\Delta_{12}}{h}$. По подобен начин виждаме, че $c_{1j} = \frac{\Delta_{1j}}{h}$ за $j = 1, \dots, N$, (ако под означенията x_0, y_0 се разбира 0). Продължаваме с пресмятането на c_{21} , до c_{2N} и така нататък до c_{MN} . По този начин получаваме, че $c_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{h}$ за $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$.

Сега сме готови да оценим грешката. Нека предположим, че точката (x, y) лежи в \square_{ij} . Да разгледаме равенството

$$f(x, y) - s(f, x, y) = f(x, y) + f(0, 0) + f(x, 0) - f(0, y) - \int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv$$

$$= \Delta_{xy} - \int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv.$$

Да означим, съответно:

с h_1 – лицето на правоъгълника с върхове (x_1, y) , $(0, y_{j-1})$, (x_1, y_{j-1}) и $(0, y)$;

с h_2 – лицето на правоъгълника с върхове (x, y_1) , $(x_{i-1}, 0)$, $(x, 0)$ и (x_{i-1}, y_1) ;

с h_3 – лицето на правоъгълника с върхове (x, y) , (x_{i-1}, y_{j-1}) , (x, y_{j-1}) и (x_{i-1}, y) .

Тогава

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y c(u, v) du dv &= h \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} c_{kl} + h_1 \sum_{k=1}^{i-1} c_{kj} + h_2 \sum_{l=1}^{j-1} c_{il} + h_3 c_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_{kl} + \frac{h_1}{h} \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{kj} + \frac{h_2}{h} \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_{il} + \frac{h_3}{h} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(x, y) - s(f, x, y) &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \frac{h_1}{h} \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{kj} - \frac{h_2}{h} \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_{il} - \frac{h_3}{h} \Delta_{ij} \\ &= -\frac{h_1}{h} [f(x_{i-1}, y_j) + f(0, y) - f(x_{i-1}, y) - f(0, y_j)] \\ &\quad - \frac{h_2}{h} [f(x_i, y_{j-1}) + f(x, 0) - f(x_i, 0) - f(x, y_{j-1})] \\ &\quad + \left(1 - \frac{h_1}{h}\right) \Delta_1 + \left(1 - \frac{h_2}{h}\right) \Delta_2 + \Delta_3 - \frac{h_3}{h} \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Като използваме свойствата на модула на непрекъснатост, получаваме оценката

$$\begin{aligned} |f(x, y) - s(f, x, y)| &\leq 2 \left[\frac{h_1}{h} \omega_{1,1} \left(f, 1, \frac{1}{N} \right) + \left(1 - \frac{h_1}{h}\right) \omega_{1,1} \left(f, 1, \frac{1}{N} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_2}{h} \omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, 1 \right) + \left(1 - \frac{h_2}{h}\right) \omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, 1 \right) + 2\omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, \frac{1}{N} \right) \right] \\ &= 2 \left[\omega_{1,1} \left(f, 1, \frac{1}{N} \right) + \omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, 1 \right) + 2\omega_{1,1} \left(f, \frac{1}{M}, \frac{1}{N} \right) \right]. \end{aligned}$$

В този прост случай можем да дадем явно Лагранжевия базис за

$$S_{1,1}^0 = \left\{ s : \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}(x, y) = c_{ij}, (x, y) \in \square_{ij}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, s(0, y) = 0, s(x, 0) = 0 \right\}.$$

По-точно, построяваме функциите $\lambda_{pq}(x, y) \in S_{1,1}^0$ така, че

$$\lambda_{pq} \left(\frac{k}{M}, \frac{l}{N} \right) = \delta_{pk} \delta_{ql}, \quad k = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N.$$

Търсим $\lambda_{pq}(x, y)$ във вида

$$\lambda_{pq}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^0 (y-v)_+^0 c(t, v) dt dv,$$

където $c(t, v) = c_{ij}$ за $(t, v) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Намираме, че

$$\lambda_{pq}(x, y) = \begin{cases} MN \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(y - \frac{q-1}{N} \right), & (x, y) \in \square_{pq} \\ MN \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(y - \frac{q-1}{N} \right), & (x, y) \in \square_{p+1,q} \\ MN \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right), & (x, y) \in \square_{p,q+1} \\ MN \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right), & (x, y) \in \square_{p+1,q+1} \\ 0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Пресмятането на λ_{pq} е директно и затова го пропускаме тук. Вместо това ще покажем как може да се пресмятат базисните функции в по-сложния случай $(m, n) = (1, 2)$.

След пресмятането на λ_{pq} може да се даде явно решението на интерполационната задача така:

$$s(f, x, y) = f(0, y) + f(x, 0) - f(0, 0) + \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N f(t_{pq}) \lambda_{pq}(x, y).$$

3.2 Случай $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (1, 2)$ и $\mathbf{t}_{ij} = (\mathbf{i}/M, \mathbf{j}/N)$

Тук ще построим Лагранжевите базисни функции $\lambda_{pq}(x, y) \in S_{1,2}^0$. По дефиниция те удовлетворяват условията

$$(2.2) \quad \lambda_{pq}\left(\frac{k}{M}, \frac{l}{N}\right) = \delta_{pk}\delta_{ql}, \quad k = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N.$$

Търсим $\lambda_{pq}(x, y)$ във вида

$$\lambda_{pq}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^0 (y-v)_+^1 c(t, v) dt dv$$

където $c(t, v) = c_{ij}$ за $(t, v) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Следващата ни цел е да пресметнем константите c_{ij} . Ще ги определим като използваме интерполационните условия (2.2).

Да предположим най-напред, че $p > 1$, $q > 1$.

Използвайки условията $0 = \lambda_{pq}\left(\frac{1}{M}, \frac{1}{N}\right)$ получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{M} - t\right)_+^0 \left(\frac{1}{N} - v\right)_+^1 c(t, v) dt dv \\ &= c_{11} \int_0^{1/M} \left(\frac{1}{M} - t\right)_+^0 dt \int_0^{1/N} \left(\frac{1}{N} - v\right) dv = c_{11} \frac{1}{2MN^2}, \end{aligned}$$

т.е. $c_{11} = 0$.

Нещо повече, условието $\lambda_{pq}\left(\frac{1}{M}, \frac{l}{N}\right) = 0$ дава

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{1/M} \left(\frac{1}{M} - t\right)_+^0 dt \int_0^{1/N} \left(\frac{l}{N} - v\right) dv c_{11} \\ &+ \int_0^{1/M} \left(\frac{1}{M} - t\right)_+^0 dt \int_{1/N}^{2/N} \left(\frac{l}{N} - v\right) dv c_{12} + \dots \\ &+ \int_0^{1/M} \left(\frac{1}{M} - t\right)_+^0 dt \int_{(l-1)/N}^{l/N} \left(\frac{l}{N} - v\right) dv c_{1l}. \end{aligned}$$

За $l = 2$ получаваме $0 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot c_{12}$ и следователно $c_{12} = 0$. Аналогично, получаваме $c_{13} = 0, \dots, c_{1l} = 0$ за $l = 3, \dots, N$. Ако $p > 2$, по същия начин показваме, че $c_{2l} = 0$ за $l = 1, \dots, N$. Освен това, за всички $k < p$, имаме $c_{kl} = 0$ за $l = 1, \dots, N$. Съвсем аналогично получаваме същото за всички $l < q$

и $k = 1, \dots, M$. В случая $p = 1$ (или $q = 1$) тези нулеви стълбове (редове) липсват.

Да предположим, че $p = 1, \dots, M, q = 1, \dots, N$. От равенството $1 = \lambda_{pq} \left(\frac{p}{M}, \frac{q}{N} \right)$ получаваме

$$1 = c_{pq} \int_{(p-1)/M}^{p/M} \left(\frac{p}{M} - t \right)^0 dt \int_{(q-1)/N}^{q/N} \left(\frac{q}{N} - v \right)^1 dv = c_{pq} \frac{1}{M} \frac{1}{2N^2},$$

т.е. $c_{pq} = 2MN^2$.

Нека сега $k \geq p$ и $l \geq q$ и $(k-p)^2 + (l-q)^2 \neq 0$. Тогава

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{pq} \left(\frac{k}{M}, \frac{l}{N} \right) = \sum_{j=q}^l \sum_{i=p}^k c_{ij} \int_{(i-1)/M}^{i/M} \left(\frac{k}{M} - t \right)^0 dt \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left(\frac{l}{N} - v \right)^1 dv \\ &= \sum_{j=q}^l \sum_{i=p}^k c_{ij} \frac{1}{M} \frac{(2l-2j+1)}{2N^2}. \end{aligned}$$

Получаваме

$$(2.3) \quad c_{kl} = - \left[\sum_{j=q}^{l-1} \sum_{i=p}^k c_{ij} (2l-2j+1) + \sum_{i=p}^{k-1} c_{il} \right].$$

Ако горният индекс е по-малък от долния в някоя от сумите, то ще смятаме, че тази сума е равна на нула. За $l = q, k = p+1, \dots, M$, имаме

$$(2.4) \quad c_{kq} = - \sum_{i=p}^{k-1} c_{iq}.$$

За $k = p, l = q+1, \dots, N$,

$$(2.5) \quad c_{pl} = - \sum_{j=q}^{l-1} c_{pj} (2l-2j+1).$$

Полагаме в (2.4) $k = p+1$ и получаваме $c_{p+1,q} = -c_{pq} = -2MN^2$. За $k = p+2$: $c_{p+2,q} = -(c_{pq} + c_{p+1,q}) = 0$, за $k = p+3$: $c_{p+3,q} = -(c_{pq} + c_{p+1,q} + c_{p+2,q}) = 0$, и така нататък $c_{kp} = 0$ за $k = p+2, \dots, M$.

От (2.5), за $l = q+1$ имаме, че $c_{p,q+1} = -3c_{pq} = -6MN^2$. Може да се докаже по индукция, че $c_{pl} = (-1)^{l-q} 4c_{pq} = (-1)^{l-q} 8MN^2$ за $l = q+2, \dots, N$. Наистина,

от (2.5) за $l = q + 2$ следва, че $c_{p,q+2} = -[5c_{pq} + 3(-3c_{pq})] = (-1)^{q+2-q}4c_{pq}$. Да допуснем, че твърдението е вярно за всяко естествено число от $(q+2)$ до $(l-1)$. При това условие ще докажем, че то е вярно за $l = q+2n$. Случаят $l = q+2n+1$ се получава аналогично. За целта използваме (2.5):

$$\begin{aligned} c_{pl} &= c_{p,q+2n} = -[(4n+1)c_{pq} + (4n-1)c_{p,q+1} + (4n-3)c_{p,q+2} + \dots + 3c_{p,l-1}] \\ &= -c_{pq} \{ (4n+1) - (4n-1).3 + [-3 + 5 - 7 + \dots + (4n-3)].4 \} \\ &= 4c_{pq} = -(1)^{l-q}4c_{pq} = -(1)^{l-q}8MN^2. \end{aligned}$$

По индукция (по l) ще докажем, че $c_{pl} = -c_{p+1,l}$, $c_{kl} = 0$ за $k = p+2, \dots, M$ и $l = q, \dots, N$. Твърдението е в сила за $l = q$. Нека то е в сила за всяко естествено число от q до $(l-1)$. Тогава по (2.3)

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \left[\sum_{j=q}^{l-1} (c_{pj} + c_{p+1,j})(2l-2j+1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=q}^{l-1} \sum_{i=p+2}^{k-1} c_{ij}(2l-2j+1) + \sum_{i=p}^{k-1} c_{il} \right] = - \sum_{i=p}^{k-1} c_{il}, \end{aligned}$$

т.е. получаваме зависимост, подобна на (2.4) Като положим в нея $k = p+1$, получаваме $c_{p+1,l} = -c_{pl}$. Субституцията $k = p+2$ дава $c_{p+2,l} = 0$ и така нататък, получаваме $c_{Ml} = 0$. Твърдението е доказано.

И така, пресметнахме $\{c_{ij}\}_{i=1,j=1}^{M,N}$ за $\lambda_{pq}(x,y)$.

Сега сме готови да дадем явен вид на $\lambda_{pq}(x,y)$. Нека $(x,y) \in \square_{kl}$. Като вземем пред вид $c(t,v) = c_{ij}$ за $(x,y) \in \square_{ij}$ и $c_{ij} = 0$ за някои (i,j) получаваме

$$\begin{aligned} \lambda_{pq}(x,y) &= \sum_{j=q}^{l-1} \sum_{i=p}^{k-1} c_{ij} \int_{(i-1)/M}^{i/M} (x-t)^0 dt \int_{(j-1)/N}^{j/N} (y-v)^1 dv \\ &+ \sum_{j=q}^{l-1} c_{kj} \int_{(k-1)/M}^x (x-t)^0 dt \int_{(j-1)/N}^{j/N} (y-v)^1 dv \\ &+ \sum_{i=p}^{k-1} c_{il} \int_{(i-1)/M}^{i/M} (x-t)^0 dt \int_{(l-1)/N}^y (y-v)^1 dv \\ &+ c_{kl} \int_{(k-1)/M}^x (x-t)^0 dt \int_{(l-1)/N}^y (y-v)^1 dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=q}^{l-1} \sum_{i=p}^{k-1} c_{ij} + \frac{1}{MN} \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) + \\
&+ \sum_{j=q}^{l-1} c_{kj} \frac{1}{N} \left(x - \frac{k-1}{M} \right) \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) \\
&+ \sum_{i=p}^{k-1} c_{il} \frac{1}{2M} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2 + c_{kl} \left(x - \frac{k-1}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2.
\end{aligned}$$

Ще разгледаме различни случаи за k и l .

1. $(x, y) \in \square_{pq}$ т.е. $k = p$, $l = q$. Тогава

$$\lambda_{pq}(x, y) = c_{pq} \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 = MN^2 \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2.$$

2. $(x, y) \in \square_{p, q+1}$ т.е., $k = p$, $l = q+1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\lambda_{pq}(x, y) &= c_{pq} \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \frac{1}{N} \left(y - \frac{2q-1}{2N} \right) + c_{p, q+1} \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{q}{N} \right)^2 \\
&= 3MN^2 \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N} \right).
\end{aligned}$$

3. $(x, y) \in \square_{p+1, q}$, тогава

$$\begin{aligned}
\lambda_{pq}(x, y) &= c_{pq} \frac{1}{2M} \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 + c_{p+1, q} \left(x - \frac{p}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 \\
&= MN^2 \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right).
\end{aligned}$$

4. $(x, y) \in \square_{p+1, q+1}$, тогава

$$\begin{aligned}
\lambda_{pq}(x, y) &= c_{pq} \frac{1}{MN} \left(y - \frac{2q-1}{2N} \right) + c_{p+1, q} \left(x - \frac{p}{M} \right) \frac{1}{N} \left(y - \frac{2q-1}{2N} \right) \\
&+ c_{p, q+1} \frac{1}{2M} \left(y - \frac{q}{N} \right)^2 + c_{p+1, q+1} \left(x - \frac{p}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{q}{N} \right)^2 \\
&= 3MN^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N} \right).
\end{aligned}$$

5. $(x, y) \in \square_{kl}$, за $k \leq p-1$ или $l \leq q-1$. Нека например $k \leq p-1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\lambda_{pq}(x, y) &= \sum_{j=q}^{l-1} c_{kj} \left(x - \frac{k-1}{M} \right) \frac{1}{N} \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) \\
&+ c_{kl} \left(x - \frac{k-1}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

т.к. $c_{kj} = 0$ за $j = q, \dots, l$.

6. Нека $(x, y) \in \square_{pl}$, за $l \geq q + 2$ Тогава

$$\begin{aligned}\lambda_{pq}(x, y) &= \sum_{j=q}^{l-1} c_{pj} \left(x - \frac{p-1}{M}\right) \frac{1}{N} \left(y - \frac{2j-1}{2N}\right) + c_{pl} \left(x - \frac{p-1}{M}\right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{p-1}{M}\right) \left[\sum_{j=q}^{l-1} c_{pj} \frac{1}{N} \left(y - \frac{2j-1}{2N}\right) + c_{pl} \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N}\right)^2 \right]\end{aligned}$$

т.к. $c_{pq} = 2MN^2$, $c_{p,q+1} = -6MN^2$, $c_{p,q+t} = (-1)^t 8MN^2$ вторият множител A е равен на

$$2MN \left[y - \frac{2q-1}{2N} - 3 \left(y - \frac{2q+1}{2N} \right) + 4B \right] + 4MN^2 (-1)^{l-q} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2$$

където

$$B = y - \frac{2(q+2)-1}{2N} - y + \frac{2(q+3)-1}{2N} + \dots + (-1)^{l-q-1} \left(y - \frac{2(l-1)-1}{2N} \right),$$

т.е.

$$A = 4MN \left[\left(\frac{q+1}{N} - y \right) + 2B \right]$$

Ще пресметнем B най-напред за случай на четен брой събираеми, т.е. $l-1 - (q+2) + 1 = l-q-2$ е четно, т.е. $(l-q)$ е четно. Тогава

$$B = \frac{2}{2N} [-(q+2) + (q+3) - (q+4) + \dots - (l-2) + (l-1)] = \frac{l-q-2}{2N}$$

Ако $(l-q)$ е нечетно, то

$$B = \left[\frac{l-1-q-2}{2N} + y - \frac{2(l-1)-1}{2N} \right] = \left[y - \frac{l+q}{2N} \right].$$

Тогава

$$\lambda_{pq} = (-1)^{l-q+1} \left(x - \frac{p-1}{M}\right) \left(y - \frac{l-1}{N}\right) \left(\frac{l}{N} - y\right) 4MN^2.$$

7. Нека $(x, y) \in \square_{p+1,l}$, за $l \geq q + 2$. Тогава

$$\begin{aligned}\lambda_{pq}(x, y) &= \sum_{j=q}^{l-1} c_{pj} \frac{1}{MN} \left(y - \frac{2j-1}{2N}\right) + \sum_{j=q}^{l-1} c_{p+1,j} \frac{1}{N} \left(x - \frac{p}{M}\right) \left(y - \frac{2j-1}{2N}\right) \\ &+ c_{pl} \frac{1}{2M} \left(y - \frac{l-1}{N}\right)^2 + c_{p+1,l} \left(x - \frac{p}{M}\right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N}\right)^2.\end{aligned}$$

Т.к. $c_{p+1,j} = -c_{pj}$ за $j = 1, \dots, N$, то

$$\lambda_{pq}(x, y) = \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left[\sum_{j=q}^{l-1} c_{pj} \frac{1}{N} \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) + c_{pl} \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2 \right]$$

и както в 6.

$$\lambda_{pq}(x, y) = (-1)^{l-q+1} 4MN^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(y - \frac{l-1}{N} \right) \left(\frac{l}{N} - y \right).$$

8. Нека $(x, y) \in \square_{kl}$, за $k \geq p+2$ и $l \geq q$. Представяме λ_{pq} във вида

$$\begin{aligned} & \sum_{j=q}^{l-1} (c_{pj} + c_{p+1,j}) \frac{1}{MN} \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) + \sum_{j=q}^{l-1} \sum_{i=p+2}^{k-1} c_{ij} \frac{1}{MN} \left(y - \frac{2j-1}{2N} \right) \\ & + \left[(c_{pj} + c_{p+1,j}) + \sum_{i=p+2}^{k-1} c_{il} \right] \frac{1}{2M} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2 + c_{kl} \left(x - \frac{k-1}{M} \right) \frac{1}{2} \left(y - \frac{l-1}{N} \right)^2. \end{aligned}$$

Следователно $\lambda_{pq}(x, y) = 0$.

Получаваме, че $\lambda_{pq}(x, y)$ е равно на

$$\left\{ \begin{array}{l} MN^2 \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 \text{ за } (x, y) \in \square_{pq}; \\ MN^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(y - \frac{q-1}{N} \right)^2 \text{ за } (x, y) \in \square_{p+1,q}; \\ 3MN^2 \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N} \right) \text{ за } (x, y) \in \square_{p,q+1}; \\ 3MN^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(\frac{q+1}{N} - y \right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N} \right) \text{ за } (x, y) \in \square_{p+1,q+1}; \\ (-1)^{l-q+1} 4MN^2 \left(x - \frac{p-1}{M} \right) \left(y - \frac{l-1}{N} \right) \left(\frac{l}{N} - y \right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{pl}; N \geq l \geq q+2; \\ (-1)^{l-q+1} 4MN^2 \left(\frac{p+1}{M} - x \right) \left(y - \frac{l-1}{N} \right) \left(\frac{l}{N} - y \right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{p+1,q}; N \geq l \geq q+2; \\ 0, \text{ в останалите случаи.} \end{array} \right.$$

Това е вярно и за $p = M$ и $q = N$, но в тези случаи разглеждаме само онези индекси, които са по-малки или равни на M или N , съответно.

Тъй като решаването на нехомогенната задача лесно се свежда до решаването на хомогенната (т.е. $B_f(x, y) = 0$), то е важно да оценим грешката за този случай.

Да разгледаме оператора $I_{mn}[f]$, който на функцията f съпоставя нейния интерполиращ във фиксирано множество от възли $\{t_{pq}\}$ (m, n) -сплайн, принадлежащ на $S_{m,n}^0$. За нормата $\|I_{mn}\|$ на този оператор, действащ от множеството $C(G)^\circ$ от непрекъснатите в единичния квадрат G и ограничени по модул с 1 функции, получаваме

$$\|I_{mn}\| = \sup_{f \in C(G)^\circ} \left\| \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \lambda_{pq}(x, y) f(t_{pq}) \right\| \leq \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}(x, y)\|.$$

Оценките на нормата $\|I_{mn}\|$ са от полза за оценяване на грешката на приближението. За простота на означенията ще изпускаме индексите mn на I_{mn} , също така ще пишем \sum вместо $\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N$.

Имаме

$$\begin{aligned} \|f - If\|_X &= \|f - s + Is - If\|_X \leq \|f - s\|_X + \|I\|_{L_\infty \rightarrow X} \|f - s\|_{L_\infty} \\ &\leq \|f - s\|_{L_\infty} (1 + \|I\|_{L_\infty \rightarrow X}) \end{aligned}$$

за всеки сплайн $s \in S_{m,n}$.

В случая (1, 2) сме построили Лагранжев базис и така можем да напишем $I_{1,2}[f]$ във вида

$$I_{1,2}[f](x, y) = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \lambda_{pq}(x, y) f(t_{pq}).$$

В случая $X = L_1$ получаваме следните оценки:

$$\|\lambda_{pq}\|_{L_1} = \frac{2}{3MN}(N - q + 1) \text{ за } 1 \leq p < M, 1 \leq q < N,$$

$$\|\lambda_{Mq}\|_{L_1} = \frac{N-q+1}{3MN} \text{ за } 1 \leq q < N,$$

$$\|\lambda_{pN}\|_{L_1} = \frac{1}{3MN} \text{ за } 1 \leq p < M,$$

$$\|\lambda_{MN}\|_{L_1} = \frac{1}{6MN}.$$

Затога

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_1} = \frac{N}{3} \left(1 - \frac{1}{2M}\right) \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) \sim \frac{N}{3},$$

когато M и N клонят към безкрайност.

Следователно

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{N}{3} \left(1 - \frac{1}{2M}\right) \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) + 1\right] E_f^\infty(1, 2),$$

където $E_f^\infty(1, 2)$ е най-доброто L_∞ приближение на f с $(1, 2)$ -сплайни.

В случая $X = L_2$ пресмятаме $\|\lambda_{pq}\|_{L_2}$ за $1 \leq p \leq M$, $1 \leq q \leq N$. За $1 \leq p < M$, $1 \leq q < N$ получаваме

$$\|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2 = \frac{16}{45} \left(N - q + \frac{3}{2}\right).$$

Освен това за $1 \leq q < N$

$$\|\lambda_{Mq}\|_{L_2}^2 = \frac{8}{45MN} \left(N - q + \frac{3}{2}\right),$$

за $1 \leq p < M$

$$\|\lambda_{pN}\|_{L_2}^2 = \frac{2}{45MN} \quad \text{и} \quad \|\lambda_{MN}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{15MN}.$$

Тогава

$$\sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2 = \frac{(N+2)(2-1/M)}{45} \sim \frac{2N}{45}.$$

Оценяваме $\sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2}$ като използваме неравенството $x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$:

$$\begin{aligned} \sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2} &\leq \sqrt{MN \sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2} \\ &= \sqrt{(M-1/2)(N+2)N} \sqrt{\frac{2}{45}} \\ &\sim \sqrt{MN} \sqrt{\frac{2}{45}} \end{aligned}$$

ако M и N клонят към безкрайност. Следователно

$$\|I\|_{L_2} \leq \sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2} \leq \sqrt{(M-1/2)(N+2)N} \sqrt{\frac{2}{45}} \sim \sqrt{MN} \sqrt{\frac{2}{45}}.$$

$$\|f - If\|_{L_2} \leq \left[\sqrt{(M-1/2)(N+2)N} \sqrt{\frac{2}{45}} + 1 \right] E_f^\infty(1, 2).$$

Нека $X = L_\infty$. Като използваме това, че $\|\lambda_{pq}\|_{L_\infty} = 1$, получаваме за $f : \|f\|_{L_\infty} \leq 1$, че $\|If\|_{L_\infty} \leq \sum 1.1 = MN$. Следователно

$$\|I\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq MN$$

и

$$\|f - If\|_{L_\infty} \leq (MN + 1) E_f^\infty(1, 2).$$

Ще използваме оценката за $\sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2$ за да получим по-добра оценка за $\|f - If\|_{L_1}$. Нека с $\chi_{pq}(x, y)$ означим характеристичната функция на носителя на $\lambda_{pq}(x, y)$. Тогава

$$\begin{aligned} \|If\|_{L_1} &= \left\| \sum \lambda_{pq} \chi_{pq} f(t_{pq}) \right\|_{L_1} \\ &\leq \sum \|\lambda_{pq} \chi_{pq} f(t_{pq})\|_{L_1} \\ &\leq \sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2} \|\chi_{pq}\|_{L_2} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \left(\sum \|\chi_{pq}\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}$$

Т.к.

$$\|\chi_{pq}\|_{L_2}^2 = \frac{2}{M} \left(1 - \frac{q-1}{N} \right)$$

за $1 \leq p < M$, $1 \leq q \leq N$ и за

$$\|\chi_{Mq}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{M} \left(1 - \frac{q-1}{N} \right)$$

ние получаваме

$$\left(\sum \|\chi_{pq}\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{M} \right) \frac{N+1}{2}}.$$

Тогавя

$$\|I\|_{L_\infty \rightarrow L_1} = \sup_{\|f\|_{L_\infty} \leq 1} \|If\|_{L_1} \leq \frac{(2 - 1/M) \sqrt{(N+1)(N+2)}}{3\sqrt{10}} \sim \frac{2}{3\sqrt{10}} N$$

когато M и N клонят към безкрайност. Следователно получаваме друга оценка

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{(2 - 1/M) \sqrt{(N+1)(N+2)}}{3\sqrt{10}} + 1 \right] E_f^\infty(1, 2).$$

3.3 Случай $(m, n) = (2, 2)$ и $t_{ij} = (i/M, j/N)$

Търсим $\lambda_{pq}(x, y)$ във вида

$$\lambda_{pq}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)_+^1 (y-v)_+^1 c(t, v) dt dv$$

където $c(t, v) = c_{ij}$ за $(t, v) \in \square_{ij}$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Константите c_{ij} са определени от интерполационните условия:

$$\lambda_{pq}(t_{ij}) = \delta_{pi} \delta_{qj} \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

Както в предната секция получаваме:

$$c_{pq} = 4M^2 N^2, \quad c_{p+1, q} = -3c_{pq}, \quad c_{kq} = (-1)^{k-p} 4c_{pq} \quad \text{за } k \geq p+2.$$

Нещо повече, $c_{k,q+1} = -3c_{kq}$ и $c_{kl} = (-1)^{l-q}4c_{kq}$ за $k \geq p+2$.

Като се използват горните изрази за c_{ij} може да се получи, че $\lambda_{pq}(x, y)$ е равно на

$$\left\{ \begin{array}{l} M^2 N^2 \left(x - \frac{p-1}{M}\right)^2 \left(y - \frac{q-1}{N}\right)^2 \text{ за } (x, y) \in \square_{pq}; \\ 3M^2 N^2 \left(\frac{p+1}{M} - x\right) \left(x - \frac{p}{M} + \frac{1}{3M}\right) \left(y - \frac{q-1}{N}\right)^2 \text{ за } (x, y) \in \square_{p+1,q}; \\ 3M^2 N^2 \left(x - \frac{p-1}{M}\right)^2 \left(\frac{q+1}{N} - y\right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N}\right) \text{ за } (x, y) \in \square_{p,q+1}; \\ 9M^2 N^2 \left(\frac{p+1}{M} - x\right) \left(x - \frac{p}{M} + \frac{1}{3M}\right) \left(\frac{q+1}{N} - y\right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N}\right) \text{ за } (x, y) \in \square_{p+1,q+1}; \\ (-1)^{l-q+1} 4M^2 N^2 \left(x - \frac{p-1}{M}\right)^2 \left(y - \frac{l-1}{N}\right) \left(\frac{l}{N} - y\right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{pl}, \quad q+2 \leq l \leq N; \\ (-1)^{l-q+1} 12M^2 N^2 \left(\frac{p+1}{M} - x\right) \left(x - \frac{p}{M} + \frac{1}{3M}\right) \left(y - \frac{l-1}{N}\right) \left(\frac{l}{N} - y\right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{p+1,l}, \quad q+2 \leq l \leq N; \\ (-1)^{k-p+1} 4M^2 N^2 \left(\frac{k}{M} - x\right) \left(x - \frac{k-1}{M}\right) \left(y - \frac{q-1}{N}\right)^2 \\ \text{за } (x, y) \in \square_{kq}, \quad p+2 \leq k \leq M; \\ (-1)^{k-p+1} 12M^2 N^2 \left(x - \frac{k-1}{M}\right) \left(\frac{k}{M} - x\right) \left(\frac{q+1}{N} - y\right) \left(y - \frac{q}{N} + \frac{1}{3N}\right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{k,q+1}, \quad p+2 \leq k \leq M; \\ (-1)^{l-q+k-p} 16M^2 N^2 \left(x - \frac{k-1}{M}\right) \left(\frac{k}{M} - x\right) \left(y - \frac{l-1}{N}\right) \left(\frac{l}{N} - y\right) \\ \text{за } (x, y) \in \square_{kl}, \quad p+2 \leq k \leq M, \quad q+2 \leq l \leq N. \end{array} \right.$$

Технически пресмятания показват, че

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_1} = \frac{1}{9MN} (M^2 + M - 1) (N^2 + N - 1) \sim \frac{MN}{9}$$

когато M и N клонят към безкрайност.

Освен това

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_2}^2 = \frac{64}{225MN} \left(M^2 + 2M - \frac{21}{8}\right) \left(N^2 + 2N - \frac{21}{8}\right).$$

Следователно

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_2} \leq \frac{8}{15} \sqrt{\left(M^2 + 2M - \frac{21}{8}\right) \left(N^2 + 2N - \frac{21}{8}\right)} \sim \frac{8}{15} MN.$$

Лесно се вижда, че

$$\sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \|\lambda_{pq}\|_{L_\infty} = MN.$$

По същия начин както в предната секция може да се получи

$$\|f - If\|_{L_1} \leq \left[\frac{1}{9MN} (M^2 + M - 1) (N^2 + N - 1) + 1 \right] E_f^\infty(2, 2),$$

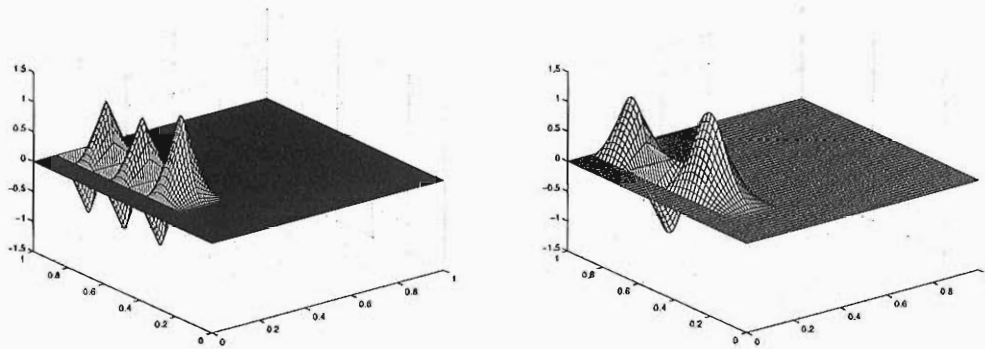
където $E_f^\infty(2, 2)$ е най-доброто L_∞ приближение за f с $(2, 2)$ -сплайни,

$$\|f - If\|_{L_2} \leq \left[\frac{8}{15} \sqrt{\left(M^2 + 2M - \frac{21}{8}\right) \left(N^2 + 2N - \frac{21}{8}\right)} + 1 \right] E_f^\infty(2, 2)$$

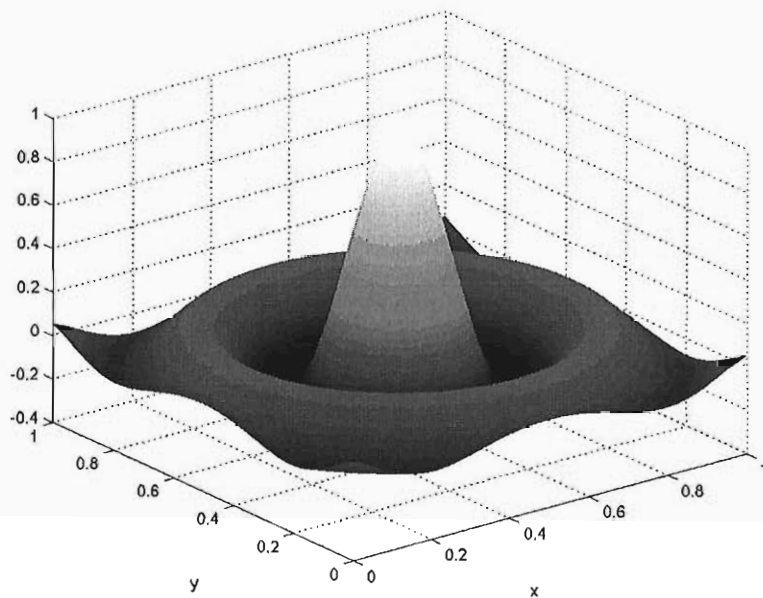
и

$$\|f - If\|_{L_\infty} \leq (MN + 1) E_f^\infty(2, 2).$$

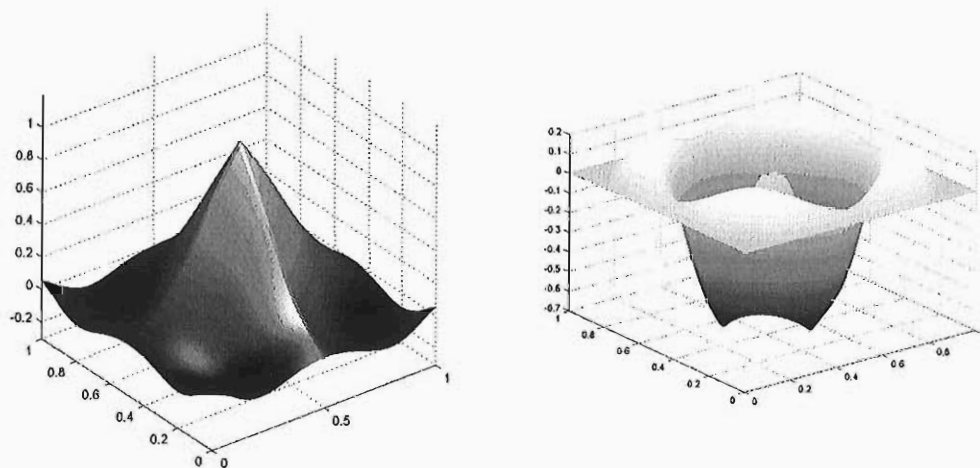
В края на тази глава представяме графики на някои от базисните полиноми в някои конкретни случаи, а също така и илюстрираме метода отново върху функцията „Мексиканска шапка“. Графиките са получени от програми на Mathematica 5, реализиращи предложениия тук метод.



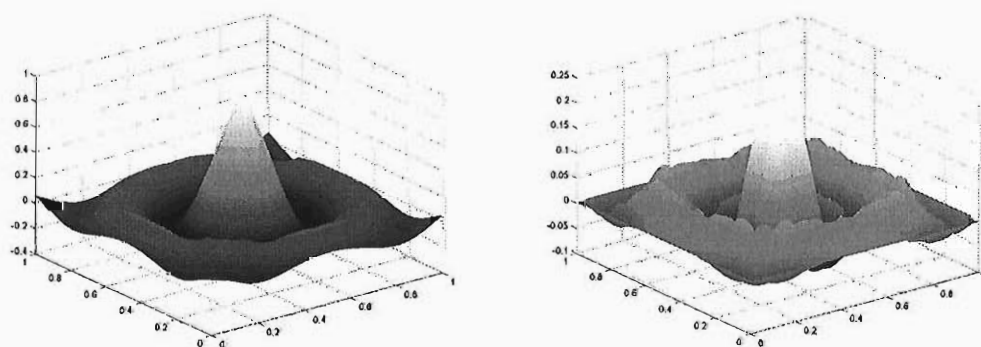
Фигура 2.1: Графика на функцията $\lambda_{2,4}$ за $(m, n) = (1, 2)$ и $M = N = 10$ и графика на функцията $\lambda_{2,4}$ за $(m, n) = (1, 2)$ и $M = 10, N = 5$.



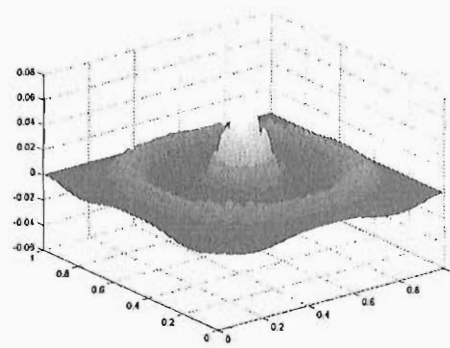
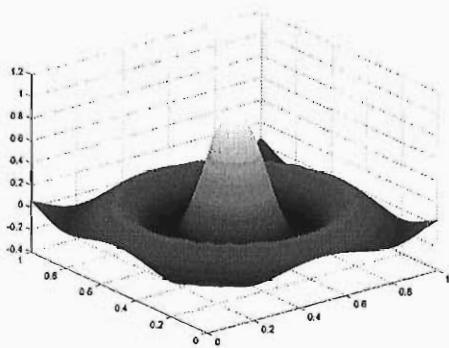
Фигура 2.2: Графика на функцията „Мексиканска шапка“ $\frac{\sin(3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}})}{3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}}}$.



Фигура 2.3: Графика на интерполация $(1,1)$ -сплайн на функцията „Мексиканска шапка“ в 4 точки и графика на грешката.



Фигура 2.4: Графика на интерполация $(1,1)$ -сплайн на функцията „Мексиканска шапка“ в 100 точки и графика на грешката.



Фигура 2.5: Графика на интерполация $(1, 1)$ -сплайн на функцията „Мексиканска шапка“ в 400 точки и графика на грешката.

Глава 3

Интерполация чрез полиноми на две променливи основана на Радонови проекции

§1 Предварителни сведения за хребетни функции

Ще разглеждаме реални функции f дефинирани върху равнината \mathbb{R}^2 . Точките от \mathbb{R}^2 ще означаваме така $\mathbf{x} = (x, y)$. Освен това ще предполагаме, че носителите на функциите f , които ще апроксимираме се съдържат в единичния кръг $\mathbf{B} := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Тук, както обикновено, $\|\cdot\|$ е евклидовата норма, $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

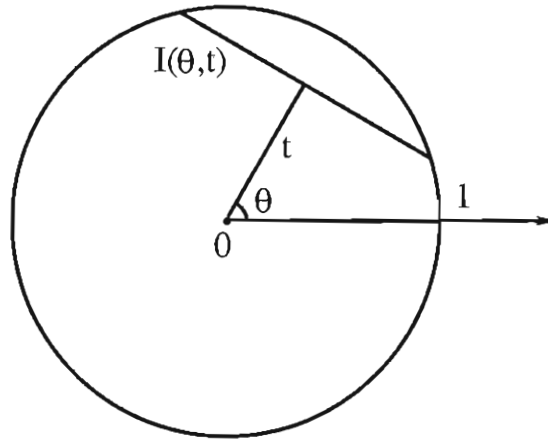
Частичната информация за функциите ще бъде дадена като информация за стойностите на интеграли от f върху отсечки от единичния кръг \mathbf{B} . За дадени $t \in [-1, 1]$ и ъгъл $\theta \in [0, \pi)$, измерен в посока обратна на часовниковата стрелка от положителната посока на оста x определяме линията ℓ чрез уравнението

$$\ell(x, y) := x \cos \theta + y \sin \theta - t = 0.$$

Точките (x, y) от отсечка $I(\theta, t) := \ell \cap \mathbf{B}$ могат да се представят така

$$x = t \cos \theta - s \sin \theta, \quad y = t \sin \theta + s \cos \theta$$

за $s \in [-\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}]$.



За $t \in [-1, 1]$ Радонова проекция $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ на f по посока θ се дефинира чрез формулата

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta(f; t) &:= \int_{I(\theta, t)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) \, ds. \end{aligned}$$

В литературата $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ се нарича също и X -лъч (рентгенов лъч). Да отбележим, че

$$\mathcal{R}_\theta(f; t) \equiv \mathcal{R}_{\theta+\pi}(f; -t).$$

Както се вижда, два ъгъла θ_1 и θ_2 , равни по модул π дават същата проекция. Затова по-нататък ще предполагаме, че $0 \leq \theta < \pi$.

Трансформацията на Радон

$$f \rightarrow \{\mathcal{R}_\theta(f; t) : -1 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta < \pi\}$$

определя f еднозначно. Това е доказано от Радон [36] и Джон [28] за диференцируеми функции. По-скорошен резултат [43] (разглеждащ общия d -мерен случай) дава следното.

Теорема 3.А. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ има компактен носител, съдържащ се в \mathbf{B} , то f се определя еднозначно от произволно безкрайно множество от X -лъчи.

Т.к. всички проекции на функцията $f \equiv 0$ са равни на нула, то от горната теорема следва, че единствената функция, която има нулева Радонова проекция е нулевата функция.

В специалния случай, когато f има "plane wave"-структура Радоновата проекция се пресмята лесно. Ще опишем това по-подробно. Нека $\rho(t)$ е дадена функция на една променлива и за даден ъгъл θ разглеждаме единичния вектор $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$. Функцията

$$\rho(\mathbf{x} \cdot \xi) := \rho(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

се нарича *хребетна функция* с направление θ , отговаряща на $\rho(t)$ (с профил ρ).

Очевидно, всяка хребетна функция с направление θ е константа върху всяка права, перпендикулярна ξ . Затова, за всяка хребетна функция $\rho(\mathbf{x} \cdot \xi)$, имаме

$$\mathcal{R}_\theta(\rho; t) = 2\sqrt{1-t^2} \rho(t).$$

Радоновите проекции в дадена посока θ на един алгебричен полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ могат лесно да бъдат намерени. В сила е следното.

Лема 3.1. Нека θ е фиксирано. За всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, съществува полином на една променлива p от степен не по-висока от n такъв, че

$$\mathcal{R}_\theta(P; t) = \sqrt{1-t^2} p(t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Това е частен случай на известен многомерен резултат (вж. например, [12], Лема 4.1).

Всеки алгебричен полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ се определя еднозначно само от краен брой проекции. А именно, в сила е следната

Теорема 3.В. Нека $\theta_0 < \dots < \theta_n$ са произволни дадени ъгли в $[0, \pi)$.
Тогав проекциите

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad k = 0, \dots, n,$$

определят полинома P еднозначно.

Доказателство. Т.к.

$$P(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j,$$

то

$$\mathcal{R}_{\theta}(P; t) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (t \cos \theta - s \sin \theta)^i (t \sin \theta + s \cos \theta)^j ds.$$

От условието $i+j \leq n$ следва, че подинтегралната функция е тригонометричен полином на θ от степен не по-висока от n и след интегриране по s се получава полином от същия вид. Т.к. $\mathcal{R}_{\theta+\pi}(P; t) = \mathcal{R}_{\theta}(P; -t)$ и $\{\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t)\}_{k=0}^n$ са дадени, можем да предположим, че $\mathcal{R}_{\theta}(P; t)$ са известни за $2n+2$ различни стойности на θ в интервала $[0, 2\pi)$. Да напомним, че всеки тригонометричен полином от степен n се определя от неговите стойности в $2n+1$ точки от $[0, 2\pi)$. От това следва, че ние знаем $\mathcal{R}_{\theta}(P; t)$ за всяко θ . Като използваме теоремата на Радон (Теорема 3.А) получаваме, че P се определя еднозначно от $\{\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t)\}$, $k = 0, \dots, n$. С това доказателството е завършено.

Като използваме забележката след Теорема 3.А, непосредствено получаваме

Следствие 3.1. Нека $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_n < \pi$. Нека $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ и $\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t) = 0$ за $k = 0, \dots, n$. Тогав $P \equiv 0$.

Целта ни е да интерполираме f с алгебрични полиноми от $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ като използваме краен брой интеграли $\{\mathcal{R}_{\theta_i}(f; t_i)\}$. Да отбележим, че размерността на линейното пространство $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ е равна на броя на едночлените $\{x^i y^j : i+j \leq n\}$, следователно

$$\dim \Pi_n(\mathbb{R}^2) = d(n) := \binom{n+2}{2}.$$

Когато се разглеждат функции върху \mathbf{B} често е полезно да се използва друг базис на $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$, който се получава от *полиномите на Чебишев* от втори род

$$U_m(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta}, \quad t = \cos \theta.$$

Известен факт е, (вж. например, [44]) че $U_m(t)$ е ортогонален на всички полиноми от степен по-малка от m в $[-1, 1]$ по отношение на теглото $\sqrt{1-t^2}$. Полиномите $\{U_m\}$ са нормирани, така че

$$\int_{\mathbf{B}} U_m^2(y) dx dy = 1.$$

За дадено θ (и $\xi := (\cos \theta, \sin \theta)$), построяваме хребетния полином

$$U_m(\theta; \mathbf{x}) := U_m(\mathbf{x} \cdot \xi) = U_m(x \cos \theta + y \sin \theta),$$

който приема една и съща стойност $U_m(t)$ във всички точки, разположени на една права на разстояние t от началото, която сключва ъгъл θ с оста x . От Лема 3.1 следва, че проекцията на $U_m(\theta; \mathbf{x})$ в произволна посока φ може да се изрази чрез един едномерен полином p , който в общия случай трябва да зависи от φ . Но следващата лема показва, че той е един и същ за всякакво φ , нещо повече, той е точно $U_m(t)$ с точност до константа $c(\phi, \theta, m)$.

Лема 3.2. *За всяко $t \in (-1, 1)$, θ и φ имаме*

$$\mathcal{R}_\varphi(U_m(\theta; \cdot); t) = \frac{2}{m+1} \sqrt{1-t^2} U_m(t) \frac{\sin(m+1)(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi-\theta)}.$$

Тази забележителна зависимост е установена от Мар в [30]. Ние ще я наричаме *формула на Мар*. Има доказателства от много автори (вж. например [11], Следствие 2). Формулата на Мар е основно равенство за Чебишево-Фуриеровия анализ \mathbf{B} . То дава начин за редуцирането на многомерния случай към едномерния. Следната полезна формула може да бъде изведена лесно от формулата на Мар.

Следствие 3.2. *За всеки два ъгъла θ и φ имаме*

$$\int_{\mathbf{B}} U_m(\theta; \mathbf{x}) U_m(\varphi; \mathbf{x}) dx = \frac{1}{m+1} \frac{\sin(m+1)(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi-\theta)}$$

Доказателство. Като използваме факта, че $U_m(\varphi; \mathbf{x}) = U_m(t)$ за всички \mathbf{x} от отсечката $I(\varphi, t)$, получаваме

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}} U_m(\theta; \mathbf{x}) U_m(\varphi; \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \left[\int_{I(\varphi, t)} U_m(\theta; \mathbf{x}) U_m(\varphi; \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] dt \\ &= \int_{-1}^1 U_m(t) \mathcal{R}_\varphi(U_m(\theta; \cdot); t) dt. \end{aligned}$$

Тогава като заместим израза от Лема 3.2 за $\mathcal{R}_\varphi(U_m(\theta; \cdot); t)$, и като отчетем нормализацията $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_m^2(t) dt = 1/2$, получаваме търсения резултат.

По подобен начин може да се види, че за всяко θ хребетният полином $U_m(\theta; \mathbf{x})$ е ортогонален на всеки полином от $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^2)$ върху \mathbf{B} , т.е.,

$$(3.1) \quad \int_{\mathbf{B}} U_m(\theta; \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{за всяко } P \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^2).$$

Наистина, като използваме Лема 3.1, получаваме

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}} U_m(\theta; \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 U_m(t) \mathcal{R}_\theta(P; t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_m(t) p(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Хребетният полином $U_m(\theta; \mathbf{x})$ с равноотдалечени ъгли θ играе основна роля в пространството на двумерните полиноми както може да се види от следното твърдение. То е непосредствено следствие от (3.1) и Следствие 3.2.

Теорема 3.С. *Нека*

$$\theta_{mj} := \frac{j\pi}{m+1}, \quad \forall m, \quad j = 0, \dots, m, \quad \text{и}$$

$$U_{mj}(\mathbf{x}) := U_m(\theta_{mj}; \mathbf{x}).$$

Хребетните полиноми $\{U_{mj}\}_{j=0}^m$ $_{m=0}^n$ образуват ортонормален базис в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$ върху \mathbf{B} .

Повече информация за полиномите $\{U_{mj}\}$ и други системи от ортогонални полиноми на d променливи може да се намери в [17, 35].

В много ситуации, таблица от интеграли на функция на d променливи върху $(d - 1)$ -мерни хиперравнини е най-естественият тип информация за функции на няколко променливи. Знаменитата теорема на Акопян [22, 23] в двумерния случай звучи по следния начин в нашите означения:

Теорема 3.D. Нека $X_0, \dots, X_{n+1} \in \partial B$ и $\{I(\theta_i, t_j)\}_{(i,j) \in J}$ ($|J| = d(n)$) са отсечките, съединяващи всеки две от тези $n + 2$ точки. Тогава интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_i, t_j)} P(x) dx = \gamma_{ij}, \quad (i, j) \in J, \quad P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

е разрешима (т.е. има единствено решение за всяка дадена таблица от стойности $\{\gamma_{ij}\}$).

§2 Интерполационна теорема

В настоящата секция ще покажем, че за произволно дадено множество от ъгли $\theta_0 < \dots < \theta_n$ в $[0, \pi)$, множеството от $\binom{n+2}{2}$ Радонови проекции, състоящо се от k успоредни X -лъча във всяка посока θ_k , $k = 0, \dots, n$, определя еднозначно алгебрични полиноми от степен n на две променливи.

Като следствие от Теорема 3.B, всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ се определя от своите Радонови проекции в $n + 1$ различни посоки $\theta_0, \dots, \theta_n$. С други думи, ако са дадени функциите

$$\mathcal{R}_{\theta_0}(P; t), \dots, \mathcal{R}_{\theta_n}(P; t)$$

и информацията, че те са Радонови проекции на някакъв алгебричен полином P от степен по-малка или равна на n , то може еднозначно да се възстанови полиномът P . Според Лема 3.1,

$$\mathcal{R}_\theta(P; t) = \sqrt{1 - t^2} p(t)$$

с някакво $p \in \Pi_n$. Затова не е необходимо да знаем стойностите на $\mathcal{R}_\theta(P; t)$ за всички t . Ще бъде достатъчно да се пресметнат Радоновите проекции $\mathcal{R}_\theta(P; t)$

само за $n + 1$ различни стойности на t . Тогава стойността на $\mathcal{R}_\theta(P; t)$ може да бъде намерена във всяка точка t чрез Лагранжова интерполация. Така се изправяме пред следния проблем:

Да допуснем, че са известни стойностите

$$\mathcal{R}_{\theta_i}(P; t_{ij}), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n,$$

за някакви $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_n < \pi$ и $-1 < t_{i0} < \dots < t_{in} < 1$, $i = 0, \dots, n$. Как да се възстанови P , при условие, че $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$?

Въз основа на Теорема 3.С можем да запишем P във вида

$$(3.2) \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m a_{mj}(P) U_{mj}(\mathbf{x})$$

където

$$a_{mj}(P) = \int_{\mathbf{B}} P(\mathbf{x}) U_{mj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Целта ни е да намерим коефициентите a_{mj} . Ако изберем t_{i0}, \dots, t_{in} да бъдат нулите η_0, \dots, η_n на $U_{n+1}(t)$, тогава можем лесно да пресметнем a_{mj} , и следователно да намерим P като използваме Гаусовата кубатурна формула

$$(3.3) \quad \int_{\mathbf{B}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=0}^n A_k \int_{I_k} f$$

която е построена в [11]. Тук с \int_{I_k} означаваме интеграла по хордата I_k , минаваща през $x = \eta_k$ и успоредна на ординатата. Коефициентите са дадени явно в [11]. Кубатурата е точна за всеки полином $f \in \Pi_{2n+1}(\mathbb{R}^2)$ и е единствена (с точност до ротация) със също толкова висока степен на точност (вж. [12]). Т.к. $\deg PU_{mj} \leq 2n$, можем да пресметнем интеграла за $a_{mj}(P)$ точно чрез подходяща ротация на (3.3) (на ъгъл θ_{mj}), като използваме

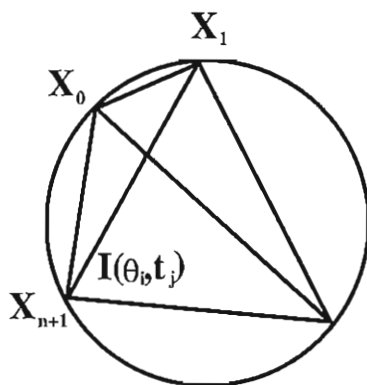
$$\int_{I_k} PU_{mj} = U_m(\eta_k) \mathcal{R}_{\theta_{mj}}(P; \eta_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Да отбележим, че проекцията $\mathcal{R}_{\theta_{mj}}(P; \eta_k)$ може да бъде намерена чрез тригонометрична интерполация т.к. $\mathcal{R}_\theta(P; \eta_k)$ е дадена за $n + 1$ стойности на θ (именно за $\theta = \theta_0, \dots, \theta_n$). Затова кубатурната формула (3.3) ни позволява да

възстановим всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ от $(n+1)^2$ неговите Радонови проекции. Но $(n+1)^2$ е на порядък два пъти повече от размерността $d(n)$ на $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$. Съществува ли начин да се възстанови P като се използват $d(n)$ стойности? С други думи, съществува ли конфигурация от $d(n)$ хорди $\{I(\theta_i, t_j)\}_{(i,j) \in J}$ ($|J| = d(n)$) в кръга \mathbf{B} така, че интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_i, t_j)} P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \gamma_{ij}, \quad (i, j) \in J, \quad P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

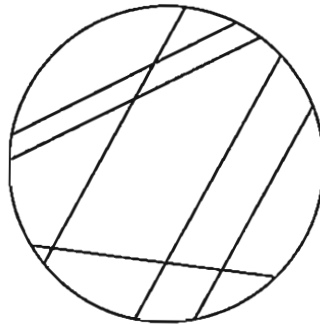
е разрешима (т.е. има единствено решение за всяка дадена информация $\{\gamma_{ij}\}$)? В резултата на Акоюн [22] се казва, че ако $I(\theta_i, t_j)$ са отсечките, съединяващи всеки две точки от предварително зададено множество от $n+2$ точки от границата $\partial\mathbf{B}$ на \mathbf{B} , то съответната интерполационна задача е коректно поставена. Това е единствената известна нетривиална конфигурация от хорди за коректно поставена интерполация, която работи за всяко n . Нека отбележим, че в случая, разглеждан от Акоюн трябва да се пресметнат Радонови проекции в $d(n)$ посоки θ_i . Такава информация се получава от измерването на X -лъчите, излизащи от $n+2$ различни точки върху $\partial\mathbf{B}$.



Друга интересна ситуация от практическа гледна точка е когато X -лъчите са взети в $n+1$ групи, като всички лъчи от всяка отделна група са успоредни. Ние ще разглеждаме именно тази ситуация. Тя може да се опише чрез множество от дадени ъгли $\theta_0 < \dots < \theta_n$ в $[0, \pi)$ и триъгълна матрица $T = \{t_{ki}\}$ от точки

$$t_{kk} < \dots < t_{kn}, \quad k = 0, \dots, n,$$

съответстващи на ъглите.



Задачата е да се характеризират всички положения на възлите $\{t_{kj}\}$, за които интерполацията на данните $\{\mathcal{R}_{\theta_k}(\cdot; t_{kj})\}$ с полиноми от степен n е разрешима. Например, в случая $n = 1$, информацията се състои от три интеграла: един по хордата в направление θ_0 и два други по успоредни хорди в посока θ_1 . В този прост случай лесно може да се види, че задачата е коректно поставена тогава и само тогава когато $t_{00} \neq 0$. Последното условие може да бъде написано като $U_1(t_{00}) \neq 0$.

Матрицата

$$U_k := \begin{pmatrix} U_k(t_{kk}) & U_{k+1}(t_{kk}) & \cdots & U_n(t_{kk}) \\ U_k(t_{k,k+1}) & U_{k+1}(t_{k,k+1}) & \cdots & U_n(t_{k,k+1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_k(t_{kn}) & U_{k+1}(t_{kn}) & \cdots & U_n(t_{kn}) \end{pmatrix}$$

играе основна роля в интерполационната задача, с която се занимаваме тук.

Теорема 3.1. За дадени ъгли $0 \leq \theta_0 < \cdots < \theta_n < \pi$ и съответни точки $T = \{t_{ki}\}_{k=0, i=k}^n$, интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_k, t_{ki})} P(x) dx = \gamma_{ki}, \quad k = 0, \dots, n, \quad i = k, \dots, n, \quad P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

е регулярна тогава и само тогава, когато

$$\det U_k \neq 0 \quad \text{за } k = 0, \dots, n.$$

$$U_0 = e_n W(t_{00}, t_{01}, \dots, t_{0n}) = e_n \prod_{0 \leq j < i \leq n} (t_{0j} - t_{0i}) \neq 0$$

Да разгледаме матрицата $\mathbf{S} := \{s_{mkj}\}$ на тази система. Ще покажем, че $\det \mathbf{S} \neq 0$. Да отбележим, че $\mathbf{S} = \{D_m(\theta_{mj} - \theta_k)\}_{k=0, j=0}^m$ където

$$D_m(\theta) := \frac{2}{m+1} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta}$$

е ядрото на Дирихле. Фактът, че $\det\{D_m(\theta_j - \theta_k)\}_{k=0, j=0}^m$ е ненулева е известен, т.е. в случая $\{\theta_k\} \equiv \{\theta_{mj}\}$ твърдението е вярно. Тук то ни е нужно за всяко $\{\theta_k\}$. Нашето доказателство се основава на факта, че полиномите

$$U_m(\theta_0; \mathbf{x}), \dots, U_m(\theta_m; \mathbf{x})$$

са линейно независими за всички $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_m < \pi$. Това свойство е разгледано в [25] и следва от Лема 3.2 в тази статия. За пълнота на изложението тук ще скицираме доказателството.

Да предположим, че

$$u(\mathbf{x}) := \alpha_0 U_m(\theta_0; \mathbf{x}) + \dots + \alpha_m U_m(\theta_m; \mathbf{x}) \equiv 0 \quad \text{върху } \mathbf{B}.$$

Тогава

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-i} u(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m \alpha_k U_m^{(m)}(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) (\cos \theta_k)^i (\sin \theta_k)^{m-i}.$$

При $\mathbf{x} = 0$ получаваме

$$0 = U_m^{(m)}(0) \sum_{k=0}^m (\cos \theta_k)^i (\sin \theta_k)^{m-i} \alpha_k.$$

Разглеждайки това уравнение за $i = 0, \dots, m$, получаваме линейна система по отношение на $\alpha_0, \dots, \alpha_m$. Ако $\theta_0 \neq 0$, то матрицата на системата (с точност до ненулев постоянен множител) е

$$D_m(\theta_0, \dots, \theta_m) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cot \theta_0 & \cot \theta_1 & \dots & \cot \theta_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\cot \theta_0)^m & (\cot \theta_1)^m & \dots & (\cot \theta_m)^m \end{pmatrix}$$

докато в случая $\theta_0 = 0$ тя е $D_{m-1}(\theta_1, \dots, \theta_m)$. И в двата случая това е матрица на Ван дер Монд и следователно несингулярна т.к. $\cot \theta_i \neq \cot \theta_j$ за $i \neq j$. Затова $\alpha_0 = \dots = \alpha_m = 0$ и с това линейната независимост на $U_m(\theta_0; \mathbf{x}), \dots, U_m(\theta_m; \mathbf{x})$ е доказана.

Нека сега се върнем към доказателството на несингулярността на \mathbf{S} . Да предположим, че $\det \mathbf{S} = 0$. Тогава съществуват числа c_0, \dots, c_m , поне едно от които, различно от нула, такива, че

$$\sum_{k=0}^m c_k s_{mkj} = 0 \quad \text{за } j = 0, \dots, m.$$

По Следствие 3.2,

$$s_{mkj} = (U_m(\theta_k; \cdot), U_{mj}) := \int_{\mathbf{B}} U_m(\theta_k; \mathbf{x}) U_{mj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Така

$$\int_{\mathbf{B}} \left(\sum_{k=0}^m c_k U_m(\theta_k; \mathbf{x}) \right) U_{mj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad j = 0, \dots, m,$$

и затова полиномът

$$Q(\mathbf{x}) := \sum_{k=0}^m c_k U_m(\theta_k; \mathbf{x})$$

е ортогонален на U_{mj} за $j = 0, \dots, m$. Пред вид на (3.1), Q е ортогонален също на U_{ij} за $i \leq m-1$ и $j = 0, \dots, i$. Така по Теорема 3.С, $Q(\mathbf{x}) \equiv 0$. Сега като използваме факта, че $\{U_m(\theta_k; \mathbf{x})\}_{k=0}^m$ са линейно независими, заключаваме, че $c_0 = \dots = c_m = 0$, което дава противоречие. Затова $\det \mathbf{S} \neq 0$. Следователно, ако са дадени b_{0m}, \dots, b_{mm} ние можем да пресметнем коефициентите a_{m0}, \dots, a_{mm} като решим линейната система (3.6).

С това ние доказахме следния важен спомагателен резултат:

За произволни числа $\{\beta_{mj}\}_{m=0, j=m}^n$, съществува единствен полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ такъв, че

$$b_{mj}(P) = \beta_{mj}, \quad m = 0, \dots, n, \quad j = m, \dots, n.$$

Следващата ни задача е да покажем, че всеки от функционалите $\{b_{mj}(P)\}$ може да бъде пресметнат от $d(n)$ Радонови проекции

$$\mathcal{A} := \{\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{kj})\}_{k=0, j=k}^n.$$

За фиксирано (m, j) величината $b_{mj}(P)$ е линеен функционал в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$. Множеството \mathcal{A} се състои от други $d(n)$ линейни функционали от същия вид. Тогава, съществува формула от вида

$$b_{mj}(P) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n C_{ki} \mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{ki}), \quad \forall P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

тогава и само тогава, когато

$$(3.7) \quad \mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{ki}) = 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad i = k, \dots, n \quad \implies \quad b_{mj}(P) = 0.$$

Това е просто наблюдение, основано на аргументи от линейната алгебра. По-общо твърдение, разглеждащо произволен брой N функционали (включително и $N \leq d(n)$) е направено от Соболев [42] (вж. също [3], Теорема 3.5).

Нека допуснем, че предположенията от лявата страна на (3.7) са в сила. По индукция ще изведем заключението на дясната страна на (3.7) за всички $m = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n$.

Нека $k = 0$. По предположение имаме

$$\mathcal{R}_{\theta_0}(P; t_{00}) = \dots = \mathcal{R}_{\theta_0}(P; t_{0n}) = 0.$$

Предвид Лема 3.1, от това следва, че $\mathcal{R}_{\theta_0}(P; t) \equiv 0$. Тогава

$$\sum_{i=0}^n b_{0i}(P) U_i(t) \equiv 0$$

и следователно, заради линейната независимост на $\{U_i\}$,

$$b_{0i}(P) = 0 \quad \text{за } i = 0, \dots, n.$$

Първата стъпка на индукционната процедура е завършена. Да отбележим, че от зависимостта $a_{00}(P) = \frac{1}{2} b_{00}(P)$ следва, че $a_{00}(P) = 0$. Затова, след първата стъпка ние сме доказали, че P има вида

$$P(\mathbf{x}) = a_{10} U_{10}(\mathbf{x}) + a_{11} U_{11}(\mathbf{x}) + \dots + a_{nn} U_{nn}(\mathbf{x}).$$

Да предположим сега, че след k стъпки сме доказали, че

$$b_{i,j}(P) = 0 \quad \text{за } i = 0, \dots, k-1, \quad j = 0, \dots, n,$$

и P се е редуцирало до

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} U_{ij}(\mathbf{x}).$$

Тогава, по формулата на Мар, Радоновата проекция на P в посока θ_k ще има вида

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t) = \sqrt{1-t^2} (b_{kk}U_k(t) + \dots + b_{kn}U_n(t))$$

което показва, че $b_{k0} = \dots = b_{k,k-1} = 0$. За да докажем, че останалите коефициенти също са равни на нула използваме предположенията

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{kk}) = \dots = \mathcal{R}_{\theta_k}(P; t_{kn}) = 0.$$

Те дават система от линейни уравнения

$$b_{kk}U_k(t_{kj}) + \dots + b_{kn}U_n(t_{kj}) = 0, \quad j = k, \dots, n,$$

която има единствено решение тогава и само тогава, когато $\det \mathbf{U}_k \neq 0$. Така, предполагайки последното заключаваме, че

$$b_{kj}(P) = 0 \quad \text{за } j = k, \dots, n,$$

и следователно за всички $j = 0, \dots, n$. Сега от зависимостта (3.6) следва, че $a_{k0} = \dots = a_{kk} = 0$ и затова

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} U_{ij}(\mathbf{x}).$$

Индукционната стъпка е завършена. След $n+1$ стъпки получаваме $P(\mathbf{x}) \equiv 0$. Теоремата е доказана.

Следният факт се получава като частен случай.

Теорема 3.2. Нека $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_n < \pi$ са произволни дадени ъгли и нека T е множество от произволни $n+1$ различни точки в $(-1, 1)$. Тогава съществува номерация (подреждане) t_0, \dots, t_n на точките от T , такава че интерполационната задача

$$\int_{I(\theta_i, t_j)} P(\mathbf{x}) dx = \gamma_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = i, \dots, n,$$

е регулярна в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$.

Доказателство. За произволно множество T от различни точки $\{t_j\}$ матрицата $\mathbf{U}_0 := \{U_m(t_j)\}_{j=0, m=0}^n$ е несингулярна. Тогава поне един от нейните минори, получени от \mathbf{U}_0 чрез премахване на първия стълб и един от редовете, е ненулев. Тогава ние назоваваме точката от T , отговаряща на този ред t_0 . По-нататък определяме t_1 така че минорът получен от \mathbf{U}_0 чрез премахване на първите два стълба и редовете отговарящи на t_0 и t_1 да бъде ненулев, и така нататък докато подредим всички точки в редица t_0, \dots, t_n така, че

$$\det \mathbf{U}_k := \begin{vmatrix} U_k(t_k) & U_{k+1}(t_k) & \cdots & U_n(t_k) \\ U_k(t_{k+1}) & U_{k+1}(t_{k+1}) & \cdots & U_n(t_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_k(t_n) & U_{k+1}(t_n) & \cdots & U_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

за $k = 0, \dots, n$. След това прилагаме Теорема 3.1.

§3 Една забележка за обръщането на Радонова-та трансформация

Да предположим, че отнапред знаем, че функцията f може да бъде представена като равномерно сходящ в \mathbf{B} ред от вида

$$(3.8) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{m,j}(f) U_{m,j}(\mathbf{x}).$$

Парциалната сума

$$S_n(f; \mathbf{x}) := \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m a_{m,j}(f) U_{m,j}(\mathbf{x}).$$

може да бъде използвана като апроксимация на $f(\mathbf{x})$. Да допуснем, че всяка Радонова проекция $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ е известна или лесно може да се научи. Резултатите от предната секция предлагат един начин за възстановяване на $S_n(f; \mathbf{x})$ от $\{\mathcal{R}_\theta(f; t)\}$ за всяко n , а следователно и за описание на обратната на Радонова

трансформация. За да направим това предполагаме, че всяко $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ е дадено като ред на Чебишев-Фурие

$$\mathcal{R}_\theta(f; t) = \sqrt{1-t^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m(f; \theta) U_m(t) \right).$$

Коефициентите $b_m(f; \theta)$ може да бъдат пресметнати като се знае $\{\mathcal{R}_\theta(f; t)\}$. Да отбележим, че

$$(3.9) \quad b_m(f; \theta) \text{ е тригонометричен полином от ред } m.$$

За да се уверим в това, прилагаме \mathcal{R}_θ към (3.8), използваме формулата на Мар $\mathcal{R}_\theta(U_{m_j}; t)$, и достигаме, както при извеждането на (3.5), до равенството

$$(3.10) \quad \sum_{j=0}^m a_{m_j}(f) \frac{2}{m+1} \frac{\sin(m+1)(\theta_{m_j} - \theta)}{\sin(\theta_{m_j} - \theta)} = b_m(f; \theta).$$

Сега твърдението (3.9) е очевидно т.к. $\frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin \varphi}$ е тригонометричен полином от ред m .

Формула за обръщане: Ако редът (3.8) е равномерно сходящ в \mathbf{B} , то

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m b_m(f; \theta_{m_j}) U_{m_j}(\mathbf{x})$$

и еквивалентно,

$$(3.11) \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \int_0^{2\pi} b_m(f; \theta) U_m(\theta; \mathbf{x}) d\theta,$$

за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$.

За да проверим първата формула трябва да покажем, че $a_{m_j} = \frac{1}{2} b_m(f; \theta_{m_j})$. Това следва от (3.10) или директно:

$$b_m(f; \theta_{m_j}) = 2 \int_{-1}^1 \mathcal{R}_{\theta_{m_j}}(f; t) U_m(t) dt = 2 \int_{\mathbf{B}} f(\mathbf{x}) U_{m_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2a_{m_j}(f).$$

Последната зависимост може да се използва за намиране на коефициентите $a_{m_j}(f)$ на базата на безкрайно много проекции по посоки $\{\theta_{m_j}\}$. Наистина,

според (3.9), $b_m(f; \theta)$ е тригонометричен полином от степен m . Тогава той може да бъде възстановен по произволни $2m + 1$ стойности посредством интерполация на Лагранж. Така най-напред трябва да пресметнем интеграла

$$b_m(f; \theta) = 2 \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta(f; t) U_m(t) dt$$

за произволни $m + 1$ стойности на θ , $0 \leq \theta < \pi$, след това можем да намерим също $b_m(f; \theta + \pi)$ от връзката $\mathcal{R}_\theta(f; t) \equiv \mathcal{R}_{\theta+\pi}(f; -t)$ и тогава чрез интерполация, да пресметнем $b_m(f; \theta_{m_j})$ и следователно и $a_{m_j}(f)$.

За да изведем втората формула за $f(\mathbf{x})$ използваме факта, че квадратурната формула

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \approx \frac{2\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N g\left(\frac{2\pi j}{N+1}\right)$$

интегрира точно всички тригонометрични полиноми от степен не по-висока от N . Затова, като вземем предвид зависимостите

$$b_m(f; \theta + \pi) = (-1)^m b_m(f; \theta),$$

$$U_m(-t) = (-1)^m U_m(t),$$

и означенията

$$\tau_j := \frac{j\pi}{m+1}, \quad j = 0, \dots, 2m+1,$$

получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m b_m(f; \theta_{m_j}) U_m(\theta_{m_j}; \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2m+1} b_m(f; \tau_j) U_m(\tau_j; \mathbf{x}) \\ &= \frac{m+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_m(f; \theta) U_m(\theta; \mathbf{x}) d\theta, \end{aligned}$$

и (3.11) е доказано.

Да отбележим, че доказателството на (3.11) (в d -мерния случай), дадено в [35] използва съществено известната формула за обратната Радонова трансформация.

Друго полезно наблюдение е, че на всяка интегрируема върху \mathbf{B} функция f ние можем да съпоставим редицата $\{b_m(f; \theta)\}$ от тригонометрични полиноми. Тази редица определя f еднозначно. В случая, когато f е алгебричен полином от $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$, то редицата $\{b_m(f; \theta)\}$ е крайна, тя се състои от $n + 1$ тригонометрични полиноми. И всяка такава редица от $n + 1$ полиноми (като b_m е от степен m) определя еднозначно единствен алгебричен полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$. Това взаимноеднозначно съответствие може да бъде използвано за изучаването на f в термините на свойствата на асоциираните тригонометрични полиноми. Всъщност, резултатите, представени в тази и следващата секции, са следствие от тази зависимост.

§4 Върху представянето на Шинцел

Вострецов и Крейнес [45] са доказали следния резултат за представяне:

За всяко дадено множество от $n + 1$ неколинеарни единични вектори ξ_j и (произволен) полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, съществуват едномерни полиноми r_0, \dots, r_n от степен n такива че

$$(3.12) \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n r_j(\mathbf{x} \cdot \xi_j).$$

Ще наречем този резултат лема на Вострецов-Крейнес. Подобно представяне с не точно определен брой хребетни функции е даден и за полиноми от произволна размерност d . Неотдавна Шинцел [37] даде едно продължение и и уточнение на лемата на Вострецов-Крейнес, от което следва, че за всяко дадено $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ броят на хребетните функции $\{r_j\}$ в (3.12) може да бъде редуциран с 1 чрез подходящ избор на посоки ξ_1, \dots, ξ_n . Нещо повече, n е минималното число с това свойство (вж. също примерите в работата на Осколков [34]).

Като следваме идеята на доказателството на нашата интерполационна теорема ние даваме най-напред просто конструктивно доказателство на лемата

на Вострцов-Крейнес и като го използваме, подобряваме резултата на Шинцел за полиноми $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ от нечетна степен.

Формула за представяне: Нека $\theta_0, \dots, \theta_n$ е произволно множество от фиксирани различни ъгли в $[0, \pi)$. Тогава всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ може еднозначно да бъде представен във вида

$$(3.13) \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n \sum_{m=j}^n c_{mj} U_m(\mathbf{x} \cdot \xi_j), \quad \xi_j := (\cos \theta_j, \sin \theta_j),$$

с някакви константи $\{c_{mj}\}$.

Доказателство. Основна роля в доказателството играе помощното твърдение, установено в Теорема 3.1. Като използваме това твърдение и връзката (3.4) можем да установим, че системата $U_i(\theta_k; \mathbf{x})$, $i = 0, \dots, n$, $k = i, \dots, n$, е линейно независима и следователно образува базис в $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$.

Наистина, нека

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ki} U_i(\theta_k, \mathbf{x}) = 0.$$

Според помощното твърдение съществува полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, такъв, че $b_{ki}(P) = a_{ki}$ за $i = 0, \dots, n$, $k = i, \dots, n$. Умножаваме горното равенство с $P(\mathbf{x})$ и интегрираме върху \mathbf{B}

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ki} \int_{\mathbf{B}} P(\mathbf{x}) U_i(\theta_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

От равенството (3.4) имаме

$$a_{ki} = b_{ki}(P) = 2 \int_{\mathbf{B}} P(\mathbf{x}) U_i(\theta_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

което дава

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ki}^2 = 0$$

т.е. $a_{ki} = 0$ за всяко $i = 0, \dots, n$, $k = i, \dots, n$.

За да намерим коефициентите c_{mj} в представянето (3.13), пресмятаме

$$\mathcal{R}_\theta(P; t) = \sum_{j=0}^n \sum_{m=j}^n c_{mj} \mathcal{R}_\theta(U_m(\theta_j; \cdot); t)$$

$$= \sqrt{1-t^2} \sum_{m=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^m c_{mj} D_m(\theta_j - \theta) \right\} U_m(t).$$

Като сравним това с развитието на $\mathcal{R}_\theta(P; t)$ в ред на Чебишев-Фурие, стигаме до зависимостта

$$(3.14) \quad \sum_{j=0}^m c_{mj} D_m(\theta_j - \theta) = b_m(P; \theta).$$

Затога, при дадено P (и, следователно, $\{b_m(P; \theta)\}$), ние определяме еднозначно $\{c_{mj}\}$ от линейната система

$$\sum_{j=0}^m c_{mj} D_m(\theta_j - \theta_k) = b_m(P; \theta_k), \quad k = 0, \dots, m.$$

Това завършва доказателството.

Ясно е, че (3.13) е едно представяне на полиномите от вида (3.12). Можем да получим n -членно представяне на P с хребетни функции от (3.13), ако направим $c_{nn} = 0$. За да постигнем това нека разгледаме (3.14) за $m = n$. Използвайки транслираната посока $\{\theta_j + \varphi\}_{j=0}^n$ с параметър φ ние бихме достигнали до друго представяне на $b_n(P; \theta)$ от вида (3.14) (с $m = n$), този път с някакви други коефициенти $\{c_{nj}(\varphi)\}$, зависещи от φ , т.е. до

$$\sum_{j=0}^n c_{nj}(\varphi) D_n(\theta_j + \varphi - \theta) = b_n(P; \theta).$$

По-нататък, като вземем равенството в $\theta = \theta_k + \varphi$, $k = 0, \dots, n$, получаваме линейната система

$$\sum_{j=0}^n c_{nj}(\varphi) D_n(\theta_j - \theta_k) = b_n(P; \theta_k + \varphi), \quad k = 0, \dots, n.$$

По правилото на Крамер

$$c_{nn}(\varphi) = \sum_{k=0}^n \beta_k b_n(P; \theta_k + \varphi)$$

с някакви коефициенти $\{\beta_j\}$.

Ако $c_{nn}(0) = 0$, то няма какво да се доказва. И така, нека сега предположим, че $c_{nn}(0) \neq 0$.

Да разгледаме най-напред случая на нечетни n . Т.к. тогава $b_n(P; \theta + \pi) = (-1)^n b_n(P; \theta)$, виждаме, че

$$c_{nn}(\pi) = -c_{nn}(0).$$

Затова, съществува ъгъл $\varphi \in (0, \pi)$ за който $c_{nn}(\varphi) = 0$.

И това е подобрението на резултата на Шинцел: В [37], е установено съществуването на n подходящи посоки, докато тук ние можем да получим едно представяне с n члена за всяка дадена система от посоки $\{\theta_j\}$, само като я завъртим на определен ъгъл. Освен това, формата на представянето се дава явно с (3.13).

Стигаме да същото заключение и в случая на четни n , при условие, че тригонометричният полином $c_{nn}(\varphi)$ има нула за някое φ . Но това не винаги е изпълнено. Например, ако P е радиална функция, например

$$P(\mathbf{x}) = F_m(\mathbf{x}) := (x^2 + y^2)^m, \quad n = 2m,$$

то $b_n(F_m; \theta) \equiv \text{const.} \neq 0$.

Както показва следващият пример, в случай на четно n горното подобрене на резултата на Шинцел може да не е в сила.

Контрапример: Нека $m \geq 1$, $n = 2m$ и $\theta_1 < \dots < \theta_n$ е произволно дадено множество от посоки – такова, че $\theta_n - \theta_1 < \frac{\pi}{2}$. Тогава полиномът $F_m = (x^2 + y^2)^m$ не притежава представяне с n члена, основано на ротация на $\theta_1 < \dots < \theta_n$.

Да допуснем противното. Тогава съществуват хребетни полиноми $\{r_j\}_1^n$, такива че

$$(3.15) \quad (x^2 + y^2)^m = \sum_{j=1}^{2m} r_j(\mathbf{x} \cdot \xi_j),$$

с $\xi_j := (\cos(\theta_j + \varphi), \sin(\theta_j + \varphi))$ и някаво φ . Т.к. произволна ротация на координатната система не променя радиалните полиноми, то можем да предполагаме

по-нататък, че $\varphi = 0$ и $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi/2$. От това, че F_m е хомогенен полином от степен $2m$ и от връзката (3.15) следва, че $r_j(t) = d_j t^{2m}$ за всички j . Така, имаме

$$\sum_{j=1}^{2m} d_j (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j)^{2m} = (x^2 + y^2)^m.$$

Като сравним коефициентите пред $x^k y^{2m-k}$ от двете страни на равенството, получаваме

$$\binom{2m}{k} \sum_{j=1}^{2m} d_j (\cos \theta_j)^k (\sin \theta_j)^{2m-k} = \begin{cases} 0 & \text{за нечетни } k \\ \binom{m}{k/2} & \text{за четни } k \end{cases}.$$

Да положим

$$A_j := d_j (\sin \theta_j)^{2m}, \quad t_j := \cot \theta_j,$$

$$C_{2k} := \binom{m}{k} / \binom{2m}{2k}.$$

Ясно е, че $\{0, A_1, \dots, A_{2m}\}$ удовлетворяват линейната система

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 + A_1 + \dots + A_{2m} &= C_0 \\ 0 \cdot t_0 + A_1 t_1 + \dots + A_{2m} t_{2m} &= 0 \\ \vdots & \\ 0 \cdot t_0^{2m} + A_1 t_1^{2m} + \dots + A_{2m} t_{2m}^{2m} &= C_{2m} \end{aligned}$$

за произволни $t_0 \neq t_1, \dots, t_{2m}$. Избираме $t_0 \in (0, t_1)$. По правилото на Крамер,

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} C_0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & t_1 & \dots & t_{2m} \\ C_2 & t_1^2 & \dots & t_{2m}^2 \\ 0 & t_1^3 & \dots & t_{2m}^3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{2m} & t_1^{2m} & \dots & t_{2m}^{2m} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^m C_{2k} \det D_k \end{aligned}$$

където D_k се получава от горната матрица с премахване на първия стълб и реда с номер $2k$. Знае се, че детерминантите $\{\det D_k\}$ са ненулеви и с един и същи знак (т.к. $t_{2m} > \dots > t_0 > 0$). В допълнение, всички C_{2k} са положителни числа. Така стигнахме до противоречие, което завършва доказателството.

Като се вземат пред вид горните аргументи, не е трудно да се заключи, че в случая на четни n всеки полином $P \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ може да бъде представен в една от следните форми:

i) n -членно представяне за ротация на произволна дадена система от посоки $\theta_1 < \dots < \theta_n$;

ii) радиална функция + n -членно представяне за произволна система от посоки $\theta_1 < \dots < \theta_n$.

За да се провери ii) трябва да се разгледа $P - \lambda F_m$ с константата λ избрана така, че $c_{nn}(P - \lambda F_m; \varphi) = 0$ за някое φ .

§5 Първи метод за реконструкция

5.1 Възстановяване на полиноми, основано на Радонови проекции

Най-напред разглеждаме следната задача:

Нека са дадени $\theta_0, \dots, \theta_n$, $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j$, $\theta_i \in [0, \pi)$ и нека функциите $f_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, са такива, че се явяват Радонови проекции на някакъв полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ по протежение на отсечките

$$I(\theta_i, t) = \{(x, y) : x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = t\}, t \in [-1, 1],$$

т.е. $f_i(t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f; t)$.

Задачата е да се възстанови f в единичния кръг.

Ще търсим f в следния вид

$$(3.16) \quad f = \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{rl} U_{rl}.$$

Това е възможно, т.к. по Теорема 3.С системата $\{U_{ri}\}_{i=0}^r$ образува базис на $\Pi_n(\mathbb{R}^2)$. Както в началото на доказателството на Теорема 3.1

$$f_i(t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f, t) = \sqrt{1-t^2} p_i(t), \quad p_i(t) \in \Pi_n(\mathbb{R}^2),$$

$p_i(t) = \sum_{r=0}^n b_{ir} U_r(t)$, където стойностите

$$b_{ir} = b_{ir}(f) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} p_i(t) U_r(t) dt = 2 \int_{-1}^1 f_i(t) U_r(t) dt$$

са известни. Прилагаме формулата на Мар както в Теорема 3.1 и с аналогични разсъждения получаваме, че

$$(3.17) \quad \frac{r+1}{2} b_{ir} = \sum_{l=0}^r a_{rl} \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})},$$

което след прилагане за $i = 0, \dots, r$ дава линейна система за a_{r0}, \dots, a_{rr} (на практика това е системата (3.6) с точност до умножение с $\frac{r+1}{2}$).

Тук ще дадем друго доказателство на разрешимостта на тази система за произволни данни. За целта е достатъчно да се докаже, че нейната детерминанта Δ е ненулева.

Нека означим с $\Delta_n^{(n-k)}(\theta)$ следната матрица

$$\Delta_n^{(n-k)}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(n+1)(\theta - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta - \frac{k\pi}{n+1})} & \frac{\sin(n+1)(\theta - \frac{(k+1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta - \frac{(k+1)\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta - \frac{n\pi}{n+1})} \\ \frac{\sin(n+1)(\theta_{k+1} - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta_{k+1} - \frac{k\pi}{n+1})} & \frac{\sin(n+1)(\theta_{k+1} - \frac{(k+1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta_{k+1} - \frac{(k+1)\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_{k+1} - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_{k+1} - \frac{n\pi}{n+1})} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{k\pi}{n+1})} & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{(k+1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{(k+1)\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})} \end{bmatrix}.$$

за $k = 0, \dots, n-1$.

Да отбележим, че детерминантата на системата за $\{a_{rl}\}$, получена от урав-

ненията (3.17) е от вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \Delta_1(\theta_0) & & \\ & & \Delta_2(\theta_0) & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \Delta_n(\theta_0) \end{vmatrix},$$

където $\Delta_n(\theta) = \Delta_n^{(n)}(\theta)$.

Да отбележим, че $\Delta = 1 \cdot \det \Delta_1(\theta_0) \dots \det \Delta_n(\theta_0)$. Т.к. $\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$ е тригонометричен полином от ред n , то $\det \Delta_n(\theta)$ също е тригонометричен полином от ред n . Нека измежду нулите му има k числа от вида $\frac{l\pi}{n+1}$. Без ограничение на общността нека $\theta_0, \dots, \theta_k$ са $0, \frac{\pi}{n+1}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{n+1}$. Тогава

$$\Delta_n(\theta_0) = \begin{vmatrix} \frac{\sin(n+1)(\theta_0)}{\sin \theta_0} & \frac{\sin(n+1)(\theta_0 - \frac{\pi}{n+1})}{\sin(\theta_0 - \frac{\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_0 - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta_0 - \frac{k\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_0 - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_0 - \frac{n\pi}{n+1})} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \frac{\sin(n+1)(\theta_k)}{\sin \theta_k} & \frac{\sin(n+1)(\theta_k - \frac{\pi}{n+1})}{\sin(\theta_k - \frac{\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_k - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta_k - \frac{k\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_k - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_k - \frac{n\pi}{n+1})} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \frac{\sin(n+1)(\theta_n)}{\sin \theta_n} & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{k\pi}{n+1})} & \dots & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})} \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)^k \Delta_n^{(n-k)}(\theta_k).$$

Забелязваме, че $\det \Delta_n^{(n-k)}(\theta)$ се анулира в $\theta_{k+1}, \dots, \theta_n, 0, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{n+1}, \theta_{k+1} + \pi, \dots, \theta_n + \pi, \pi, \pi + \frac{\pi}{n}, \dots, \pi + \frac{(k-1)\pi}{n+1}$. Тъй като θ_k е различна от всички тези нули, то е достатъчно да докажем, че $\det \Delta_n^{(n-k)}(\theta)$ не е тъждествено равна на нула.

Взимаме $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$. Тогава

$$\Delta_n^{(n-k)} \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) = \begin{bmatrix} (n+1) & 0 & \dots & 0 \\ * & \Delta_n^{(n-k-1)}(\theta_{k+1}) & & \end{bmatrix}.$$

$\text{Det} \Delta_n^{(n-k-1)}(\theta)$ се анулира в $\theta_{k+2}, \dots, \theta_n, 0, \frac{\pi}{n+1}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{n+1}, \frac{k\pi}{n+1}$. Следователно тя има $2n$ нули. Взимаме $\theta = \frac{(k+1)\pi}{n+1}$ и продължаваме този процес докато стигнем

до

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin(n+1)(\theta_{n-1} - \frac{(n-1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta_{n-1} - \frac{(n-1)\pi}{n+1})} & \frac{\sin(n+1)(\theta_{n-1} - \frac{(n-1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta_{n-1} - \frac{(n-1)\pi}{n+1})} \\ \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{(n-1)\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{(n-1)\pi}{n+1})} & \frac{\sin(n+1)(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})}{\sin(\theta_n - \frac{n\pi}{n+1})} \end{vmatrix} \\ = \sin(n+1)\theta_{n-1} \sin(n+1)\theta_n \sin \frac{\pi}{n+1} \sin(\theta_{n-1} - \theta_n),$$

което очевидно е различно от 0. Следователно $\Delta \neq 0$.

Забележка: Реконструкцията на един полином на две променливи $f(x, y)$ въз основа на $n+1$ Радонови проекции може да бъде направена също така и по следния начин, по който вместо решаването на линейна система се стига до пресмятане на едномерни интеграли. Ще опишем накратко този начин. Т.к. $\mathcal{R}_{\theta_i+\pi}(f; t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f; -t)$, то ние можем да допуснем, че $\mathcal{R}_{\theta}(f; t)$ е известно за $2n+2$ стойности на θ . Проекцията $\mathcal{R}_{\theta}(f; t)$ е тригонометричен полином на θ от ред n , следователно можем да допуснем, че той е известен. Имаме

$$\begin{aligned} a_{r,l} &= \int \int_D f(x, y) U_{r,l}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{I(\frac{l\pi}{r+1}, t)} f U_{r,l} ds dt = \int_{-1}^1 U_r(t) \mathcal{R}_{\frac{l\pi}{r+1}}(f; t) dt. \end{aligned}$$

След пресмятане на последния интеграл, получаваме коефициентите. Тогава от (3.16)

$$f = \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r \int_{-1}^1 U_r(t) \mathcal{R}_{\frac{l\pi}{r+1}}(f; t) dt U_{r,l}.$$

5.2 Алгоритъм за реконструкция

Въз основа на резултатите на предната секция предлагаме един алгоритъм за реконструкция на функцията f по нейните Радонови проекции.

Да предположим, че $\theta_0, \dots, \theta_n$, са дадени ъгли, $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, $\theta_i \in [0, \pi)$, и за функциите $f_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, се знае, че са проекции на някаква функция f по хордите $I(\theta_i, t) = \{(x, y) : x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = t\}$, $t \in [-1, 1]$, т.е. $f_i(t) = \mathcal{R}_{\theta_i}(f; t)$. Като използваме тази информация ще построим полинома

$$(3.18) \quad S_n(f; x, y) = \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{rl} U_{rl}(x, y)$$

където $a_{rl} = \langle f, U_{rl} \rangle := \iint_B f U_{rl}$.

Да предположим, че f допуска представяне във вид на равномерно сходящ ред

$$f = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r a_{rl} U_{rl}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r a_{rl} \int_{I(\theta_i, t)} U_{rl}(x, y) ds \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r a_{rl} 2 \frac{\sqrt{1-t^2}}{r+1} U_r(t) \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})} \\ &= \sqrt{1-t^2} \sum_{r=0}^{\infty} U_r(t) \sum_{l=0}^r a_{rl} \frac{2}{r+1} \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})} \end{aligned}$$

за $i = 0, \dots, n$.

От друга страна, можем да представим $f_i(t)$ във вида

$$f_i(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{r=0}^{\infty} b_{ir} U_r(t),$$

където $b_{ir} = 2 \int_{-1}^1 f_i(t) U_r(t) dt$. Като сравним коефициентите от двете представяния на f_i , получаваме, както и в полиномиалния случай, че

$$b_{ir} = \frac{2}{r+1} \sum_{l=0}^r a_{rl} \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}.$$

Когато са дадени $\{f_i\}_0^n$, ние можем да пресметнем $\{b_{ir}\}$ и да намерим функциите

$$f_{i,n}(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{r=0}^n b_{ir} U_r(t), \quad i = 0, \dots, n.$$

Използвайки горния алгоритъм за полиноми, намираме единствения полином F_n от $\Pi_n^2(\mathbb{R}^2)$ такъв, че

$$(3.19) \quad f_{i,n}(t) = \int_{I(\theta_i,t)} F_n(x,y) ds, \quad i = 0, \dots, n.$$

Да разгледаме полинома $S_n(f; x, y)$. Интегрираме (3.18) по хордата $I(\theta_i, t)$ и получаваме

$$\begin{aligned} \int_{I(\theta_i,t)} S_n(f; x, y) ds &= \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{rl} \int_{I(\theta_i,t)} U_{rl} \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{rl} 2 \frac{\sqrt{1-t^2}}{r+1} U_r(t) \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})} \\ &= \sqrt{1-t^2} \sum_{r=0}^n U_r(t) \sum_{l=0}^r a_{rl} \frac{2}{r+1} \frac{\sin(r+1)(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})}{\sin(\theta_i - \frac{l\pi}{r+1})} \\ &= \sqrt{1-t^2} \sum_{r=0}^n U_r(t) b_{ir} = f_{i,n}(t). \end{aligned}$$

Така Радоновите проекции на $S_n(f; x, y)$ съвпадат с тези на F_n . С помощта на резултатите от предната секция, това дава, че $S_n(f; x, y) \equiv F_n(x, y)$.

Нека сега се обърнем към въпроса за сходимостта на $S_n(f)$ към f . Ще използваме един резултат на Осколков, а именно Теорема 3 от [33]:

Всяка функция $f \in L_2(B)$ може еднозначно да бъде представена чрез съответния ред на Чебишев-Фурие

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r a_{rl} U_{rl}(x, y),$$

където

$$a_{rl} = \int \int_{\mathbf{B}} f(x, y) U_{rl}(x, y) dx dy,$$

и този ред е сходящ в $L_2(\mathbf{B})$.

Т.к. $S_n(f)$ е n -тата парциална сума на реда на Чебишев-Фурие за f , от горната теорема следва, че полиномът $S_n(f)$ клони към функцията f в L_2 -нормата, когато $n \rightarrow \infty$.

Нека споменем едно свойство на интерполационния полином $S_n(f; x, y)$.

Твърдение 3.1. Нека $f(x, y) = f(-x, y)$. Тогава $S_n(f; x, y) = S_n(f; -x, y)$.

Доказателство. Да отбележим, че

$$\begin{aligned} U_{r,l}(-x, y) &= U_r \left(-x \cos \frac{l\pi}{r+1} + y \sin \frac{l\pi}{r+1} \right) \\ &= U_r \left(-x(-1) \cos \left(\pi - \frac{l\pi}{r+1} \right) + y \sin \left(\pi - \frac{l\pi}{r+1} \right) \right) \\ &= U_r \left(x \cos \frac{r+1-l}{r+1} \pi + y \sin \frac{r+1-l}{r+1} \pi \right) = U_{r,r+1-l}(x, y), \end{aligned}$$

за $l = 1, \dots, r$. Тогава

$$\begin{aligned} a_{r,l} &= \int \int_{\mathbf{B}} f(x, y) U_{r,l}(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{\mathbf{B}} f(-x, y) U_{r,r+1-l}(-x, y) dx dy = a_{r,r+1-l}, \end{aligned}$$

за $l = 1, \dots, r$. Нещо повече,

$$\begin{aligned} a_{r,0} &= \int \int_{\mathbf{B}} f(x, y) U_{r,0}(x, y) dx dy = \int \int_{\mathbf{B}} f(-x, y) U_{r,0}(-x, y) dx dy \\ &= \int \int_{\mathbf{B}} f(x, y) (-1)^r U_{r,0}(x, y) dx dy = (-1)^r a_{r,0}, \end{aligned}$$

защото

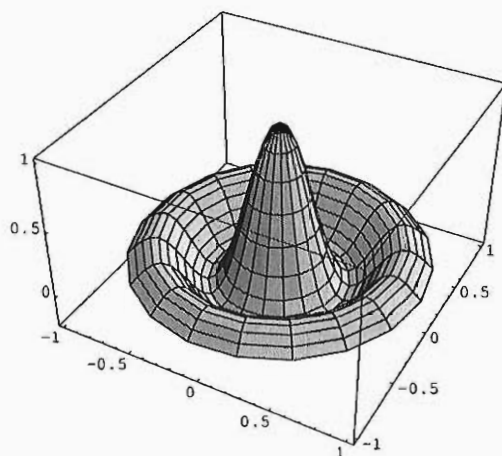
$$U_{r,0}(-x, y) = U_r(-x) = (-1)^r U_r(x) = (-1)^r U_{r,0}(x, y).$$

Затова,

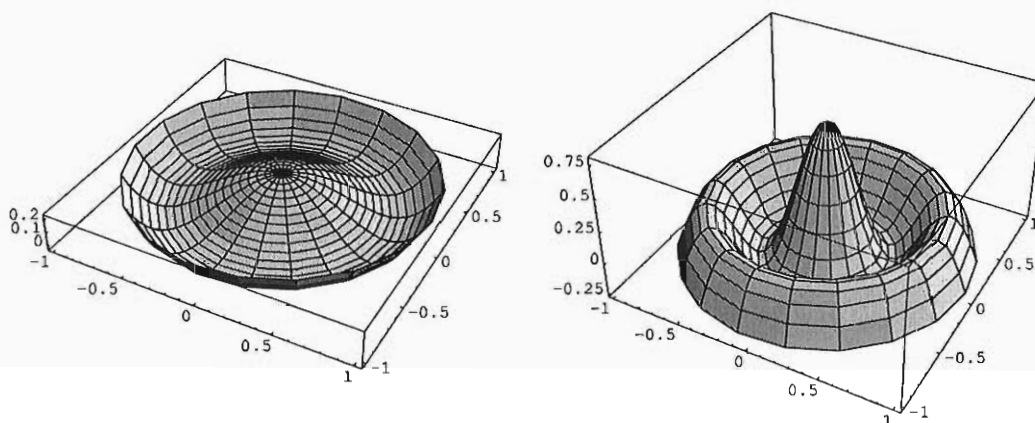
$$\begin{aligned} S_n(f; -x, y) &= \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^r a_{r,l} U_{r,l}(-x, y) = \sum_{r=0}^n \left(a_{r,0} U_{r,0}(-x, y) + \sum_{l=1}^r a_{r,l} U_{r,l}(-x, y) \right) \\ &= \sum_{r=0}^n \left((-1)^r a_{r,0} (-1)^r U_{r,0}(x, y) + \sum_{l=1}^r a_{r,r+1-l} U_{r,r+1-l}(x, y) \right) \\ &= \sum_{r=0}^n \left(a_{r,0} U_{r,0}(x, y) + \sum_{k=1}^r a_{r,k} U_{r,k}(x, y) \right) = S_n(f; x, y). \end{aligned}$$

Естествено, може да се разгледат и случаите, когато f е четна (нечетна) по y или по двете променливи.

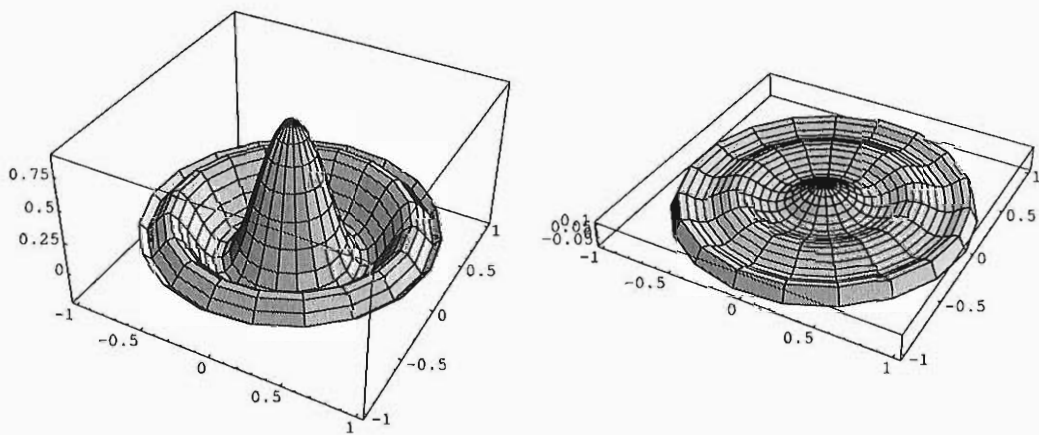
Ще илюстрираме алгоритъма отново с примера „Мексиканска шапка“
 $\frac{\sin(3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}})}{3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}}}$, $x^2+y^2 \leq 1$. Методът е реализиран с програма на Mathematica 5 . Прилагаме графиките на функцията, някои парциални суми и съответните грешки.



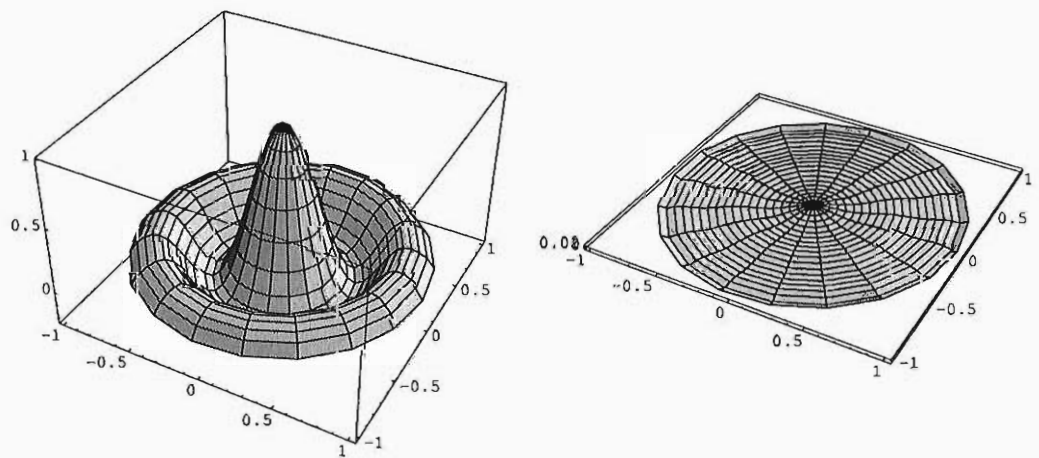
Фигура 3.1: Графика на функцията „Мексиканска шапка“
 $\frac{\sin(3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}})}{3\pi\sqrt{x^2+y^2+10^{-18}}}$, $x^2+y^2 \leq 1$.



Фигура 3.2: Графика на приближаващия полином $S_4(x, y) \in \Pi_4(\mathbb{R}^2)$ и графика на грешката.



Фигура 3.3: Графика на приближавания полином $S_8(x, y) \in \Pi_8(\mathbb{R}^2)$ и графика на грешката.



Фигура 3.4: Графика на приближавания полином $S_{10}(x, y) \in \Pi_{10}(\mathbb{R}^2)$ и графика на грешката.

§6 Втори метод за реконструкция

Да разгледаме следната ситуация:

Да предположим, че $M_i(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$, $i = 0, \dots, n$, са фиксирани различни точки върху единичната окръжност $\partial\mathbf{B}$. Нека

$$J(M_i, N) := \int_{M_i N} f ds, \quad N \in \partial\mathbf{B}, \quad i = 0, \dots, n$$

е Радоновата проекция на някакъв полином $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$, (за всички $N \in \partial\mathbf{B}$). Търси се полиномът f .

Ще докажем следната

Теорема 3.3. *Полиномът $f \in \Pi_n(\mathbb{R}^2)$ може да бъде възстановен еднозначно по информацията*

$$\int_{M_i N} f ds, \quad i = 0, \dots, n, \quad N \in \partial\mathbf{B}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да вземем точката $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$, върху единичната окръжност $\partial\mathbf{B}$, различна от всяка от точките M_i . От предположенията на теоремата следва, че стойностите

$$(3.20) \quad \begin{aligned} J(M_i, M) &= \gamma_i, \quad i = 0, \dots, n \\ J(M_i, M_j) &= \gamma_k, \quad k = n+1, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

са известни. Условиата на теоремата на Акопян [10] са изпълнени, следователно съществува полином $f_M \in \Pi\left(\mathbb{R}^2\right)$, такъв че

$$\int_{M_i M} f_M ds = \gamma_i, \quad i = 0, \dots, n$$

$$\text{и} \\ \int_{M_i M_j} f_M ds = \gamma_k, \quad k = n+1, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Т.к. $\int_{M_i N} f ds$ са проекции на полинома f , то f удовлетворява условията (3.20). Като използваме единствеността от теоремата на Акопян, заключаваме, че f съвпада с f_M . Това доказва теоремата.

Следващата ни цел е да намерим явна форма за решението на интерполационната задача. Ще приложим един начин, предложен ни от А. Акопян [24] за просто доказателство на неговата интерполационна теорема в двумерния случай.

По-удобно е да означим точката M с M_{n+1} . По този начин получаваме $(n+2)$ точки $M_i(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$, $i = 0, \dots, n+1$, върху единичната окръжност. Като свържем всеки две от тези точки с отсечка получаваме $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ хорди:

$$I_j = I(\theta_j, t_j) = \{(x, y) : x \cos \theta_j + y \sin \theta_j = t_j\}, \quad t_j \in [-1, 1].$$

Да допуснем, че точките M_i са такива, че $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j$, $\theta_i - \theta_j \neq \pi, i \neq j$, $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $j = 0, \dots, (n+1)$. Нека $I(\theta_j, t_j)$ бъде хордата, определена от точките M_p и M_q . Стойността на интеграла

$$\int_{I(\theta_j, t_j)} f = \int_{M_p M_q} f$$

е известна, означаваме я с c_j . Търсим f във вида

$$\sum_{k=1}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} c_k P_k(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k),$$

където $P_k \in \Pi_n(\mathbb{R})$ е такъв, че интегралът от хребетния полином $P_k(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)$ по хордата I_j е равен на δ_{jk} .

Нека фиксираме k -тата хорда I_k и зададем координатна система с начало в нулата и ордината, успоредна на I_k . (Да отбележим, че $\theta_k = 0$ заради избора на координатната система.) След пресмятане на t_j и θ_j получаваме $t_j = \cos \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2}$ и $\theta_j = \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2}$. Тогава хордата $M_p M_q$ има следната параметризация:

$$\begin{aligned} x &= \cos \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} \cos \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} - s \sin \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} \\ y &= \cos \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} \sin \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} + s \cos \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} \end{aligned}$$

където

$$-\left| \sin \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} \right| \leq s \leq \left| \sin \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} \right|.$$

Нека $j \neq k$. Тогава

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I(\theta_j, t_j)} P_k(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_k((t_j \cos \theta_j - s \sin \theta_j) \cos \theta_k + (t_j \sin \theta_j + s \cos \theta_j) \sin \theta_k) ds \\ &= \int_{-\sqrt{1-t_j^2}}^{\sqrt{1-t_j^2}} P_k((t_j \cos(\theta_j - \theta_k) - s \sin(\theta_j - \theta_k)) ds. \end{aligned}$$

След смяна на променливата $v = t_j \cos(\theta_j - \theta_k) - s \sin(\theta_j - \theta_k)$, $dv = -\sin(\theta_j - \theta_k) ds$, нека положим

$$\begin{aligned} x_j^1 &= t_j \cos(\theta_j - \theta_k) + \sqrt{1-t_j^2} \sin(\theta_j - \theta_k), \\ x_j^2 &= t_j \cos(\theta_j - \theta_k) - \sqrt{1-t_j^2} \sin(\theta_j - \theta_k). \end{aligned}$$

Т.к. $x = t \cos \theta - s \sin \theta$, то една от крайните точки на I_j се проектира в x_j^1 , а другата - в x_j^2 . След смяна на променливата получаваме $0 = \int_{x_j^1}^{x_j^2} P_k(v) dv$. Броят на точките M_i е $(n+2)$, но двата края на I_k имат една и съща проекция и така ние получаваме $(n+1)$ точки, които подреждаме по големина и наричаме x_0, \dots, x_n . Условието $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, $\theta_i - \theta_j \neq \pi$, $i \neq j$, осигурява факта, че точките x_0, \dots, x_n са различни. От интерполационните условия за P_k следва, че $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(v) dv = 0$, $i = 0, \dots, n-1$.

Условието $\int_{I(\theta_k, t_k)} P_k(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) ds = 1$ дава

$$1 = \int_{-\sqrt{1-t_k^2}}^{\sqrt{1-t_k^2}} P_k(t_k \cos^2 \theta_k + t_k \sin^2 \theta_k) ds = P_k(t_k) 2\sqrt{1-t_k^2}.$$

Да зададем полинома $Q_k(x) = \int_{x_0}^x P_k(t) dt$. Тогава условията за P_k преминават в

$$Q_k(x_0) = 0, \dots, Q_k(x_n) = 0, Q_k'(t_k) = P_k(t_k) = \frac{1}{2\sqrt{1-t_k^2}}.$$

След намирането на $Q_k(x)$, получаваме $P_k(x) = Q_k'(x)$.

Търсеният хребетен полином е $P_k(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)$.

Както и в предната секция, решението на полиномиалната задача може да се използва за конструирането на алгоритъм за апроксимация на функции, основана на проекциите $\left\{ \int_{M_i M_j} f ds \right\}$.

Библиография

- [1] Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1947.
- [2] Б. Д. Боянов. Лекции по числени методи, Дарба, София, 1995.
- [3] И. П. Мысовских. Интерполационные кубатурные формулы, Наука, Москва, 1981.
- [4] И. П. Натансон. Конструктивная Теория Функции, Гос. издательство технико-теоретической литературы, Москва, Ленинград, 1949.
- [5] Бл. Х. Сендов, В. А. Попов. Числени методи, I част, Наука и изкуство, София, 1976.
- [6] С.Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике, Наука, Москва, 1976.
- [7] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York, 1967.
- [8] В. Bojanov. Optimal recovery of differentiable functions, Матем. сборник, **181** (1990), 3, 357-377.
- [9] В.Bojanov, I. K. Georgieva. Interpolation by bivariate polynomials based on Radon projections, *Studia Math.*, 162 (2) (2004), 141-160.

- [10] Bojanov, B., Hakopian, H., Sahakian, A.: Spline Functions and Multivariate Interpolation, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [11] B. Bojanov and G. Petrova. Numerical integration over a disc. A new Gaussian quadrature formula, *Numer. Math.* **80** (1998), 39–59.
- [12] B. Bojanov and G. Petrova. Uniqueness of the Gaussian cubature for a ball, *J. Approx. Theory* **104** (2000), 21–44.
- [13] Carl de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York, Berlin, 1978.
- [14] A.S. Cavaretta, C.A. Micchelli and A. Sharma. Multivariate interpolation and the Radon transform, Part I, *Math. Z.* **174** (1980), 263–279; Part II, in: Quantitive Approximation (Ron DeVore and K. Scherer, eds), pp. 49–62, Acad. Press, New York, 1980.
- [15] Ingrid Daubechies. Ten Lectures on Wavelets, *CBMS* **61**, SIAM, 1992.
- [16] M.E. Davison and F.A. Grunbaum. Tomographic reconstruction with arbitrary directions, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 77–120.
- [17] Ch.F. Dunkl and Yuan Xu. Orthogonal Polynomials of Several variables, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [18] I. K. Georgieva. Blending Approximations, Master Degree Thesis, University of Sofia, 1999.
- [19] I. K. Georgieva. Reconstruction of functions from their Radon projections, *Mathem. Balk. New Series*, Vol. **17**, (2003), Fasc. 3-4, 336–355.
- [20] I.K.Georgieva. Bivariate interpolation with (m, n) -splines. *Annuaire de L'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski"*, vol. **95**, (2001).
- [21] W. J. Gordon. Blending-Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation, *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 158–177, 1971.

- [22] H. Hakopian. Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type, *J. Approx. Theory* **34** (1982), 286–305.
- [23] H. Hakopian. Multivariate spline functions, B-splines basis and polynomial interpolation II, *Studia Math.* **LXXIX** (1984), 91–102.
- [24] H. Hakopian. Private communication.
- [25] C. Hamaker and D.C. Solmon. The angles between the null spaces of X -rays, *J. Math. Anal. Appl.* **62** (1978), 1–23.
- [26] W. Haussmann and K. Zeller. Blending interpolation and best L_1 - approximation, *Arch. Math.* **40** (1983), 545–552.
- [27] Dunham Jackson, *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol. XI, New York, 1930.
- [28] F. John: Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion, *Math. Anal.* **111** (1935), 541–559.
- [29] B. Logan and L. Shepp. Optimal reconstruction of a function from its projections, *Duke Math. J.* **42**, **4** (1975), 645–659.
- [30] R. Marr. On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **45** (1974), 357–374.
- [31] Michelli, C. A., T.J., S. Winograd. The optimal recovery of smooth functions, *Numer. Math.* **26** (1976), 562–569.
- [32] Günter Nürnberger, *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [33] K. Oskolkov. Estimates of non-linear ridge approximation in $L_2(B^2)$. *Manuscript, Lecture Notes. Part 2. Department of Mathematics, University of South Carolina.* 1996.

- [34] K. Oskolkov. On representation of algebraic polynomials by superpositions of plane waves, *Serdica Math. J.* **28** (2002), 379–390.
- [35] P. Petrushev. Approximation by ridge functions and neural networks, *SIAM J. Math. Anal.* **30**, 1 (1998), 155–189.
- [36] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad.* Vol. **69** (1917), 262–277.
- [37] A. Schinzel. On a decomposition of algebraic polynomials in several variables, Preprint, IMI series, Department of Mathematics, University of South Carolina, 2000:26, 15 pp; To appear in: *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* (2003).
- [38] I. J. Schoenberg, Cardinal Spline Functions, *CMBS* Vol. **12**, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [39] I. J. Schoenberg and A. Whitney. Sur la positivité des déterminants de translations des fonctions de fréquence de Pólya avec une application a une probleme d'interpolation par les fonctions "splines", *Compt. Rend.* **228** (1949), 1996–1998.
- [40] I. J. Schoenberg and A. Whitney. On Pólya frequency functions, III. The positivity of translation determinants with application to the interpolation problem by spline curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 246–259.
- [41] L.L. Shumaker. Spline Functions– Basic Theory. Wiley-Interscience, New York, 1981.
- [42] S.L. Sobolev. On formulas of mechanical cubatures on sphere surfaces, *Sibir. Math. J.* **3**, 5(1962), 769–791.
- [43] D.C. Solmon. The X-ray transform, *J. Math. Anal. Appl.* **56**, 1 (1976), 61–83.

- [44] T.J. Rivlin. Chebyshev Polynomials: from Approximation Theory to Algebra and Number Theory, Second edition, J. Wiley and Sons, New York, 1990.
- [45] B.A. Vostretzov and M.A. Kreines. On the approximation of continuous functions by superpositions of plane waves, *Dokl. AN SSSR*, **140**, 6 (1961), 1237-1240.