Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~pliska/
or contact: Editorial Office
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

DIE EINHEITSWURZELN UND DIE ZERLEGUNG DER FUNKTIONEN IN INTERPOLATIONSREIHEN

RALITZA K. KOWATSCHEWA

Sei f holomorph auf der geschlossenen Einheitskugel $\bar{\mathscr{D}}$. Wir setzen $\rho_0=\sup\{\rho, f\in\mathscr{H}(\mathscr{D}_\rho)\}$. Eine den Einheitswurzeln entsprechende Interpolationsreihe wird konstruiert, so daß in $\mathscr{D}_{\rho_0} f(z)=\Sigma_{n=0}^{\infty} I_n(f)\mathscr{P}_n(z)$. Es wird weiter gezeigt, daß diese Reihe und die Taylorsche Entwicklung von f um den Null im Kreise $\mathscr{D}_{\rho_0^{3/2}}$ äquikonvergent sind.

Einleitung. Sei die Funktion f, $f(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu$ holomorph auf der geschlossenen Einheitskugel $\bar{\mathscr{D}}(f\in\mathscr{H}(\bar{\mathscr{D}}))$. Das bedeutet, daß f in einer Umgebung $\mathscr{D}_\rho$ von $\bar{\mathscr{D}}$, $\mathscr{D}_\rho=\{z, |z|<\rho\}$, $\rho>1$, holomorph ist. Wir setzen $\rho_0=\sup\{\rho, f\in\mathscr{H}(\mathscr{D}_\rho)\}$. Sei weiter das Dreieckpunktschema β gegeben:

$$\beta=\begin{array}{l} \beta_{0,1} \\ \beta_{1,1},\ \beta_{1,2} \\ \dots \\ \beta_{n,1},\ \beta_{n,2},\dots,\ \beta_{n,n+1}, \\ \dots \end{array}$$

wo $\beta_{n,k}\in\bar{\mathscr{D}}$, $k=1,\dots, n+1$; $n=0, 1, 2,\dots$; wir setzen $\omega_n^\beta(z)=\Pi_{k=1}^{n+1}(z-\beta_{n,k})$. Für jede natürliche Zahl n und für $n=0$ $(n\in\mathrm{N})$ bezeichnen wir durch $I_n^\beta(f)$ die Steigung von f in den Punkten $\beta_{n,1},\dots, \beta_{n,n+1}$:

$$I_n^\beta(f)=(2\pi i)^{-1}\int_{|z|=\rho, 1<\rho<\rho_0} f(z)(\omega_n^\beta(z))^{-1}\,dz.$$

Sei, weiter, $\mathscr{P}_n^\beta$, $n\in\mathrm{N}$, das Polynom des Grades n, das die folgenden Gleichungen befriedigt:

$$I_k(\mathscr{P}_n^\beta)=\delta_{k,n}, \tag{1}$$

wo $\delta_{k,n}$ ist, wie gewöhnlich, das Symbol von Kroneker.

Die Polynome $\mathscr{P}_n^\beta$, $n\in\mathrm{N}$, werden als die dem Schema β entsprechenden Basispolynome bezeichnet. Fragen über ihre Existenz und eindeutige Bestimmung wurden in [1] gründlich untersucht.

Konstruieren wir die Interpolationsreihe:

$$\sum_{n\geq 0} I_n^\beta(f)\mathscr{P}_n^\beta(z). \tag{2}$$

PLISKA Studia mathematica bulgarica, Vol. 10, 1989, p. 3–10.

Das Problem besteht darin, festzulegen, in welchen Fällen jede Ausgangsfunktion $f, f \in \mathcal{H}(\bar{\mathcal{D}})$, durch die entsprechende Interpolationsreihe (2) dargestellt wird (siehe [2]). Mit der Antwort auf diese Frage könnten Probleme, verbunden mit der meromorphen Fortsetzbarkeit von holomorphen auf $\bar{\mathcal{D}}$ Funktionen, verknüpft werden (siehe [3, 4]).

Zu der eingeführten Thematik gehören die klassischen Sätze von Gelfond und von Gontscharow (siehe [1]) und der Satz von Walsh über die gleichmäßige Konvergenz der Interpolationsreihe (2) zu f im Falle, wenn β ein Newtonsche Dreieckpunktschema ist, d. h., wenn $\omega_n^\beta(z) = \Pi_{k=1}^{n+1}(z-\beta_k)$ und $|\omega_n^\beta(z)|_{n\to\infty}^{1/n} \to |z|$ lokal gleichmäßig in $\mathbf{C} \setminus \bar{\mathcal{D}}$ (siehe [5]).

Für jedes Dreieckpunktschema β werden die Basispolynome $\mathcal{P}_n^\beta$, $n \in \mathbf{N}$, durch die folgende Rekursionsformel angegeben (siehe [3]):

$$\mathcal{P}_0^\beta \equiv 1, \quad \mathcal{P}_n^\beta(z) = z^n - \sum_{k=1}^{n-1} I_k(z^n)\mathcal{P}_k^\beta(z).$$

Sei nun β das den Einheitswurzeln entsprechende Dreieckpunktschema, d. h. $\omega_n^\beta(z) = z^{n+1} - 1$, $n \in \mathbf{N}$. Bezeichnen wir durch $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbf{N}$, die den Einheitswurzeln entsprechenden Basispolynome.

Sei, wie schon angenommen, $f \in \mathcal{H}(\bar{\mathcal{D}})$ und $\rho_o = \sup\{\rho, f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_\rho)\}$. Es läßt sich sofort berechnen, daß

$$I_n(f) = \sum_{k \geqq 1} f_{kn+k-1}. \tag{3}$$

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. *Sei $f \in \mathcal{H}(\bar{\mathcal{D}})$ und sei $\rho_0 = \sup\{\rho, f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_\rho)\}$. Dann gilt:*

$$f(z) = \sum_{n \geqq 0} I_n(f)\mathcal{P}_n(z) \tag{4}$$

und die Reihe (4) *konvergiert lokal gleichmäßig zu f in $\mathcal{D}_{\rho_0}$. Es gilt die Abschätzung*

$$\limsup_{n\to\infty} |I_n(f)|^{1/n} = \rho_0^{-1}. \tag{5}$$

und für jedes Kompaktum K, $K \subset \mathcal{D}_{\rho_0}$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu(f)\mathcal{P}_\nu\|_K^{1/n} \leqq \max(1, \|z\|_K)\rho_0^{-1}, \tag{6}$$

wo $\|x\|_K = \max\{|(x)(z)|, z \in K\}$.

Dieser Satz zeigt, daß wenn β mit dem Dreieckpunktschema der Einheitswurzeln übereinstimmt, das Problem der Derstellbarkeit der holomorphen auf $\bar{\mathcal{D}}$ Funktionen durch die entsprechende Interpolationsreihe (2) positiv gelöst wird.

Satz 2. *Setzen wir $T_n(z) = \Sigma_{\nu=0}^n f_\nu z^\nu$ und $S_n(z) = \Sigma_{\nu=0}^n I_\nu(f)\mathcal{P}_\nu(z)$, $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt für jedes ρ, $\rho_0 \leqq \rho < \rho_0^{3/2}$ die Ungleichung*

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n - S_n\|_{\bar{D}_\rho}^{1/n} \leqq \rho\,\rho_0^{-3/2}.$$

Es folgt aus diesem Satz, daß die Taylorentwicklung von f um den Null und die Zerlegung (4) in der Kugel $\mathscr{D}_{\rho_0}^{3/2}$ äquikonvergent sind, obwohl die beiden Reihen bloß in der Kugel $\mathscr{D}_{\rho_0}$ konvergieren. Auf ähnliches Phänomen stößt man bei der Taylorentwicklung $\Sigma_{\nu\geqq 0} f_\nu z^\nu$ von f und der Reihe der Polynome V_n, $n \in \mathsf{N}$, die die Funktion in den Einheitswurzeln interpolieren, d. h. $(f - V_n)(e^{2\pi ik/(n+1)}) = 0$, $k = 0, \ldots, n$, $n \in \mathsf{N}$. Darauf hat J. Walsh zum ersten Mal hingewiesen (siehe [5]); dieser Fakt wurde eingehend in den Artikeln [9, 10] u. a. studiert.

Hilfssätze. Satz 1 folgt aus dem Satz von C. H. Ching und C. K. Chui (siehe [6] und [7]). Der vorliegende Beweis dieses Satzes wird direkt, anhand der Definitionen durchgeführt.

Dem Beweis beider Sätze gehen ein paar Hilfssätze voraus.

Bezeichnen wir durch $\mu(l)$, $l \in \mathsf{N}$, $l \geqq 1$, die Funktion von Möbius:

$$\mu(l) = \begin{cases} 1, & l = 1, \\ (-1)^k, & l = \prod_{i=1}^{k} p_i, \quad 1 < p_i < p_{i+1}, \quad p_i - \text{Primazahl}, \\ 0, & p^2/l^2, \quad p - \text{Primazahl}, \ p \geqq 2 \end{cases}$$

(x/l bedeutet, daß x ein Teiler von l ist).

Die folgende Eigenschaft von $\mu(l)$ ist gut bekannt (siehe [8]):

$$\sum_{k/l} \mu(k) = \begin{cases} 1, & l = 1, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{7}$$

Hilfssatz 1. *Es gilt für jedes $n \in \mathsf{N}$ die Darstellungsformel*

$$\mathscr{P}_n(z) = \sum_{k/(n+1)} \mu\left(\frac{n+1}{k}\right) z^{k-1}. \tag{8}$$

Tatsächlich, aus (1) folgt, ersetzt man $\omega_n^\beta(z)$ durch $z^{n+1} - 1$, $n \in \mathsf{N}$, daß

$$I_k(z^n) = \begin{cases} 1, & (k+1)/(n+1), \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{9}$$

Daraus ergibt es sich, zum Beispiel, sofort, daß wenn $n+1$ eine Primazahl ist, die folgende Gleichung gültig ist:

$$\mathscr{P}_n(z)\,(= \mathscr{P}_{p-1}(z)) = z^{p-1} - 1. \tag{10}$$

(hier und überall fortan werden durch p Primzahlen bezeichnet, $p \geqq 2$).

Sei nun $n + 1 = p^l$, $l \in \mathsf{N}$, $l > 1$. Auf Grund der Gleichung (9) und der sich daraus ergebenden Form der Rekursionsformel für die Polynome $\mathscr{P}_n$:

$$\mathscr{P}_n(z) = z^n - \sum_{\substack{(k+1)/(n+1) \\ 0 \leqq k < n}} \mathscr{P}_k(z)$$

läßt es sich sofort ersehen, daß

$$\mathscr{P}_{p^l-1}(z) = z^{p^l-1} - z^{p^{l-1}-1}. \tag{11}$$

Sei nun $n+1 = \Pi_{k=1}^{i} p_k$, $1 < p_k < p_{k+1}$, $1 \leqq k < i-1$. Nach (9) haben wir

$$\mathscr{P}_n(z) = z^n - \sum_{1 \leqq k_1 < \ldots < k_{i-1} \leqq i} \mathscr{P}_{p_{k_1} \cdots p_{k_{i-1}} - 1}(z) - \ldots - \sum_{1 \leqq k_1 \leqq i} \mathscr{P}_{p_{k_i} - 1}(z) - 1.$$

Zerlegen wir nacheinander jede Summe $\Sigma_{1 \leqq k_1 < \ldots < k_{i-j} \leqq i} \mathscr{P}_{p_{k_1} \cdots p_{k_{i-j}} - 1}$ nach der Formel (9), wobei wir mit $\Sigma_{1 \leqq k_1 < \ldots < k_{i-j} \leqq i} \mathscr{P}_{p_{k_1} \cdots p_{k_{i-1}} - 1}$ anfangen. Wir kommen zum Ergebnis:

$$\mathscr{P}_n(z) = z^n + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \sum_{1 \leqq k_1 < \ldots < k_{i-j} \leqq i} z^{p_{k_1} \cdots p_{k_{i-j}} - 1} + (-1)^i.$$

Wir sehen, daß in den bekannten Fällen (siehe (10), (11)) und die letzte Darstellung) (8) gültig ist.

Nun werden wir zeigen, daß für jedes $n \in \mathrm{N}$ die Polynome $\mathscr{P}_n$ die Form (8) haben. Setzen wir zu diesem Zweck

$$\tilde{\mathscr{P}}_n(z) = \sum_{k/(n+1)} \mu\left(\frac{n+1}{k}\right) z^{k-1}. \tag{12}$$

Da die Polynome $\mathscr{P}_n$ für jedes $n \in \mathrm{N}$ eindeutig bestimmt sind, wird unsere Behauptung bewiesen worden, wenn $\tilde{\mathscr{P}}_n$ die Definitionsgleichungen $I_k(\mathscr{P}_n) = \delta_{k,n}$ befriedigt.

Für jedes l, $l \in \mathrm{N}$, ist

$$I_l(\tilde{\mathscr{P}}_n) = \sum_{k/(n+1)} \mu\left(\frac{n+1}{k}\right) I_l(z^{k-1}).$$

Sei $l+1$ kein Teiler von $n+1$. In diesem Fall ist $l+1$ kein Teiler von keinem k, das in der Summationsformel (12) auftritt. Es ergibt sich aus (9), daß $I_l(\tilde{\mathscr{P}}_n) = 0$.

Sei nun $l+1$ ein Teiler von $n+1$. Wir setzen $n+1 = m(l+1)$. Nach (9) haben wir

$$I_l(\tilde{\mathscr{P}}_n) = \sum_{\substack{k/(n+1) \\ m \leqq k}} \mu\left(\frac{n+1}{k}\right) I_l(z^{k-1}) = \sum_{\substack{1 \leqq k' \leqq m \\ k'/m}} \mu(k').$$

Das bedeutet aber, berücksichtigt man (7), daß auch in diesem Fall $i_l(\tilde{\mathscr{P}}_n) = 0$ ist. Damit ist Hilfssatz 1 vollständig bewiesen worden.

Hilfssatz 2. *Es gilt, für jedes* R, $R>1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \| \mathscr{P}_n(z)z^{-n}-1\|_{\Gamma_R}^{1/n} \leqq R^{-1/2}, \tag{13}$$

wo $\Gamma_R=\partial\mathscr{D}_R$.

Tatsächlich, laut Hilfssatz 1 haben wir

$$\frac{\mathscr{P}_n(z)}{z^n}-1=\sum_{\substack{k/(n+1)\\ 1\leqq k<n}} \mu\left(\frac{n+1}{k}\right) z^{-(n+1-k)}.$$

Offenbar befriedigt jedes k, das in der letzten Summationsformel auftritt, die Ungleichungen

$$1\leqq k\leqq [(n+1)2^{-1}].$$

Daraus folgt Hilfssatz 2.

Es folgt aus diesem Hilfssatz, daß

$$|\mathscr{P}_n(z)|^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| \tag{14}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbf{C}-\bar{\mathscr{D}}$.

Hilfssatz 3. *Sei* $g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$, $g\in\mathscr{H}(\bar{\mathscr{D}})$. *Sei für jedes* $n\in\mathbf{N}$ $I_n(g)=0$. Dann ist g dem Null identisch.

Zunächst zeigen wir, daß g eine ganze Funktion ist, nämlich daß $\lim_{n\to\infty}|g_n|^{1/n}=0$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an und setzen wir $\rho=[\limsup_{n\to\infty}|g_n|^{1/n}]^{-1}$. Offenbar ist $1<\rho<\infty$.

Sei θ eine beliebige positive Zahl, die die Ungleichung $e^{3\theta}<\rho$ befriedigt. Es gilt für alle n, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqq n_1$, die Abschätzung

$$|g_n|<(e^\theta\rho^{-1})^n. \tag{15}$$

Sei nun Λ, $\Lambda\subset\mathbf{N}$ eine Reihenfolge, für die $|g_n|^{1/n}\to\rho^{-1}$, $n\in\Lambda$. Das bedeutet, daß für alle n_k, $n_k\subset\Lambda$, $n_k>n_2$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$(e^{-\theta}\rho^{-1})^{n_k}\leqq|g_{n_k}|\leqq(e^\theta\rho^{-1})^{n_k}. \tag{16}$$

Sei n_k, $n_k>n_2$, $n_k\in\Lambda$ fixiert. Aus der Gleichung $I_{n_k}(g)=0$ bekommen wir

$$g_{n_k}=-\sum_{l\geqq 2} g_{ln_k+l-1}.$$

Daraus folgt, beachtet man (15), die Abschätzung

$$|g_{n_k}|\leqq\sum_{l\geqq 2}(e^\theta\rho^{-1})^{ln_k+l-1}\leqq C_1(e^\theta\rho^{-1})^{2n_k}$$

(hier und überall fortan werden wir durch C_i, $i=1, 2, \ldots$, positive Konstanten bezeichnen). Aus der letzten Ungleichung und aus (16) folgt, daß

$$(e^{-\theta}\rho^{-1})^{n_k} \leqq C_1(e^{\theta}\rho^{-1})^{2n_k}.$$

Also gilt für alle n_k, $n_k > n_2$, $n_k \in \Lambda$, die Ungleichung

$$1 \leqq C_1(e^{3\theta}\rho^{-1})^{n_k},$$

was offensichtlich der Auswahl der positiven Zahl θ widerspricht.

Folglich ist g eine ganze Funktion, d. h. daß $\lim_{n\to\infty}|g_n|^{1/n}=0$.

Jetzt werden wir zeigen, daß g ein Polynom ist. Nehmen wir wieder das Gegenteil an. Sei ε eine beliebige positive Zahl, $\varepsilon < 1/2$. Da g eine ganze Funktion ist, sind für alle n, $n\in \mathrm{N}$, $n > n_3$, die folgenden Ungleichungen erfüllt:

$$|g_n| < \varepsilon^n.$$

Der Annahme wegen, g sei kein Polynom, können wir behaupten, daß es eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, $n_0 > n_3$, so daß $|g_{n_0}| > 0$ und $|g_n|^{1/n} \leqq |g_{n_0}|^{1/n_0}$ für alle $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq n_0$. Die Bedingung $I_{n_0}(g)=0$ führt zur Abschätzung:

$$|g_{n_0}| \leqq \sum_{l\geqq 2} |g_{n_0}|^{l+(l-1)/n_0}.$$

Es ergibt sich aber daraus, daß

$$1 \leqq 2|g_{n_0}|^{1/n_0} \leqq 2\varepsilon < 1.$$

Diese Ungleichung widerspricht der Auswahl von ε. Folglich ist g ein Polynom. Nun ist es direkt zu sehen, daß $g \equiv 0$.

Beweise der Sätze. Satz 1 folgt aus dem Hilfssatz 3 und aus (14). Tatsächlich, für jedes beliebiges ρ, $1 < \rho < \rho_0$, gilt die Abschätzung:

$$\limsup_{n\to\infty} |I_n(f)|^{1/n} \leqq \rho^{-1}.$$

Es folgt aus (14) weiter, daß die Reihe $\Sigma_{n\geq 0} I_n(f)\mathscr{P}_n(z)$ lokal gleichmäßig in $\mathscr{D}_\rho$ konvergiert; somit ist die Grenzfunktion F holomorph in $\mathscr{D}_\rho$. Setzen wir $\Phi = F - f$. Es ist definitionsgemäß $I_n(\Phi)=0$ für jedes $n \in \mathrm{N}$. Nun folgt, beachtet man, daß ρ beliebig nah an ρ_0 liegen kann, der erste Teil des Satzes.

Nimmt man weiter an, daß $\limsup_{n\to\infty}|I_n(f)|^{1/n} < \rho_0^{-1}$, gelangt man zum Ergebnis, daß $f \in \mathscr{H}(\overline{\mathscr{D}}_{\rho_0})$, was der Definition von ρ_0 widerspricht. Somit haben wir (5) bewiesen.

Sei nun K ein Kompaktum, $K \subset \mathscr{D}_{\rho_0} \setminus \overline{\mathscr{D}}$. Wir setzen $\|z\|_K = \rho$; offenbar ist $1 < \rho < \rho_0$. Sei θ_1 eine positive Zahl, die die Ungleichung $\rho e^{2\theta_1} < \rho_0$ befriedigt. Beachtet man (3) und (14), kann man behaupten, daß

$$|I_n(f)| < (e^{\theta_1}\rho_0^{-1})^n$$

und

$$\|\mathscr{P}_n\|_{\Gamma_\rho} \simeq (e^{\theta_1}\rho)^n$$

für alle n, $n \in \mathrm{N}$, $n > n_4$. Daraus ergibt es sich, daß

$$\|f - \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu(f)\mathscr{P}_\nu\|_K = \|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} I_\nu(f)\mathscr{P}_\nu\|_K \leqq C_2(\rho e^{2\theta_1}\rho_0^{-1})^n.$$

Da θ_1 beliebig klein sein kann, bekommen wir aus der letzten Ungleichung die folgende Abschätzung:

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu(f)\mathscr{P}_\nu\|_{\Gamma_\rho}^{1/n} \leqq \rho\rho_0^{-1}.$$

Daraus und aus dem Maximumprinzip ergibt sich für Kompakte $K \subset \mathscr{D}$ die Abschätzung

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu(f)\mathscr{P}_\nu\|_K^{1/n} \leqq \rho_0^{-1}.$$

Somit haben wir (6) bewiesen.

B e m e r k u n g. Sei β ein dreieckiges Punktschema, $\beta \subset \overline{\mathscr{D}}$ und $\omega_n^\beta(z)^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ lokal gleichmäßig in $\mathrm{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}$. Gontschar hat nachgewiesen, auf Grund eines Satzes von Kakehashy (siehe [11]), ohne die Polynome $\mathscr{P}_n$ einzuführen, daß $\limsup_{n\to\infty} |I_n^\beta(g)|^{1/n} = \rho_0^{-1}$.

Der Beweis ist noch nicht veröffentlicht worden.

B e w e i s d e s S a t z e s 2. Wir setzen für jedes $n \in \mathrm{N}$ $T_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu$, $S_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu(g)\mathscr{P}_\nu(z)$. Sei die positive Zahl R gegeben, $1 < R < \rho_0$. Sei θ_2 eine beliebige positive Zahl, die die Ungleichung $e^{2\theta_2}\sqrt{R} < \rho_0$ befriedigt. Es folgt aus (3), (5) und aus (14), daß für alle n, $n \in \mathrm{N}$, $n > n_5$, die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$|f_n - I_n(f)| \leqq (e^{2\theta_2}\rho_0^{-1})^{2n}, \tag{17}$$

$$|I_n(f)| \leqq (e^{\theta_2}\rho_0^{-1})^n, \tag{18}$$

$$\|\mathscr{P}_n(z)z^{-n} - 1\|_{\Gamma_R} \leqq (e^{\theta_2}R^{-1/2})^n. \tag{19}$$

Schätzen wir für jedes n, $n > n_5$, die Differenz $T_n - S_n$ auf Γ_R ab. Es ergibt sich aus dem Satz 1, daß:

$$(T_n - S_n)(z) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \{I_\nu(f)\mathscr{P}_\nu(z) - f_\nu z^\nu\}$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \{(I_\nu(f) - f_\nu)z^\nu + I_\nu(f)(\mathscr{P}_\nu(z)z^{-\nu} - 1)z^\nu\}.$$

Schätzen wir die rechte Seite nach (17), (18) und (19) ab. Wir gelangen zum Resultat:

$$\| T_n - S_n \|_{\mathscr{D}_R} \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{Re^{2\theta_2}}{\rho_0^2} \right)^\nu + \left(\frac{\sqrt{R} e^{2\theta_2}}{\rho_0} \right)^\nu \right\} \leqq C_3 \left(\frac{\sqrt{R}}{\rho_0} e^{2\theta_2} \right)^n.$$

Sei ρ eine beliebige Zahl, $\rho_0 < \rho$. Nach der Anwendung vom Lemma von Bernstein- Walsh über das Verhalten des Polynomes $\mathscr{P}_n$ auf Γ_ρ (siehe [5, Kapitel 3]) bekommen wir:

$$\| T_n - S_n \|_{\Gamma_\rho} \leqq C_3 \left(\frac{\sqrt{R} e^{2\theta_2}}{\rho_0} \right)^n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n.$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n \to \infty} \| T_n - S_n \|_{\mathscr{D}_\rho}^{1/n} \leqq (\sqrt{R}^{-1} e^{2\theta_2} \rho \rho_0^{-1}).$$

Somit haben wir Satz 2 bewiesen, da Q_2 beliebig klein ist und R beliebig nah an ρ_0 liegt.

LITERATUR

1. A. O. Gelfond. Differenzenrechnung. Berlin, 1958.
2. M. A. Евграфов. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. Москва, 1954.
3. E. B. Saff, J. Karlsson. Singularities of functions determined by the poles of Pade Approximants. *Lecture Notes Math.*, **888**, 1981, 238—254.
4. R. Kovacheva. The roots of unity and the meromorphic continuation of functions. *Lecture Notes Math.*, **1039**, 1983, 264—276.
5. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1966.
6. C. H. Ching, C. K. Chui. Mean boundary value problems and Riemann series. *J. Appr. Theory*, **10**, 1974, 324—336.
7. R. Kovacheva. Zerlegung der holomorphen Funktionen in Interpolationsreihen nach den Einheitswurzeln. *Доклады БАН*, **37**, 1984, 441—444.
8. H. Hardy, E. M. Wright. An introduction to the theory of numbers. Oxford, 1954.
9. A. S. Cavaretta, A. Sharma, R. S. Varga. Interpolation in the roots of unity: an extension of a theorem of J. L. Walsh. *Resultate der Mathematik*, **3**, 1981, 155—191.
10. E. B. Saff, A. Sharma, R. S. Varga. An extension to rational functions of a theorem of J. L. Walsh on differences of interpolating polynomials. — In: Univ. of Wiskonsin-Madison, Math. Research Centre, April 1981.
11. T. Kakehashy. The divergence of interpolating. I, II, III. *Proc. Japan Acad. Sci.*, **30**, 1954, 741—745.

Institute of Mathematics with Computer Centre
1090 Sofia Bulgaria

Eingegangen am 22. Dezember 1982