РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

Катедра „Приложна математика и статистика“

Стефка Романова Караколева

Изследване ефективността от прилагането на компютърни програмни системи за изчисление и визуализация в обучението по математика

ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

за присъждане на образователна и научна степен ДОКТОР

по докторска програма

МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Научни ръководители:

проф.д-р Велизар Павлов
Русенски университет „Ангел Кънчев“
Катедра „Приложна математика и статистика“

доц.д-р Борислав Лазаров
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
София

РУСЕ, 2016

Използвани съкращения

АИФ	Аграрно-индустриален факултет
БСУ	Бургаски Свободен Университет - гр. Бургас
ВО	Висше образование
ВТУ	Великотърновски университет „Св.св. Кирил и Методий“ - Велико Търново
ВМ	Висша математика
Е	Електроника
ЕЕЕО	Електроенергетика и електрообзавеждане
ЕГ	Експериментална група
ЕС	Европейски съюз
ЗТТ	Земеделска техника и технологии
ИИ	Индустриално инженерство
ИИТ	Информатика и информационни технологии
ИКТ	Информационни и комуникационни технологии
ИТ	Информационни технологии
КГ	Контролна група
КСТ	Компютърни системи и технологии
КСО	Компютърно съпроводено обучение
КУА	Компютърно управление и автоматизация
ЛИМ	Лаборатория по интерактивна математика
МИ	Математика и информатика
МКМ	Мениджмънт на качеството и метрология
МТФ	Машинно-технологичен факултет
НБУ	Нов Български Университет - гр. София
НСОКМ	Национална студентска олимпиада по Компютърна математика
НУ	Нелинейни уравнения
ПОМИ	Педагогика на обучението по математика и информатика
ПУ	Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ - гр. Пловдив
РУ	Русенски университет „Ангел Кънчев“ - гр. Русе
СЛАУ	Система линейни алгебрични уравнения
СНУ	Системи нелинейни уравнения
СУ	Софийски университет „Св. Климент Охридски“ - гр. София
ТУ	Технически университет
ФЕЕА	Факултет Електротехника, електроника и автоматика
ФМ	Финансова математика
ФМИ	Факултет по математика и информатика
ФПНО	Факултет Природни науки и образование
ШУ	Шуменски университет „Св. Константин Преславски“ - гр. Шумен
УАСГ	Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия
CAS	Computer Algebra Systems
GUI	Graphical User Interface
MATLAB	Система за математически изчисления MATLAB (MATrix LABoratory)
SPSS	Statistical Package for the Social Science

Съдържание

Списък на фигурите

Списък на таблиците

Увод и концепция на изследването

Обучението по математика в информационното общество

Съвременното общество функционира в глобалното информационно пространство. Няма област на науката или практиката, в която да не се използват компютърни и информационни технологии.

Глобалното информационно пространство налага преосмисляне на образователната парадигма и учебното съдържание по математика [123]. Според Коено Грейвмайер [120] в днешно време ударението трябва да падне върху обучението на студентите:

- да разпознават проблемите, които могат да бъдат разрешавани с математически методи;
- да представят проблемна ситуация като математическа задача, която да могат да атакуват с компютър;
- да разбират математическите операции, които използват;
- да интерпретират и оценяват компютърно-генерираните резултати.

Процесът на глобална компютризация и технологизация има своите безспорни предимства, но води и до негативни процеси, които се наблюдават и в сферата на образованието, и в частност - в обучението по математика.

Нашите наблюдения са, че развитието на информационното общество и масовото използване на компютърните и мобилни технологии води до по-ниско ниво на подготовка по математика в училищата и университетите. Голям е броят на учениците и студентите, които нямат необходимата математическа култура, не познават и не могат да използват на практика математическите закони, показват липса на логическо и абстрактно мислене, не умеят да се изразяват и да пишат на математически език. Доказателство за това са резултатите от проведеното през 2012 година международно изследване на знанията на 15 годишните ученици, известно под името PISA на Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР) [108]. Това изследване е фокусирано върху математическата грамотност, разбирана като способност за използване на знанията в житейски ситуации. Резултатите на 20% от българските ученици са под най-ниското стъпало на шестстепенната скала (при средно 8% за всички страни), а едва 0.7% от учениците ни попадат на най-високото (шесто) стъпало, при средно 3.3% за всички страни. Проучването е направено сред 2122 ученици на 15-16 години от 186 училища от цяла България. В световното изследване участват 44 държави, а страната ни заема предпоследното 43-то място в него. Средният брой точки на всички ученици е 500. Българските деца имат среден резултат 402, като след тях в класирането са единствено връстниците им от Колумбия с 399 точки.

Развитието на информационното общество и масовото използване на мобилните и компютърни технологии води до проблеми при прилагане на *традиционния подход* в обучението по математика [120]. Нашата образователна система в настоящия момент не поощрява младите хора към самостоятелно мислене, което в перспектива става пречка за тяхното развитие. Причините за това са обективни и субективни. От една страна, налице е фактът, че образователната система се развива с по-бавни темпове от развитието на технологиите. От друга страна, българският учител няма необходимата подготовка и време за използване на математически софтуер в обучението по математика [3].

Знанията на голяма част от нашите ученици са под средно ниво и професионалната им реализация е под въпрос. Днес тези млади хора постъпват в университетите без нужната подготовка и знания, без навици за учене, което задълбочава още повече проблема и го прави проблем на цялото общество.

Тревожни факти за ниското ниво на математическа грамотност в Инженерните университети в Европа се публикуват още през 1995 [147]. Този проблем е налице и в България и се поставя от редица автори [5, 67, 85, 107, 127].

Всички тези факти показват, че са необходими промени не само в нормативната база, а и в същината на учебния процес.

Основният проблем в образованието днес е в *начина на преподаване*.

Проблемите на обучението по математика на всички нива изискват въвеждане на нови подходи [18, 28, 29, 54, 87], методи на обучение [122] и оценяване [27], съответстващи на нивото на математическа подготовка на обучаваните и отговарящи на високите съвременни изисквания на информационното общество [30, 58, 60, 61, 88, 121, 127].

Подходът на **компютърно съпроводено обучение (КСО) по математика** има следните основните характеристики:

- КСО по математика е *съвременно* обучение, при което обучаваният използва персонален компютър и система за математически изчисления и визуализация като инструмент за *решаване* на математически задачи.
- Чрез КСО *се намалява времето* за усвояване на материала чрез прилагане на съвременни компютърни средства за обучение.
- В КСО се използват *подходящи интерактивни учебни материали*.
- КСО по математика се приема с ентусиазъм от обучаваните и *отговаря на високите изисквания* на младите хора за съвременно обучение с използване на модерни методи и средства.
- Чрез КСО се прилага убедително принципа за *нагледност* в обучението.
- Чрез КСО се повишава ефективността на обучението по математика, доказването на което е предмет на настоящата дисертация.

Структура на дисертацията

Дисертацията има общ обем 244 страници, като съдържа увод, три глави, структурирани в раздели и подраздели, заключение, четири приложения и библиография. Основното изложение съдържа 184 страници. За илюстрация на изложението са включени 61 фигури и 90 таблици.

Изследването е проведено сред студенти - бъдещи инженери, обучавани по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ по раздел „Числени методи“. Изучаваният материал от този раздел включва: решаване на системи линейни алгебрични уравнения, нелинейни уравнения и системи уравнения, апроксимиране на функции, числено решаване на диференциални уравнения и системи и числено интегриране.

Акцентът в разработката е поставен върху **изследване и доказване ефективността на описаната методика** чрез задълбочен статистически анализ на резултатите от обучението, което съответства на темата на настоящата дисертация. Експерименталните изследвания са извършени с компютърните системи SPSS и MATLAB.

В Глава 1 са анализирани системите за математически изчисления и визуализация с приложение в обучението по математика. Направен е обзор на публикациите, свързани с темата на дисертацията. Анализиран е българският и световен опит в преподаването на математически дисциплини с използване на математически софтуер.

В Глава 2 е описан дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика с използване на системата за математически изчисления и визуализация MATLAB. Предложени са дидактически сценарии и общ модел на обучение и самоподготовка в ИТ среда.

В Глава 3 са описани експериментални изследвания и резултати от проведени анкети, доказващи ефективността на приложената от автора експериментална (условно наречена „нова“[1]) методика на компютърно съпроводено обучение по Висша математика.

Глава 3 съдържа три раздела:

- В раздел 3.1 са описани серия експериментални изследвания на резултатите от обучението по Висша математика, извършени през пет последователни години – от 2010 до 2014. Представена е методиката на формиране на експериментални и контролни групи на изследване за всяка серия.

  В раздел 3.1.1 е извършен вариационен анализ на изследваните съвкупности. В раздел 3.1.2 е направена проверка за нормалност на разпределенията на изследваните признаци. В раздел 3.1.3 е доказана ефективността на експерименталната методика за всяка от петте серии на проведения експеримент.

  В раздел 3.1.4 е извършен задълбочен дискриминантен анализ, базиран на всички налични данни за 3001 изследвани студенти. В резултат на дискриминантния анализ е изграден адекватен дискриминантен модел, чрез който са получени прогнози (със съответните им вероятности) за нови случаи, неучастващи в извадката.

  В раздел 3.1.5 са изследвани връзки между наблюдавани признаци и са открити най-силните от тях. Чрез метода *класификационни дървета* са класифицирани наблюдавани признаци чрез различни фактори. На основата на анализа са направени изводи за обучението по математика по

[1]Използваните в дисертацията наименования „нова“ и „стара“ методики са условни и не следва да се разбират в буквален смисъл. В контекста „нова методика“ означава „експериментална методика“, а „стара методика“ - традиционна методика.

експерименталната и традиционната методика, като е изследвано влиянието на фактора „методика“ върху различни категории студенти.

- В раздел 3.2 е извършен анализ на диагностичната процедура и провеждането на диагностичен тест за изследване резултатите от обучението по Висша математика.

- В раздел 3.3 са анализирани резултатите от проведена анкета „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“. Извършен е подробен *клъстерен* анализ.

Приложение А съдържа диагностичен тест за проверка на знанията на студентите по Висша математика.

Приложение Б съдържа тестови задачи по Висша математика, включени в web-базирания електронен курс за обучение по дисциплината, предназначени за самостоятелна работа на студентите, които са „банка от задачи“ за контрол.

В Приложение В е представена анкета по „Компютърна математика“, публикувана on-line, чрез която са изследвани ученици и студенти и резултатите от която са анализирани в раздел 3.3.

Приложение Г съдържа компютърен код на създаден от автора графичен потребителски интерфейс за решаване на СЛАУ.

Използвани web-базирани дидактически материали

Обучението на студенти по методиката, предмет на настоящата дисертация, се извършва в учебна компютърна зала с използване на учебни материали - лекции, упражнения, тестове, видео-уроци, задачи и др, разработени по проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“, публикувани в страницата на Центъра по дистанционно обучение http://cdo.uni-ruse.bg. Входът в курсовете може да се осъществи с потребителско име и парола PM-guest/guest. В настоящата дисертация се използват два курса на автора в този портал: „Висша математика 3“ за специалности от Факултет „Електротехника, електроника и автоматика“ http://e-learning.uni-ruse.bg/indexc.php?cid=9041905090100510 и „Приложна математика“ за специалности от „Машинно-технологичен факултет“ http://e-learning.uni-ruse.bg/indexc.php?cid=2521248025100581.

Техническо оформление на дисертацията

Дисертацията е подготвена чрез компютърна издателска система LaTeX, компилирана с програмата PDFLaTeX като електронна книга с хипервръзки. Литературата е изработена с програмата BiBTeX. Електронният документ е приложен на оптичен носител към дисертацията. За четене на резултатния pdf-файл са необходими мобилно устройство или персонален компютър с инсталирана програма Adobe Acrobat Reader. Навигацията в електронния документ се осъществява чрез навигационни бутони: хипер-съдържание, библиография, активни връзки към интернет-ресурси.

Участие в проекти при разработване на дисертацията

Работата по дисертацията включва изследвания, частично финансирани по следните проекти:

- Проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“.
- Проект № 2015 - ФОЗЗГ-03, Финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ГЛАВА 1

Обзор и анализ на проблема

Актуалност на темата

Образованието и обучението [33] играят ключова роля за изграждането на Европейския съюз като общество, изградено на основата на познанието. С приемането на Лисабонската стратегия през 2000 - бе определена нуждата от радикална реформа в образованието, поради нарастващата роля на информационните и комуникационни технологии в обществото. Чрез работната програма „Образование и обучение 2010“, последвана от стратегическата рамка за европейско сътрудничество в образованието и обучението „ЕТ 2020“ бяха формулирани общи цели и инициативи, които обхващат всички видове образование и обучение и всички етапи на обучението през целия живот. Те се подкрепят от няколко програми за финансиране, като „Програмата за обучение през целия живот“ и „Еразмус Мундус“ както и множество програми по стратегията „Учене през целия живот“ за общо образование, висше образование и електронно обучение.

В своята Резолюция относно изпълнението на работната програма „Образование и обучение 2010/2013“, Европейският парламент определя, че е от съществено значение да се установи дигитална и медийна грамотност и да се осигури въвеждане на новите технологии на всички нива в образованието и обучението. Подчертава се значението на включването на новите технологии в учебната програма като необходим инструмент за обучение в една модерна образователна система. Призовават се институциите в сферата на висшето образование да модернизират своите курсове на обучение и като цяло да ускорят

Болонския процес за европеизиране на висшето образование.

Европейският парламент и Съвета на Европа определят Стратегическа рамка за европейско сътрудничество (Education training 2020) в образованието и обучението като издигат приоритетна цел „*подобряване на качеството и ефективността на образованието и обучението*“, за да станат образованието и обучението на всички нива по-привлекателни и ефективни и за да могат всички граждани да придобият *ключови компетентности* за учене през целия живот, предпоставки за личната реализация на всеки гражданин на Европа на пазара на труда, [34].

Европейските ангажименти на България като член на Европейския съюз изискват въвеждане на нови, модерни методи на обучение по всички фундаментални дисциплини, в това число и по математика.

Една от приоритетните цели, заложени в „Стратегията за развитие на Висшето образование в Република България за периода 2014-2020“, приета през февруари 2015 от Народното събрание е: „Съществено повишаване на качеството на висшето образование и на съвместимостта му с европейските системи за Висше образование, с цел заемане на достойно място в Европейско пространство за висше образование“. За постигане на тази цел се предвижда „реформиране на учебните програми и учебното съдържание“ в съответствие с изискванията на Европейската комисия.

Широкото използване и развитие на компютърната техника във всички области на науката и практиката изисква създаване на компетентни, висококвалифицирани и информирани кадри, добре познаващи компютърните и информационни технологии. Създаването и обучението на такива специалисти е задача на съвременното образование. То трябва да осигурява необходимите условия за изграждане на система от знания и умения, обезпечаващи създаването на кадри, подготвени за творческа ефективна реализация в съответната област на знанието в условията на динамично развиващите се информационни и телекомуникационни технологии.

На преден план днес стои въпросът „Как да повишим интереса на младите хора към ученето?“

Потребителското мислене и новите „клик-навици“ на учащите налагат използване на нестандартни методи на обучение и по математика, които съответстват на разпокъсаните и непълни математически знания и умения на обучаемите [58] и използват съвременни компютърни системи за математически изчисления и визуализация. Налице е благоприятна среда за прилагане на математически софтуер: младите хора умеят да използват нови технологии и по-леко приемат факти, поднесени нагледно чрез компютърни програми. Позитивната нагласа на учащите към компютърните технологии и качеството на създадените учебни среди и програми са добра основа за постигане на положителни резултати при обучение по математика с използване на CAS (Computer Algebra Systems), с цел по-добро разбиране на материала и формиране на позитивно отношение към математиката.

През последните години интерактивните професионални компютърни системи масово навлизат като нова форма на обучение в университетите на Европа, САЩ, Япония, Русия и др. Те стават задължителен елемент на преподаването и научните изследвания.

Чрез подхода на „компютърно съпроводено обучение по математика“, предмет на настоящата дисертация: се засилва интереса на обучаваните към математиката и се аргументира ползата от нея; провокира се състезателния елемент и екипната дейност в часовете и извън тях; програмните компютърни системи стават основен инструмент и добър помощник в обучението като се ускорява процеса на разбиране на математическите понятия и методи; задоволяват се високите образователни изисквания на учащите; създават се умения за работа с компютърни системи за изчисление и визуализация, което води до повишаване на дигиталната и математическа компетентност на обучаемите – необходимо условие за успешна реализация на младите хора в условията на пазарна икономика и развито информационно общество.

1.1 Обзор и анализ на състоянието на проблема

В процеса на работа по дисертацията, авторът на настоящия труд изследва текущото състояние на преподаването на Висша математика със система за математически изчисления в България. Това изследване е проведено в три основни направления:

- Проучване на съдържанието на учебни програми по математика в български университети и използването на системи за математически изчисления в тях.

- Запознаване със съдържанието на научни статии от автори, които преподават в различни български университети и споделят опита си при

	БСУ		ВТУ		ПУ		РУ		СУ		ТУ-Вн		ТУ-Гб		ТУ-Сф		ШУ		$\sum$
	С	М	С	М	С	М	С	М	С	М	С	М	С	М	С	М	С	М	
2011	4	0	5	5	-	-	4	2	-	-	6	3	10	5	-	-	-	-	29
2012	5	2	5	3	4	2	6	5	9	7	6	2	2	1	-	-	4	0	41
2013	3	0	9	4	6	3	15	1	17	17	8	7	6	4	-	-	4	1	68
2014	4	1	10	7	8	5	9	2	26	24	8	8	5	3	4	1	4	2	78
2015	16	9	9	5	5	4	6	2	18	16	5	5	7	3	4	4	4	1	74
$\sum$	32	12	38	24	23	14	40	12	70	64	33	25	30	16	8	5	16	4	290

Таблица 1.1: Участие на студенти в Националната студентска олимпиада по Компютърна математика (С - брой студенти, М - медали)

използването на различни системи за изчисления в различни раздели от математиката.

- Проучване на съществуващите добри практики в обучението с CAS в България и анализ на участието на студенти в Националната олимпиада по компютърна математика „Акад. Стефан Додунеков“.

По отношение на използваните системи изчисления, в повечето университети в България се използват три от системите: MATLAB, Mathematica и Maple, като системата Mathematica се прилага предимно в обучението на студенти от Област на ВО „Природни науки, математика и информатика“, докато системите MATLAB и Maple - за студенти от Област на ВО „Технически науки“. Най-масово в българските университети[1] се използват системите MATLAB и Mathematica.

В *Бургаски свободен университет* при обучението на студентите в „Центъра по информатика и технически науки“ се използва MATLAB и символния пакет MuPAD в курса по Висша математика и при подготовката на студенти за участие в олимпиади по Компютърна математика, както и при моделиране и оптимизиране на процеси [19, 115].

Във *Великотърновския Университет* също има традиции в обучението на студенти с Mathematica, която се преподава по дисциплината „Компютърна алгебра“ с лектор проф. С. Буюклиева [13]. Участието на студенти от ВТУ в олимпиадата по Компютърна математика е също показателно за нивото на овладяване на системата Mathematica: 0.13% от участниците в олимпиадата са от ВТУ, като 60% от тях си тръгват с медали; броят на медалистите от ВТУ е 14% от всички медалисти през периода 2011-2015 - (таблица 1.1).

[1] В анализа по университети наредбата е в азбучен ред.

Габровски университет е инициатор и създател на Националната олимпиада по Компютърна математика. Екипът от преподаватели, ръководени от проф. С. Капралов, обучава студентите с MATLAB, Maple и Maxima при усвояване на знания по алгебра, анализ, геометрия, линейно оптимиране [39, 40, 63, 124]. Значителен принос за развитието на обучението по Компютърна математика има доц. Й. Тончев, като идеен основател на Олимпиадата и автор на множество книги за използването на системите Mathematica [98], Maple [97], MATLAB [95], MuPAD [96] и приложението им в инженерната наука [92, 93, 94, 99].

В *Нов Български Университет (НБУ)* при обучението на студенти по линейна алгебра и математически анализ по дисциплините „Висша математика със средствата на компютърната алгебра" и „ВМ със система за символно смятане" [66, 67, 68] се използва системата Mathematica [65].

В *Пловдивски Университет*, по отношение на използваната система, обучението в базовите дисциплини е основано предимно на системите Mathematica, Maple и SPSS за статистическа обработка. Във ФМИ на ПУ има традиции в използването на интерактивни системи в обучението по математика от 1995 година. Тук обучението със системата Mathematica се характеризира с добра организация, за което голяма роля играе двадесетгодишната работа на екипа преподаватели от Лабораторията по виртуална математика (ЛИМ) по проекта EVLM (Европейска виртуална лаборатория по математика) под ръководството на проф. Сн. Гочева – Илиева http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/. ЛИМ е спомагателно учебно-образователно звено към ФМИ, което обединява преподаватели, докторанти и студенти на свободен принцип. Екипът на Лабораторията има за цел изучаване, използване и разпространяване на иновационни образователни методи и интерактивни системи за електронно обучение по математика и статистика във ФМИ. Обучението е осигурено и с учебни материали [23, 24, 25, 26].

Ново в обучението на студенти в ПУ е и провеждането на упражненията по дисциплините „Компютърни числени методи", „Числено моделиране в нанофизиката", „Начини за визуализация с Wolfram Mathematica" и „Графично представяне на данни" в конферентна връзка с ръководител гл. ас. д-р П. Атанасова http://atanasova.fmi-plovdiv.org/.

Изучаването на „Интерактивна математика" се извършва и в избираема дисциплина с изучаване на Mathematica, Maple и Derive. Изучава се интерфейс, правила за работа, 2D и 3D графика, приложение за решаване на задачи по математически анализ, алгебра, геометрия, диференциални уравнения, програмиране и създаване на интерактивни документи.

В *Софийски Университет* при изучаването на основните раздели по математика, физика, химия и биология се включва и детайлно запознаване със системата Mathematica, която се прилага задълбочено през целия курс на обучение на студентите. Налични са и специализирани курсове с използване на MATLAB към катедра „Числени методи и алгоритми“: „MATLAB и приложение в Числените методи“ и „Софтуер за научни изчисления“; в катедра „Диференциални уравнения“ – „Диференциални уравнения и приложения“; към катедра „Информационни технологии“ – „Приложен софтуер“; в катедра „Вероятности и статистика“ – „Статистика с MATLAB“, повечето от които са избираеми. В обучението по диференциална геометрия се използва системата Maple, като е разработен он-лайн курс „Диференциална геометрия с Maple“ и избираема дисциплина „Компютърни методи в геометрията“. Обучение с използване на Mathematica и Matlab се провежда и в магистърски курсове в дисциплините: „Система Mathematica-практическо въведение за магистри“, „Числени методи за системи с разредени матрици“, „Практикум по математически финанси“, „Разпознаване на образи“, „WEB-базирани изчисления“ и др.

Красноречиво доказателство за резултатите от обучението на студентите от Софийски университет със системи за математически изчисления е традиционно най-доброто представяне на отбора на СУ в Националната олимпиада по Компютърна математика (таблица 1.1). Около 1/4 от участниците в олимпиадата са от три факултета на СУ: Факултет по математика и информатика, Физически факултет и Факултет по химия и фармация, като повече от 90% от тях печелят 36% от всички медали.

За преподаването на математика чрез системи за компютърна математика в *Русенски университет* наблюденията на автора са дългогодишни. То започва преди повече от петнадесет години с преподаване на Числени методи с MATLAB. Днес студентите от област на ВО „Технически науки“ използват Maple в дисциплините Математика 1 и 2 [117], а във Висша математика 3 - MATLAB [41, 48, 59]. Студентите от специалности ПОМИ и ФМ изучават различни дисциплини с използване на MATLAB и Mathematica [74, 140], а подготовката на всички студенти за участие в НСОКМ се извършва с MATLAB, MuPAD и Mathematica по дисциплината „Учебно-изследователска работа по Компютърна математика“ [49], която е включена в учебните планове на всички специалности от факултети ЕЕЕО, АИФ, МТФ и ФПНО.

В *Технически университет - гр. Варна* под ръководството на доц. Зл. Матева студентите изучават MATLAB, MuPAD и Maple в базовите дисциплини [69] и в „Основи на инженерните изчисления“, „Въведение в MATLAB“ и „Приложна математика за инженери“. Над 75% от студентите от ТУ-Варна, участници в НСОКМ, печелят медали (таблица 1.1).

В *Университета по Архитектура, Строителство и Геодезия (УАСГ)* и *Технически Университет - София* е изградена стройна система за обучение на студентите по линейна алгебра, аналитична геометрия и диференциални уравнения с MATLAB [56]. През 2011 бе проведена дискусия в рамките на XL Конференция на Съюза на математиците в България за въвеждане на нов курс по математика в Техническите университети [55], в която бяха обсъдени проблемите на обучението по математика и бе споделен опита на преподаватели от УАСГ и ТУ-София за въведения *интегриран курс по математика* за първите три семестъра от обучението на студенти степен „бакалавър“. Такъв интегриран курс е въведен и в Европейския политехнически университет (ЕПУ) в град Перник (`epu.bg`). Авторите на този курс споделят опита си в преподаването на линейна алгебра, анализ, геометрия и диференциални уравнения в поредица статии [80, 112, 126, 139] и предоставят на студентите учебни материали в електронен вид [12, 81, 125].

За нуждата от ново компютърно-базирано обучение по математика в България и в частност - в университетите, се провеждат редица дискусии [55, 105] на математическата колегия, обменя се опит за прилагането на компютърно съпроводено обучение в различни дисциплини в множество доклади и дисертации [31, 35, 78], като се предлагат адекватни модели на обучение. За нуждата и практическата полза от такова обучение има единно мнение.

Една от целите на проучването на наличната литература от автора бе да намери резултати от изследвания за ефективността на прилаганите методики на обучение чрез системи за математически изчисления. Правени са такива изследвания, например в [14], [109] и [149], но според мнението на автора **изследванията и научните доказателства за ефективността от прилагането на системи за компютърна математика в България НЕ са достатъчни и убедителни**. В настоящия труд е направен опит да се направи такова изследване и да се докаже ефективността от прилагането на компютърни системи за математически изчисления и визуализация конкретно в Русенски Университет.

В световен мащаб използването на системи за Компютърна математика в обучението по математика има дългогодишни традиции. Самите производители на такива системи предлагат богат арсенал от ръководства, списания, книги и курсове на своите електронни страници [129, 134, 136].

Например, за студентите и преподавателите MathWorks има специално разработени студентски безплатни версии, публикуват се студентски разработки http://www.mathworks.com/academia/?s_tid=gn_acad, организират се курсове https://matlabacademy.mathworks.com/ в университети в САЩ, Германия, Япония и др. В Япония много университети предоставят безплатни версии на своите студенти и организират конкурси с награден фонд за сложни изследователски проекти. В Русия академичната общност активно ползва образователния сайт Експонента [118], където се публикуват множество разработки с MATLAB, Mathematica, Maple, MathCad и др, авторите на които са преподаватели и студенти от различни университети, провеждат се конкурси, обсъждат се проблеми, провеждат се уебинари чрез официалния YouTube канал MATLABinRussia.

Но докато компаниите, собственици на комерсиалните продукти MATLAB, Maple, Gauss и Mathematica, извършват тези дейности в условия на конкуренция и ръководени не само от безкористни подбуди, то общностите, работещи върху усъвършенстване на свободния математически софтуер SAGE, Maxima, Euler Math Toolbox набират все повече последователи и разработчици и постепенно се налагат като сериозна алтернатива на скъпоструващите и непосилни за студентите и университетите с малък бюджет комерсиални продукти.

В раздел 1.2 е направен кратък обзор и сравняване на най-разпространените CAS, след което се аргументира избора на системата MATLAB като инструмент в обучението по математика, предмет на настоящата дисертация.

1.2 Обзор на системите за математически изчисления и визуализация

1.2.1 Обща характеристика на системите за компютърна математика

Системите за математически изчисления и визуализация са колекция от компютърни програми и библиотеки, предназначени за числени пресмятания и аналитични преобразувания, чрез които се решават бързо и ефективно, с помощта на компютър, разнообразни задачи. През последните години в България стана популярен терминът „Компютърна математика“, който се използва масово вместо популярния в чужбина термин Computer Algebra Systems (CAS).

Повечето системи за компютърна математика извършват следните действия: пресмятане на числена стойност на израз; преобразуване на математически изрази от една в друга форма; решаване на линейни и нелинейни уравнения; решаване на обикновени диференциални уравнения; пресмятане на интеграли от функции; интегрални преобразувания (Преобразование на Фурие, Преобразование на Лаплас); действия с числови редове; изписване на сложни математически изрази на няколко реда, подобно на TEX; намиране на пълни и частни производни; намиране на граници на функции; числени пресмятания с различна точност; действия с матрици.

Повечето системи за компютърна математика имат и следните функции: пресмятане на числената стойност на математични изрази с голяма точност; допълнителни специализирани модули; изобразяване графики на функции; проверка на валидността на твърдения; обработка на звукове, изображения и други сигнали.

Някои от системите за компютърна математика включват и програмни езици, които позволяват на потребителите да разработват собствени алгоритми.

Системите за компютърна математика възникват през втората половина на XX век. През 50-те години на XX век се появяват отделни програми за решаване на конкретни задачи на машинен език, например, първите програми за диференциране на функция. Следващото десетилетие е характерно с появата на алгоритмични езици от високо ниво, изследвания за създаване на общи алгоритми и програми за решаване на различни класове задачи и програмни системи с общо предназначение: Reduce, Macsyma, MATLAB, Scratchpat Formac. През 80-те години на XX век се развива изчислителната техника, появяват се системите с развит потребителски интерфейс Maple (1980г.) и Mathematica (1988г.) Първите системи за компютърна математика са предназначени само за числени пресмятания. Чрез тях компютърът се използва като средство за извършване на бързо, точно и автоматично изпълняване на аритметични и логически операции с числа или масиви от данни чрез въведена компютърна програма. През 90-те години на XX век започва интегриране на символните и числените пресмятания, усъвършенстват се системите за компютърна математика Maple, MATLAB, Sage Math, Mathematica и други, като основна цел е да се включат научните и технически алгоритми в обща система.

1.2.2 Видове и структура

Системите за компютърна математика традиционно се делят на *специализирани* и *универсални*.

Специализираните системи са проектирани и предназначени за решаване на конкретни задачи, например от механиката, физиката, астрономията и др.

Универсалните системи са ориентирани към широк кръг математически задачи, като включват също специализирани пакети и библиотеки за решаване на задачи от конкретни области. Най-популярните съвременни универсални системи за компютърна математика са MATLAB [136], Mathematica [134], Maple [129], Maxima [137], Axiom [110], MuPAD [138], MathCad [132], Derive [114], GAUSS [119], Euler Math Toolbox [116] и Sage Math [143].

Универсалните системи стават все по-популярни за преподаване на математически ориентирани дисциплини и за научни изследвания. Всяка от тях има собствен синтаксис на езика, различен обем на библиотеките, различна вътрешна структура и алгоритми, поради което потребителите предпочитат една или друга система. Но общите им свойства са повече, отколкото различията им и затова след усвояване на някоя от системите, преходът към друга система не е сложен процес.

Основните съставящи *компоненти на системите за компютърна математика* са: интерфейс, ядро, библиотеки, пакети за разширение и система за справки:

- Интерфейсът на съвременните системи за компютърна математика е подобен на интерфейса на много други Windows приложения, като осигурява удобство при работа и дава възможност на потребителя да се обръща към ядрото със своите искания и да получава резултата от решението на екрана или в графичен прозорец.

- Ядрото съдържа кодове на множество бързо изпълняеми функции и процедури, осигуряващи достатъчно пълен набор от вградени функции и оператори на системата. Обикновено обемът на ядрото е ограничен, но към него се добавят библиотеки от специализирани процедури и функции.

Ядрото, библиотеките, пакетите за разширение и системата за справки на съвременните системи за компютърна математика акумулират знания от областта на математиката, натрупани в развитието ѝ през вековете. Затова системите за компютърна математика се отнасят към интелектуалните програмни продукти, предназначени да предоставят знания в областта на числените методи за пресмятане и моделиране, аналитични методи и съвременна графика.

Спектърът от приложения на системите за компютърна математика е широк: математически изследвания, включващи сложни изчисления и аналитични преобразувания; разработка и анализ на алгоритми; математическо моделиране и компютърен експеримент; анализ и обработка на графични, числови и статистически данни, симулации на различни процеси и явления.

Тъй като системите за компютърна математика съдържат оператори за базови изчисления, то почти всички алгоритми, които не са включени в стандартните функции, могат да бъдат реализирани чрез създаване от потребителя на собствена програма.

Днес най-широко разпространените комерсиални системи за компютърна математика са: MATLAB, Maple и Mathematica. И трите системи са широко използвани от математици, физици и инженери. Все по-голяма популярност придобиват и системи, разработвани в академичните среди, които се разпространяват под свободни лицензи. Такива са SAGE, Euler Math Toolbox, Maxima и други.

1.2.3 Популярни компютърни системи за изчисления и визуализация

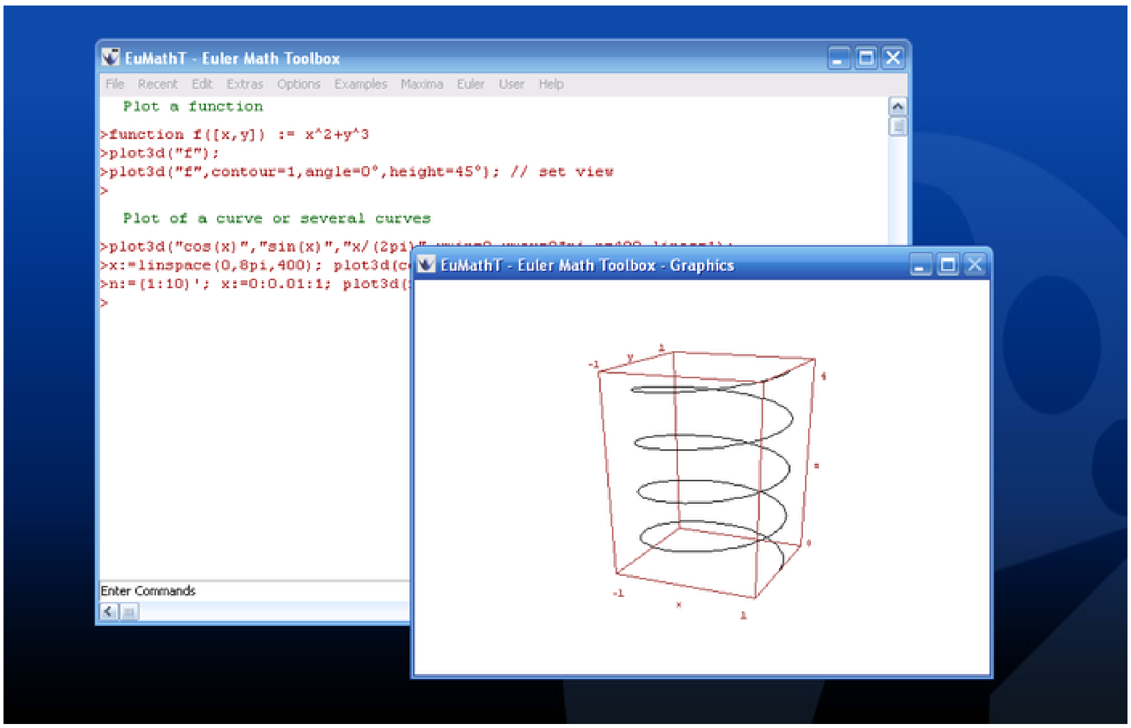
Euler Math Toolbox

Системата Euler Math Toolbox (EMT) е мощна *свободно* разпространявана система за компютърна математика, комбинираща числени и символни пресмятания с богати възможности за графично представяне на резултатите. Системата е създадена през 80-те години от Rene Grothmann (Германия) за използване от математици, ученици и студенти (фигура 1.1).

Основната компонента на Euler Math Toolbox е Notebook Interface с текстов и графичен прозорец, с бърз достъп до различни системи: Euler Core с език за програмиране и числени алгоритми; Maxima - интегрирана като символна система; LaTeX за формули и PDF експорт; Python и C за високо ефективни скриптове, Povray - за реалистични графики, DLL библиотеки, JE - редактор за файлове.

Езикът на EMT се допълва със системата Maxima. Съчетаването на двете системи осигурява бързи числени пресмятания (EMT) и точна символна аритметика (Maxima). Системата предлага достъп до външни програми като LaTeX, Python, Tiny C, Povray, както и експорт в PDF и HTML.

Euler Math Toolbox разполага с голямо разнообразие от математически операции и функции. Toolbox-а на програмата показва къде са допуснати грешки (т.е. грешни променливи и стойности, грешки в синтаксиса) и как тези грешки да се отстранят. Това прави програмата ценен ресурс за научни изследвания.

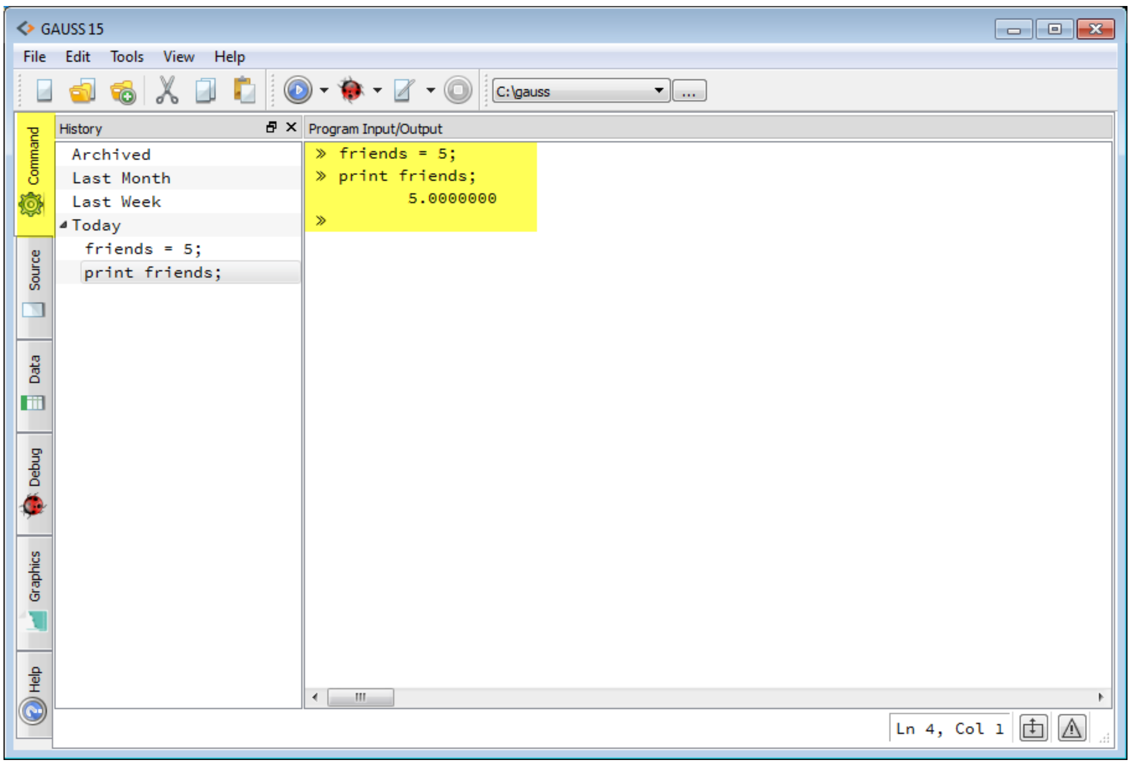


Фигура 1.1: Интерфейс на системата Euler Math Toolbox

Една от най-важните функции в инструментариума на Euler Math Toolbox е 2D и 3D графичният прозорец. Програмата работи едновременно с два командни прозореца - единият се използва за работа върху уравнения или операции, а другият - за изчертаване на графичното решение. Това е особено важно при сравняване на резултати и прогнози в статистиката. С Euler Math Toolbox могат да се правят бързи и надеждни числени пресмятания с реални или комплексни числа, допустими интервали, вектори или матрици [116].

Gauss

GAUSS (фигура 1.2) се разпространява от фирмата APTEX и е математическа и статистическа система с лесен програмен език, широко използвана от математици, физици, икономисти и финансови анализатори. GAUSS е завършена аналитична среда, разполагаща с много големи математически и статистически възможности, бързина и възможности за анализ на многобройни данни. Програмата GAUSS и съпътстващите я приложения предлагат лесно боравене със системата, независимо дали ще се използва от начинаещ или от опитен програмист. След представянето на GAUSS през 1984 година, тази програма става стандарт за комплексно моделиране на широкомащабни данни.



Фигура 1.2: Интерфейс на системата GAUSS

За по-лесни задачи GAUSS предлага интерактивна среда за получаване на данни, възможни сценарии за решаване на възложената задача и анализ на резултатите. При по-сложни задачи потребителите могат да пишат собствени програми и да ги записват във файл. В основата на GAUSS стои програмен език, подходящ за решаване и на най-сложните задачи. Програмата разполага и с възможности за построяване на 2D и 3D графики, хистограми и други [119].

Maple

Maple (фигура 1.3) е ефективна компютърна система за алгебрични и символни математически изчисления, създадена през 80-те години на XX век в университета във Ватерло, Канада. Разработва се от канадската фирма MapleSoft, която се използва в повече от 300 университети по света и има над 1 млн. регистрирани потербители.

Maple е типична интегрирана система. Тя обединява мощен програмен език, който е също език за интерактивно общуване със системата; редактор за подготовка и редактиране на документи и програми; съвременен интерфейс с възможност за работа в диалогов режим; мощна справочна система с няколко хиляди примера; ядро от алгоритми и правила за преобразуване на математически изрази; числен и символен процесори; система за диагностика; библиотека с вградени и допълнителни функции; пакети с функции на други производители и поддръжка на други програмни езици и програми. Интерфейсът на Maple с работни листи може да се използва за създаване на документи с интегриран текст, математически символи, графики и хипервръзки, което се използва за създаване на учебни документи.

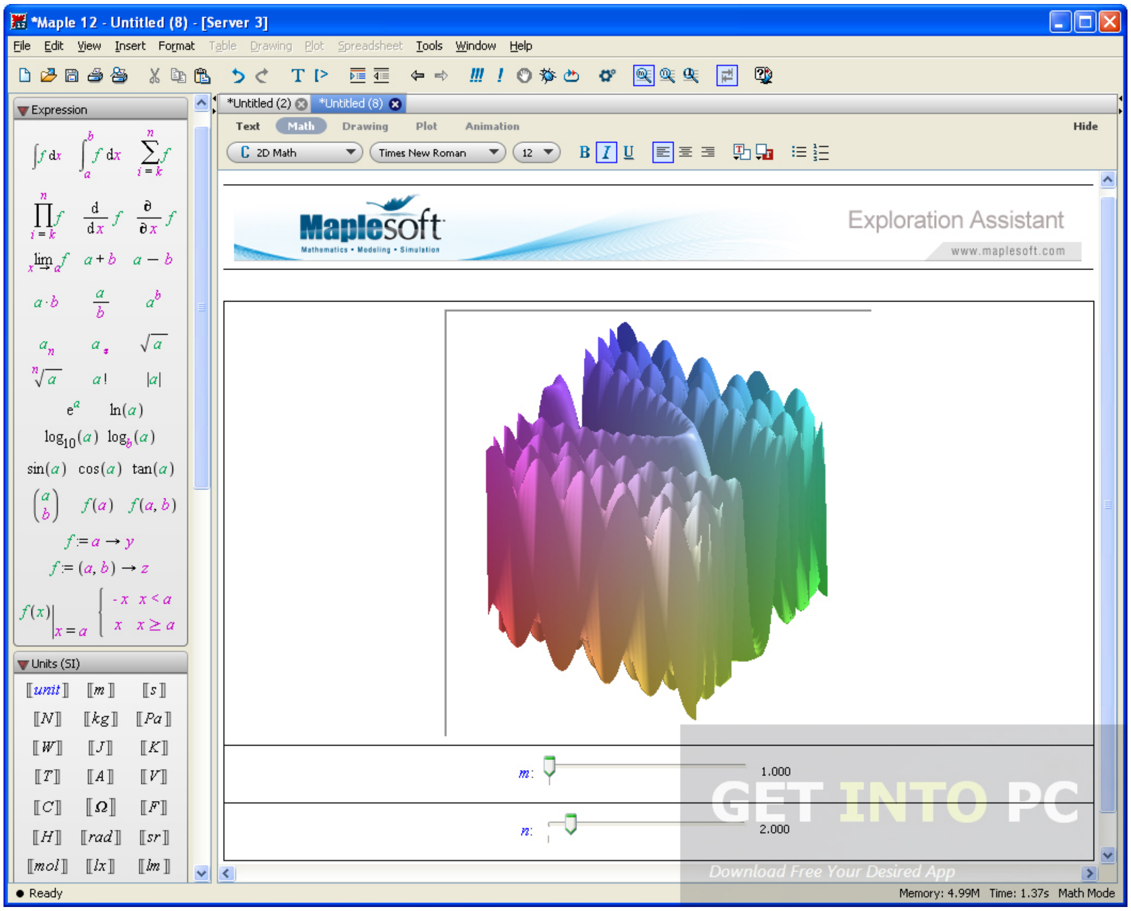
Един от ключовите елементи на Maple е способността ѝ да оперира със символни математически изрази. Много често, докато се работи с Maple, може да се отложи във времето точното пресмятане с използване на символна променлива. Maple третира тези недефинирани елементи като символи, които по-късно могат да получат числена стойност [16].

Основните области на приложение на Maple са в организирането на ефективна познавателна дейност и прилагане в учебния процес, създаване на изображения към задачите и съкращаване на времето и процесите при решаване на конкретни задачи. Maple е мощна система за решаване на сложни изчислителни задачи, която използва математическата символика и намира решенията на много широк спектър от задачи, като позволява и нагледна демонстрация на задълбочени математически изследвания [129, 130].

MathCad

Основната област на приложение на MathCad (фигура 1.4) е решаване на задачи с инженерен характер и създаване на учебни интерактивни документи.

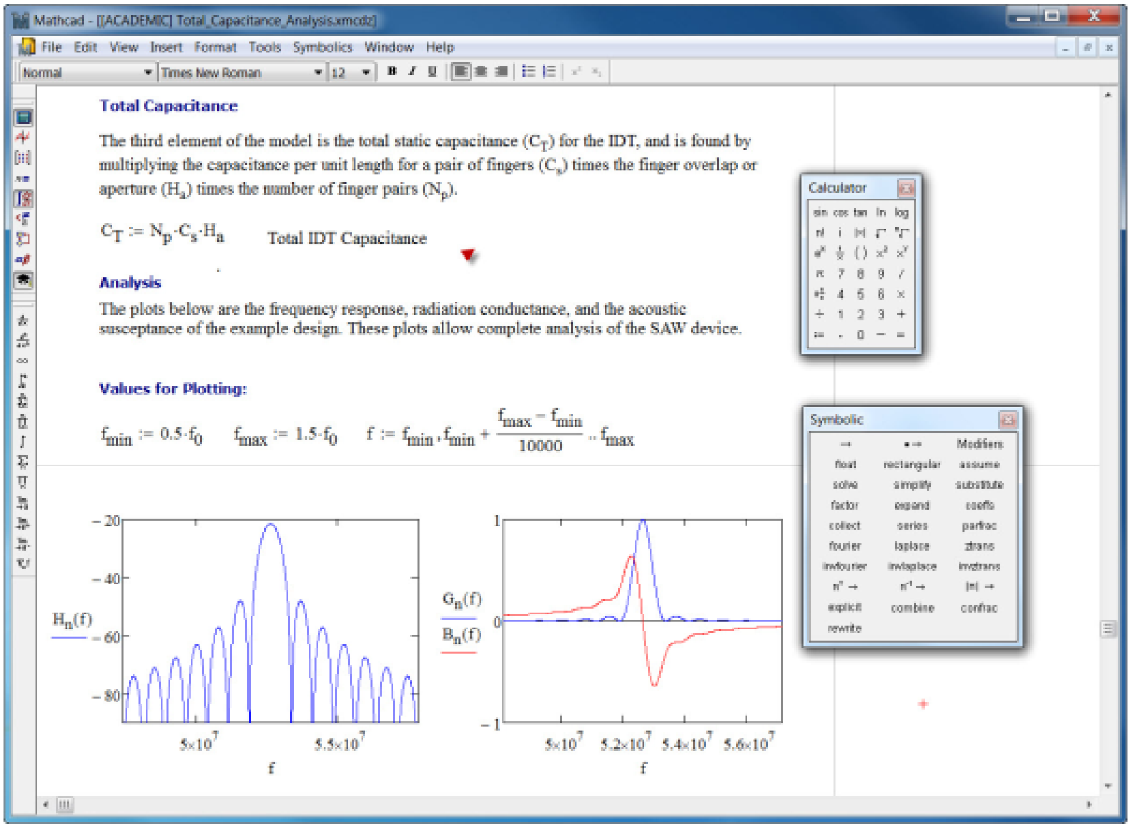
MathCad се отнася към класа приложения, наречени PSE (Problem Solution Environment - програмна среда за решаване на задачи). Това означава, че



Фигура 1.3: Интерфейс на системата Maple

работата на системата не се определя еднозначно от действията на потребителя, а до голяма степен е резултат от работата на вградени в пакета алгоритми, недостъпни за потребителя. MathCad е много популярна сред студенти и инженери, най-вече заради простотата на взимодействието на потребителя с приложението и яснотата на изпълняваните операции. Възможностите за прилагането му постоянно се разширяват - MathCad все по-често се използва не само във физико-инженерните изследвания, но и при решаване на задачи по икономика, финансови анализи, социология, биология и др.

Описанието на различните команди в MathCad следва популярния за описание на команди от Windows-приложенията начин, като последователността при избирането на командите и подкомандите се разделя с наклонена черта. Например, Symbolics/Variable/Solve означава, че първоначално се изпълнява команда Symbolics, от менюто на която се избира Variable, а от появилото се подменю се избира Solve [62].



Фигура 1.4: Интерфейс на системата MathCad

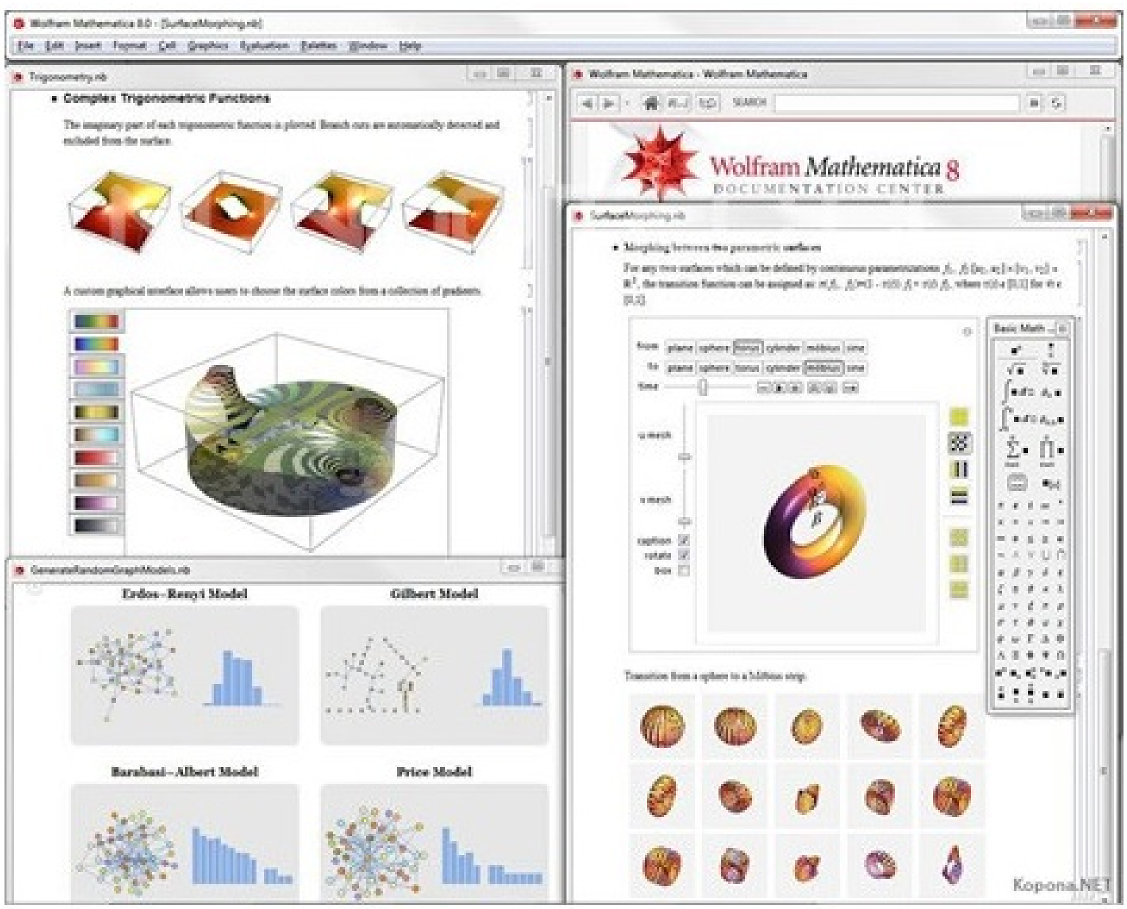
Характерно за MathCad е графичното, а не текстово въвеждане на изрази. За набиране на команди, функции, формули може да се използват както клавиатурата, така и бутоните на многобройните специални панели с инструменти. Всички променливи, формули, параметри може да се изменят в зависимост от получените резултати. Това дава възможност да се създават интерактивни изчислителни документи.

Използването на MathCad не изисква познаването на програмиране, тъй като MathCad е бил замислен като средство за програмиране без програмиране. Специално трябва да се отбележи възможността при изчисления с MathCad да се използват величини с размерности, като може да се избира системата единици: SI, CGS, английска или да се създаде собствена. Това улеснява изчисленията, особено инженерните.

В MathCad фактически няма графики на функции в математическия смисъл на понятието, а има визуализация на данни, записани във вид на вектори и матрици (т.е. построяват се както линии, така и повърхнини по точки с интерполация). Механизмът на визуализация с MathCad значително отстъпва на този в Maple, където е достатъчно да е зададен само вида на функцията, за да се построи графика с произволна сложност. В сравнение с Maple графиката в MathCad има следните недостатъци: невъзможност за построяване на повърхнини, зададени параметрично в неправоъгълна област на изменение на двата параметъра; създаване и форматиране на графики само чрез меню, което ограничава възможностите за програмно управляване на параметрите на графиката [132].

Mathematica

Програмата Mathematica (фигура 1.5) е създадена по идея на Стефан Волфрам и е разработена във Wolfram Research, Шампейн, Илинойс [133]. Повече от 25 години системата Mathematica определя високо ниво в компютърните системи и разпространява изчислителни среди за милиони новатори, преподаватели и студенти по целия свят.



Фигура 1.5: Интерфейс на системата Mathematica

Системата Mathematica работи с всички компютърни операционни системи и позволява да се обменят данни в много стандартни формати. Тя се състои от две части - Ядро (Cernel) и Интерфейс (front end).

Както и системата MATLAB, Mathematica работи в режим калкулатор и програмен режим, решава сложни математически задачи символно и числено и изобразява двумерни и тримерни графики. Тя обединява в себе си световното знание, като използва свои собствени революционни алгоритми, пресмята числа с произволно зададена степен на точност, извършва бързо математически преобразувания. В системата Mathematica се използва най-голямата колекция в света от числени алгоритми.

В системата Mathematica е вграден гъвкав и интуитивно разбираем език за програмиране. Той поддържа всички основни съвременни методи на програмиране, като предоставя и нови такива. Системата включва широк спектър подходи за програмиране - процедурно програмиране, операции със списъци, функционално програмиране, логическо и обектно-ориентирано програмиране, операции със стрингове, смесени стилове на програмиране. Тя работи директно с информация от различни типове (картина, звук, анимация, 3D обекти и др).

За удобство при работа със системата Mathematica всички въведени от потребителя команди и изпълнението им се изобразяват в един и същ документ - Notebook. С помощта на хипервръзки може да се навигира както в една тетрадка, така и между различни такива. Документите остават неизменни както на екрана, така и при отпечатването им, тъй като системата избира автоматично шрифта и форматирането на документа, като са включени и достатъчно инструменти за създаване на собствен стил на документа. Всички помощни документи в Mathematica Help Browser, са също и книги Mathematica Book.

В системата Mathematica има богати възможности за създаване на завършени програми за различни приложения, напр. пакета Combinatorica е предназначен за решаване на задачи от Дискретна математика, Optica - за разработка на оптически системи, Technical Trader - за финансов анализ и др. Протоколът MathLink обезпечава връзка между системата Mathematica и външни програми.

Днес системата Mathematica има милиони потребители по целия свят и голямо количество допълнителни продукти и услуги. Стотици книги са написани за Mathematica на различни езици. Издават се няколко печатни и електронни списания: The Mathematica Journal, Mathematica for Education and research. Появяват се нови различни професионални и мобилни приложения, основани на Mathematica. С помощта на системата Mathematica са разработени стотици специализирани курсове. Сайтът на Wolfram Research http://www.wolfram.com съдържа милиони разработки и постоянно се обновява [65, 133, 134].

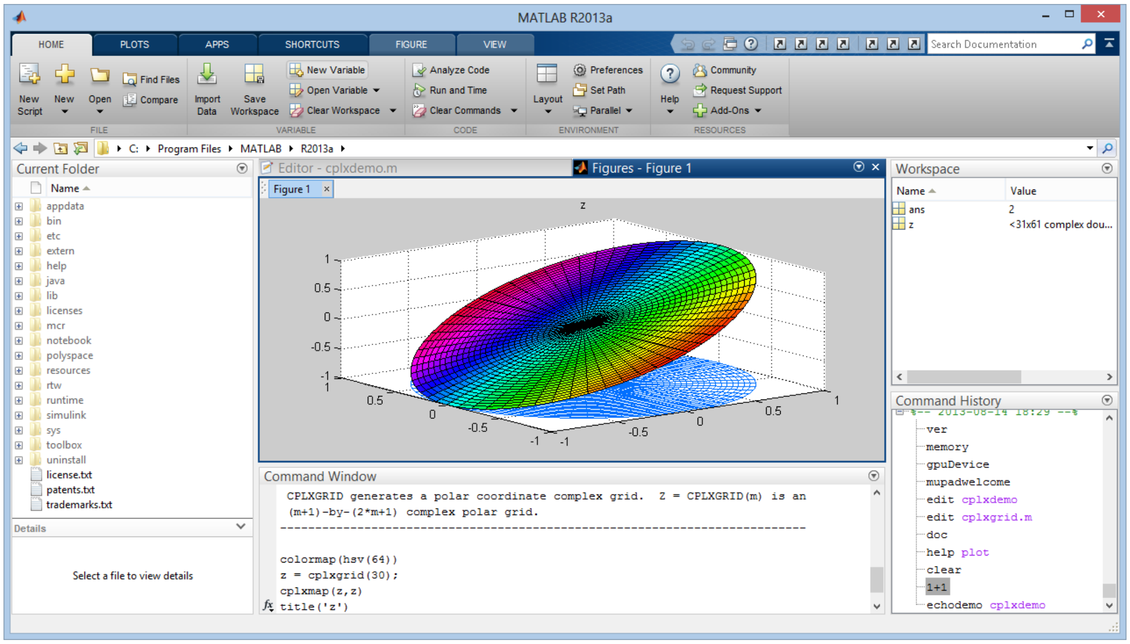
Все по-голяма популярност придобива и търсачката (answer-engine) Wolfram Alpha, създадена през 2009 - от екипа на Стефан Волфрам. Това е он-лайн услуга, която дава отговори на фактически въпроси чрез пряко изчисляване на структурирана информация, както и чрез предоставяне на списък от уеб страници, които могат да съдържат отговор, точно както една търсеща машина извежда списък с резултати. Тя съдържа само фактологични данни - над 10 трилиона отделни единици информация, извлечени от десетки хиляди официални страници, библиотеки и академични списания, при това проверени от експерти. При задаване на ключова дума или формула, Wolfram Alpha дава разнообразна и задълбочена информация, съпътствана от графични изображения.

MATLAB

MATLAB (фигура 1.6) е диалогова програмна система за извършване на научни изследвания. Ориентирана е към работа с масиви от данни - вектори, матрици, многомерни масиви, масиви от клетки и масиви от записи. От тук идва и наименованието MATLAB - MATrix LABoratory. Тази ориентация позволява с един единствен оператор да се извършват едновременно действия над всички елементи на масива, без необходимостта от организиране на цикли.

MATLAB се състои от ядро и допълнителни компоненти (Toolboxes). Ядрото е съвкупност от програми с различно предназначение, разположени в каталози (директории).

MATLAB работи в два режима - директен и програмен режим. Той има вграден програмен език от високо ниво. Изпълнението на една програма, писана с езиковите средства на MATLAB, се извършва чрез извикване от командния ред с нейното име. Командите на MATLAB са два вида: вградени и външни. Вградените команди са част от кода на интерпретатора, а външните са програми, записани в ASCII код като текстови файлове, които имат разширение `.m`. В системата са вградени функции, решаващи основни задачи от линейна алгебра, числен анализ, обработка на експериментални данни,



Фигура 1.6: Интерфейс на системата MATLAB

двумерна и тримерна графика, анимация и др. Тя интегрира в себе си възможности за извършване на числови и символни пресмятания и визуализация на получените резултати.

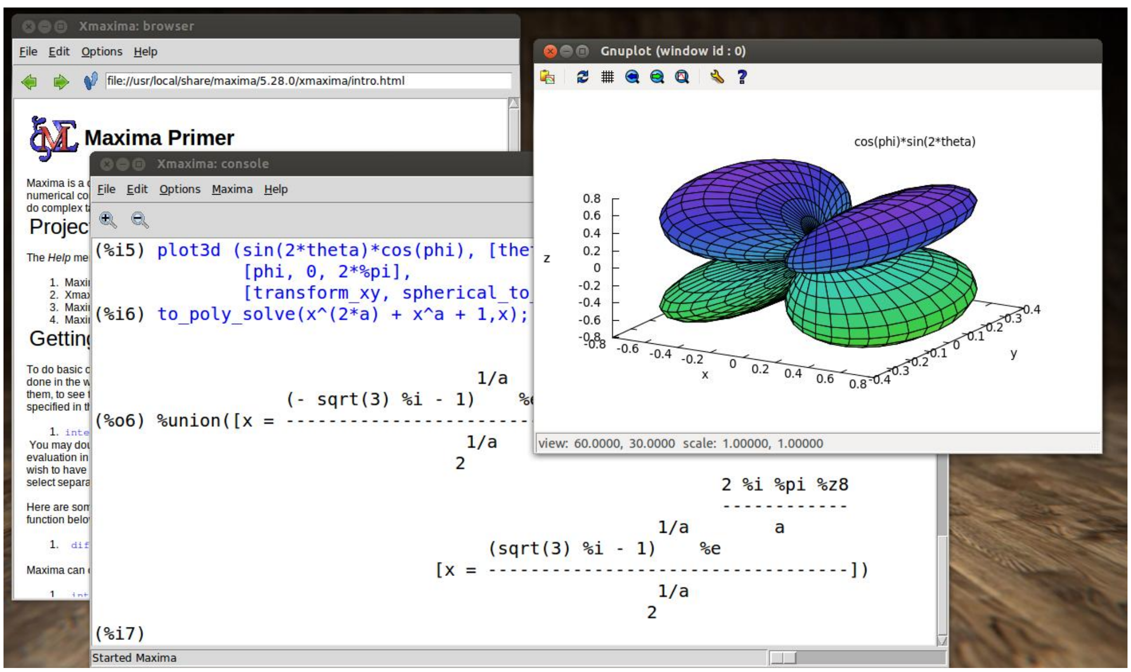
Богатите възможности на вградените в ядрото на MATLAB функции, се допълват динамично с пакети приложения, най-популярните и използвани от които са MuPAD, Simulink, Optimization Toolbox, Statistical Toolbox, Fuzzy Logic, Partial Differential Equations и други.

Един от най-популярните и използвани допълнителни пакети е Symbolic Math Toolbox, чрез който могат да се извършват аналитични преобразувания в средата на MATLAB. До версия r2007b включително, този пакет е ползвал ядрото на Maple. В следващите версии Maple е заменен с MuPAD, която е част от Symbolic Math Toolbox и до днес.

Областите на приложение на MATLAB са: математически и компютърни изчисления, разработка на алгоритми, изчислителни компютърни експерименти, имитационно моделиране, компютърен анализ на данни, изследване и визуализация на данни, научна и инженерна графика [32, 111, 131, 135, 136].

Maxima

Maxima (фигура 1.7) е мощна система за компютърна алгебра, която извършва комбинирано символни, числени и графични преобразувания. Тя е с отворен код и непрекъснато се усъвършенства от потребителите. Maxima е интерактивна експертна система и програмна среда за символни и числени пресмятания. Написана на Lisp, тя включва диференциране, интегриране, решаване на линейни или нелинейни уравнения, разлагане на полиноми на множители, развиване на функции в ред на Лоран и Тейлор, преобразование на Лаплас, матрични и тензорни операции, изчисления с произволна точност, двумерни и тримерни графики на функции и обработка на статистически данни.



Фигура 1.7: Интерфейс на системата Maxima

Maxima се прилага винаги, когато е необходимо да се пресмятат символно интеграли, производни, граници, да се решават символно системи алгебрични или диференциални уравнения или да се опростяват изрази. Извънредно полезна е за извършване на изчисления с предварително зададена степен на точност.

Изходният код на Maxima може да се компилира на много операционни системи, включително Windows, Linux и MacOS X.

Maxima е потомък на Macsyma - легендарната система за компютърна алгебра, разработена в началото на 60-те в MIT. В годините на своето създаване, Macsyma извършва своеобразна революция в компютърната алгебра и оказва влияние на много други системи. На основата на Macsyma са създадени много системи, но повечето от тях, като Maple и Mathematica, са комерсиални. Maxima е единствената, основана на Macsyma система, която е все още публично достъпна и има активно общество от потребители.

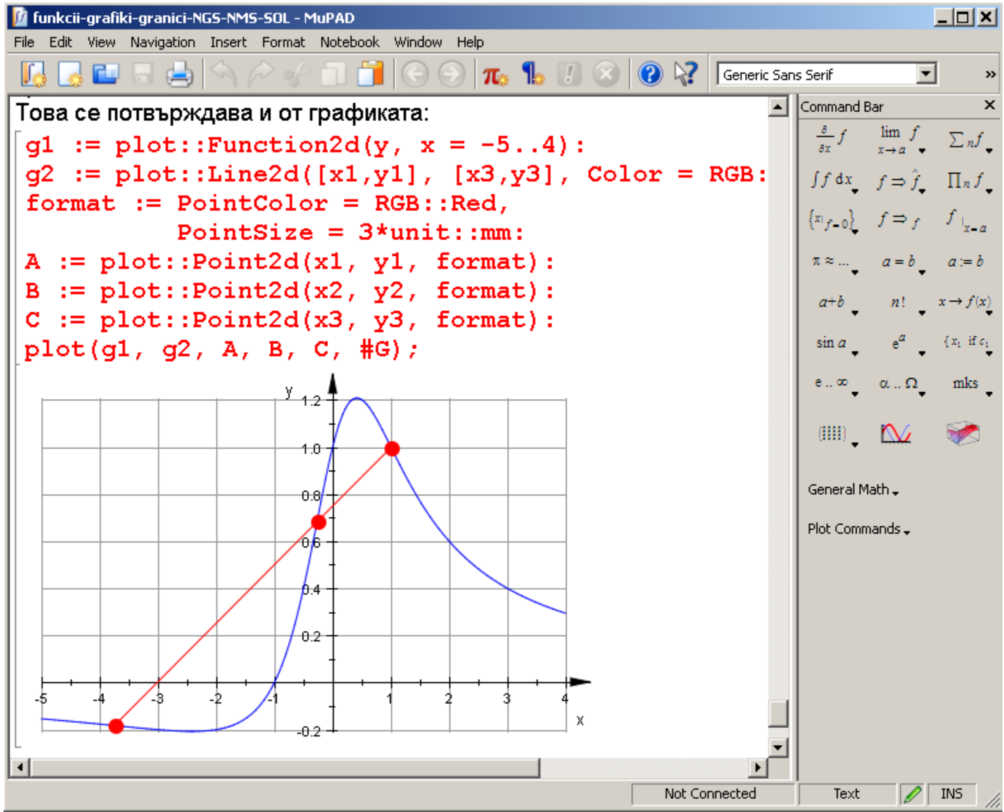
Системата Maxima е дело на Уилям Шелтър (William F. Schelter) от Университета в Остин (Тексас), който усъвършенства Macsyma от 1982 до смъртта си през 2001 година. През 1998 той получава разрешение за публикуване на изходния код под лиценз GPL (Gnu Public License). След неговата смърт е сформирана група от ползватели и разработчици, които си поставят за цел да предоставят Maxima на широката аудитория. Днес стотици съмишленици постоянно обновяват Maxima, поправят грешки и подобряват кода и документацията [89, 137].

MuPAD

MuPAD (фигура 1.8) е съвременна CAS [144, 148], чието основно предназначение е създаване на символни обекти и опериране с тях. Първата версия на MuPAD е създадена от група немски сътрудници и преподаватели в университета в Падерборн - Германия. От 1997 година се развива от компанията SciFace Sotware и групата учени от Падерборн. До 2005 година програмата се разпространява безплатно като MuPAD Light, след което е налична само платената версия MuPAD Pro. През 2008 година MuPAD е закупена от The MathWorks Inc. и вградена в пакета Symbolic Math Toolbox на MATLAB [20, 92, 93, 94, 95, 96].

Основните действия, които могат да се извършват в MuPAD са: преобразуване и опростяване на изрази; числено и аналитично решаване на алгебрични и диференциални уравнения с произволна точност; извършване на основни операции от елементарната математика, линейната алгебра и математическия анализ; числени пресмятания с произволен брой значещи цифри; двумерна и тримерна графика и анимация; допълнителни библиотеки с вградени функции, решаващи задачи от различни области на математиката и програмирането; възможност за допълване на MuPAD с потребителски програми на C; импортиране и експортиране на данни в различни файлови формати.

MuPAD има подробна и добре структурирана help-система и съвременен



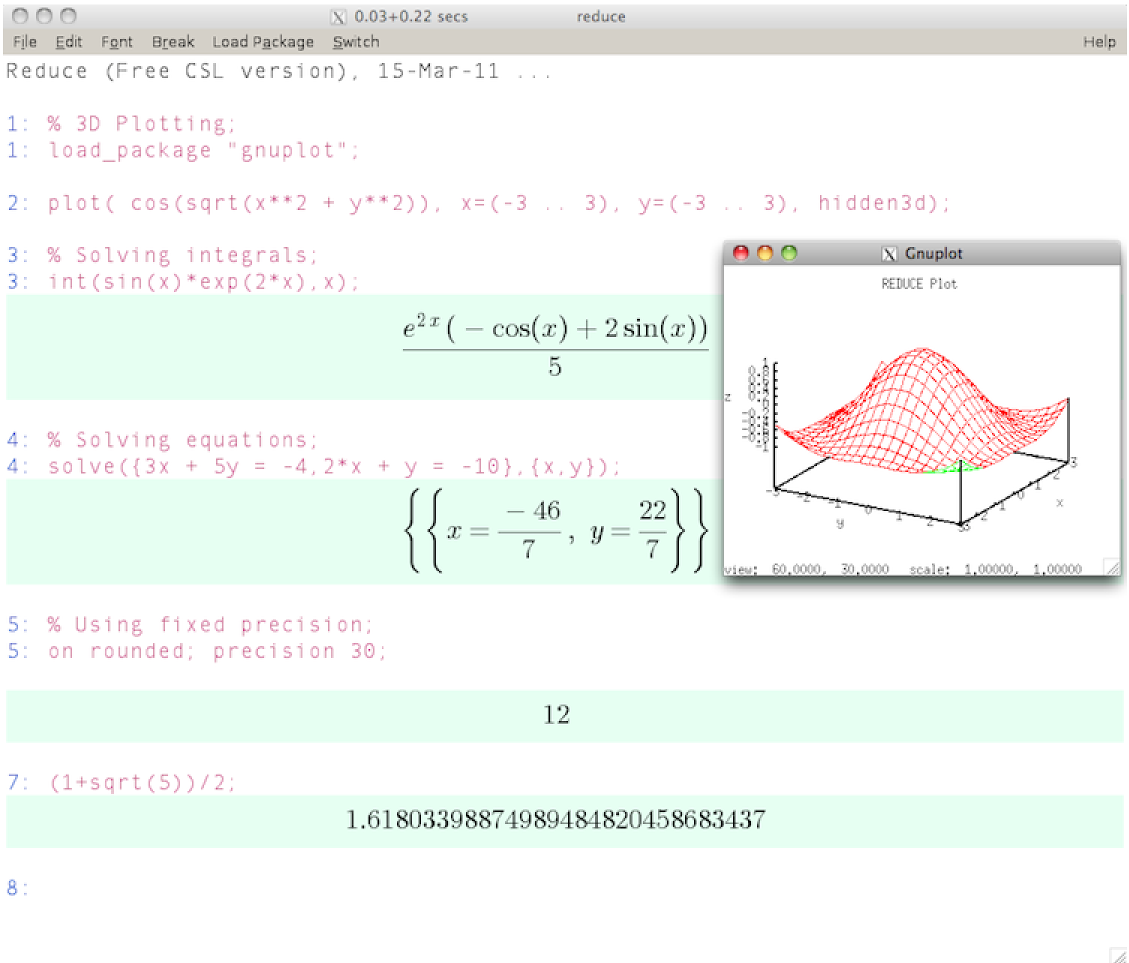
Фигура 1.8: Интерфейс на MuPAD

графичен интерфейс за работа в режим тетрадка (Notebook), която може да се използва ефективно и за обучение [96, 113, 138].

Reduce

През 1963 - физикът Anthony C. Hearn започва създаването на програмната система Reduce (фигура 1.9). Тя е една от най-дълго съществуващите софтуерни системи за компютърна алгебра. Системата използва програмния език LISP. Reduce е интерактивна система за алгебрични изчисления, използвана от математици, научни работници и инженери. Възможностите на системата включват: действия с полиноми и рационални функции; автоматично и управлявано от потребителя опростяване на изрази; изчисления със символни матрици; аналитично диференциране и интегриране; факторизация на полиноми; решаване на алгебрични уравнения; изчисления със специални функции.

Тъй като системата Reduce се използва свободно повече от 40 години, тя непрекъснато се усъвършенства и сега представлява мощна система, надеждна, стабилна и устойчива. Reduce има голяма група потребители и разработ-

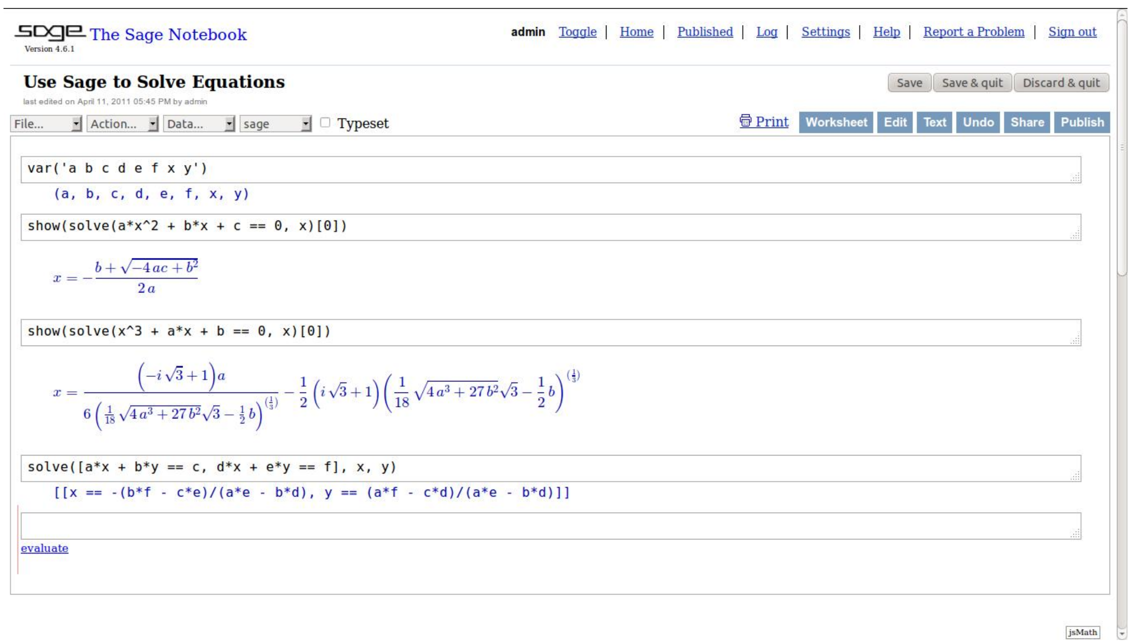


Фигура 1.9: Интерфейс на системата Reduce

чици, работещи в различни области на науката. Голям брой специализирани пакети са създадени с участието на потребители. Характерно за Reduce е, че тя се разпространява с пълния първичен код, включващ ядрото. По такъв начин системата е ценно образователно средство и добра основа за експерименти. Този лесен достъп на потребителя до пълния код, спомага за нейното постоянно усъвършенстване. Системата Reduce е лесно преносима на различни компютри и операционни системи [142].

Sage Math

Системата Sage Math (фигура 1.10) разполага с единен интерфейс и е изградена от почти 100 open-source пакети. Sage Math може да се използва за изучаване и изследване на елементарна и приложна математика. Това включва огромно разнообразие от дялове на математиката, включително основна алгебра, статистика, цифрови изчисления, комбинаторика, комутативна алгебра, криптография, линейна алгебра и много други. Тази система комбинира различни софтуерни пакети и безпроблемно интегрира тяхната функционалност в една обща среда. Много е подходяща за използване в образованието и изследователската дейност. Потребителският интерфейс е тетрадка в уеб браузер и команден ред. Тетрадката на Sage Math може да се използва както локално на компютъра, на който е инсталирана, така и в мрежа чрез сървър на Sage Math. Чрез работната тетрадка може да се създават вградени графики, да се изписват математически изрази и да се споделят в мрежов режим на работа [143].



Фигура 1.10: Интерфейс на системата SAGE Math

Таблица 1.2 съдържа обобщена информация за най-популярните CAS, години на развитие, лиценз и производител.

1.2.4 Избор на система за изчисления, използвана в обучението по математика в Русенски университет

В обучението по Висша математика - 3 част в Русенски университет се използва системата MATLAB. Основание за това е от една страна приетото от академичната общност решение за използване предимно на MATLAB, тъй като в много дисциплини, с които ВМ3 има изходни връзки, използват получените

Система	Производител	От	До	Лиценз	Бележки
Derive	Soft Warehouse	1988	2007	платен	не се поддържа от 2007
Euler Math Toolbox	Rene Grothmann	1980	2016	свободен	
Gauss	APTEX	1984	2015	платен	
Maple	MapleSoft	1984	2016	платен	широко приложение
MathCad	Parametric Technology Corporation	1985	2010	платен	предимно инженерни задачи
Mathematica	Wolfram Research	1988	2016	платен	широко приложение
MATLAB	MathWorks	1989	2015	платен	широко приложение
Maxima	MIT Project William Shelter	1998	2015	свободен	широко приложение
MuPAD	SciFace Software	2008	2015	платен	Част от MATLAB
Reduce	Antony Hearn	1968	2009	свободен	исторически важна
Sage Math	Sage Project	1980	2016	свободен	
Wolfram Alpha	Wolfram Research	2009	2013	платен	on-line

Таблица 1.2: CAS - развитие, лиценз и производители

от студентите знания за основа. Такива дисциплини са - механика, теория на сигналите, телетрафично проектиране и др. От друга страна, лицензионните и бюджетни ограничения, ограничават закупуването на лицензи, поради което на Студентския сървър в мрежата на Русенски университет има инсталиран MATLAB - версия 2010a.

Системата MATLAB е лесна за употреба, поради което се усвоява бързо от студентите. Използването на друга система, например Maxima, Euler Math Toolbox, Wolfram Alpha не е проблем за студенти, усвоили добре принципа за работа с MATLAB. Авторът на настоящия дисертационен труд подготвя и мотивирани студенти за участие в Националната олимпиада по Компютърна математика с използване на MATLAB, MuPAD и Mathematica, които постигат добри резултати.

1.3 Цели и задачи на изследването

Обект на изследване

Обект на изследване са резултатите от обучението по Висша математика.

Предмет на изследване

Предмет на изследването са нови изследователски методи на обучение с използване на компютърни системи за математически изчисления и визуализация *като средство* за повишаване качеството на обучение.

Цели на изследването

Теоретични цели

- Създаване на дидактически модел на обучение за формиране на умения за решаване на различни видове математически задачи чрез използване на системи за математически изчисления.
- Изграждане на „нова“ методика на обучение по математика, основана на използване на системи за компютърни изчисления и визуализация.
- Доказване ефективността на използваната методика.

Практически цели

- Създаване на компютърно базирани материали за обучение.
- Създаване на компютърно базирани тестове за проверка на знанията.
- Дидактически анализ на създадените тестове.
- Статистически анализ на получените резултати от обучението.

Използвани методи на изследване

- Изучаване и анализ на дидактическа, методическа, приложно-статистическа литература и учебна документация, свързана с темата на изследването.
- Изучаване и анализ на различни системи за математически изчисления от гледна точка на техните възможности за приложение при обучението по математика.
- Наблюдение на процесите на обучение.
- Беседи с ученици и студенти.
- Анкети с ученици и студенти.
- Проверка на знанията на обучаемите чрез специализирани тестове.
- Статистически анализ на емпирични данни за резултатите от обучението.

Основна хипотеза на изследването

Обучението по математика с използване на системи за математически изчисления и визуализация е в основата на новата дидактическа парадигма на математическото образование в България в условията на информационното общество. Чрез подхода *компютърно съпроводено обучение по математика* се постига по-висока ефективност на обучението по математика в сравнение с традиционния подход.

ГЛАВА 2

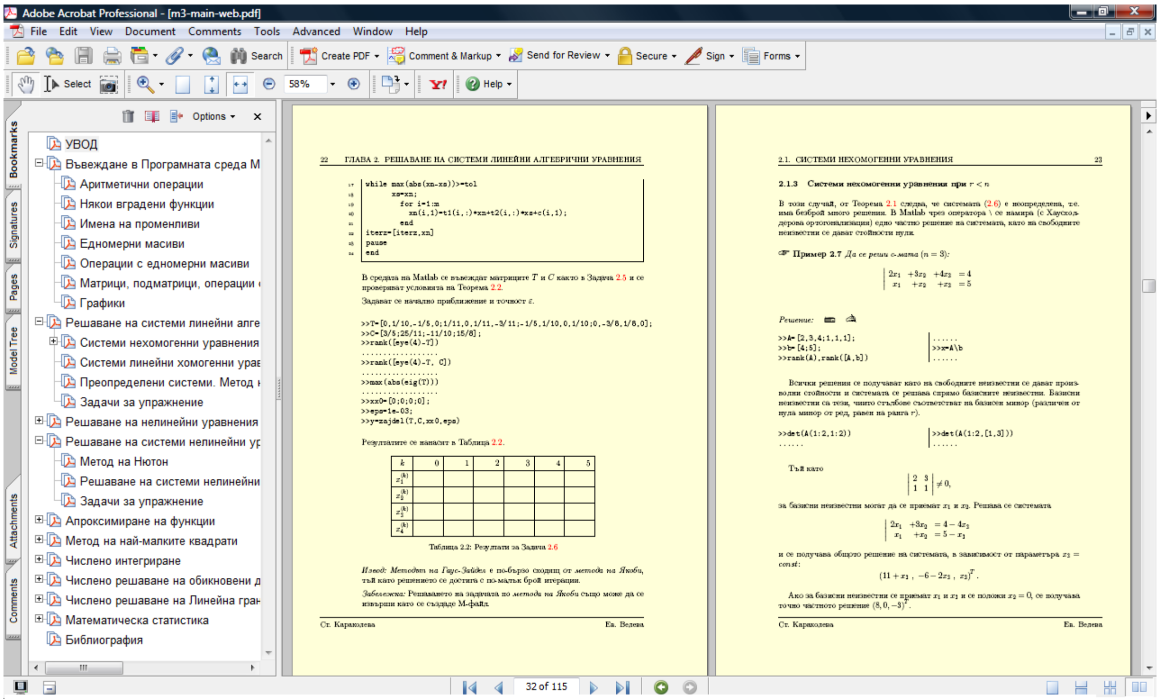
Дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика

В глава 2 е описан дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика по раздела „Числени методи“ за студенти инженерен профил. Моделът е приложен за студенти от област на висше образование „Технически науки“, степен „бакалавър“ в Русенски университет. Разработена е диагностична процедура за проверка на знанията и уменията на студентите. Резултатите от обучението са документирани и са извършени експерименти в периода 2010-2014 години. В глава 3, чрез статистически анализ, е доказана по-висока ефективност на експерименталната методика спрямо традиционната методика на преподаване.

Обучението по математика е непрекъснат процес, който предполага не само последователност в преподаването на материала, но и в още по-голяма степен контрол на усвояването на основните математически структури. Съществува тясна връзка между обучението по математика в средното и висшето училище, поради която трябва да се отчита нивото на математическа подготовка на студентите и според това ниво да се избира подходяща методика на обучение.

Основание за разработване на предложения дидактически модел ни дава от една страна - необходимостта от съвременен подход на обучение по Числени методи и от друга - ограничения хорариум на аудиторните часове по Висша математика.

При изследване на процесите в науката и техниката, бъдещият инженер се интересува от математиката не като наука сама за себе си, а като инструмент



Фигура 2.1: Учебно пособие по Числени методи с MATLAB

за решаване на конкретни практически задачи. Успешното решаване на даден проблем е възможно само при добро познаване на основните числени методи и начините за тяхното реализиране [48].

Предвид факта, че обучението по Числени методи е немислимо без използване на компютър, за постигане на качествено съвременно обучение ние въведохме методиката на компютърно съпроводено обучение по Числени методи, прилагана успешно вече над петнадесет години в Русенски университет. Изучаването на числените методи е обвързано тясно с практическото им използване в средата на системата MATLAB.

Съдържанието на учебната дисциплина дава възможност студентите да придобият знания и практически опит за числено решаване на системи линейни уравнения, нелинейни системи, апроксимиране на функции, числено интегриране, диференциални уравнения и системи. Обучението по експерименталната методика има за цел, чрез усвояване на изучавания материал, студентите да придобият компетенции и практически умения за самостоятелно решаване на конкретни задачи от практиката с компютър.

През последните години се наблюдава трайна тенденция към намаляване на аудиторните часове за изучаване на фундаментални математически дисциплини при запазване съдържанието на изучавания материал. Този проблем е факт и при обучението по Числени методи на бъдещите инженери в Русенски университет. Намаленият хорариум по дисциплината наложи въвеждане на методика на обучение с практическа насоченост [48], при която обучението по два от разделите - Числени методи и Статистика се провежда в компютърна зала с терминали и персонални компютри при използване на компютърни системи за изчисления и визуализация MATLAB и SPSS.

При обучението по Числени методи се използват учебно пособие [15] и web-базиран курс [41, 47] по дисциплината, включващ лекции, упражнения, тестове, задачи, видео-уроци и др, чрез които се подпомага усвояването на материала от студентите в извънаудиторната им работа, фигура 2.1. За проверка на знанията на студентите са разработени тестови въпроси, публикувани в web-базирания курс [41] по дисциплината с ключ към верните отговори, приложение Б.

2.1 Дидактически сценарии и общ модел

В раздел 2.1 е направен анализ на учебното съдържание и методиката на преподаване на числени методи, посочени са трудностите, с които се сблъскват студенти и преподаватели в процеса на обучение, анализирани се причините и подходите за тяхното овладяване, [48]. Предложени са дидактически сценарии и общ модел на обучение и самоподготовка в ИТ среда.

Както бе посочено на стр. 31, поради ограничения брой аудиторни часове, предвидени в учебната програма, моделът на компютърно съпроводено обучение по „Числени методи“ включва и учебно пособие, налично и в електронен формат [41] в сайта за електронно обучение e-Learning Shell 02, разработено по проект BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенския университет“.

Разглеждат се основните числени методи с приложение в инженерната практика: решаване на системи линейни алгебрични уравнения, числено решаване на нелинейни уравнения и системи, метод на най-малките квадрати за апроксимиране на таблично зададена функция, числено интегриране, числено решаване на обикновени диференциални уравнения и системи, статистика.

За добро усвояване на материала от студентите, към електронния курс са подготвени серия видео-уроци, които са достъпни за всички регистрирани потребители. Общото времетраене на всички видео-уроци по всички теми е над 5 часа. Например, по темата СЛАУ има три урока, които могат да бъдат използвани при самоподготовката на студентите https://youtu.be/jIbawa1L7T0, фигура 2.5.

2.1.1 Въведение в програмната среда MATLAB

Това е въвеждаща тема, в която се прави кратък обзор на системите за математически изчисления и в частност - характеристика на системата MATLAB. С множество примери, в директен режим на работа, студентите, контролирани от преподавателя, се запознават пред монитора с основните обекти и операции в MATLAB, вградените често използвани математически функции, различните формати на запис на числата, оператора за присвояване, преобразуване на ъгли от градуси в радиани, едномерни масиви и операции с тях, матрици и операции с матрици, различни видове графики и анимация. Всички примери се въвеждат самостоятелно от всеки студент, който има индивидуално работно място.

Темата е въвеждаща, но затова пък много важна за бъдещата работа на студентите през семестъра. Основните трудности тук идват от първата среща с новата система, непознатия интерфейс и работата в директен режим, чрез въвеждане на команди в командния ред. Тези трудности се преодоляват неусетно през семестъра. Темата е достъпна в web-базирания курс [41].

2.1.2 Системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

Темата започва с кратък обзор на теорията за СЛАУ - матричен запис, видове, теорема за съществуване и единственост на решението. Подробно се разглеждат точните методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения. Решава се моделна задача с три неизвестни с MATLAB, като се набляга на етапите на решаване, а именно: преминаване от матричен запис на системата към линеен запис, проверка на теоремата за съществуване и единственост на решение чрез сравняване ранговете на основната и разширената матрица, решаване по три различни метода - метод на Крамер, метод за решаване с обратна матрица и метод на Гаус.

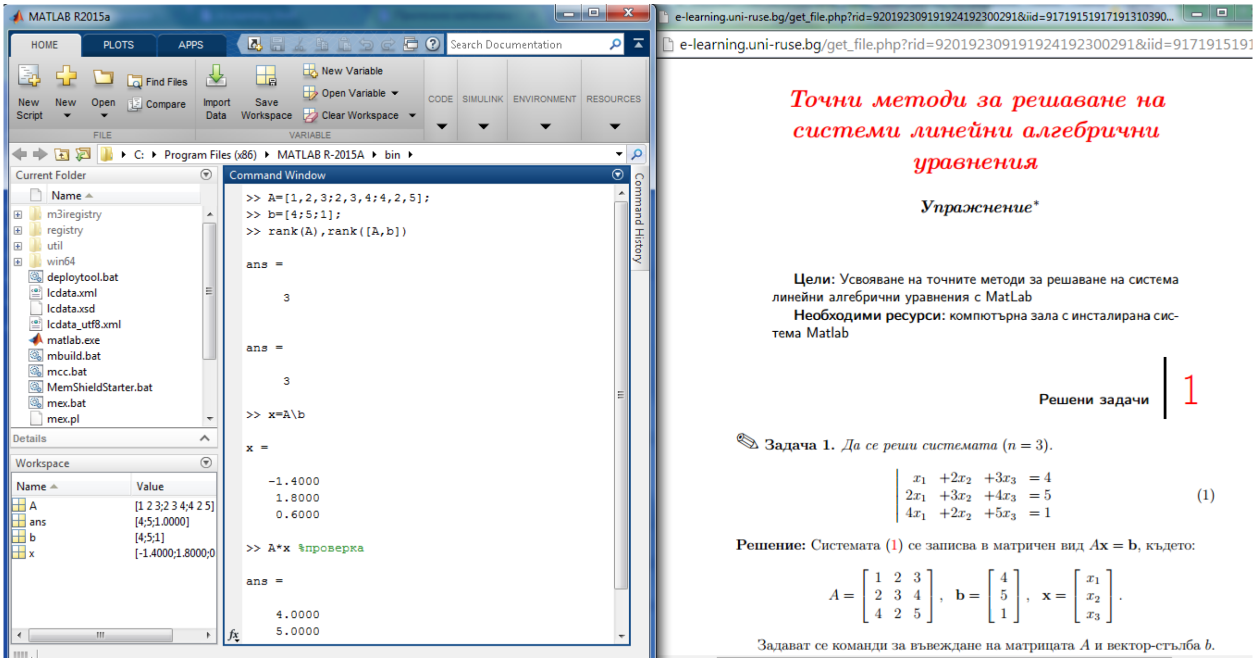
Някои студенти имат в началото затруднения, свързани с това, че при изучаване на системи линейни алгебрични уравнения по Математика - 1 не са обучени да записват системата в матричен вид, а са преобразували директно разширената матрица на системата. Част от студентите имат затруднения и при преминаване от матричен към линеен запис. За преодоляване на тези трудности, след решаване на моделната задача (фигура 2.2), решена в учебното пособие, студентите решават самостоятелно, при непрекъснат контрол и помощ от страна на преподавателя, още няколко СЛАУ с различни методи, като се разглеждат случаи на липсващи или разместени неизвестни, повече от три неизвестни, липса на решение. За по-добро усвояване на материала се препоръчва на студентите винаги да записват на лист матрицата от коефициенти пред неизвестните и стълба на свободните коефициенти, като на мястото на липсващите коефициенти въвеждат нули. В процеса на самостоятелно решаване на задачи, непрекъснато се подчертава важността на проверката за равенство на ранговете на основната и разширената матрица и сравняването им с броя на неизвестните, което дава отговор на въпроса за съществуване и единственост на решението.

Решаването на примерите става по два начина: директно от командния ред на системата MATLAB и чрез използване на графичен интерфейс, създаден от автора за нуждите на обучението, фигура 2.3. В приложение Г е даден кодът на GUI.

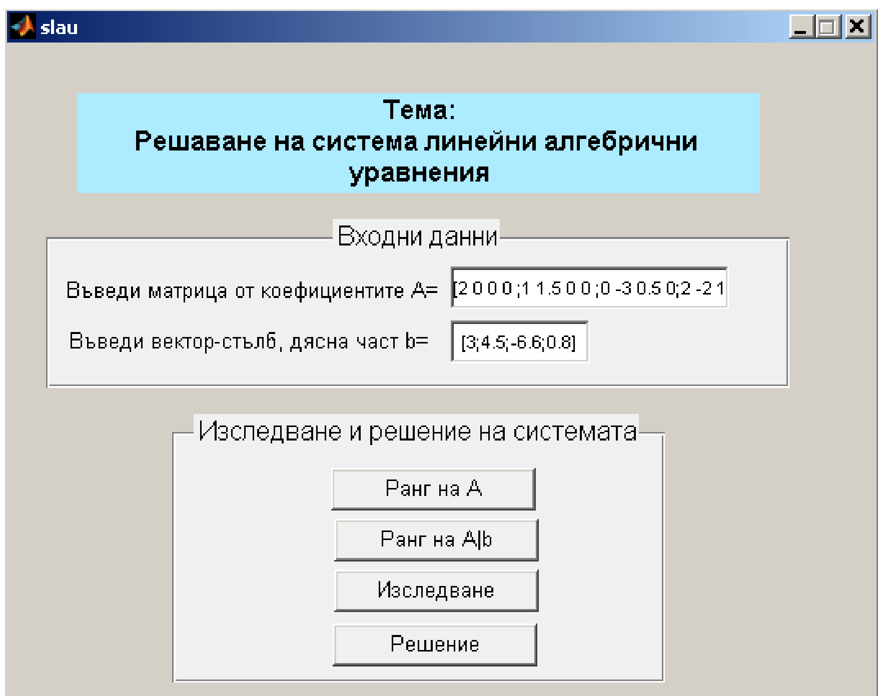
На фигура 2.4 са дадени резултатите от използване на GUI при решаване на задача: проверка за съществуване на решение и намиране на решението. Чрез използване на графичния интерфейс се изследват самостоятелно и задачи с безброй решения и без решение.

Наблюденията на автора по време на упражнението показват, че диалоговият режим на работа е по-полезен за студентите от използването на графичния интерфейс, тъй като по този начин студентите по-добре овладяват синтаксиса на системата и се научават самостоятелно да изследват и да откриват решението на системата.

Във втората част от темата се разглежда фундаменталната идея за итерационен метод и конкретно итерационни методи за решаване на СЛАУ. Въвежда се понятието *сходящ итерационен процес* като граница на редицата от получените приближения за решението на системата. Чрез дадената решена моделна задача се прилагат *стъпка по стъпка* етапите на решаване на СЛАУ по метода на Якоби: преобразуване на системата във вид, удобен за итерации, задаване на начално приближение и точност на изчисление, намиране на ново приближение и проверка на условието за край на итерационния процес. Тази проверка използва елегантно необходимо и достатъчно условие за сходимост на итерационния процес за съвместима система: след преобразуване на системата $Ax = b$ във вид, удобен за итерации $x = Tx + C$, се проверява



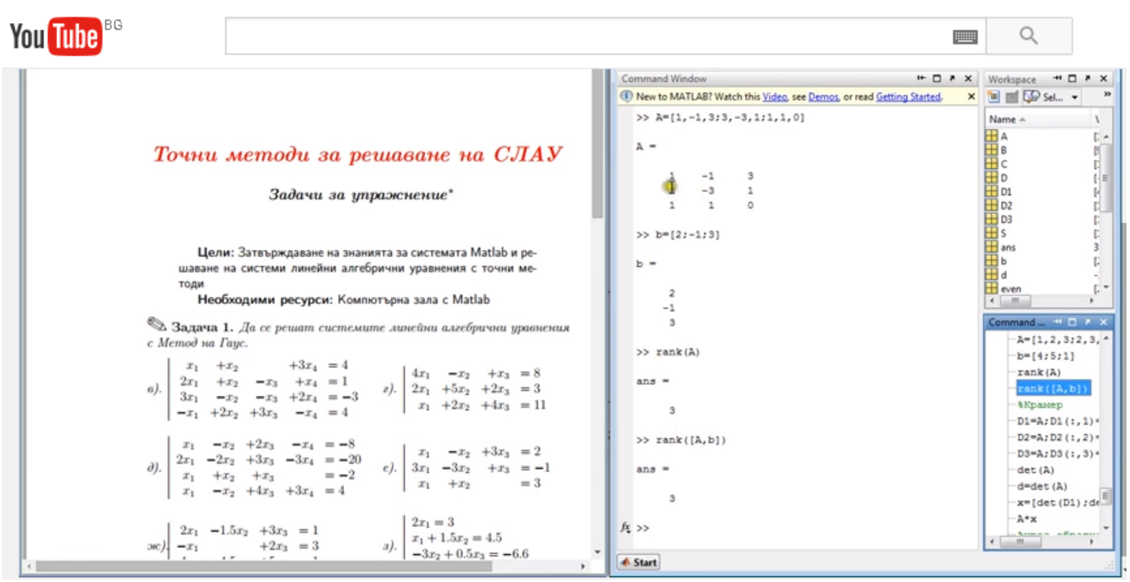
Фигура 2.2: Моделна задача по темата „Системи линейни алгебрични уравнения“



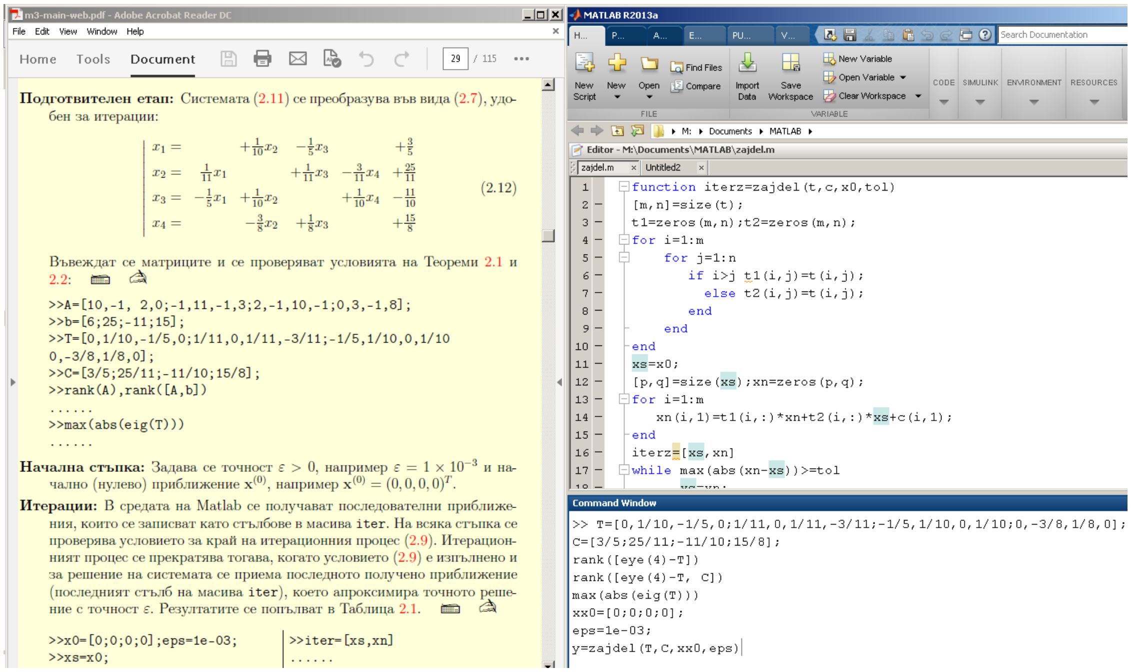
Фигура 2.3: Графичен интерфейс по темата „Системи линейни алгебрични уравнения“

```
Рангът на матрицата A=
    2.0000         0         0         0
    1.0000    1.5000         0         0
         0   -3.0000    0.5000         0
    2.0000   -2.0000    1.0000    1.0000


e
     4

Рангът на разширената матрица A|b=
    2.0000         0         0         0    3.0000
    1.0000    1.5000         0         0    4.5000
         0   -3.0000    0.5000         0   -6.6000
    2.0000   -2.0000    1.0000    1.0000    0.8000


e
     4

Системата има единствено решение
Решението на системата е:
    1.5000
    2.0000
   -1.2000
    3.0000
```

Фигура 2.4: Резултати от използването на графичен интерфейс по темата „Системи линейни алгебрични уравнения“



Фигура 2.5: Видео-урок по темата СЛАУ



Фигура 2.6: Итерационни методи за решаване на СЛАУ

дали спектралният радиус на матрицата T е по-малък от единица. В края на упражнението се решават самостоятелно задачи с итерационен метод, като за мотивираните студенти е предвиден допълнителен материал - програмиране в MATLAB на Метода на Гаус-Зайдел (фигура 2.6) и сравняване на скоростта на сходимост на двата итерационни метода.

С мотивираните студенти се провеждат допълнителни занятия по тази тема в рамките на подготовката за олимпиада по Компютърна математика, като се използва символния пакет Symbolic Math Toolbox на MATLAB (MuPAD), разглеждат се задачи с параметър, системи с безброй много решения, приложения в геометрията и други.

2.1.3 Нелинейни уравнения (НУ) и системи (СНУ)

В началото на упражнението се разглеждат двата основни етапа при търсене на числено решение на нелинейно уравнение $f(x) = 0$ - изолиране и уточняване на корените. Подчертава се важността на графичното изобразяване на функцията $f(x)$ и намиране на пресечните ѝ точки с абсцисната ос, което дава информация за наличието на реални корени на уравнението и техните приблизителни стойности.

Разглежда се моделен пример, върху който се коментира и синтаксиса на командите за изолиране и намиране на реалните корени на НУ. Подробно се разглеждат няколко класически методи за уточняване на изолиран в интервал корен на НУ: метод на разполовяването, секущите, допирателните и др. Отделно се разглежда случай на алгебрични уравнения и решаването им с командата `roots`.

Упражнението се състои от две части – решаване на трансцендентни (фигура 2.7) и алгебрични уравнения (фигура 2.8). И в двата случая решаването на нелинейно уравнение започва с прехвърляне на всички изрази в лявата страна на уравнението.

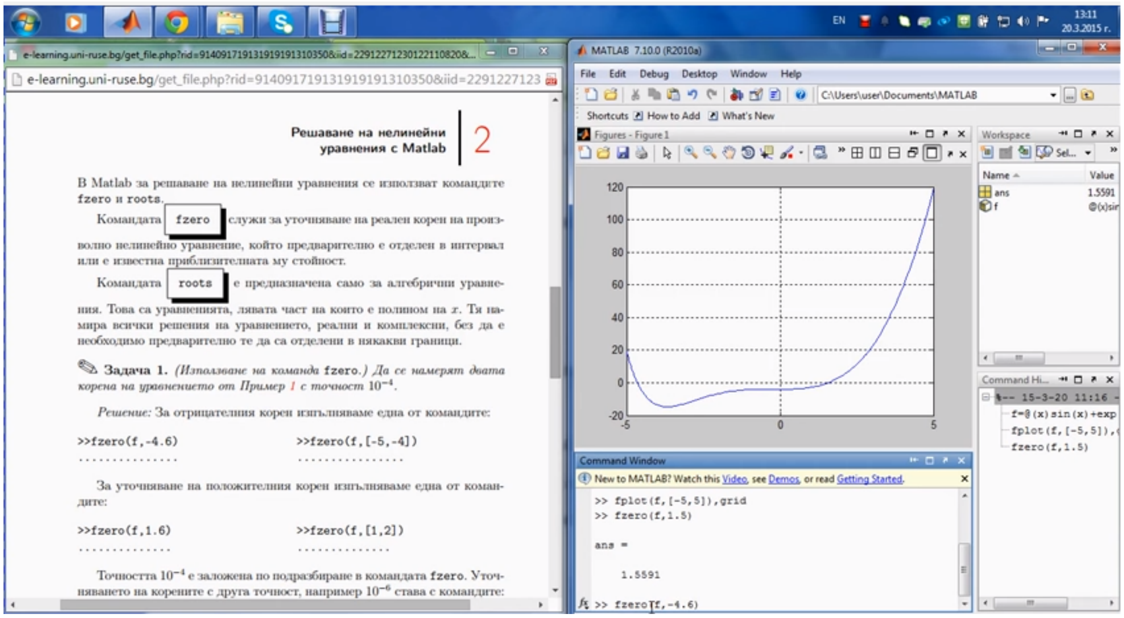
При решаване на трансцендентни уравнения, получената функция $f(x)$ в лявата страна на уравнението се дефинира в MATLAB. За това могат да се използват няколко подхода: да се дефинира функцията във файл-функция, да се зададе като анонимна функция или да се зададе директно при решаване на уравнението. Наблюденията на автора показват, че най-подходящо за студентите е тя да се дефинира като анонимна функция на командния ред. Писането на файл удължава времето за въвеждане и крие риск за грешки.

Затрудненията на студентите по тази тема са много: преобразуване на уравнението във вида $f(x) = 0$; въвеждане *само* на функцията $f(x)$, без знака „равно“; кодиране на функция на езика на MATLAB в линеен вид (ASCII код) чрез дефиниране на анонимна функция; неразбиране на смисъла и действието на оператора за присвояване; затруднения при определяне на множеството от допустими стойности на функцията $f(x)$ и задаване на интервал при графичното ѝ изобразяване; трудности при определяне на степента и коефициентите на полином.

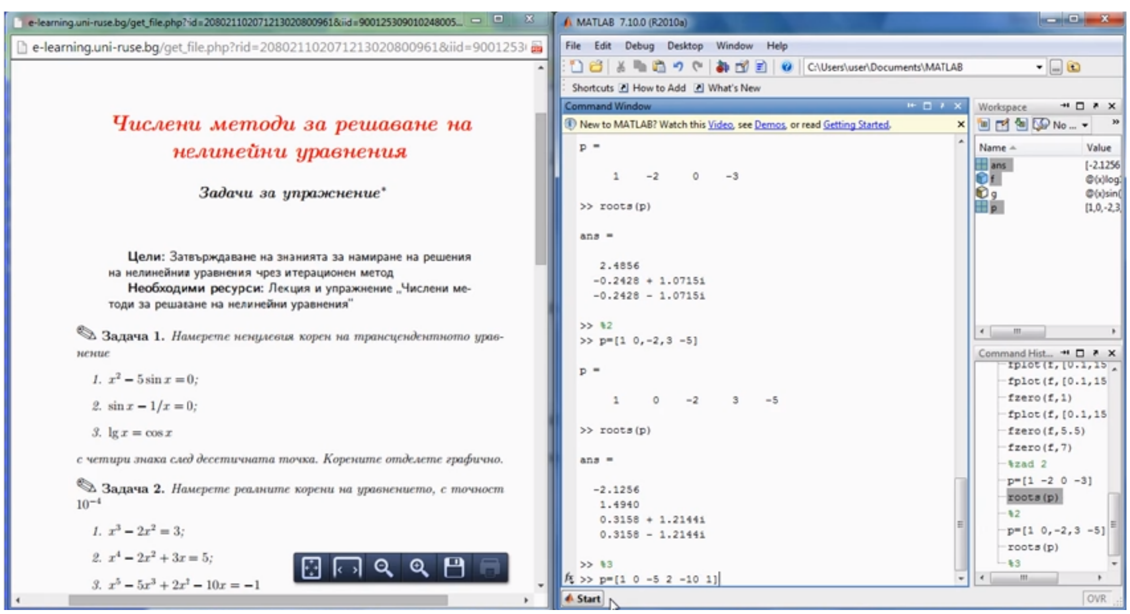
За добро усвояване на материала се решават контролирано множество примери на алгебрични и трансцендентни уравнения и се препоръчва задълбочена самостоятелна работа с използване на видео-упражненията, публикувани онлайн в [41].

Важен момент в обучението по тази тема е практическата работа на студентите по кодиране на различни функции с цел да се научат правилно да използват вградените функции и да усвоят технологията на писане на математически формули в линеен вид. Акцент се поставя и на въпроса за правилно определяне на допустимите стойности на променливата и коректно задаване на интервал, в който да се визуализира графиката на функцията.

Намирането на решенията на алгебрични уравнения също е свързано с немалко трудности. Голяма част от студентите не са усвоили основни мате-



Фигура 2.7: Решаване на нелинейно уравнение с командата fzero



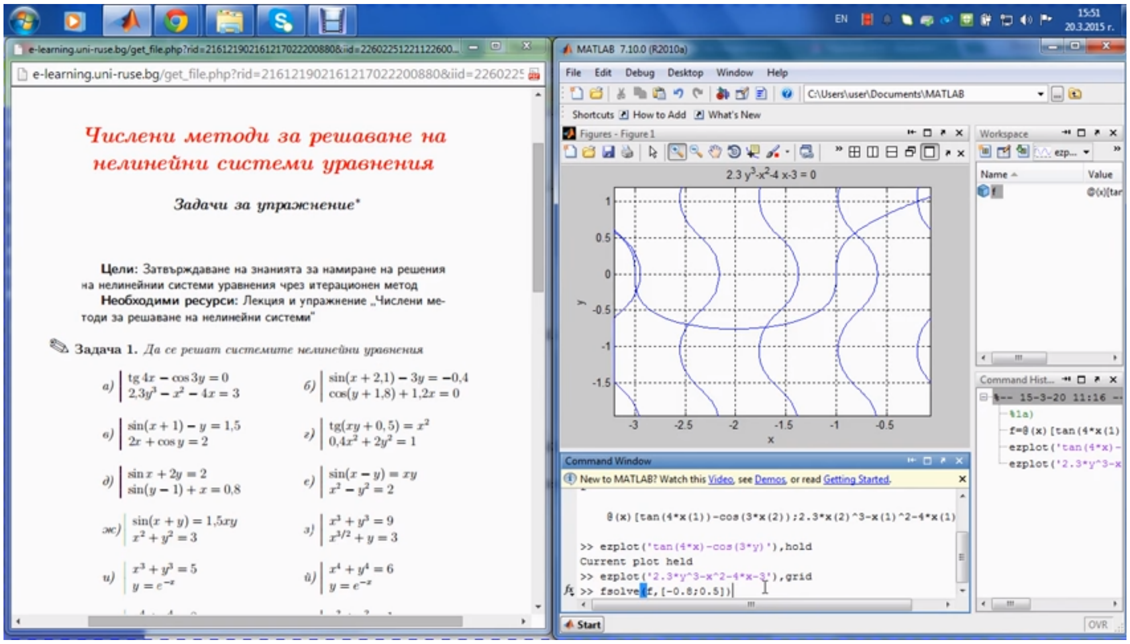
Фигура 2.8: Решаване на нелинейно уравнение с командата roots

матически понятия и теореми, не разбират добре понятията „степен“, „коефициент“, „индекс“, „полином“. За преодоляване на тези трудности в началото алгебричните уравнения се разписват подробно, като се обръща внимание на липсващите степени, след което се пристъпва към въвеждане на коефициентите на полинома в едномерен масив в низходящ ред - от най-високата към най-ниската степен. Например, уравнението $x^3 - x^2 = 4$ първо се записва във вида $1 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4 = 0$. Обръща се специално внимание на факта, че броят на корените на полином в множеството на комплексните числа е толкова, колкото е степента на полинома. Голяма част от студентите пристъпват към решаване на алгебрични системи чрез командата `fzero` вместо `roots`. Затова се демонстрира до какво води прилагането на всяка от двете процедури и се подчертава факта, че командата `fzero` намира само реалните корени на НУ, докато чрез `roots` се намират комплексните корени.

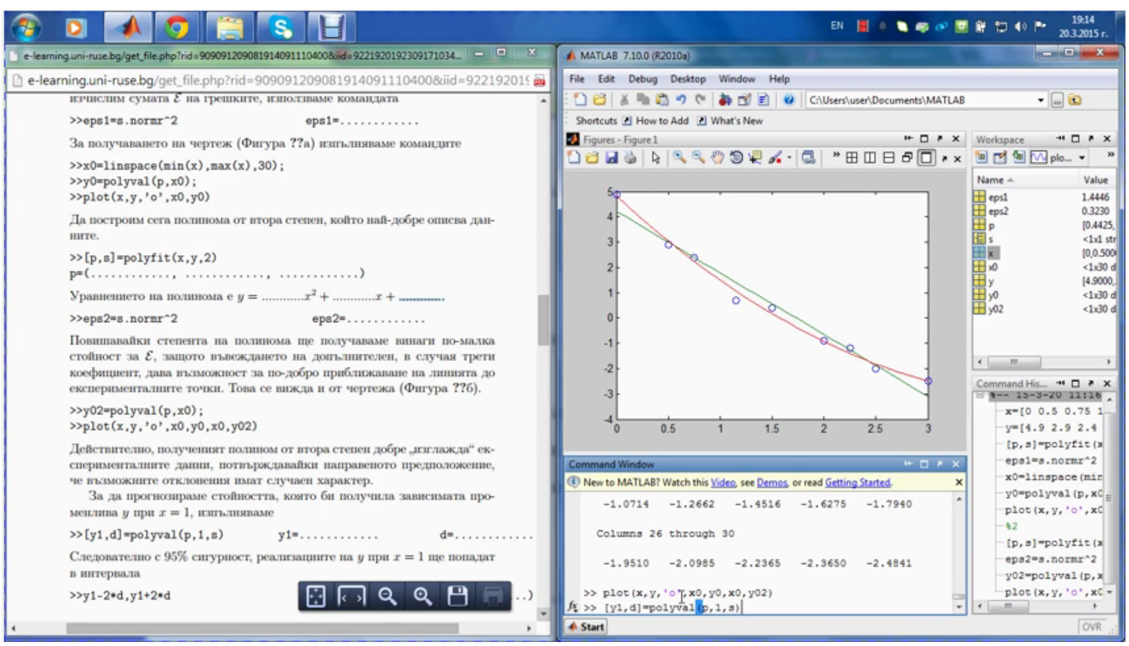
След добро усвояване на методите за решаване с MATLAB на нелинейни уравнения, се пристъпва към решаване на системи нелинейни уравнения с две или три неизвестни. За целта е необходимо системата да бъде приведена във векторна форма $f(X) = 0$ и да се кодира векторната функция $f(X)$ като анонимна функция. При това е важно векторът на неизвестните $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ да се задава като матрица - стълб.

Голяма част от студентите се справят добре със задачите за упражнение, решавани контролирано в часа, но част от тях допускат често технически грешки, свързани със синтаксиса на езика и използването на множество малки и средни скоби. На студентите, които успешно решат всички задачи с две неизвестни, се задават допълнителни задачи с повече неизвестни.

За нагледност при изследване на системите НУ (фигура 2.9) в случай на две неизвестни, се изобразяват графиките на функциите - леви страни на системата и се търсят пресечните им точки. Така се определят визуално и координатите на началните точки, които се задават на по-късен етап в командата `fsolve`. Графичното изобразяване се извършва чрез `ezplot`, която има лек синтаксис и се усвоява бързо от студентите. В случай на три неизвестни се задават в условието координатите на началната точка, без да се изобразява графика. Поради ограниченото време и големия брой задачи за решаване, на изпита графичното изобразяване не е задължително, а се задават начални приближения за търсеното решение.



Фигура 2.9: Решаване на система нелинейни уравнения



Фигура 2.10: Апроксимиране с линейна и квадратна функция

2.1.4 Метод на най-малките квадрати

Темата е изключително важна за бъдещите инженери поради факта, че в инженерната практика често се налага да се апроксимира таблично зададена функция с полином и нелинейни функции, зависещи от два и три параметъра.

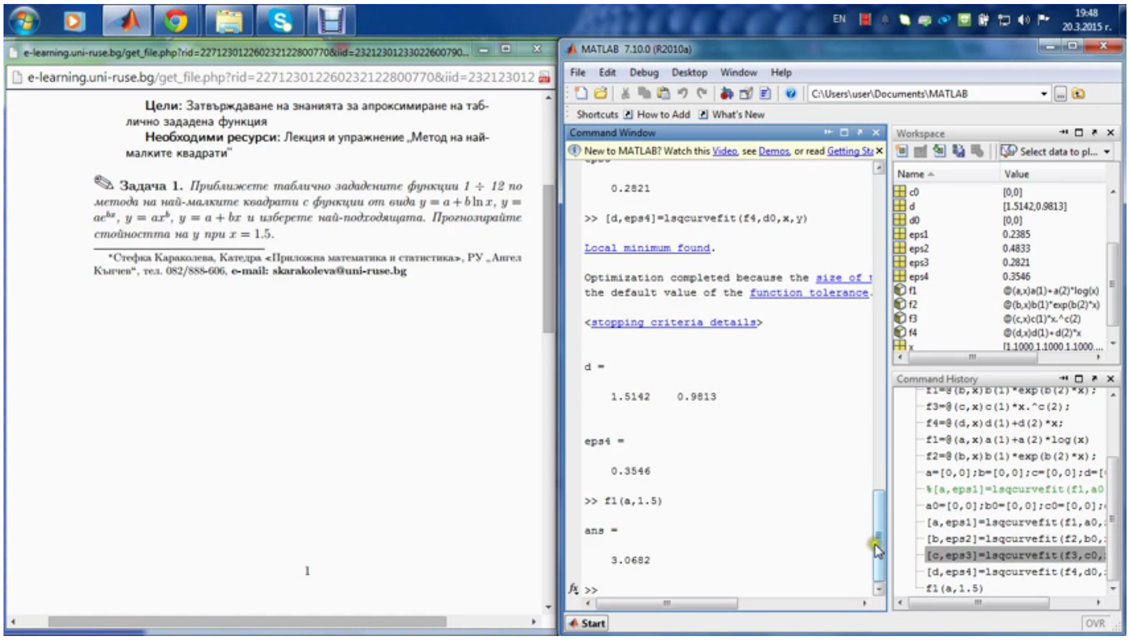
Първо се разглежда теоретичната постановка на задачата и синтаксиса на командите в MATLAB, след което се пристъпва към приближаване на таблично зададена функция с полином от първа и втора степен, като се сравняват грешките на апроксимация. За целта се разглежда моделен пример.

Втората част от упражнението е посветена на по-общата задача: приближаване на таблично зададена функция с нелинейна функция, зависеща от няколко параметъра и дефинирана от потребителя като анонимна функция. За целта се използва командата `lsqcurvefit` на MATLAB. Решава се моделна задача като за апроксимираща функция се използва експоненциална функция, зависеща от два параметъра. На фигура 2.10 е представено изображение на работния екран при апроксимиране на таблично зададена функция с линейна и квадратна функция, а на фигура 2.11 - с нелинейни функции, зависещи от два параметъра.

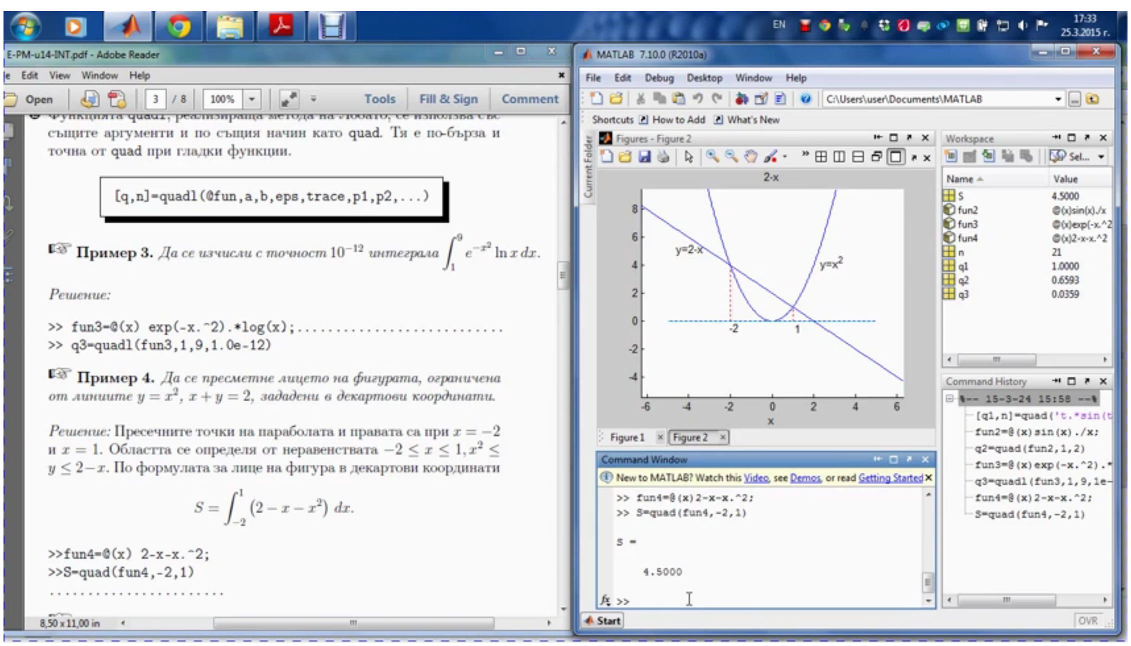
Важен момент в процеса на обучение е осъзнаването на основната цел при апроксимирането: получаване на възможно най-малка грешка на апроксимация. За целта в края на упражнението се задава изследователска самостоятелна работа на студентите, която се провежда под контрола на обучаващия. Задачата е да се апроксимира таблично зададена функция с четири функции - линейна, логаритмична, експоненциална и степенна, от които да се избере най-подходящата, т.е. тази, за която грешката е възможно най-малка.

2.1.5 Числено интегриране

Разглеждат се числените методи за решаване на определен интеграл, като се набляга на практическото приложение на разглежданата тема. В началото на упражнението се припомня дефиницията и геометричния смисъл на определен интеграл (изучени в Математика 1), задава се подробно синтаксиса на командите за решаване на различни типове интеграли, достъпни от командния ред на MATLAB, като се набляга на важността на правилното изписване на подинтегралната функция на езика на MATLAB чрез използване на поелементните операции умножение, деление и степенуване. Решават се подробно две моделни задачи, разликата между които е в начина на въвеждане на под-



Фигура 2.11: Апроксимиране с нелинейни функции, зависещи от два параметъра



Фигура 2.12: Решаване на интеграли - приложение

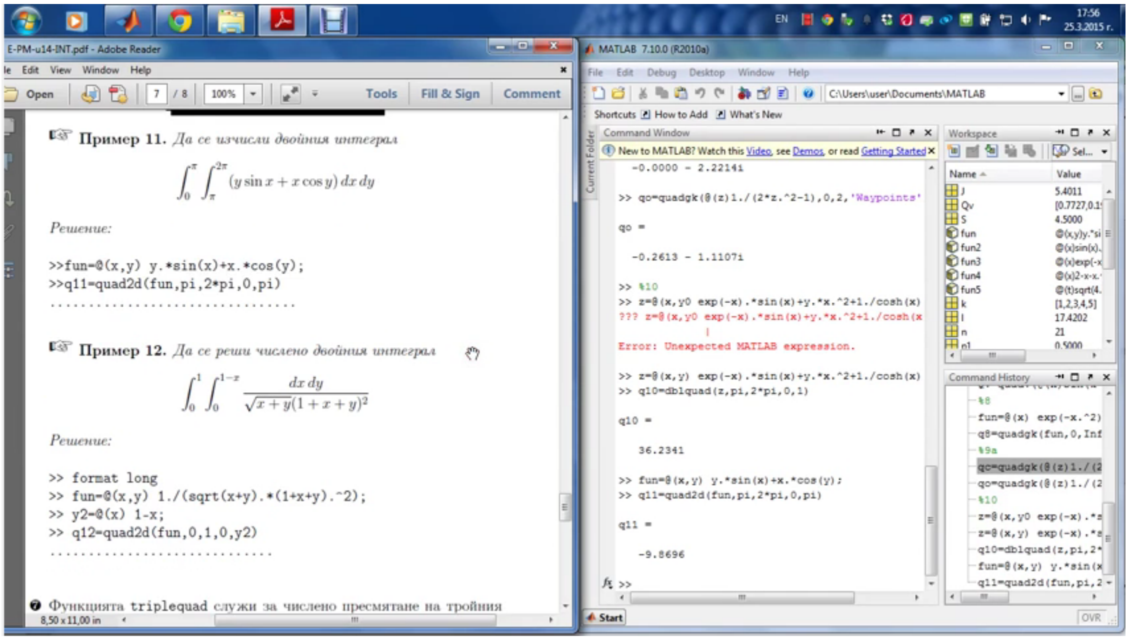
интегралната функция - като стринг и като „анонимна“ функция. Тъй като студентите вече са усвоили добре работата със системата, трудностите, с които се сблъскват, са предимно от технически характер - при въвеждане на подинтегралната функция в линеен вид и нуждата от използване на поелементните операции `.*`, `./` и `.^`. Темата е благодатна и с разнообразието на задачи по отношение на вида на интеграла и вида на подинтегралната функция.

Съответното видео-упражнение в [41] включва приложение на интеграли за намиране лице на равнинна фигура (фигура 2.12) и дължина на линия, зададена параметрично; решаване на интеграли, зависещи от параметър, несобствени, двойни, тройни интеграли (фигура 2.13), интеграли в комплексната област и други. Подчертава се, че тъй като решаването на интеграли е числено, не е проблем да бъдат решени и интеграли, които са нерешими в елементарни функции. Такъв е пример 6.2 в [41].

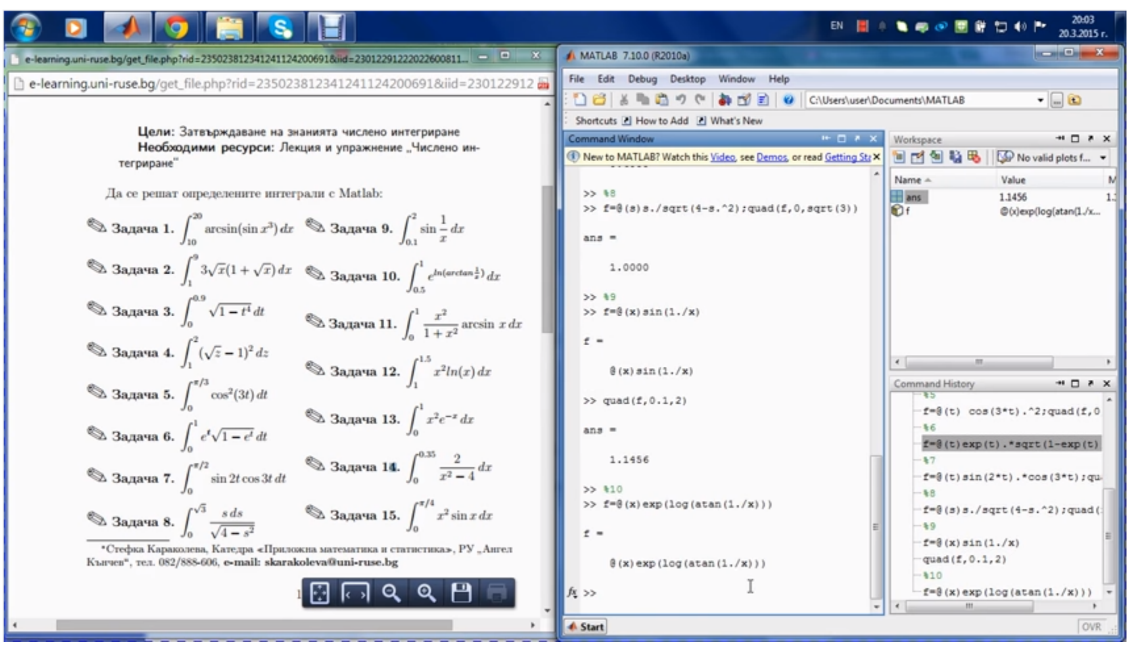
Студентите, които не успяват в часа да разберат добре решенията на всички задачи или са пропуснали упражнението, могат да прегледат отново видеоурока по темата http://youtu.be/acZYF2ZCFBE и след като поработят самостоятелно, да направят справка как се решават задачите за упражнение http://youtu.be/z0zgsvX9iCY, фигура 2.14.

2.1.6 Диференциални уравнения и системи

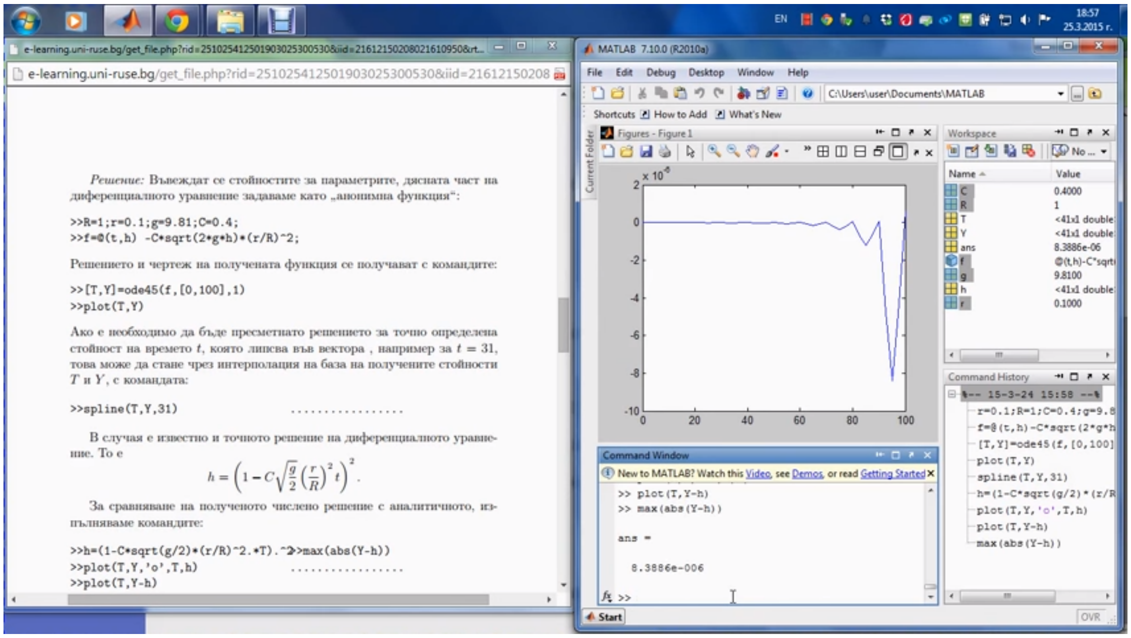
Всички процеси в природата и обществото се описват с диференциални уравнения. Темата се изгражда на основата на приложни задачи от различни области на знанието - физика, екология и др. В началото на упражнението се разглеждат подробно числените методи за решаване на задачата на Коши - методи на Ойлер, Рунге-Кута, адаптивни алгоритми, както и съответните MATLAB процедури за намиране на решението. Обсъжда се с пример как система ДУ от втори ред може да се сведе с подходящо полагане до система от първи ред (канонизиране). Разглежданите задачи са практически [41] и са степенувани по трудност. В първата задача функцията зависи само от времето и параметри, зададено е точно решение и освен намиране на численото решение се изисква сравняване на точното и приближеното решение и изобразяване на грешката. Във втората задача дясната страна зависи от независимата променлива и от търсената функция; третата задача е система от две диференциални уравнения от първи ред, а в четвъртата задача диферен-



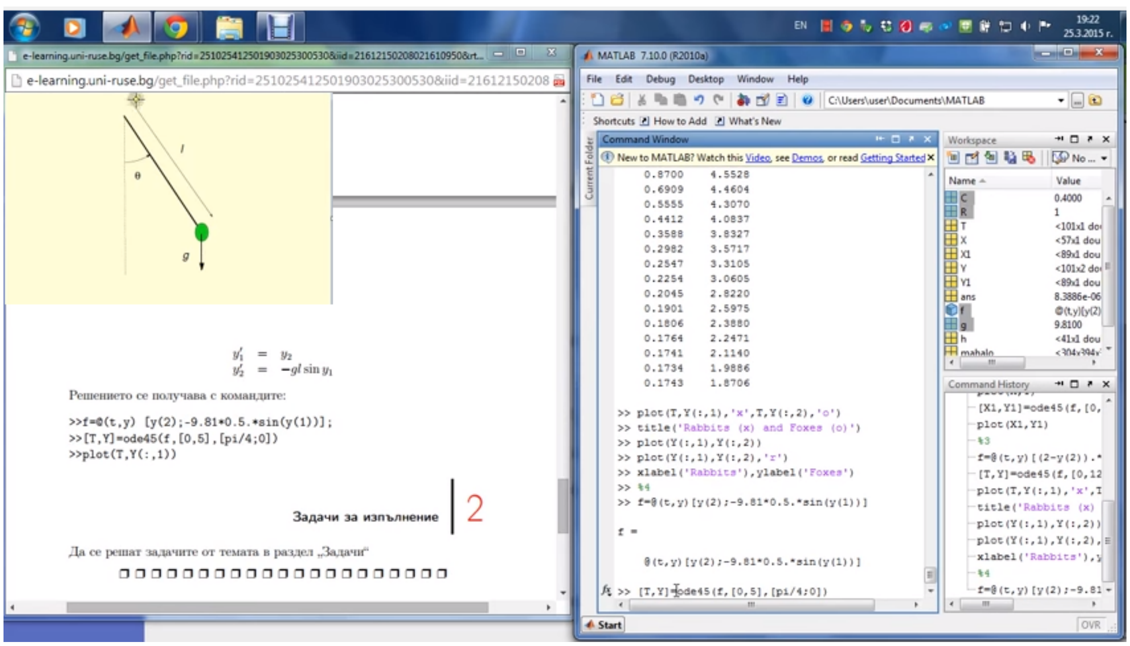
Фигура 2.13: Решаване на двойни и тройни интеграли



Фигура 2.14: Решаване на определени интеграли



Фигура 2.15: Решаване на диференциални уравнения-1



Фигура 2.16: Решаване на диференциални уравнения-2

циалното уравнение е от втори ред и е необходимо да се направи подходящо полагане, за да се сведе до система диференциални уравнения от първи ред. На фигури 2.15 и 2.16 са дадени графични изображения на решаването на две от задачите.

Очакваните резултати от обучението по раздел „Числени методи“, предмет на настоящото изследване, са свързани с уменията на студентите да прилагат на практика своите знания, като използват команди и процедури от функционалния интерфейс на компютърната система MATLAB за: решаване на системи линейни алгебрични уравнения с точни и итерационни методи; нелинейни уравнения и системи; апроксимиране на таблично зададени функции по метода на най-малките квадрати; числено решаване на интеграли и приложения, числено решаване на диференциални уравнения от първи и втори ред.

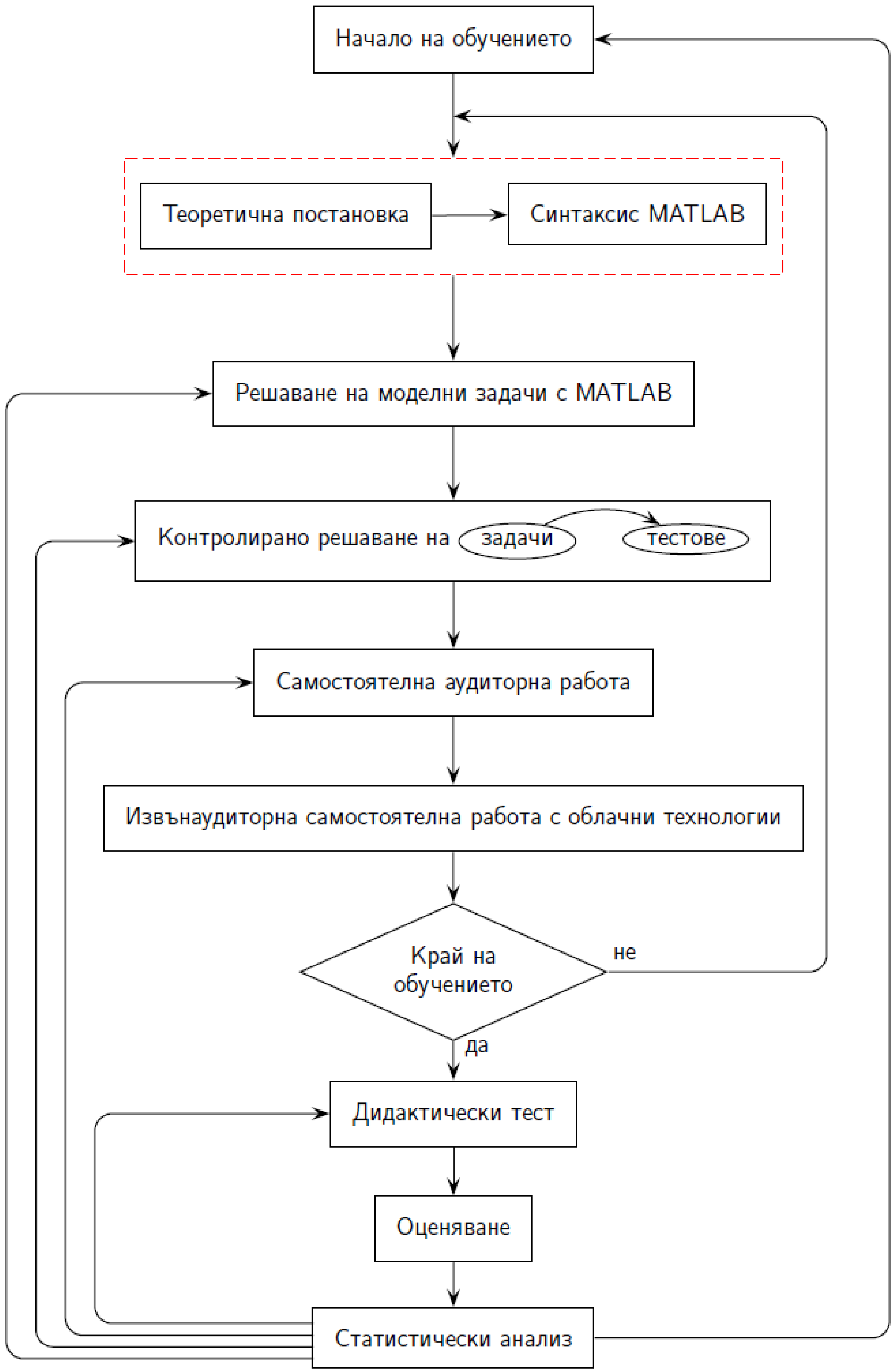
Наблюденията на автора показват, че студентите приемат с ентусиазъм (въпреки трудностите) този начин на обучение и определят практическата работа като изключително полезна за тяхната бъдеща практика. Не са редки случаите, в които те започват да използват наученото в часовете по Висша математика в други дисциплини и при подготовка на курсови работи. Тази практика продължава и в по-горните курсове. От беседи със студенти - дипломанти става ясно, че наученото по Висша математика 3 се използва до дипломирането им.

В раздел 2.2 е представен модел на диагностичен тест за проверка на знанията на студентите по разглежданите теми. В глава 3 са представени резултатите от проведените изследвания за резултатите от обучението.

2.1.7 Архитектура на общия модел

Приведените дидактически сценарии в раздел 2.1 реализират нашия общ модел за обучение и оценка на постиженията по отделните модули от програмата, фигура 2.17.

Ключовите нововъведения са в преноса на технически трудоемките и рутинни дейности в CAS-среда. Самостоятелната аудиторна работа се допълва чрез самоподготовка с прилагане на облачни технологии. Постигнатият по този начин синергичен ефект се оценява с адекватен статистически инструментариум, за който става въпрос в раздел 2.2.



Фигура 2.17: Архитектура на модел за обучение и самоподготовка в ИТ среда

2.2 Дизайн на диагностичен тест за изследване резултатите от обучението по Висша математика

В раздел 2.2 е представена диагностичната процедура за разработване и експериментално изследване на резултатите от прилагане на тестов модел [46] за проверка на знанията на студенти от професионално направление „Технически науки“ по раздел „Численi методи“.

В глава 3, раздел 3.2 е извършен статистически анализ на модела и резултатите от неговото прилагане.

Обект на изследването е учебно - познавателната дейност на студентите от специалности „Индустриално инженерство“ и „Мениджмънт на качеството и метрология“ на Русенски университет - техните знания и умения при изучаването на раздела „Числени методи“ в учебната дисциплина „Приложна математика“.

Цел на изследването е да се разработи и експериментира диагностичен тест „Числени методи с MATLAB“ (Приложение A) за текущ контрол на знанията на студентите при следната хипотеза.

Хипотеза: използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите по дисциплината „Приложна математика“ стимулира познавателната им дейност и води до по-добро и качествено усвояване на учебния материал.

За постигане на поставената цел са поставени и изпълнени следните основни задачи:

1. Проучване на литературни източници, свързани с теоретичната концепция на диагностичната процедура.

2. Анализ на учебното съдържание по дисциплината.

3. Разработване на инструментариум и апробация на комбиниран тест за проверка на знания.

4. Статистическа обработка и анализ на теста.

5. Изводи.

2.2.1 Проучване на литературни източници

За нуждите на изследването авторът на настоящия дисертационен труд проучи множество литературни източници, свързани с теоретичната концепция на диагностичната процедура [1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 36, 90].

2.2.2 Диагностичен анализ на учебното съдържание

Учебното съдържание в раздел „Числени методи“ включва: решаване на системи линейни алгебрични уравнения, нелинейни уравнения и системи, интеграли, диференциални уравнения и системи, апроксимиране на функции.

Обучението по раздел „Числени методи“ се провежда в компютърна зала и има за цел, чрез усвояване на изучавания материал, студентите да придобият компетенции и практически умения за самостоятелно решаване на задачи с помощта на MATLAB.

Очакваните резултати от обучението по раздел „Числени методи“, предмет на настоящото изследване, са свързани с уменията на студентите да прилагат на практика своите знания, като използват команди и процедури от функционалния интерфейс на компютърната система MATLAB за: решаване на системи линейни алгебрични уравнения с точни и итерационни методи; нелинейни уравнения и системи; апроксимиране на таблично зададени функции по метода на най-малките квадрати; числено решаване на интеграли и приложения, числено решаване на диференциални уравнения от първи и втори ред. В раздел 2.1 бе направен подробен анализ на методиката на преподаване на учебното съдържание по раздел „Числени методи“.

2.2.3 Разработване на инструментариум

2.2.3.1 Планиране съдържанието на теста

В комбинирания тест (Приложение A) са включени 26 задачи. В таблица 2.1 е дадено тяхното разпределение по теми.

№	Съдържание на въпросите	Брой задания	Номер на въпрос
1	MATLAB	4	1, 2, 15, 19
2	Системи линейни алгебрични уравнения	5	3, 4, 5, 16, 26.1
3	Нелинейни уравнения	5	6, 7, 14, 24, 26.2
4	Нелинейни системи уравнения	3	13, 17, 21
5	Апроксимиране на функции	2	8, 22
6	Числено интегриране	5	9, 10, 18, 20, 25
7	Диференциални уравнения	3	11, 12, 23

Таблица 2.1: План на теста върху раздел „Числени методи с MATLAB“

2.2.3.2 Конструиране на теста

В таблица 2.2 е представена матрицата на Тейлър [11], като в хоризонтален ред са посочени нивата на усвояване според таксономията на Блум, а във вертикален ред - целите на учебното съдържание.

Учебно съдържание	Категории умствен труд Знание	 Разбиране	 Приложение	Номера на въпросите Анализ	 Синтез	 Оценка
MATLAB	19	1	15	2		
Системи линейни алгебрични уравнения	16	4	3	5		26.1
Нелинейни уравнения	6	7	14		24	26.2
Нелинейни системи уравнения	13		17	21		
Апроксимиране на функции	8			22		
Числено интегриране	20	10	18	9	25	
Диференциални уравнения			11	12, 23		

Таблица 2.2: Съдържателна рамка на теста. Матрица на Тейлър

Подреждането на задачите в теста е извършено на основата на критерия на В.Нол и Д.Скенел [11, стр.478]. Според този критерий тестът има четири групи въпроси. В първа група са включени задачи с изборен отговор, във втора - задачи с кратък отговор или задачи за допълване, в трета - задачи за съотнасяне и в четвърта - задачи тип „есе“.

2.2.3.3 Начин на оценяване

Оценяването на всеки верен отговор на задачите от комбинирания тест, Приложение A, таблица 2.3, става по следния начин:

Точки	0-20	21-30	31-40	41-50	51-60
Оценки	Слаб	Среден	Добър	Мн. добър	Отличен

Таблица 2.3: Ска́ла за оценяване

А) За всеки верен отговор на въпросите от I част - по 1 точка.
Б) Задачите от II част за допълване се оценяват с по 2 точки.
В) Задачите със свободен отговор от II част - по 1 точка.
Г) За вярно съответствие в задачите за съотнасяне - 1 точка.
Д) Задачите за подробно решаване от III част - по 4 точки.
Е) Задачите от IV част за подробно решаване се оценяват по 5 точки.

При грешен отговор не се отнемат точки. Максималният брой точки е 60.

2.2.4 Статистически анализ на диагностичен тест за проверка на знания

Анализът на резултатите е извършен с MATLAB е част от експерименталните изследвания и е представен в глава 3, раздел 3.2.

Статистическият анализ на проведената диагностична процедура доказва работната хипотеза, че използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите в часовете по Висша математика стимулира познавателната им дейност и спомага за достигане на по-добро и по-задълбочено усвояване на учебния материал [46].

2.3 Електронни тестове за самоконтрол, базирани в сайта за електронно обучение E-learning Shell 2

През 2013 - по проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенския университет“, осъществен с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“ и съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз, авторът на настоящия дисертационен труд разработи web-базирано съдържание по дисциплините „Приложна математика“ и „Висша математика 3“, които включват тестове за проверка на знания по петнадесет теми [41].

В настоящия раздел 2.3 са разгледани част от темите - само тези, които имат пряко отношение към темата на дисертацията, а именно, тук се разглеждат тестове по темите: „Основи на компютърната система MATLAB“, „Решаване на системи линейни алгебрични уравнения с MATLAB“, „Решаване на нелинейни уравнения с MATLAB“, „Решаване на системи нелинейни уравнения с MATLAB“ „Апроксимиране на функция. Метод на най-малките квадрати“ , „Числено решаване на определен интеграл с MATLAB“ и „Решаване на диференциални уравнения и системи“. Всички публикувани материали се използват активно в учебния процес. Всички задачи от гореизброените теми са дадени в приложение Б.

Съгласно изискванията на проекта и използваната платформа на сайта http://e-learning.uni-ruse.bg/index.php?site_step=1, се използват четири вида тестови въпроси:

1. **Единичен избор.** Допускат се до пет алтернативи, като верният отговор е само един и се отбелязва чрез радио - бутон с кръгла форма: ❍

2. **Множествен избор.** допускат се няколко верни отговора (от 1 до 5) като възможният брой алтернативи също е пет. Избраните отговори се отбелязват чрез радио - бутони с квадратна форма: ❑

3. **Попълни полето.** Изисква се да се въведе вярно дума или команда.

4. **Попълни текст**. Този тип въпроси е подобен на (3), като се допуска попълване в няколко полета. Има възможност за визуализиране на думите за попълване.

При съставянето на тестовите задачи авторът използва дистрактори, които са пряко отражение на често допусканите от студентите грешки в компютърната зала.

В рамките на проекта, по Дейност №8 „Провеждане на дистанционно обучение със студенти - бакалаври и магистри“, бе проведено пилотно обучение на десет студенти (редовно и задочно обучение) за работа с web - базирания курс, което включва и работа с разработените тестови задачи. В резултат на тази дейност бяха извършени редица подобрения, формулировките на някои от тестовите въпроси бяха променени и всички web - базирани материали бяха активно посещавани от студентите през периода на тестиране.

След успешната проверка на учебните материали, през учебната 2013/2014 г. те бяха въведени като част от обучението на студентите - степен бакалавър от специалности ЕЕА, Е, АИУТ, КУА, ИИ, МКМ.

При разработването на web - базирания курс са използвани LaTeX-технологии за създаване на pdf файловете - лекции, упражнения, задачи и др. Използването на електронните материали (особено тестове и видео-упражнения) е важно за всички студенти при тяхната самоподготовка. Това важи най-вече за студентите, които се обучават в задочна форма на обучение.

В приложение Б са дадени въпросите с решения на електронните тестове за самоконтрол, публикувани в E-Learning Shell 2 [41].

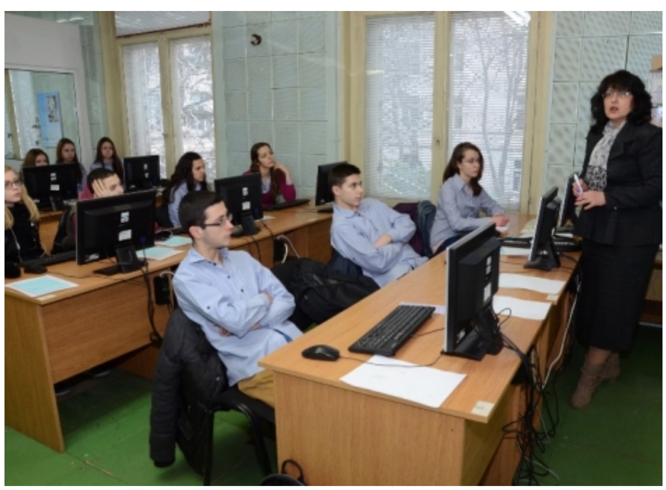
2.4 Анкета „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“

В раздел 2.4 е представена анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика. Изследвани са 151 лица - ученици, студенти и дипломирани студенти. Представен е анализ на фóрмата на анкетата и типа на въпросите в нея. В глава 3, раздел 3.3 е извършен вариационен анализ, изследвани са корелационни зависимости между признаци. Извършен е подробен клъстерен анализ.

Повече от петнадесет години в Русенски университет „Ангел Кънчев“ авторът на настоящия дисертационен труд обучава студенти по математически дисциплини с използване на системата за математически изчисления MATLAB чрез „нова“ методика [48] с практическа насоченост и използване на система за компютърни изчисления MATLAB. През последните няколко години за такъв тип обучение се използва терминът „Компютърна математика“;

По идея на автора от 2013 година се провежда и обучение по Компютърна математика като факултативна дисциплина [49] за мотивирани студенти от специалности Компютърни системи и технологии, Електроника, Телекомуникационни системи, Компютърни науки, Финансова математика и др.

Традиция стана и участието на русенски студенти в Националната студентска олимпиада по Компютърна математика „Акад. Стефан Додунеков“, като през 2014 и 2015 година русенският отбор печели по един златен и един бронзов медали.



Съвместно с учители по информационни технологии в Математическа гимназия „Баба Тонка“ – гр. Русе в началото на 2014 г. бяха проведени и открити уроци с ученици по Компютърна математика в РУ „Ангел Кънчев“ на тема

„Решаване на системи линейни алгебрични уравнения с използване на системата MATLAB“, [82].

Анкетата (Приложение B), резултатите от анализирането [50] на която са предмет на настоящата глава, е проведена в периода 2012-2014 г. Общият брой на анкетираните лица е 151, като част от тях са анкетирани on-line. В анкетното проучване са включени студенти от специалности Компютърни системи и технологии (КСТ), Електроника (Е), Информационни и комуникационни технологии (ИКТ), Електроенергетика и електрообзавеждане (ЕЕЕО), Телекомуникационни системи (ТКС), Компютърно управление и автоматизация (КУА), Машинно инженерство (МИ), Мениджмънт на качеството и метрология (МКМ), Земеделска техника и технологии (ЗТТ), Финансова математика (ФМ), Математика и информатика (МИ) и ученици от Математическа гимназия „Баба Тонка“.

Целта на проведената анкета е да се съберат и анализират данни за мнението на обучаваните за резултатите от обучението по Компютърна математика и нагласата им към идеята за компютърно съпроводено обучение по математика.

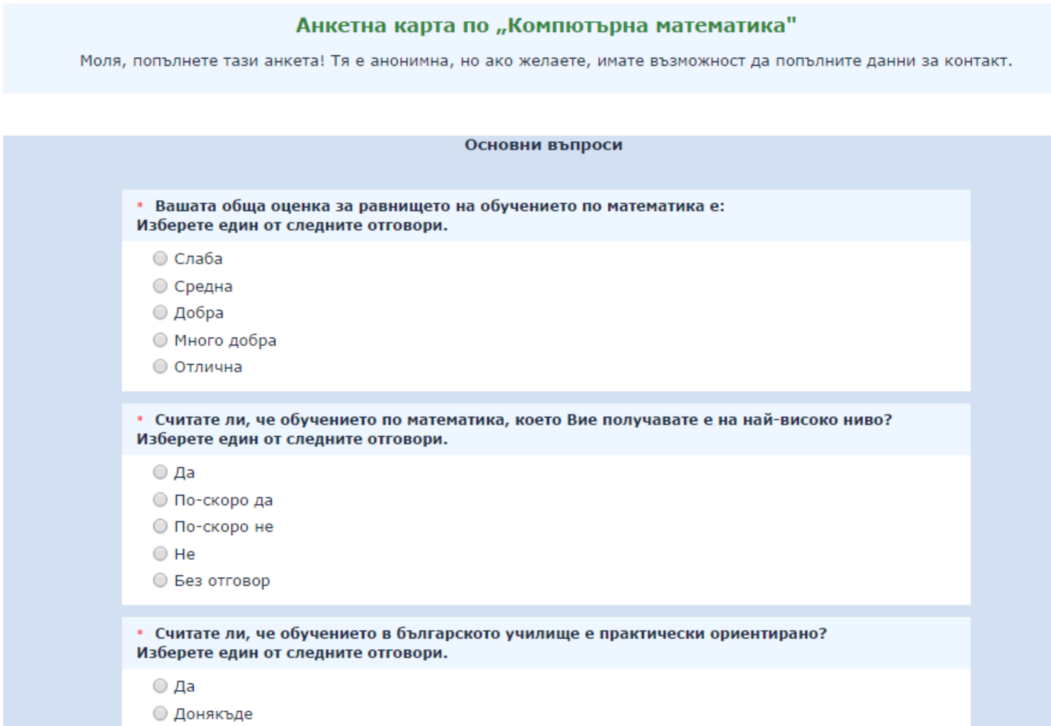
Анкетата отговаря на всички изисквания за структура (уводна, основна и заключителна част), прегледност, естетическа издържаност, икономичност. Резултатите се обработват бързо и точно с помощта на програмите Lime Survey и SPSS.

2.4.1 Фо́рма на анкетата

Според типа на комуникационния процес между изследователя и анкетираните, проведената анкета е *частично стандартизирана* [11, 36]. Въпросите и техните отговори са предварително конструирани в конкретна последователност. От анкетираните се иска да отбележат един или повече отговори, които съответстват на тяхното мнение или състояние. Има въпроси, при които от анкетирания се изисква сам да конструира отговора.

Според степента на точност на получените отговори, анкетата е *писмена*. Анкетираните попълват отговорите си в специално разработена за целта *анкетна карта*. През 2014 - на анкетираните лица се предоставя възможност да попълнят анкетната карта on-line чрез разработения електронен вариант [51] с програмата Lime Survey, Фигура 2.18.

Анкетната карта съдържа три *групи* въпроси:



Анкетна карта по „Компютърна математика"

Моля, попълнете тази анкета! Тя е анонимна, но ако желаете, имате възможност да попълните данни за контакт.

Основни въпроси

* Вашата обща оценка за равнището на обучението по математика е:
Изберете един от следните отговори.

- Слаба
- Средна
- Добра
- Много добра
- Отлична

* Считате ли, че обучението по математика, което Вие получавате е на най-високо ниво?
Изберете един от следните отговори.

- Да
- По-скоро да
- По-скоро не
- Не
- Без отговор

* Считате ли, че обучението в българското училище е практически ориентирано?
Изберете един от следните отговори.

- Да
- Донякъде

Фигура 2.18: On-line анкета по компютърна математика

- В първата група са включени въпроси, свързани с отношението към образователната система и качеството на обучение по математика.
- Във втората група са въпроси за резултатите от обучението по математика с MATLAB, отношението към компютърно съпроводеното обучение и нагласата на анкетираните за участие в олимпиада по „Компютърна математика“.
- В третата група има въпроси, свързани с профила на анкетираните лица.

2.4.2 Видове въпроси в анкетата

- В зависимост от *съдържанието*, анкетната карта съдържа следните видове въпроси [8, 11, 36]:
  - въпроси за социално положение и *статус* (идентификация) - пол, възраст, образование: № 18, 19, 20, 21, 22, 24;
  - за *степен на информираност* по дадена тема: № 7, 14;
  - за *ролеви* позиции и поведение в миналото и сега: № 13, 16;

– *проективни въпроси*, касаещи бъдещето или въображаема ситуация: № 5, 6, 17, 23;

– *въпроси за вътрешно състояние*, удовлетвореност: № 2, 10, 15;

– за *изясняване на мотиви*, намерения и цели: № 11, 12;

– за *изясняване на нагласи*, отношения, ценностни ориентации: № 1, 3, 4, 8, 9.

- В зависимост от *фóрмата*, в анкетата има два типа въпроси: *закрити* и *открити*.

  Закритите въпроси в анкетата са три вида:

  – алтернативни: № 13, 15, 16, 17, 20;

  – скалирани: № 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12;

  – въпроси с пълно изброяване на възможните случаи: № 7, 14, 18, 19.

  Откритите (свободни) въпроси се отнасят до възрастта, статута на анкетирания (ученик, студент и др.), данни за контакт и мнение за необходими промени в образователната система: № 21, 22, 23, 24.

- В зависимост от *функцията*, която изпълняват, въпросите в анкетата са:

  основни Чрез основните въпроси се получава необходимата за целите на конкретното изследване информация. Такива са въпроси № 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

  функционални Тези въпроси изпълняват различни функции в анкетата. Към тях се отнасят:

  - **въвеждащи** Наричат се още контактни и се използват за установяване на връзка с анкетирания в началото на анкетата: № 1, 2, 3.

  - **подготвителни** или преходни въпроси се използват при смяна на тема или като въвеждащи в тема: № 3, 4, 13, 14.

  - **мотивационни** за засилване на вярата в себе си или за преодоляване на задръжки: № 5, 6, 8, 12, 17, 23.

  - **филтриращи** Използват се за разделяне на анкетираните на подгрупи: № 20, 21, 22.

- **контролни** За откриване на противоречия в отговорите: № 16, 21, 22.

Статистическият анализ на проведената анкета включва вариационен, клъстерен и дискриминантен анализ, които са представени в раздел 3.3 на глава 3.

ГЛАВА 3

Експериментални изследвания

В глава 3 са описани експерименталните изследвания, свързани с настоящата дисертация, проведени през периода 2010-2014 година.

В раздел 3.1 са описани серия експериментални изследвания на резултатите от обучението по Висша математика, извършени през пет последователни години – от 2010 до 2014. Описана е методиката на формиране на експериментални и контролни групи на изследване за всяка серия.

В раздел 3.1.1 е извършен вариационен анализ на изследваните съвкупности.

В раздел 3.1.2 е направена проверка за нормалност на разпределенията на изследваните признаци.

В раздел 3.1.3 е доказана ефективността на експерименталната методика за всяка от петте серии на проведения експеримент.

В раздел 3.1.4 е извършен задълбочен дискриминантен анализ, базиран на всички налични данни за 3001 изследвани студенти. В резултат на дискриминантния анализ е изграден адекватен дискриминантен модел, чрез който са получени прогнози (със съответните им вероятности) за нови случаи, неучастващи в извадката.

В раздел 3.1.5 са изследвани връзки между наблюдавани признаци и са открити най-силните от тях. Чрез метода *класификационни дървета* са класифицирани наблюдавани признаци чрез различни фактори. На основата на анализа чрез класификационни дървета са направени изводи за обучението по математика по експериментална и традиционна методика, като е изследвано влиянието на фактора „методика“ върху различни категории студенти.

В раздел 3.2 е извършен анализ на диагностичната процедура и провеждането на диагностичен тест за изследване резултатите от обучението по Висша математика.

В раздел 3.3 са анализирани резултатите от проведена анкета „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“. Извършен е подробен клъстерен анализ.

3.1 Изследване резултатите от обучението по Висша математика

Предмет на изследването са резултатите от обучението на студенти по Висша математика с използване на система за математически изчисления и визуализация MATLAB (експериментална методика).

Генералната съвкупност обхваща студенти от Русенски университет, които изучават Висша математика, т.е. това са студенти, които теоретично могат да бъдат изследвани.

Според обхвата на единиците от генералната съвкупност, изследването е *извадково*. За целта на изследването е направена *извадка* от общо 3001 лица – студенти от 1. и 2. курс в Русенски университет „Ангел Кънчев“, обучавани през периода 2010-2014 години.

По своята същност, извадката е **серийна** [11, стр. 174]. Генералната съвкупност се разбива на серии (според година на изследване), като след това по метода на случайния избор във всяка серия се избират *елементи за изследване*.

Елементите за изследване във всяка **серия** се разделят в две хомогенни групи - **контролна група** (КГ) и **експериментална група** (ЕГ). Контролната група включва студенти, които са обучавани по традиционната методика, без използване на система за математически изчисления, а експерименталната група - студенти, обучавани по експерименталната методика (с използване на системи за математически изчисления).

Формирането на извадката отговаря на всички изисквания за формиране на извадки в педагогическите изследвания [4, 8, 11, 36, 52, 79], а именно:

- Разглежданата извадка е *представителна*.

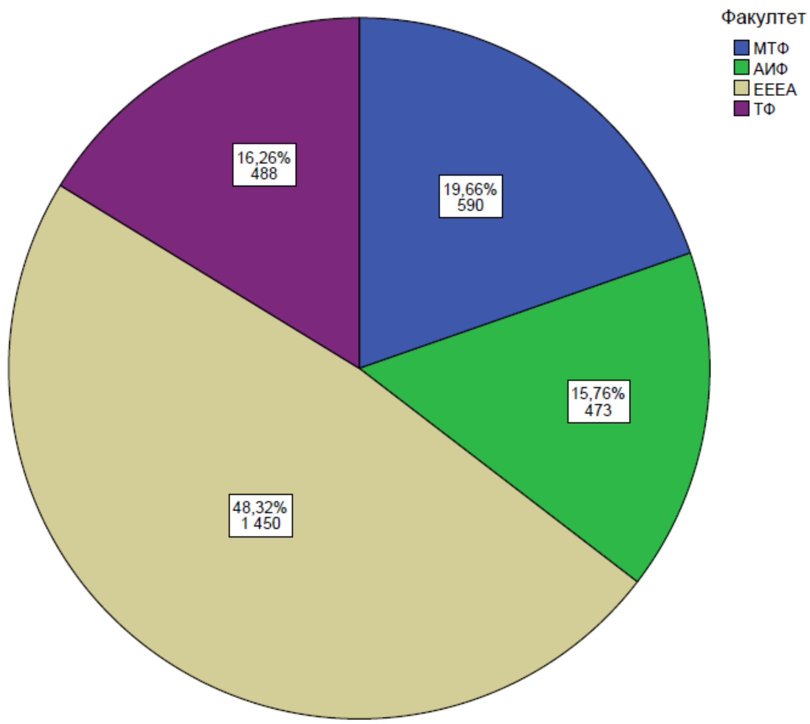
  Единиците от извадката са избрани чрез случаен подбор измежду студенти от 4 факултета и 18 специалности на Русенски университет, обучавани по Висша математика 3 през периода 2010-2014 години. В таблица 3.1 е дадено разпределението на студентите от извадката според тяхната специалност и годината, в която е проведено изследването.

  На кръгови диаграми са изобразени разпределенията на изучаваните случаи според факултет и специалност, фигури 3.1а, 3.1б.

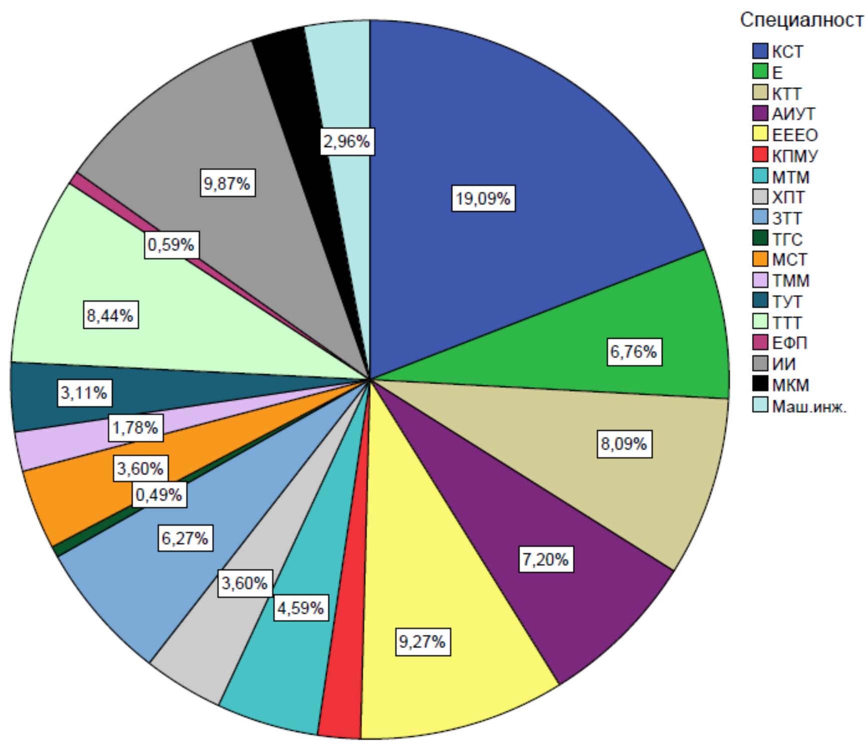
Специалност * Година Crosstabulation

	Година					Total
	2010	2011	2012	2013	2014	
КСТ	110	97	80	94	6	387
	28,4%	25,1%	20,7%	24%	1,6%	100%
Е	41	36	27	31	2	137
	29,9%	26,3%	19,7%	23%	1,5%	100%
КТТ	43	40	35	12	34	164
	26,2%	24,4%	21,3%	7,3%	20,7%	100%
АИУТ	39	31	20	18	38	146
	26,7%	21,2%	13,7%	12%	26,0%	100%
ЕЕЕО	39	42	40	54	13	188
	20,7%	22,3%	21,3%	29%	6,9%	100%
КПМУ	19	11	9	0	0	39
	48,7%	28,2%	23,1%	0,0%	0,0%	100%
МТМ	36	21	33	2	1	93
	38,7%	22,6%	35,5%	2,2%	1,1%	100%
ХПТ	21	0	40	12	0	73
	28,8%	0,0%	54,8%	16%	0,0%	100%
ЗТТ	38	12	37	40	0	127
	29,9%	9,4%	29,1%	31%	0,0%	100%
ТГС	10	0	0	0	0	10
	100%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100%
МСТ	19	0	35	19	0	73
	26,0%	0,0%	47,9%	26%	0,0%	100%
ТММ	29	0	7	0	0	36
	80,6%	0,0%	19,4%	0,0%	0,0%	100%
ТУТ	16	23	24	0	0	63
	25,4%	36,5%	38,1%	0,0%	0,0%	100%
ТТТ	61	35	39	36	0	171
	35,7%	20,5%	22,8%	21%	0,0%	100%
ЕФП	0	0	12	0	0	12
	0,0%	0,0%	100%	0,0%	0,0%	100%
ИИ	37	31	34	68	30	200
	18,5%	15,5%	17,0%	34%	15,0%	100%
МКМ	1	0	0	33	14	48
	2,1%	0,0%	0,0%	69%	29,2%	100%
Маш.инж.	2	17	0	41	0	60
	3,3%	28,3%	0,0%	68%	0,0%	100%
не е посочена	113	252	257	154	198	974
	11,6%	25,9%	26,4%	16%	20,3%	100%
Total	674	648	729	614	336	3001
	22,5%	21,6%	24,3%	20%	11,2%	100%

Таблица 3.1: Разпределение на случаите според специалност и година на изследване



(a) Разпределение на изследваните случаи според факултет



(б) Разпределение на изследваните случаи според специалност

Фигура 3.1: Кръгови диаграми

- Обемът на извадката е достатъчно голям.

  В изследването участват 3001 студенти, което представлява около 30% от всички обучавани студенти в РУ и 45% от студентите 1 и 2 курс, изучаващи Висша математика.

- Изборът на групите на изследване (КГ и ЕГ) във всяка серия става при спазване на принципа на случайност и при съблюдаване на изискването за хомогенност на извадките в началото на експеримента, т.е. двете групи да имат относително равни възможности. Спазено е изискването КГ и ЕГ от всяка серия да имат приблизително равни обеми и във всяка от тях да има приблизително еднакъв брой отличници, средни и слаби по успех студенти.

  За проверка на хомогенността на групите [11, стр.178] са изчислени коефициентите на вариация [52], от които се съди за степента на еднородност на КГ и ЕГ във всяка серия [79, стр.37]. В таблица 3.2 са дадени

Серия	2010	2011	2012	2013	2014	Общо
Експериментална група	130	230	270	189	130	949
Контролна група	130	230	270	186	134	950
Общо за серия	260	460	540	375	264	1899

Таблица 3.2: Обем на експериментална и контролна групи за всяка серия експерименти

  данни за обемите на контролните и експерименталните групи за всички серии на извадката. В раздел 3.1.1 е извършен вариационен анализ на петте серии експерименти по изследваните признаци, при което са изчислени и съответните им коефициенти на вариация.

- Изборът на единиците от различни специалности е направен пропорционално на броя на студентите в съответните специалности. В изследването участват студенти, обучаващи се в редовна и задочна форма, чийто брой е в съотношение, също отговарящо на съотношението в генералната съвкупност.

  Извършено е проучване за броя на студентите, обучавани от катедра „Приложна математика и статистика“ по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“. Данните са взети от протоколите и отчетите на учебната заетост. В таблица 3.3 е дадено разпределението на обучаваните студенти според форма на обучение и година, в която е проведено изследването. Пресметнати са процентните дялове на студентите, включени в изследването, спрямо общия брой на всички обучавани студенти. От последната колона на таблица 3.3 се вижда, че процетните дялове на изследваните лица спрямо общия брой обучавани от катедрата варират от 49.5% до 92.7%, което показва че броят на изследваните лица е достатъчно голям. Това означава, че извадката отразява общите типични качества на генералната съвкупност и резултатите от изследването могат да бъдат приложени в практиката.

Форма на обучение

Година/ Форма на обучение		Брой изследвани	% изследвани за текущата година	Брой обучавани по Висша математика 3	% изследвани от обучавани
2010	редовно	553	82,0	589	93,9
	задочно	121	18,0	250	48,4
	Общо	674	100,0	839	80,3
2011	редовно	504	77,8	642	78,5
	задочно	144	22,2	227	63,4
	Общо	648	100,0	869	74,6
2012	редовно	472	64,7	509	92,7
	задочно	257	35,3	314	81,8
	Общо	729	100,0	823	88,6
2013	редовно	392	63,8	438	89,5
	задочно	222	36,2	310	71,6
	Общо	614	100,0	748	82,1
2014	редовно	146	43,5	295	49,5
	задочно	190	56,5	315	60,3
	Общо	336	100,0	610	55,1

Таблица 3.3: Разпределение на случаите според форма на обучение и година на изследване

За целите на изследването е събрана информация за състоянието на наблюдавани признаци на изследваните случаи. За всеки признак е дефинирана променлива и са въведени техните стойности, които съответстват на значенията на наблюдаваните признаци. В таблица 3.4 са дадени въведените и допълнително изчислени променливи за цялата извадка, които са подложени на статистическа обработка. За всяка серия на извадката са изследвани зависимости между признаците: Средна оценка по Висша математика 1 и 2

(BEG_O12), Оценка по ВМ3 (END_O3) и Разлика (END_O3-BEG_O12).

Variable Information

Променлива	Позиция	Етикет	Вид	Ширина
X1	1	Нова/стара методика	Nominal	2
Year	2	Година	Ordinal	4
OVM1	3	Оценка ВМ1	Scale	5
OVM2	4	Оценка ВМ2	Scale	5
BEG_O12	5	Средна оценка ВМ1+2	Scale	8
BEG_O12_MET	6	Студенти с методика-Средна оценка ВМ1+2	Scale	7
BEG_O12_BEZ_MET	7	Студенти без методика-Средна оценка ВМ1+2	Scale	7
FN	8	Факултетен номер	Scale	6
Fak	9	Факултет	Nominal	3
Spec	10	Специалност	Nominal	3
POL	11	Пол	Nominal	3
Nar	12	Народност	Nominal	3
Forma	13	Форма на обучение	Nominal	4
Z1	14	Оценка -1 задача	Scale	4
Z2	15	Оценка - 2 задача	Scale	4
Z3	16	Оценка - 3 задача	Scale	3
Z4	17	Оценка - 4 задача	Scale	3
Z5	18	Оценка - 5 задача	Scale	3
Z6.1	19	Оценка - 6.1 задача	Scale	4
Z6.2	20	Оценка - 6.2 задача	Scale	3
Pored	21	Пореден номер оценка	Scale	2
Code_disc	22	Код на дисциплина	Nominal	5
END_O3	23	Окончателна оценка	Scale	5
END_O3_MET	24	Крайна оценка с методика	Scale	6
END_O3_BEZ_MET	25	Крайна оценка без методика	Scale	5
razlika	26	Разлика END-BEG	Scale	10

Таблица 3.4: Описание на променливи, съответстващи на наблюдаваните признаци за извадката

3.1.1 Вариационен анализ

За постигане на целта и решаване на задачите на изследването, е извършен вариационен анализ на променливите, съдържащи информация за началните и крайните данни за всяка от петте *серии* на експеримента [17, 22, 26, 37, 38, 52, 64, 79, 101].

Целта на вариационния анализ е да се определят основните числови характеристики на променливите „Средна оценка по ВМ12“, „Оценка по ВМ3“ и „Разлика“, и чрез сравнителен анализ да се провери каква е тенденцията на тяхното изменение в експерименталната и контролната групи за всяка от проведените серии на експеримента.

За всяка серия са пресметнати коефициентите на вариация по формулата $V = \frac{s}{\overline{X}} \cdot 100\%$ в началото на експеримента, където s и $\overline{X}$ са съответно стандартно отклонение и средна стойност на извадката. Това е необходимо, за да се спази изискването контролната и експерименталната групи да имат приблизително равни възможности в началото на експеримента. При стойности на коефициента на вариация до 10%, извадката е хомогенна, от 10 до 40% - приблизително хомогенна, а над 40% - нехомогенна [79, стр.37].

3.1.1.1 Вариационен анализ за Серия 2010

В таблица 3.5 са дадени основните числови характеристики на признаците: средна оценка по Висша математика 1 и 2 общо за цялата серия и отделно за експерименталната и контролната групи, оценка по Висша математика 3 за серията и отделно за експериментална и контролна групи, както и разлика между оценките ВМ3 и `BM_12` за серията и отделно за ЕГ и КГ. Пресметнати са коефициентите на вариация по формулата $V = \frac{s}{\overline{X}} \cdot 100\%$ в началото на експеримента, където в таблицата $\overline{X} = Mean, s = Std$. Получените коефициенти за двете групи ($V_{\text{ЕГ}}^{2010} = 32.98\%$, $V_{\text{КГ}}^{2010} = 32.34\%$) показват, че ЕГ и КГ са приблизително еднородни по признака оценка по ВМ12.

Сравнителният анализ на получените характеристики показва, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока подобряване на резултатите, докато при КГ се наблюдава намаляване на оценките в края на експеримента, таблица 3.5. В раздел 3.1.3.1 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

Аналогично на вариационния анализ, извършен в раздел 3.1.1.1, се получават данни за разпределенията на изследваните признаци за всички останали серии. Получените резултати от вариационния анализ са дадени: в раздел 3.1.1.2 - серия 2011; в раздел 3.1.1.3 - серия 2012;, в раздел 3.1.1.4 - серия 2013; в раздел 3.1.1.5 - серия 2014 и са направени изводи.

Серия 2010	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	260	130	130	260	130	130	260	130	130
Mean	3.4115	3.4692	3.3538	3.6692	4.0077	3.3308	0.2558	0.5423	-0.0308
Me	3	3	3	3	4	3	0.5	0.5	0
Mo	3	3	3	3	4	3	0	1	0
Std	1.1141	1.1442	1.0845	1.1382	1.2168	0.9433	0.9357	0.9625	0.8159
Sk	1.092	0.881	1.342	0.581	0.011	1.317	-0.472	-0.605	-0.867
SE(Sk)	0.151	0.212	0.212	0.151	0.212	0.2121	0.151	0.212	0.212
Ku	0.346	-0.091	1.006	-0.436	-0.808	1.713	0.661	0.680	1.096
SE(Ku)	0.301	0.422	0.422	0.301	0.422	0.422	0.301	0.422	0.422

Таблица 3.5: Вариационен анализ за серия 2010 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

Серия 2011	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	460	230	230	460	230	230	460	230	230
Mean	2.8402	2.8174	2.863	3.3522	3.5261	3.1783	0.5120	0.7087	0.3152
Me	3	2.5	3	3	3	3	0.5	0.5	0.5
Mo	3	2	3	3	3	3	1	1	1
Std	0.7656	0.7716	0.7605	0.7907	0.7158	0.8246	0.8047	0.8246	0.8789
Sk	1.225	1.262	1.201	1.111	1.493	1.166	-0.732	0.184	-0.927
SE(Sk)	0.114	0.160	0.160	1.114	0.160	0.160	0.114	0.160	0.160
Ku	2.346	2.324	2.471	1.969	2.405	2.112	0.561	-0.08	1.091
SE(Ku)	0.227	0.320	0.320	0.227	0.320	0.320	0.227	0.320	0.320

Таблица 3.6: Вариационен анализ за серия 2011 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

Серия 2012	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	540	270	270	540	270	270	540	270	270
Mean	2.9806	2.9944	2.9667	3.4352	3.9222	2.9481	0.4546	0.9278	-0.0155
Me	3	3	3	3	4	3	0.5		0
Mo	3	2	3	4	4	2	1	1	0
Std	0.9208	0.9282	0.9150	1.0469	0.8028	1.037	1.0089	0.8716	0.9113
Sk	1.111	1.025	1.207	0.431	0.576	1.192	-0.089	-0.01	-0.101
SE(Sk)	0.105	0.148	0.148	0.105	0.148	0.148	0.105	0.148	0.148
Ku	1.262	0.918	1.681	-0.229	0.274	1.144	-0.111	0.239	-0.438
SE(Ku)	0.210	0.295	0.295	0.210	0.295	0.295	0.210	0.295	0.295

Таблица 3.7: Вариационен анализ за серия 2012 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

3.1.1.2 Вариационен анализ за Серия 2011

Коефициентите на вариация за двете групи са близки помежду си (таблица 3.6) и са в интервала 10-40% ($V_{\text{ЕГ}}^{2011} = 27.386\%$ и $V_{\text{КГ}}^{2011} = 26.562\%$), което показва, че двете групи са приблизително еднородни по признака „оценка по ВМ12“.

Чрез сравнителен анализ е установено, че и в двете групи - ЕГ и КГ - средните стойности на оценките за Серия 2011 се изменят в посока подобряване на резултатите, като при КГ се наблюдава по-слабо подобрение, таблица 3.6. В раздел 3.1.3.2 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

3.1.1.3 Вариационен анализ за Серия 2012

Получените коефициенти на вариация за двете групи ($V_{\text{ЕГ}}^{2012} = 30.996\%$ $V_{\text{КГ}}^{2012} = 30.841\%$) са приблизително равни и са в интервала 10%-40%, което означава, че двете групи са приблизително еднородни по признака „оценка по ВМ12“, таблица 3.7.

Чрез сравнителен анализ на получените характеристики за Серия 2012 е установено, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока подобряване на резултатите, докато при КГ се наблюдава намаляване на оценките в края на експеримента, таблица 3.7. В раздел 3.1.3.3 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

3.1.1.4 Вариационен анализ за Серия 2013

Получените коефициенти на вариация за двете групи ($V_{\text{ЕГ}}^{2013} = 33.62\%$, $V_{\text{КГ}}^{2013} = 38.03\%$) са в интервала 12%-40%, което означава, че двете групи са приблизително еднородни по признака „оценка по ВМ12“, таблица 3.8.

Чрез сравнителен анализ на получените характеристики за Серия 2013 се установява, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока на значително повишаване, докато при КГ това повишаване в края на експеримента е незначително, таблица 3.8. В раздел 3.1.3.4 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

Серия 2013	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	375	189	189	375	189	186	375	189	186
Mean	2.9413	2.9339	2.9489	3.4747	3.9259	3.0161	0.5333	0.9921	0.0672
Me	3	3	2.5	3	4	3	0.5	1	0
Mo	2	2	2	3	4	3	0	1	0
Std	1.0543	0.9864	1.1217	1.1157	0.9020	1.1270	0.9139	0.7570	0.8201
Sk	1.329	1.245	1.378	0.575	0.718	1.205	-0.136	0.659	-0.649
SE(Sk)	0.126	0.177	0.178	0.126	0.177	0.178	0.126	0.177	0.178
Ku	1.272	1.316	1.172	-0.334	-0.278	0.767	2.002	0.615	3.569
SE(Ku)	0.251	0.352	0.355	0.251	0.352	0.355	0.251	0.352	0.355

Таблица 3.8: Вариационен анализ за серия 2013 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

Серия 2014	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	264	130	134	264	130	134	264	130	134
Mean	2.6723	2.6808	2.6642	2.8523	3.3000	2.4179	0.1799	0.6192	-0.2463
Me	2	2	2	2	3	2	0	1	0
Mo	2.5	2.5	2.5	3	3	2	0	1	0
Std	0.7907	0.8327	0.8289	0.9899	1.0317	0.7182	0.9636	1.0245	0.6681
Sk	1.605	1.401	1.764	1.085	0.444	2.395	0.459	0.238	-0.726
SE(Sk)	0.150	0.212	0.209	0.150	0.212	0.209	0.150	0.212	0.209
Ku	3.310	2.795	3.723	0.654	-0.408	7.983	1.306	0.67	1.601
SE(Ku)	0.299	0.422	0.416	0.299	0.422	0.416	0.299	0.422	0.416

Таблица 3.9: Вариационен анализ за Серия 2014 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

Серия 2010	Асимет-рия Sk	Грешка $SE(Sk)$	z-value $\frac{\lvert Sk\rvert}{SE(Sk)}$	Ексцес Ku	Грешка $SE(Ku)$	z-value $\frac{\lvert Ku\rvert}{SE(Ku)}$
начало ЕГ	0.881	0.212	4.16	-0.091	0.422	0.216
начало КГ	1.342	0.212	6.33	1.006	0.422	2.38
край ЕГ	0.011	0.212	0.052	-0.808	0.422	1.91
край КГ	1.317	0.212	6.21	1.713	0.422	4.06
разлика ЕГ	-0.605	0.212	2.85	0.680	0.422	1.61
разлика КГ	-0.867	0.212	4.09	1.096	0.422	2.6

Таблица 3.10: Числови характеристики, използвани за проверка за нормалност на разпределенията на начална и крайна оценки за експериментална и контролна групи - Серия 2010

3.1.1.5 Вариационен анализ за Серия 2014

Коефициентите на вариация за двете групи ($V_{\text{ЕГ}}^{2014} = 31.06\%$, $V_{\text{КГ}}^{2014} = 31.11\%$) са близки помежду си и са в интервала 10-40%, следователно, двете групи са приблизително еднородни по признака „оценка по ВМ12“, таблица 3.9.

Чрез сравнителен анализ на получените характеристики за Серия 2014 се установява, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока подобряване на резултатите, докато при КГ се наблюдава намаляване на оценките в края на експеримента, таблица 3.9. В раздел 3.1.3.5 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

3.1.2 Проверка за нормалност на емпиричните разпределения в изследваните съвкупности

Проверката за нормалност на емпиричните разпределения е важен етап, предшестващ статистическия анализ. В зависимост от това дали разпределенията са нормално разпределени или не, се прилагат различни методи за анализ - при нормално разпределени извадки се използват параметрични методи, а при такива, които не са нормално разпределени - непараметрични методи [79, 83, 84, 86, 101, 103, 104, 141, 145].

Методиката на проверката за нормалност [24, 26] на емпиричните разпределения при големи извадки (обем > 30) включва следните числови и визуални анализи:

1. Определяне на съответните z-values на асиметрията и ексцеса на разпределенията и проверка дали те са в теоретичните граници за нормално разпределение. При риск за грешка 0.05 тези стойности за нормално разпределение трябва да удовлетворяват едновременно неравенствата
$$\frac{\mid Sk \mid}{SE(Sk)} < 1.96, \quad \frac{\mid Ku \mid}{SE(Ku)} < 1.96,$$
където Sk, Ku, $SE(Sk)$ и $SE(Ku)$ са съответно коефициент на асиметрия, коефициент на ексцес, стандартна грешка на коефициента на асиметрия и стандартна грешка на коефициента на ексцес.

2. Проверка за нормалност на извадките чрез непараметричен критерий - тест на Колмогоров - Смирнов (Kolmogorov - Smirnov) и Шапиро-Уилк (Shapiro - Wilk). Тестовата стойност p-value (в SPSS - Sig.) за нормално разпределена извадка е над риска за грешка 0.05;

3. Визуални анализи на хистограми, Q-Q Plot, Box-plots.

Проверката за нормалност на емпиричните разпределения на оценките в началото и края на експеримента и прираста на оценките, отчетен в края на експеримента, е извършена чрез процедурата Explore в SPSS като се задава зависима променлива оценка (`BEG_012`, `END_03` или `razlika`) и независима променлива $X1$- принадлежност към контролна или експериментална групи. Проверката на всички числови и визуални характеристики е извършена за всяка от петте серии експерименти. За Серия 2010 анализът е описан подробно, а за останалите серии е извършен аналогично, като са посочени само основните моменти и изводи.

3.1.2.1 Проверка за нормалност за Серия 2010

В таблица 3.10 са дадени стойностите на изчислените характеристики за ЕГ и КГ в началото и края на изследването за серия 2010.

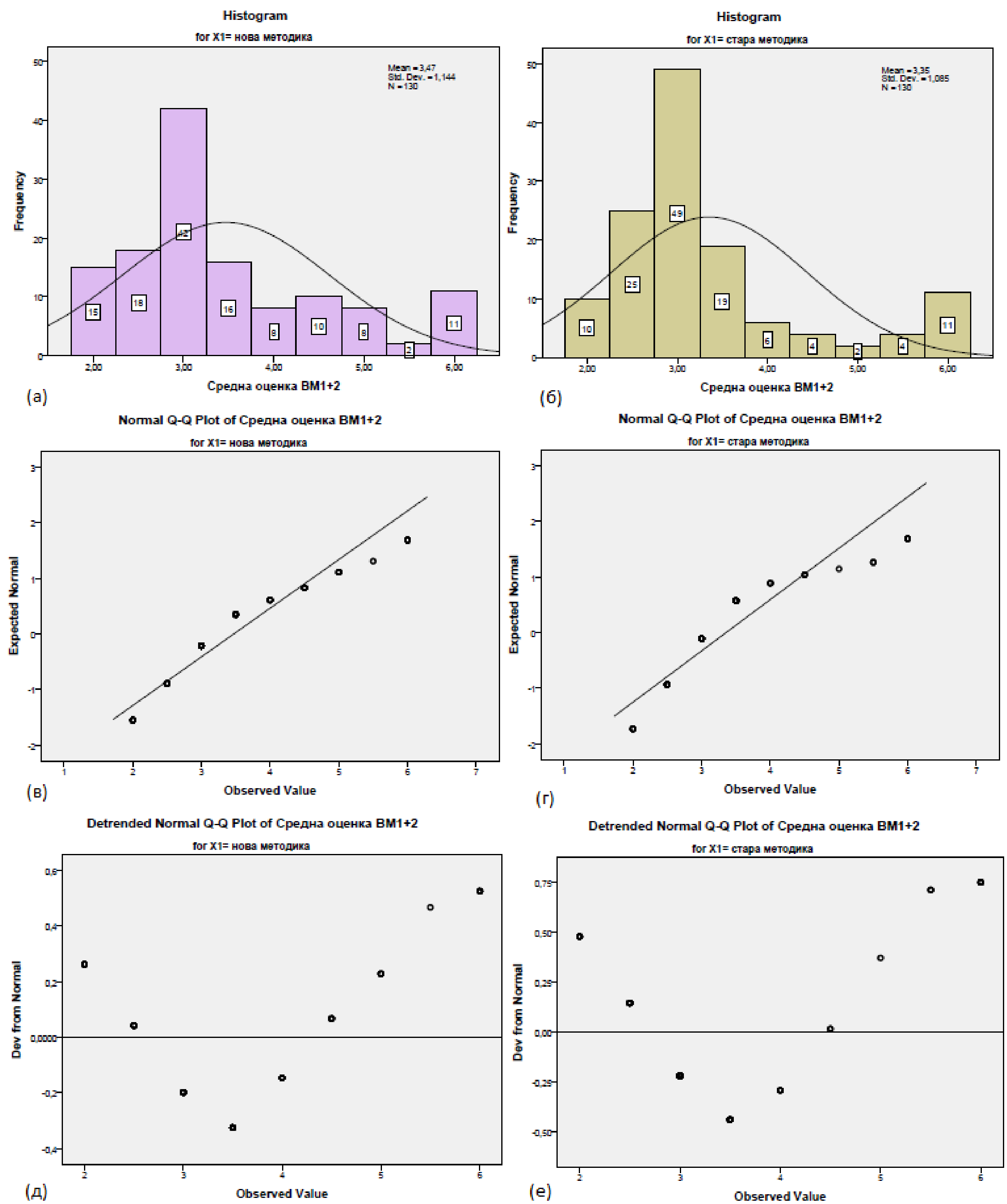
Получените стойности (таблица 3.10) показват, че и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) **не** са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на четири: 0.052, 0.216, 1.91 и 1.61) z-value са по-големи по модул от 1.96 и всички стойности p-value по непараметричните методи на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк **не** са по-малки от 0.05, фигура 3.5 - (г).

Фактът, че всички разглеждани разпределения **не** са нормални, се потвърждава и след внимателно анализиране на графичните изображения на хистограмите, Q-Q Plot и Box-plot диаграмите, фигури 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.

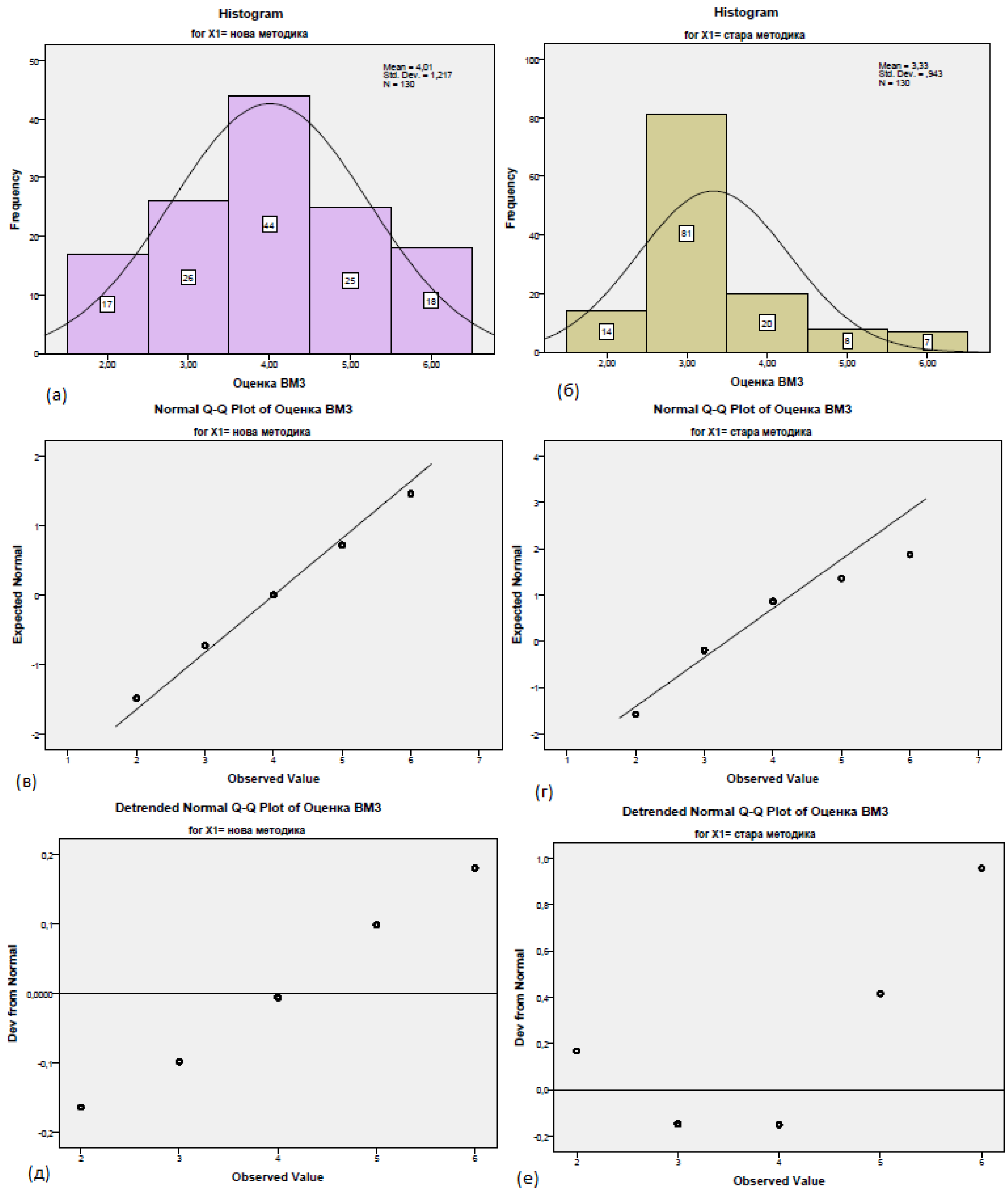
Тълкуването на графичните изображения е следното:

- Хистограмите на разпределенията за началната оценка **не** следват нормалната крива на разпределение (камбана), фигура 3.2 - (а), (б). Това е така и за хистограмата на разпределението на крайната оценка за контролната група, фигура 3.3 - (б).

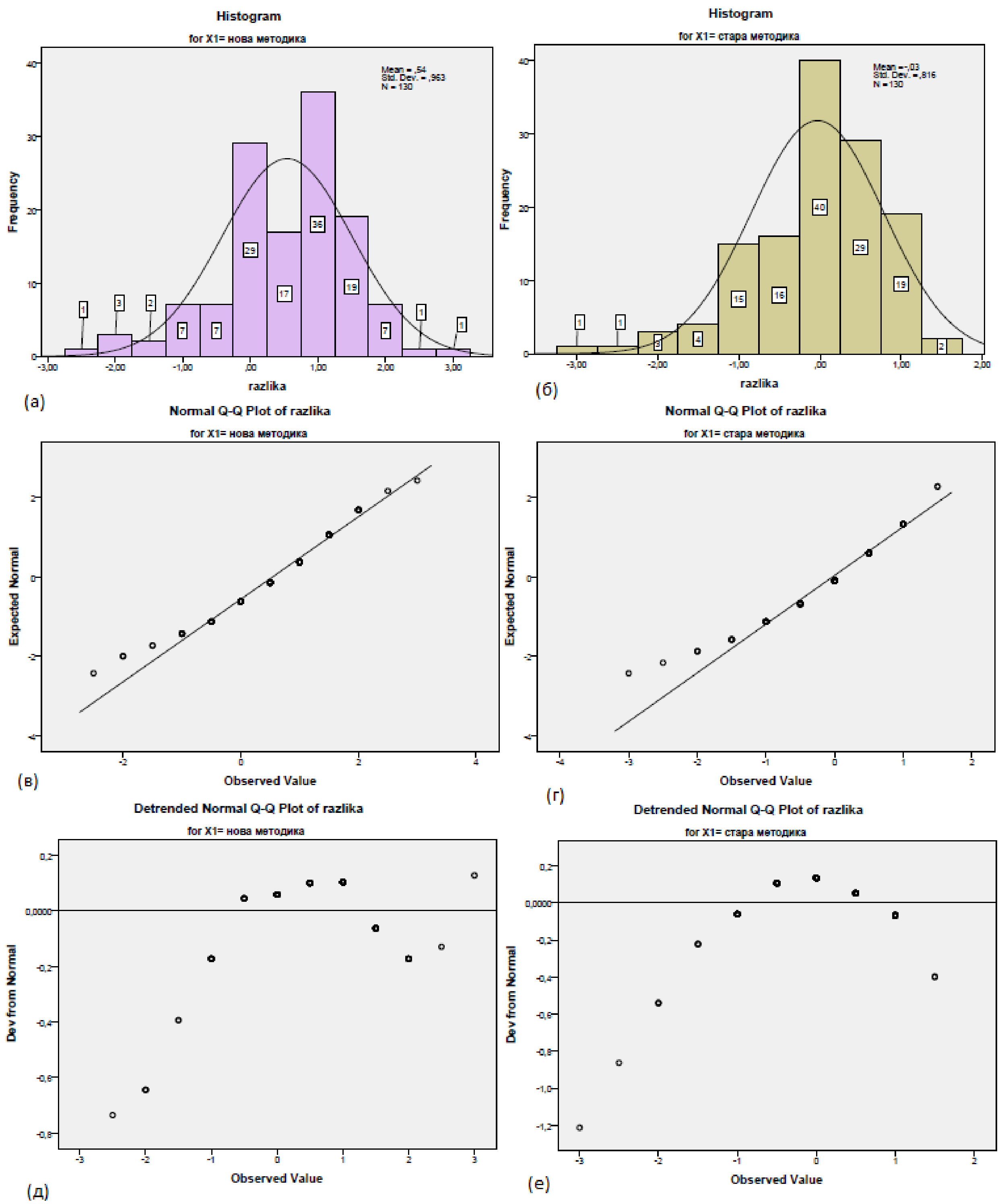
- Q-Q Plot (Quantile-Quantile plot) диаграмата е графика, която се използва за изобразяване на степента, в която квантилите на известно разпределение (в случая нормално) се различават от квантилите на извадката. Методът изобразява две графики - Normal Q-Q plot и Detrended Normal Q-Q Plot. За да бъде разпределението близко до нормално, трябва точките, изобразени на графиката, да са близо до правата линия.



Фигура 3.2: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на началната оценка на експериментална и контролна групи - серия 2010



Фигура 3.3: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на крайната оценка за експериментална и контролна групи - серия 2010



Фигура 3.4: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на разликата в оценките за експериментална и контролна групи - серия 2010

На фигура 3.2 (в) - (е) се вижда, че и за експерименталната, и за традиционната методика по отношение на началните оценки това изискване не е изпълнено. То не е изпълнено и за крайните оценки на КГ, фигура 3.3 (г) и (е).

На съответните графики Detrended Normal Q-Q Plot са изобразени разликите между квантилите на двете разпределения. От фигури 3.2 и 3.3 (д) и (е) се вижда, че отклоненията от нормалното разпределение са значителни.

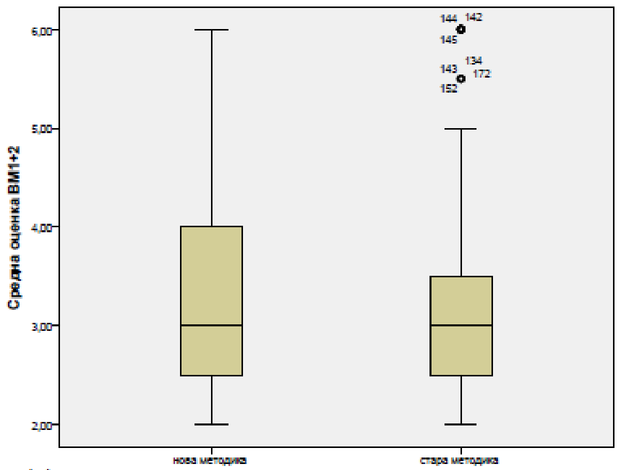
До същите изводи се стига и след анализиране на изображенията за разпределенията на разликата в оценките, фигура 3.4.

- Box-plot диаграмата е правоъгълник, който при нормално разпределение е симетричен спрямо медианната линия, приблизително намираща се в центъра на правоъгълника и със симетрични „мустаци“ с дължина, по-дълга от съответните подсектори на правоъгълника.

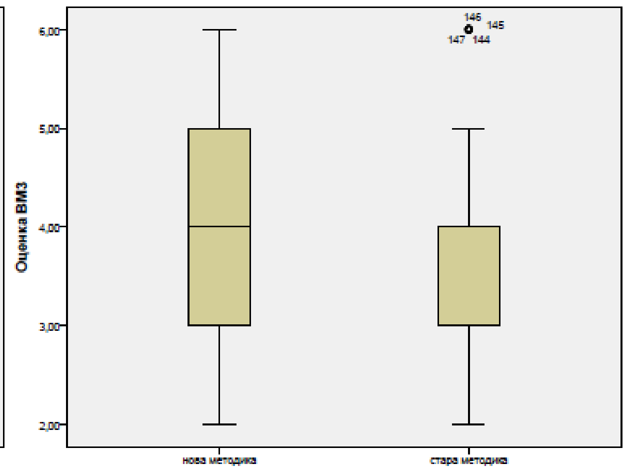
  От графичното изображение на фигури 3.5 (а), (б) се вижда, че изобразените box-plot диаграми за началото на изследването не отговарят на тези условия. За началото на изследването и двете диаграми нямат симетрични „мустаци“, а за края на изследването - медианната линия за „стара методика“ не е по средата на правоъгълника, а в неговия долен край. Аналогичен е изводът и за разпределението на разликите в оценките, фигура 3.5 (в).

  От всички разпределения, най-близки до нормално разпределение са тези за оценките по ВМ3 на ЕГ (експериментална методика) и разликите в оценките на експерименталната група. За разпределението на оценките на ЕГ това се потвърждава от хистограмата на фигура 3.3 и от таблица 3.10 - на ред „край ЕГ“ съответните стойности z-value, изчислени от коефициентите на асиметрия и ексцес са съответно 0.052 и 1.91, като изпълняват условието да са едновременно по-малки по модул от 1.96. Тестът за нормалност обаче показва, че разпределението на крайната оценка за ЕГ **не** е нормално - тестовата стойност p-value по критериите на Колмогоров Смирнов (0.172) и Шапиро-Уилк (0.913) има стойност по-голяма от 0.05, което означава, че разпределението **не** е нормално, фигура 3.5 - (г).

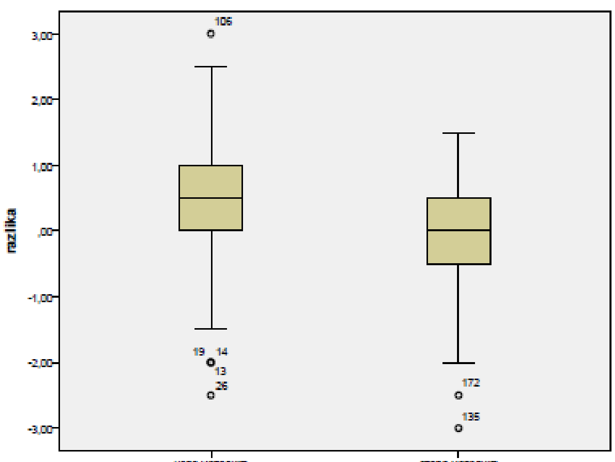
  За разпределението от разликите в оценките за ЕГ: от хистограмата на



(а)



(б)



(в)

Tests of Normality - 2010

	Нова/стара методика	Kolmogorov-Smirnov Statistic	Kolmogorov-Smirnov Sig.	Shapiro-Wilk Statistic	Shapiro-Wilk Sig.
Оценка ВМ1+2	нова методика	,236	,000	,880	,000
	стара методика	,274	,000	,806	,000
Оценка ВМ3	нова методика	,172	,000	,913	,000
	стара методика	,368	,000	,760	,000
Разлика	нова методика	,175	,000	,947	,000
	стара методика	,207	,000	,923	,000

(г)

Фигура 3.5: Box Plot диаграми на разпределенията и проверка за нормалност за експериментална и контролна групи - серия 2010 фигура 3.4 (а) и таблица 3.10 (ред „разлика ЕГ“) се вижда, че стойностите на z-value, изчислени от коефициентите на асиметрия и ексцес са съответно 2.85 и 1.61, които са сравнително ниски, но само вторият коефициент изпълнява условието (по-малък по модул от 1.96). Тестът за нормалност показва, че разпределението **не** е нормално, тъй като тестовата стойност p-value по критериите на Колмогоров Смирнов (0.175) и Шапиро-Уилк (0.947) има стойност по-голяма от 0.05, фигура 3.5 - (г).

Извод: Разглежданите разпределения от Серия 2010 в началото и края на експеримента **не** са нормално разпределени. Разпределението на оценките в края на експеримента и разликите в оценките на ЕГ са близки до нормални, но не удовлетворяват всички условия и следователно - също **нямат** нормално разпределение. Това налага използването на *непараметрични* методи при понататъшните изследвания.

Извършени са проверки за нормалност на разпределенията за Серии 2011, 2012, 2013 и 2014 по методиката, изложена на стр. 70-77. Резултатите са аналогични на Серия 2010. В таблица 3.11 са дадени числовите характеристики, използвани за проверката за нормалност, а в таблица 3.12 - резултатите от извършените тестове за нормалност по критериите на Шапиро–Уилк и Колмогоров–Смирнов. Направени са съответните изводи.

3.1.2.2 Проверка за нормалност за Серия 2011

Получените стойности за Серия 2011 (таблица 3.11) показват, че и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) **не** са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на две: 1.15 и 0,25) z-value са по-големи по модул от 1.96 и всички стойности p-value по непараметричните методи на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк не са по-малки от 0.05, таблица 3.12. При анализ на хистограмите на разпределенията, Q-Q Plot и Box Plot диаграмите бе потвърден този извод.

3.1.2.3 Проверка за нормалност за Серия 2012

Получените стойности за Серия 2012 (таблица 3.11) показват, че и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста

Серия	Групи	Асиметрия Sk	Грешка $SE(Sk)$	z-value $\frac{\vert Sk\vert}{SE(Sk)}$	Ексцес Ku	Грешка $SE(Ku)$	z-value $\frac{\vert Ku\vert}{SE(Ku)}$
2011	начало ЕГ	1.262	0.160	7.8875	2.324	0.320	7.2625
	начало КГ	1.201	0.160	7.50625	2.471	0.320	7.7219
	край ЕГ	1.493	0.160	9.33125	2.405	0.320	7.5156
	край КГ	1.166	0.160	7.2875	2.112	0.320	6.9125
	разлика ЕГ	0.184	0.160	1.15	-0.08	0.320	0.25
	разлика КГ	-0.927	0.160	5.79	1.091	0.320	3.4
2012	начало ЕГ	1.025	0.148	6.93	0.918	0.295	3.112
	начало КГ	1.207	0.148	8.16	1.681	0.295	5.70
	край ЕГ	0.576	0.148	3.89	0.274	0.295	0.92
	край КГ	1.192	0.148	8.05	1.144	0.295	3.88
	разлика ЕГ	-0.01	0.148	0.06	0.239	0.295	0.81
	разлика КГ	-0.101	0.148	0.68	-0.438	0.295	1.48
2013	начало ЕГ	1.245	0.177	7.03	1.316	0.352	3.74
	начало КГ	1.378	0.178	7.74	1.172	0.355	3.30
	край ЕГ	0.718	0.177	4.06	-0.278	0.352	0.79
	край КГ	1.205	0.178	6.77	0.767	0.355	2.16
	разлика ЕГ	0.659	0.177	3.72	0.615	0.352	1.74
	разлика КГ	-0.649	0.178	3.65	3.569	0.355	10.05
2014	начало ЕГ	1.401	0.212	6.61	2.795	0.422	6.62
	начало КГ	1.764	0.209	8.44	3.723	0.416	8.95
	край ЕГ	0.444	0.212	2.09	-0.408	0.422	0.97
	край КГ	0.395	0.209	11.46	7.983	0.416	19.19
	разлика ЕГ	0.238	0.212	1.12	0.67	0.422	1.59
	разлика КГ	-0.726	0.209	3.47	1.601	0.416	3.85

Таблица 3.11: Числови характеристики, използвани за проверка за нормалност на разпределенията на начална и крайна оценки за експериментални и контролни групи за серии 2011-2014

Тест за нормалност - 2011

	Нова/стара методика	Kolmogorov-Smirnov		Shapiro-Wilk	
		Statistic	Sig.	Statistic	Sig.
Оценка ВМ1+2	нова методика	,180	,000	,861	,000
	стара методика	,211	,000	,859	,000
Оценка ВМ3	нова методика	,343	,000	,693	,000
	стара методика	,355	,000	,780	,000
Разлика	нова методика	,166	,000	,926	,000
	стара методика	,204	,000	,893	,000

Тест за нормалност - 2012

	Нова/стара методика	Kolmogorov-Smirnov		Shapiro-Wilk	
		Statistic	Sig.	Statistic	Sig.
Оценка ВМ1+2	нова методика	,175	,000	,878	,000
	стара методика	,208	,000	,851	,000
Оценка ВМ3	нова методика	,273	,000	,840	,000
	стара методика	,247	,000	,801	,000
Разлика	нова методика	,177	,000	,954	,000
	стара методика	,142	,000	,949	,000

Тест за нормалност - 2013

	Нова/стара методика	Kolmogorov-Smirnov		Shapiro-Wilk	
		Statistic	Sig.	Statistic	Sig.
Оценка ВМ1+2	нова методика	,193	,000	,835	,000
	стара методика	,235	,000	,791	,000
Оценка ВМ3	нова методика	,234	,000	,826	,000
	стара методика	,285	,000	,790	,000
Разлика	нова методика	,242	,000	,910	,000
	стара методика	,231	,000	,891	,000

Тест за нормалност - 2014

	Нова/стара методика	Kolmogorov-Smirnov		Shapiro-Wilk	
		Statistic	Sig.	Statistic	Sig.
Оценка ВМ1+2	нова методика	,225	,000	,796	,000
	стара методика	,213	,000	,772	,000
Оценка ВМ3	нова методика	,207	,000	,885	,000
	стара методика	,391	,000	,605	,000
Разлика	нова методика	,201	,000	,931	,000
	стара методика	,259	,000	,845	,000

Таблица 3.12: Проверка за нормалност на разпределенията - Серии 2011-2014

на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) **не** са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на пет: 0.06, 0.68, 0.92, 0.81 и 1.48) z-value са по-големи по модул от 1.96 и всички стойности p-value по непараметричните методи на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк не са по-малки от 0.05, таблица 3.12. Анализът на хистограмите на разпределенията, Q-Q Plot и Box Plot диаграмите потвърждава този извод.

3.1.2.4 Проверка за нормалност за Серия 2013

Получените стойности за Серия 2013 (таблица 3.11) показват, че и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) **не** са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на една: 0.79) z-value са по-големи по модул от 1.96, а всички стойности p-value по непараметричните методи на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк не са по-малки от 0.05, таблица 3.12. Анализът на хистограмите на разпределенията, Q-Q Plot и Box Plot диаграмите потвърждава този извод.

3.1.2.5 Проверка за нормалност за Серия 2014

Получените стойности за Серия 2014 (таблица 3.11) показват, че и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) **не** са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на три: 1.12, 0.97 и 1.59) z-value са по-големи по модул от 1.96 и всички стойности p-value по непараметричните методи на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк не са по-малки от 0.05, таблица 3.12. Този извод се потвърждава и чрез анализ на хистограмите на разпределенията, Q-Q Plot и Box Plot диаграмите.

Извод:

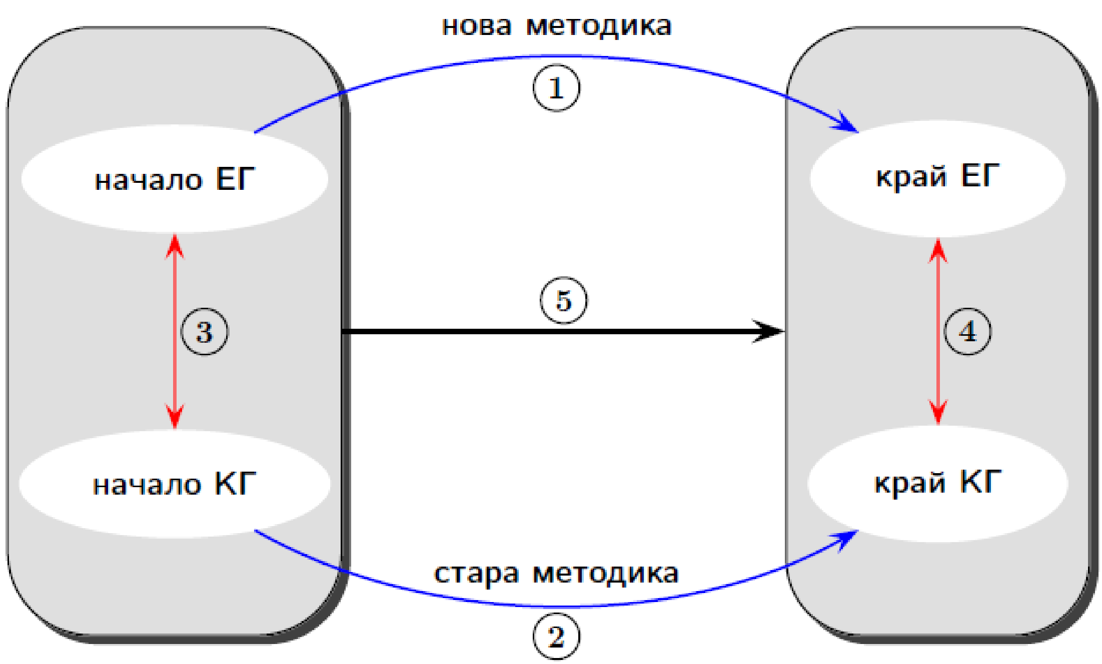
Въз основа на получените резултати при проверката за нормалност на извадките от Серии 2010, 2011, 2012, 2013 и 2014 в началото и края на експеримента, може категорично да се направи извод, че те **не** са нормално разпределени. Това налага използването на *непараметрични* методи при понататъшните изследвания.

3.1.3 Доказване ефективността на експерименталната методика

За проверка ефективността на експерименталната методика [43] се изследват връзки и се проверяват статистически хипотези за изследваните подсъвкупности на извадката [52, 71, 73, 79, 102].

Както бе установено в раздел 3.1.2 за петте серии на извадката, разпределенията на значенията на изследваните признаци за експерименталните и контролните групи **не** са нормално разпределени. Поради това, в раздел 3.1.3 за изследване на връзките между разглежданите признаци се използват *непараметрични* методи.

На фигура 3.6 е изобразена схема на изследването, която се прилага за доказване на ефективност на експерименталната методика за петте серии на извадката.



Фигура 3.6: Схема на изследване за ефективност на експерименталната методика

В процеса на статистически анализ за всяка серия експерименти, се решават следните основни задачи, фигура 3.6 [79]:

- Установяване на ефекта от прилаганите въздействия за всяка от групите:

  ① Установяване на ефекта от прилагането на **експерименталната методика** върху експерименталната група.

② Установяване на ефекта от прилагането на **традиционната методика** върху контролната група.

➻ Сравняване на ефективността на прилаганите въздействия в цялата серия на извадката по отношение на наблюдавания признак: „Нова/стара“ методика:

③ Проверка на статистическата значимост на различията в оценките на контролната и експерименталната групи в началото на експеримента - необходимо е да се установи липса на статистически значими различия, т.е. двете групи да имат „равен старт“.

④ Изследване на статистическа значимост на различията в оценките на контролната и експерименталната групи в края на експеримента.

⑤ Установяване на статистическа значимост на различията между прирастите на двете групи в края на експеримента. Това е най-важното сравнение по отношение на доказване на по-висока ефективност на експерименталната методика спрямо традиционната методика.

В процеса на изследване са използвани три непараметрични критерии: на Колмогоров-Смирнов, на Ман-Уитни и на Уилкоксън за проверка на значимост на връзките между признаците. Използват се променливите BEG012 и END03 за оценките в началото и края на експеримента, както и променлива razlika, равна на разликата между крайната и началната оценка.

Изследването е извършено със SPSS [24, 76, 77, 103, 146]. Извършени са по пет сравнения за всяка от петте серии на извадката.

3.1.3.1 Ефективност за Серия 2010

В таблици 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 и 3.17 са дадени средните стойности на разглежданите КГ и ЕГ за серия 2010 на извадката, стойностите на получените коефициенти, както и съответните нива на значимост при двустранна критична област (2-Tail Sig.), получени чрез SPSS с използване на посочените методи.

❶ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **експерименталната** група („нова методика“).

Изследването на различията в оценките на експерименталната група в началото и края на експеримента за Серия 2010 чрез непараметричния тест на Уилкоксън (Wilcoxon Signed Ranks Test) показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.13.

Серия 2010	Сравнение 1	n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilcoxon)
	ЕГ - начало	130	3.4692	1.14417	**-5.579**
	ЕГ - край	130	4.0077	0.9676	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**

Таблица 3.13: Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната група в началото и края на експеримента - Серия 2010

❷ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **контролната** група (традиционна методика) Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента за Серия 2010 чрез непараметричния тест на Уилкоксън (Wilcoxon Signed Ranks Test) показа, че между двете извадки *няма* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.908 > 0.05$), таблица 3.14

Серия 2010	Сравнение 2	n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilcoxon)
	КГ - начало	130	3.3538	1.0845	**-0.115**
	КГ - край	130	3.3308	0.94326	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.908**

Таблица 3.14: Непараметричен тест на различията в оценките за контролната група в началото и края на експеримента - Серия 2010 година

❸ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2010 в началото на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.637 > 0.05$ по теста на Колмогоров - Смирнов и 0.398>0.05 по теста на Ман - Уитни), таблица 3.15. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт“.

Серия	Сравнение 3	n	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
2010	ЕГ - начало	130	3.4692	1.14417	**0.744**	**-0.844**
	КГ - начало	130	3.3538	1.0845		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.637**	**0.398**

Таблица 3.15: Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната и контролната група в началото на експеримента - Серия 2010

❹ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2010 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.16.

Серия	Сравнение 4	n	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
2010	ЕГ - край	130	4.0077	1.21678	**3.225**	**-5.112**
	КГ - край	130	3.3308	0.94326		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.16: Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента - Серия 2010

❺ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - прираст на оценките по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2010 в края на експеримента

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.17.

Серия 2010	Сравнение 5	n	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
	ЕГ - прираст	130	0.5423	0.96254	**2.667**	**-5.204**
	КГ - прираст	130	-0.0308	0.81591		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.17: Непараметричен тест на различията в прираста на оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента- Серия 2010

Извод: Чрез задълбочен статистически анализ на данните за контролната и експерименталната групи за Серия 2010, са решени всички задачи според методиката на изследване на стр. 81 по схемата на изследване, изобразена на фигура 3.6, в резултат на което в раздел 3.1.3 е доказана ефективността на експерименталната методика за Серия 2010.

Аналогично на изследването за Серия 2010, са извършени изследванията и за останалите серии на извадката. Резултатите са дадени в съкратен вид, като са оформени изводи.

3.1.3.2 Ефективност за Серия 2011

❶ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **експерименталната** група.

Серия 2011		n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilc)
Сравнение 1	ЕГ - начало	230	2.8174	0.77158	**-11.087**
	ЕГ - край	230	4.0077	0.9676	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**
Сравнение 2	КГ - начало	230	2.8630	0.76048	**-5.49**
	КГ - край	230	3.1783	0.82455	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**

Таблица 3.18: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ в началото и края на експеримента за Серия 2011 година - сравнения 1 и 2

Изследването на различията в оценките на експерименталната група за серия 2011, в началото и края на експеримента чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.18.

❷ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **контролната** група.

Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента за серия 2011, чрез непараметричния тест на Уилкоксън (Wilcoxon Signed Ranks Test) показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.18.

❸ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2011 в началото на експеримента.

Серия 2011		n	Mean	Std. Dev.	z-value (K-S)	z-value (M-W)
Сравнение 3	ЕГ - начало	230	2.8174	0.77158	**-0.876**	**0.886**
	КГ - начало	230	2.8630	0.76048		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.381**	**0.413**
Сравнение 4	ЕГ - край	230	3.5261	0.71583	**2.098**	**-5.623**
	КГ - край	230	3.1783	0.82455		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**
Сравнение 5	ЕГ - прираст	230	0.7087	0.82455	**-3.928**	**1.912**
	КГ - прираст	230	0.3152	0.87891		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.19: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ за Серия 2011 - сравнения 3, 4 и 5

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за серия 2011 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни . Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт“, таблица 3.19.

❹ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2011 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.19.

❺ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - прираст на оценките по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2011 в края на експеримента.

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.19.

3.1.3.3 Ефективност за Серия 2012

❶ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **експерименталната** група („нова методика“).

Изследването на различията в оценките на експерименталната група за серия 2012, в началото и края на експеримента, чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.20.

❷ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **контролната** група.

Серия 2012		n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilc)
Сравнение 1	ЕГ - начало	270	2.9944	0.92817	**-11.898**
	ЕГ - край	270	3.9222	0.8028	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**
Сравнение 2	КГ - начало	270	2.9667	0.91497	**-0.132**
	КГ - край	270	2.9481	1.037	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.895**

Таблица 3.20: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ в началото и края на експеримента за Серия 2012 - сравнения 1 и 2

Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента за серия 2012 чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *няма* статистически значими различия, таблица 3.20.

❸ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2012 в началото на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за серия 2012 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт“, таблица 3.21.

Серия 2012		n	Mean	Std. Dev.	z-value (K-S)	z-value (M-W)
Сравнение 3	ЕГ - начало	270	2.9944	0.92817	**0.516**	**-0.353**
	КГ - начало	270	2.9667	0.91497		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.952**	**0.724**
Сравнение 4	ЕГ - край	270	3.9222	0.8028	**5.379**	**-11.867**
	КГ - край	270	2.9481	1.037		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**
Сравнение 5	ЕГ - прираст	270	0.9278	0.87157	**4.432**	**-10.917**
	КГ - прираст	270	-0.0185	0.91132		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.21: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ за Серия 2012 - сравнения 3, 4 и 5

❹ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2012 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.21.

❺ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - прираст на оценките по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2012 в края на експеримента.

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.21.

3.1.3.4 Ефективност за Серия 2013

❶ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **експерименталната** група.

Изследването на различията в оценките на експерименталната група, серия 2013, в началото и края на експеримента чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.000 < 0.05$), таблица 3.22.

❷ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **контролната** група (традиционна методика).

Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента за серия 2013 чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *няма* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е $0.111 > 0.05$), таблица 3.22.

Серия 2013		n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilc)
Сравнение 1	ЕГ - начало	189	2.9339	0.98641	**-10.948**
	ЕГ - край	189	3.9259	0.90202	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**
Сравнение 2	КГ - начало	186	2.9489	1.12169	**-1.592**
	КГ - край	186	3.0161	1.12695	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.111**

Таблица 3.22: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ в началото и края на експеримента за Серия 2013 - сравнения 1 и 2

❸ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2013 в началото на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за серия 2013 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт", таблица 3.23.

Серия 2013		n	Mean	Std. Dev.	z-value (K-S)	z-value (M-W)
Сравнение 3	ЕГ - начало	189	2.9339	0.98641	**0.488**	**-0.589**
	КГ - начало	186	2.9489	1.12169		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.971**	**0.556**
Сравнение 4	ЕГ - край	189	3.9259	0.90202	**3.911**	**-9.017**
	КГ - край	186	3.0161	1.12695		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**
Сравнение 5	ЕГ - прираст	189	0.9921	0.75702	**5.024**	**-10.457**
	КГ - прираст	186	0.0672	0.82005		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.23: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ за Серия 2013 - сравнение 3, 4 и 5

❹ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2013 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.23.

❺ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - прираст на оценките по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2013 в края на експеримента.

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.23.

3.1.3.5 Ефективност за Серия 2014

❶ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **експерименталната** група.

Изследването на различията в оценките на експерименталната група, серия 2014, в началото и края на експеримента чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия $(0.000 < 0.05)$, таблица 3.24.

❷ Непараметричен тест на различия на две **зависими** извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за **контролната** група.

Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента, за серия 2014, чрез непараметричния тест на Уилкоксън показа, че между двете извадки *има* статистически значими различия $(0.000 < 0.05)$, таблица 3.24

Серия 2014		n	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilc)
Сравнение 1	ЕГ - начало	130	2.6808	0.75227	**-6.054**
	ЕГ - край	130	3.3000	1.03167	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**
Сравнение 2	КГ - начало	134	2.6642	0.8289	**-3.559**
	КГ - край	134	2.4179	0.71817	
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**

Таблица 3.24: Непараметричен тест на различията в оценките на ЕГ и КГ в началото и края на експеримента за Серия 2014 - сравнения 1 и 2

❸ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2014 в началото на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за серия 2014 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт", таблица 3.25.

❹ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - оценки по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2014 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.25.

❺ Непараметричен тест на различия за две **независими** извадки - прираст на оценките по математика на **експерименталната група** и на **контролната група** за серия 2014 в края на експеримента.

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов и на Ман - Уитни. Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия, таблица 3.25.

Серия 2014		n	Mean	Std. Dev.	z-value (K-S)	z-value (M-W)
Сравнение 3	ЕГ - начало	130	2.6808	0.75227	**0.904**	**-0.624**
	КГ - начало	134	2.6642	0.8289		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.388**	**0.532**
Сравнение 4	ЕГ - край	130	3.3000	1.03167	**3.394**	**-7.647**
	КГ - край	134	2.4179	0.71817		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**
Сравнение 5	ЕГ - прираст	130	0.6192	0.02451	**4.398**	**-7.453**
	КГ - прираст	134	-0.2463	0.66814		
				Asymp. Sig. (2-tailed)	**0.000**	**0.000**

Таблица 3.25: Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2014 - сравнения 3, 4 и 5

Изводи за ефективността на експерименталната методика

Чрез задълбочен статистически анализ на данните за контролната и експерименталната групи за серии 2011, 2012, 2013 и 2014, са решени всички задачи според методиката на изследване [79] по схемата на изследване, изобразена на фигура 3.6 на стр. 81, в резултат на което в раздел 3.1.3 **е доказана** ефективността на експерименталната методика за всички серии на извадката.

В таблица 3.26 са обобщени резултатите от тези изследвания [43].

Сравнение	ЕГ край и начало	КГ край и начало	ЕГ и КГ начало	ЕГ и КГ край	ЕГ и КГ прираст	Доказана ефективност
2010	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна НМ
2011	има ЗР	има ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна НМ
2012	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна НМ
2013	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна НМ
2014	има ЗР	има ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна НМ

Таблица 3.26: Резултати от изследванията за значими различия (ЗР) в оценките на ЕГ и КГ за петте серии на извадката и изводи за ефективността на експерименталната методика (НМ)

3.1.4 Прогнозиране на резултатите от обучението чрез дискриминантен модел

В Раздел 3.1.4 чрез дискриминантен анализ [24, 75, 102] се изследват различията между изследваните обекти (студенти) по признака „Повишаване на успеха по математика“. Получен е дискриминантен модел [42], чрез който за всеки нов случай може да се определи с различна степен на увереност дали той ще си повиши успеха или не, ако бъде обучаван по експерименталната или традиционната методики.

В резултат на дискриминантния анализ се получава **дискриминантна функция** (модел), която има вида:

$$D = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n,$$

където

- $X_i,\ i = 1, \ldots, n$ са дискриминационни променливи;
- a - свободен член;
- $b_i,\ i = 1 \ldots n$ - коефициенти на дискриминантната функция.

С използване на получения дискриминантен модел, знаейки характеристиките на студент (нов случай, неучастващ в изследването), може да се определи с различна степен на увереност дали студентът ще си повиши успеха или не, със или без приложена „нова“ методика.

Построяването на модела включва следните изследователски етапи [75]:

① Избор на групираща (зависима) дискриминантна променлива.

② Избор и оценка на избора на дискриминационните променливи.

③ Построяване на дискриминантния модел и определяне на неговата точност и статистическа значимост.

④ Определяне на дискриминантен критерий.

⑤ Тълкуване на получените резултати.

За решаване на изследователските задачи се използва процедура Discriminant от менюто Classify на SPSS.

Tests of Equality of Group Means

	Wilks' Lambda	F	df1	df2	Sig.
Нова/стара методика	,975	49,150	1	1933	,000
Средна оценка ВМ1+2	,897	221,808	1	1933	,000
Факултет	,995	10,054	1	1933	,002
Специалност	,983	33,167	1	1933	,000
Пол	,995	9,234	1	1933	,002
Народност	,999	2,052	1	1933	,152
Форма на обучение	1,000	,056	1	1933	,814

Таблица 3.27: Оценка на дискриминационните променливи при дискриминантен анализ

❶ *Избор на групираща (зависима) дискриминантна променлива.*

Като дискриминантна променлива се въвежда „повишаване на успеха“ с две дихотомни стойности 0-не и 1-да;

❷ *Оценка на избора на дискриминационните променливи.*

За независими (дискриминационни) променливи се задават първоначално „нова/стара методика“, „оценка по ВМ12“, „пол“, „народност“, „факултет, “специалност“, „форма на обучение“. В процеса на анализа се установява, че за отличителни признаци на разглежданата съвкупност **не** могат да служат „форма на обучение“ и „народност“, затова те отпадат от разглеждане. От таблица 3.27 се определя кои от първоначално въведените дискриминационни променливи действително могат да служат като отличителни признаци за разделяне на разглежданата съвкупност. Оценката на избора на дискриминационните признаци се извършва чрез тест за равенство на средните стойности в групите чрез критерия Wilk's Lambda. Чрез него се проверява дали се различават значимо средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи. Построеният дискриминантен модел трябва да отразява точното разделяне на изследваните групи.

Като изходна хипотеза се издига H_0 : Средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи са равни. Верността на изходната хипотеза се определя от стойността на показателя Significance (Sig.) При това, нулевата хипотеза се приема, ако тестовата величина Sig. има стойност по-голяма от избрания риск за грешка (0.05) и съответната про-

Tests of Equality of Group Means

	Wilks' Lambda	F	df1	df2	Sig.
Нова/стара методика	,975	49,150	1	1933	,000
Средна оценка ВМ1+2	,897	221,808	1	1933	,000
Факултет	,995	10,054	1	1933	,002
Специалност	,983	33,167	1	1933	,000
Пол	,995	9,234	1	1933	,002

Таблица 3.28: Резултати от тест за значимост на различията в средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи

менлива следва да отпадне от анализа. Стойност на $Sig. < 0.05$ доказва погрешност на нулевата хипотеза и статистическа значимост на различията на средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи.

Тъй като признаците „форма на обучение“ и „народност“ не притежават необходимите дискриминиращи (разделителни) свойства - съответните им показатели по критерия Lambda Wilk's са по-големи от риска за грешка, следва те да отпаднат от анализа, таблица 3.27. След премахване на факторите, за които дискриминантната функция има незначими различия в средните стойности, като дискриминационни променливи се разглеждат 5 фактора: „нова/стара методика“, „средна оценка по ВМ12“, „факултет“, „специалност“ и „пол“, таблица 3.28.

❸ *Построяване на дискриминантния модел и определяне на неговата точност и статистическа значимост.*

Построяването на дискриминантния модел се състои в изчисляване и анализ на коефициентите на дискриминантната функция. Полученият модел трябва максимално точно да разделя изследваните групи. Качеството на построения дискриминантен модел се анализира чрез данните в таблици 3.29 и 3.30.

Качеството на модела се измерва чрез стойността на каноничния коефициент на корелация (Canonical correlation) между изчислените стойности на дискриминантната функция и реалната принадлежност на случаите към отделните групи, таблица 3.29. Получената стойност на този коефициент 0.371 показва, че е налице умерена корелация.

Eigenvalues

Function	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %	Canonical Correlation
1	,160[a]	100,0	100,0	,371

Таблица 3.29: Изследване качеството на модела при дискриминантен анализ

Показателят Wilk's Lambda (таблица 3.30) се използва за проверка на теста за значимост на различията на средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи. В случая неговата стойност 0.862 е значима ($Sig. = 0.000$), което показва висока значимост на различията на средните стойности на дискриминантната функция в групите.

Wilks' Lambda

Test of Function(s)	Wilks' Lambda	Chi-square	df	Sig.
1	,862	286,262	5	,000

Таблица 3.30: Тест за значимост на различията на средните стойности на дискриминантната функция в групите

Изчислените коефициенти на дискриминантната функция, се използват за построяване на **дискриминантния модел**, таблица 3.31 (a):

$$D = -0.79588X_1 + 0.95650X_2 - 0.08836X_3 + 0.08159X_4 + 0.23670X_5 - 2.76278, \quad (3.1)$$

където:

- D е дискриминантна функция, показваща дали успехът се повишава или не;
- X_1 е „нова/стара методика“;
- X_2 е „оценка по Висша математика 1 и 2“;
- X_3 е „факултет“;
- X_4 е „специалност“;
- X_5 е „пол“.

❹ *Определяне на дискриминантен критерий*

Важен етап от дискриминантния анализ е определянето на **дискриминантния критерий** [75] за принадлежност на отделен случай към всяка от групите, т.е. определяне за какви стойности на функцията D може да се твърди (с определена степен на увереност), че успехът на нов студент ще се повиши и съответно - за какви стойности на D можем да твърдим, че успехът няма да се повиши.

Canonical Discriminant Function Coefficients

	Function
	1
Нова/стара методика	-,79588
Средна оценка ВМ1+2	,95650
Факултет	-,08836
Специалност	,08159
Пол	,23670
(Constant)	-2,76278

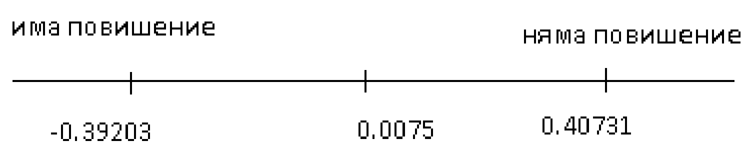
(а)

Functions at Group Centroids

	Function
Увеличаване на успеха	1
няма повишение на успеха	,40731
има повишение на успеха	-,39203

Unstandardized canonical discriminant functions evaluated at group means

(б)

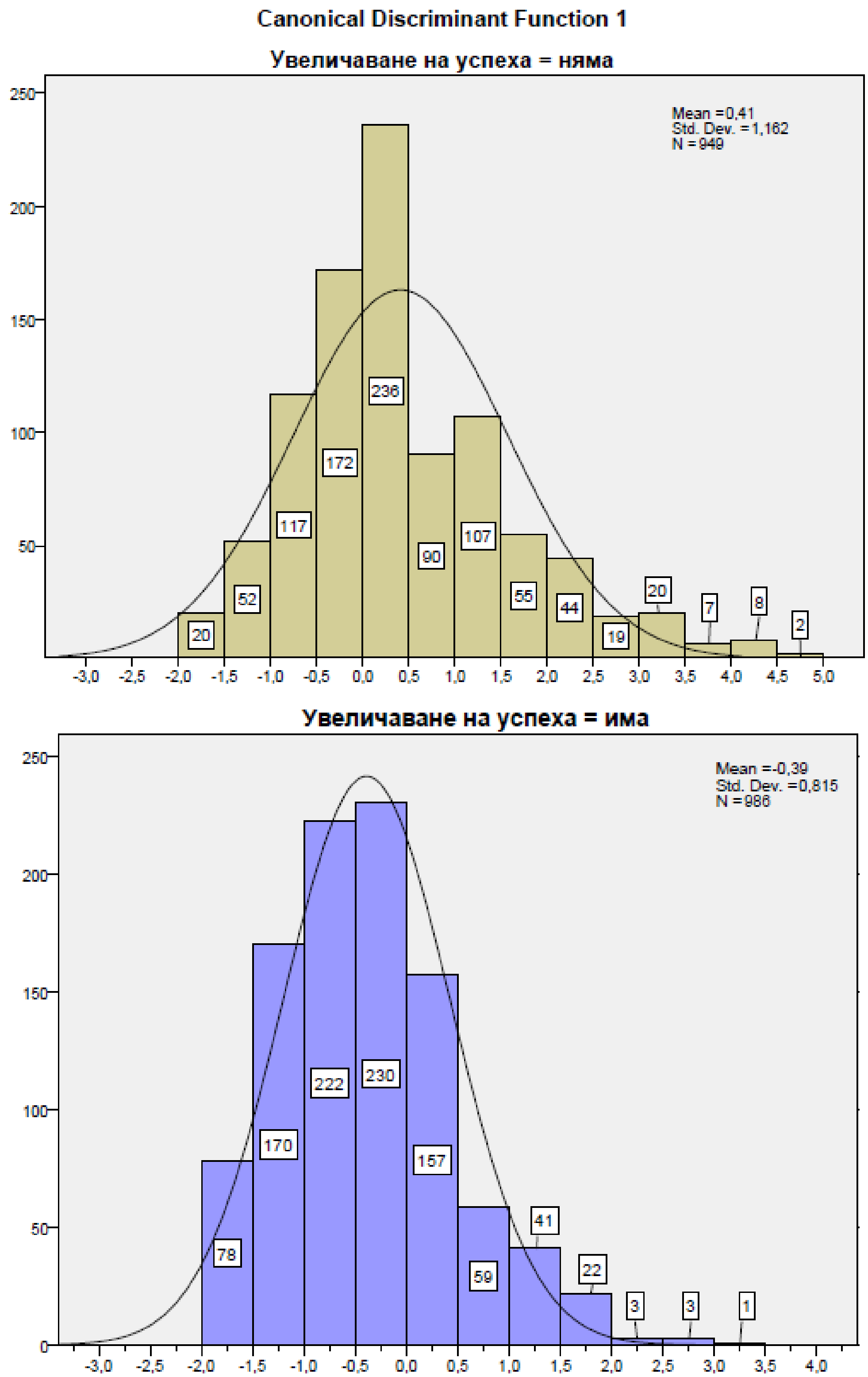


(в)

Таблица 3.31: Канонични коефициенти и групови центроиди на дискриминантния модел

За определяне на дискриминантния критерий се използват груповите центроиди, т.е. средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи, таблица 3.31 (б). Въз основа на тези стойности се построяват интервалите, които показват принадлежност на нов случай към едната или другата група, таблица 3.31 (в). В случая, отрицателните стойности на D показват повишаване на успеха.

Точността на различията между изследваните групи зависи и от разсейването на стойностите в изследваните групи. Това разсейване се определя при анализ на хистограмите на разпределението на дискриминантната функция, фигури 3.7 (а) и (б).



Фигура 3.7: Хистограми на разпределението на дискриминантната функция

За точно определяне на съответствието между стойност на дискриминантната функция, групова принадлежност и вероятност на прогнозата, се използват съхранените чрез Save променливи на дискриминантния анализ.

❺ *Тълкуване на получените резултати.*

Полученият дискриминантен модел (3.1) се използва за прогнозиране [75] на резултатите от обучението с традиционна или експериментална методика за всеки нов студент, за който знаем средната оценка по Висша математика 1 и 2, факултет, специалност и пол.

В таблици 3.32, 3.33, 3.34, 3.35, 3.36 са дадени стойностите на дискриминантната функция, прогнози за това дали студентът ще си повиши успеха или не, както и съответните им вероятности (степен на увереност) за различни категории студенти от специалности КСТ, КТТ, КУА, Е, ЕЕЕО от ФЕЕО, обучавани с различен тип методика.

Чрез дискриминантния модел (3.1) са получени стойностите на дискриминантната функция и са направени прогнози [42] за повишаване на успеха (и съответните им вероятности) за студенти *от всички факултети и специалности*. Получените резултати са аналогични с тези за факултет ЕЕА, дадени в таблици 3.32, 3.33, 3.34, 3.35, 3.36.

Изводи: На базата на получените резултати *от дискриминантния анализ*, таблици 3.32, 3.33, 3.34, 3.35 и 3.36 авторът направи следните изводи:

- Наблюдава се ясно очертаваща се тенденция в полза на „нова методика“ по отношение на повишаване на успеха. Във всяка от групите, повишаване на успеха се наблюдава 2-3 пъти по-често при студенти, обучавани по експерименталната методика, отколкото при тези, обучавани по традиционната методика. Например, мъжете от специалности КСТ и Електроника в 4 от 8 случая повишават успеха си ако се обучават по „нова методика“, докато ако бъдат обучавани по „стара методика“ едва в 2 от 8 случая се очаква да се повиши успеха и то само за оценки от 2 до 2.50.

- В случаите на прогноза за повишаване на успеха, вероятностите за това са по-високи при обучени по „нова методика“, отколкото съответните вероятности за увеличаване на успеха при обучение по „стара методика“. Това означава, че студент, обучен по експерименталната методика

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.3557	−0.8775	−0.3992	0.0790	0.5572	1.0355	1.5138	1.992
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	75%	67%	58%	51%	60%	69%	77%	83%

(а) Експериментална методика, жени, спец. КСТ

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.5599	−0.0816	0.3966	0.8749	1.3531	1.8314	2.3096	2.7879
Повишение	има	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	61%	52%	58%	67%	75%	81%	86%	90%

(б) Традиционна методика, жени, спец. КСТ

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.5924	−1.1142	−0.6359	−0.1577	0.3205	0.7988	1.2771	1.7553
Повишение	има	има	има	има	няма	няма	няма	няма
Увереност	78%	71%	63%	53%	56%	65%	73%	80%

(в) Експериментална методика, мъже, спец. КСТ

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.7966	−0.3183	0.1599	0.6382	1.1164	1.5947	2.0729	2.5512
Повишение	има	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	66%	56%	53%	62%	71%	78%	84%	88%

(г) Традиционна методика, мъже, спец. КСТ

Таблица 3.32: Стойности на дискриминантната функция D, прогноза за повишаване на успеха по **„нова“** и **„стара“** методика и степен на увереност (%) за мъже и жени, спец. КСТ, фак. ЕЕА

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.2742	−0.7959	−0.3177	0.1606	0.6388	1.1171	1.5953	2.0736
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	74%	66%	56%	53%	62%	71%	78%	84%

(а) Експериментална методика, жени, спец. Електроника

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.4783	0.000003	0.4782	0.9565	1.4347	1.9130	2.3912	2.8695
Повишение	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	59%	50%	59%	68%	76%	82%	87%	90%

(б) Традиционна методика, жени, спец. Електроника

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.5109	−1.0326	−0.5544	−0.0761	0.4021	0.8804	1.3586	1.8369
Повишение	има	има	има	има	няма	няма	няма	няма
Увереност	77%	70%	61%	52%	58%	67%	75%	81%

(в) Експериментална методика, мъже, спец. Електроника

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.7150	−0.2367	0.2415	0.7198	1.1980	1.6763	2.1545	2.6328
Повишение	има	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	64%	55%	55%	64%	72%	79%	85%	89%

(г) Традиционна методика, мъже, спец. Електроника

Таблица 3.33: Стойности на дискриминантната функция D, прогноза за повишаване на успеха по **„нова“** и **„стара“** методика и степен на увереност (%) за мъже и жени, спец. Електроника, фак. ЕЕА

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.1926	−0.7143	−0.2361	0.2422	0.7204	1.1987	1.6769	2.1552
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	72%	64%	55%	55%	64%	72%	79%	85%

(а) Експериментална методика, жени, спец. КТТ

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.3967	0.0816	0.5598	1.0381	1.5163	1.9946	2.4728	2.9511
Повишение	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	58%	51%	61%	69%	77%	83%	87%	91%

(б) Традиционна методика, жени, спец. КТТ

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.4293	−0.9510	−0.4728	0.0055	0.4837	0.9620	1.4402	1.9185
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	76%	68%	59%	50%	59%	68%	76%	82%

(в) Експериментална методика, мъже, спец. КТТ

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.6334	−0.1551	0.3231	0.8014	1.2796	1.7579	2.2361	2.7144
Повишение	има	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	63%	53%	56%	65%	73%	80%	86%	90%

(г) Традиционна методика, мъже, спец. КТТ

Таблица 3.34: Стойности на дискриминантната функция D, прогноза за повишаване на успеха по **„нова“** и **„стара“** методика и степен на увереност (%) за мъже и жени, спец. КТТ, фак. ЕЕА

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.1110	−0.6327	−0.1545	0.3238	0.8020	1.2803	1.7585	2.2368
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	71%	63%	53%	56%	65%	73%	80%	86%

(а) Експериментална методика, жени, спец. КУА

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.3151	0.1632	0.6414	1.1197	1.5979	2.0761	2.5544	3.0326
Повишение	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	56%	53%	62%	71%	78%	84%	88%	92%

(б) Традиционна методика, жени, спец. КУА

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−1.3477	−0.8694	−0.3912	0.0871	0.5653	1.0436	1.5218	2.0001
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	75%	67%	58%	52%	61%	70%	77%	83%

(в) Експериментална методика, мъже, спец. КУА

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	−0.5518	−0.0735	0.4047	0.8830	1.3612	1.8394	2.3177	2.7959
Повишение	има	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	61%	52%	58%	67%	75%	81%	86%	90%

(г) Традиционна методика, мъже, спец. КУА

Таблица 3.35: Стойности на дискриминантната функция D, прогноза за повишаване на успеха по **„нова“** и **„стара“** методика и степен на увереност (%) за мъже и жени, спец. КУА, фак. ЕЕА

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	-1.0294	-0.5511	-0.0729	0.4054	0.8836	1.3619	1.8401	2.3184
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	70%	61%	52%	58%	67%	75%	81%	86%

(а) Експериментална методика, жени, спец. ЕЕЕО

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	-0.2335	0.2447	0.7230	1.2012	1.6795	2.1577	2.6360	3.1142
Повишение	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	55%	55%	64%	72%	79%	85%	89%	92%

(б) Традиционна методика, жени, спец. ЕЕЕО

„Нова“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	-1.2661	-0.7878	-0.3096	0.1687	0.6469	1.1252	1.6034	2.0817
Повишение	има	има	има	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	73%	65%	56%	53%	63%	71%	78%	84%

(в) Експериментална методика, мъже, спец. ЕЕЕО

„Стара“ методика	Средна оценка по Висша математика 1 и 2							
	2	2.50	3	3.50	4	4.50	5	5.50
D	-0.4702	0.0080	0.4863	0.9645	1.4428	1.9210	2.3993	2.8775
Повишение	има	няма	няма	няма	няма	няма	няма	няма
Увереност	59%	50%	60%	68%	76%	82%	87%	90%

(г) Традиционна методика, мъже, спец. ЕЕЕО

Таблица 3.36: Стойности на дискриминантната функция D, прогноза за повишаване на успеха по **„нова“** и **„стара“** методика и степен на увереност (%) за мъже и жени, спец. ЕЕЕО, фак. ЕЕА е по-вероятно да повиши успеха си, отколкото ако се обучава по „стара методика“.

- В случаите на прогноза за липса на повишение на успеха, вероятностите за това са по-ниски при обучени по „нова методика“, отколкото съответните вероятности за липса на повишение на успеха при обучение по „стара методика“. Това означава, че студент, обучен по експерименталната методика е по-малко вероятно да не повиши успеха си, отколкото ако се обучава по „стара методика“.

- Като се използват хистограмите на дискриминантната функция, фигура 3.7, може да се направи извод, че за студенти с еднакви характеристики, например при определена стойност на $D \in [-1.5; -1]$, броят на случаите, в които успехът се повишава (170 или 17% от всички, при които има повишение) е над 3 пъти по-голям от студентите със същите характеристики (52 случая или 5% от всички без повишение), които не повишават успеха си.

3.1.5 Изследване на зависимости и връзки между признаци чрез класификационни дървета

Методът **класификационни дървета** се използва за изследване на връзки и вземане на решения в условия на риск, като е възможно да се изследват както количествени, така и качествени признаци и комбинация от тях [75, 76, 102].

На всеки етап съвкупността се разделя на подсъвкупности. Методът търси връзки между всички фактори поотделно и резултата. Ако факторът е качествен, методът търси връзки както поотделно между отделните категории на фактора, така и между съвкупности от неговите категории, така че да се открие най-силната възможна връзка. Ако факторът е количествен, то интервалът на изменение на фактора се разделя на подинтервали и се измерва силата на връзките за отделните интервали, след което се обединяват съседни интервали и отново се търси най-силната връзка. В резултат, методът „класификационни дървета“:

1. Открива всички фактори (количествени и качествени), които влияят на резултата и отхвърля тези, които не влияят.

2. Подрежда факторите, които влияят на резултата по важност и ги структурира във вид на дърво от най-важните (1 ниво) към по-маловажните.

3. Оформя „положителна“ и „отрицателна“ целеви групи, в които разглежданият признак има съответно най-висока и най-ниска стойност.

В раздел 3.1.5 се използват методите CHAID (Chi-squared Automatic Interaction Detection) и Exhaustive CHAID (пълен CHAID) за изследване на връзки между различни признаци, с цел - доказване на предимствата на експерименталната методика при обучението на студентите от различни факултети и специалности, редовна и задочна форма на обучение [44].

3.1.5.1 Класифициране на признака „окончателна оценка“ според факторите „методика“, „форма на обучение“ и „средна оценка по ВМ12“

Изследването на извадката с метода Exhaustive CHAID по признака „окончателна оценка“ показа, че факторът, оказващ най-силно влияние върху окончателната оценка е средната оценка по Висша математика 1 и 2, следван от типа методика и формата на обучение, фигура 3.8, таблица 3.37.

Model Summary

Specifications	Growing Method	EXHAUSTIVE CHAID
	Dependent Variable	Окончателна оценка
	Independent Variables	Нова/стара методика, Форма на обучение, Средна оценка ВМ1+2
	Validation	None
	Maximum Tree Depth	3
	Minimum Cases in Parent Node	100
	Minimum Cases in Child Node	50
Results	Independent Variables Included	Средна оценка ВМ1+2, Нова/стара методика, Форма на обучение
	Number of Nodes	23
	Number of Terminal Nodes	13
	Depth	3

(а)

Gain Summary for Nodes

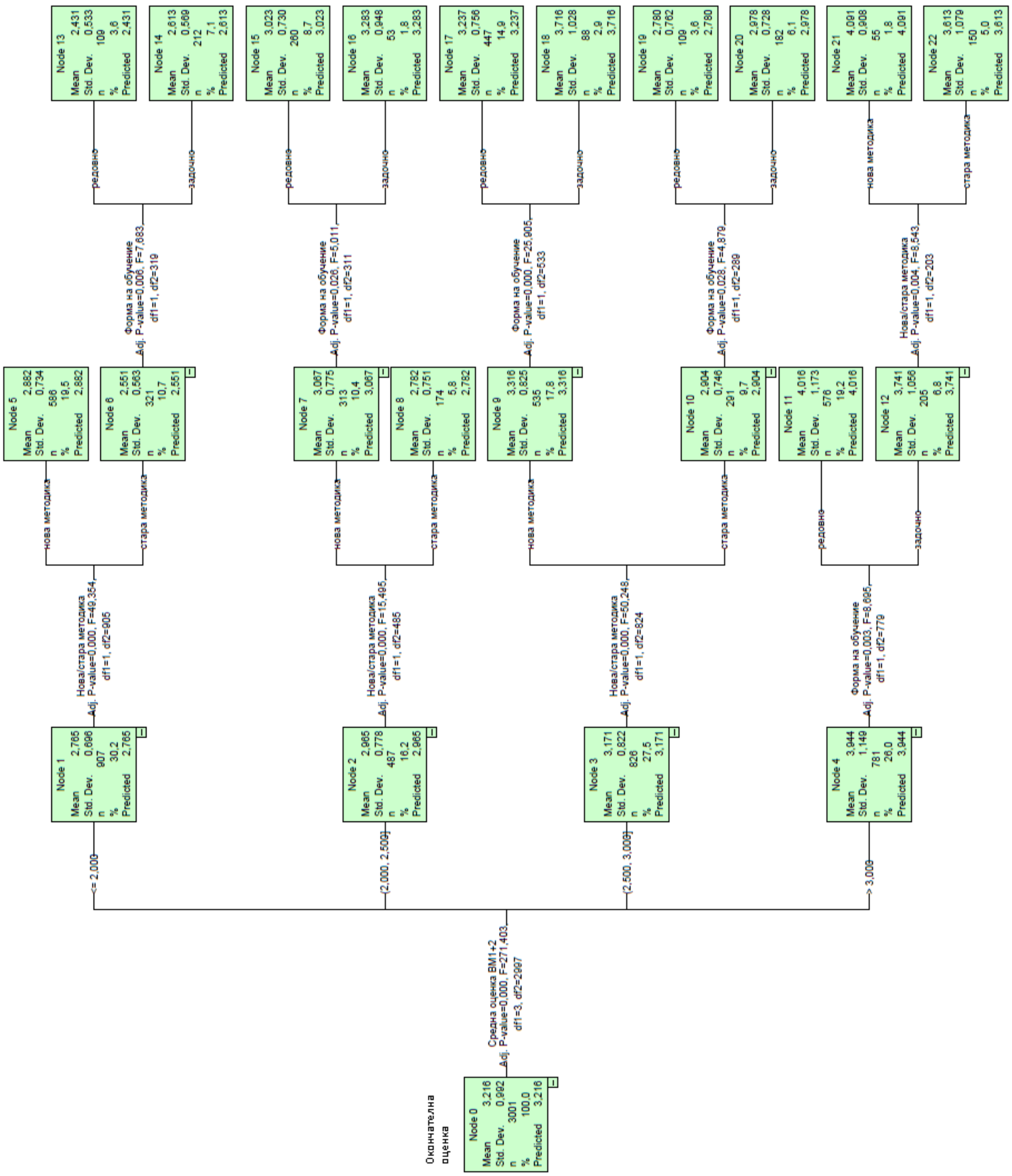
Node	N	Percent	Mean
21	55	1,8%	4,0909
11	576	19,2%	4,0156
18	88	2,9%	3,7159
22	150	5,0%	3,6133
16	53	1,8%	3,2830
17	447	14,9%	3,2371
15	260	8,7%	3,0231
20	182	6,1%	2,9780
5	586	19,5%	2,8823
8	174	5,8%	2,7816
19	109	3,6%	2,7798
14	212	7,1%	2,6132
13	109	3,6%	2,4312

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID
Dependent Variable: Окончателна оценка

(б)

Таблица 3.37: Описание на модела - класификационно дърво на признака „окончателна оценка“ според „методика“, „средна оценка по ВМ12“ и „форма на обучение“

Анализът на получените резултати, фигура 3.8, показва, че според признака „окончателна оценка“ от извадката се оформя класификационно дърво на три



Фигура 3.8: Класификационно дърво на признака „окончателна оценка“ според факторите „методика“, „средна оценка по ВМ12“ и „форма на обучение“

нива, което включва общо 23 възела, от които 13 са крайни, таблица 3.37 (а). Най-силен фактор е оценката по Висша математика 1 и 2; следващи по важност са факторите „методика“ и „форма на обучение“.

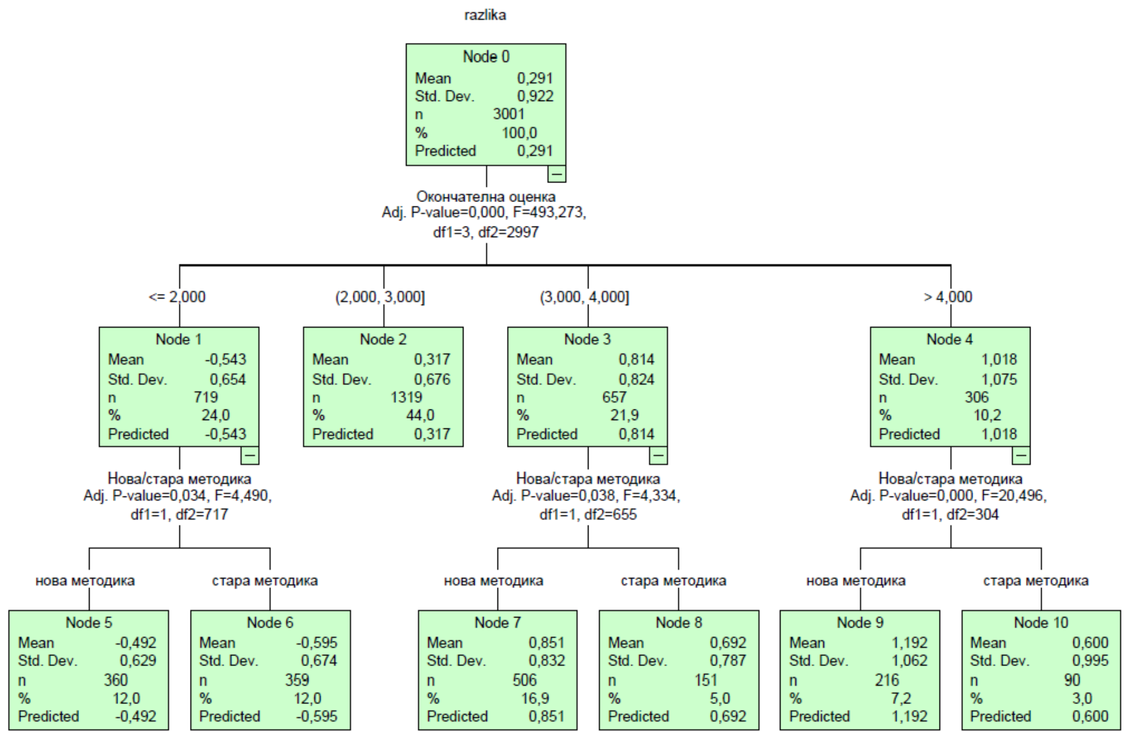
За всички възли, получени според признака „методика“, се наблюдават по-високи стойности на средната оценка при студентите, обучени по експерименталната методика в сравнение с обучените по традиционната методика. Например, средната стойност на оценките за възел 5 (2.882) е по-голяма от тази за възел 6 (2.551); средната стойност за възел 7 (3.067) е по-висока от тази за възел 8 (2.782); за възел 9 средната стойност е 3.316 при средна стойност за 10-ти възел 2.904; за възел 21 тя е 4.091 при средна стойност за задочни студенти по „стара методика“ 3.613. Прави впечатление също, че средните стойности на оценките на студентите задочно обучение е винаги по-висока от средната оценка на редовните студенти.

Анализът на резултатите в таблица 3.37 (б) показва как са класифицирани възлите на дървото според техните средни стойности и кои са целевите групи в изследваната съвкупност. „Положителната“ целева група, постигнала най-висок резултат е групата на задочни студенти с оценки над среден, обучени по „нова методика“ (средна стойност 4.091), а „отрицателната“ целева група, с най-нисък резултат, е от редовни студенти, обучени по „стара методика“. Подреждането на възлите според нивата на средните стойности на оценките показва тенденция на по-високи резултати за обучените по експерименталната методика. Анализът на таблица 3.37 показва, че за възли с номера 21, 18, 16, 17, 15 са постигнати високи резултати при обучение по експерименталната методика, а за възли с номера 20, 8, 19, 14 и 13 са постигнати ниски резултати по „стара методика“.

Извод: Фактите, изложени в раздел 3.1.5.1 доказват, че експерименталната методика е решаващ фактор при формиране на окончателната оценка, тъй като води до значително по-високи средни стойности на окончателната оценка за студенти, обучени по експерименталната методика спрямо тези, обучавани по традиционната методика.

3.1.5.2 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“ и „окончателна оценка“

Изследването на съвкупността от изследваните случаи с метода CHAID по признака „разлика в оценките“ показа наличие на силна връзка на признака с факторите „тип на приложената методика“ и „окончателна оценка по Висша математика 3", фигура 3.9, таблица 3.38.



Фигура 3.9: Класификационно дърво на признака „разлика" според факторите „методика" и „окончателна оценка"

Анализът на получените резултати, фигура 3.9, показва, че според признака „разлика в оценките" от съвкупността се оформя класификационно дърво на две нива, което включва общо 11 възела, от които 7 са крайни възли. На първо ниво са оценките по Висша математика 3, разделени в хомогенни групи, от които се получават нови възли от второ ниво според типа на приложената методика. За групи, в които се наблюдава повишение на успеха, средните стойности за „нова методика" са по-високи от тези по „стара методика", а за групи, в които се наблюдава спад в оценките, по-голям спад има при обучение по „стара методика". Прави впечатление, че средните стойности на повишението в оценките по „нова" методика (0.851 за възел 7 и 1.192 за възел 9) са значително по-високи от средната стойност на разликата в оценките за цялата извадка (0.291 за възел 0).

Анализът на резултатите от таблица 3.38 (б) показва как са класифицирани групите според техните резултати и кои са целевите групи в изследваната съвкупност. „Положителната" целева група, постигнала най-висок резултат, е обучена по „нова" методика (средна стойност 1.192), а „отрицателната" целева

Model Summary

Specifications	Growing Method	CHAID
	Dependent Variable	razlika
	Independent Variables	Нова/стара методика, Окончателна оценка
	Validation	None
	Maximum Tree Depth	3
	Minimum Cases in Parent Node	100
	Minimum Cases in Child Node	50
Results	Independent Variables Included	Окончателна оценка, Нова/стара методика
	Number of Nodes	11
	Number of Terminal Nodes	7
	Depth	2

(а)

Gain Summary for Nodes

Node	N	Percent	Mean
9	216	7,2%	1,1921
7	506	16,9%	,8508
8	151	5,0%	,6921
10	90	3,0%	,6000
2	1319	44,0%	,3165
5	360	12,0%	-,4917
6	359	12,0%	-,5947

Growing Method: CHAID
Dependent Variable: razlika

(б)

Таблица 3.38: Описание на модела - класификационно дърво на признака „разлика“ според „методика“ и „окончателна оценка“

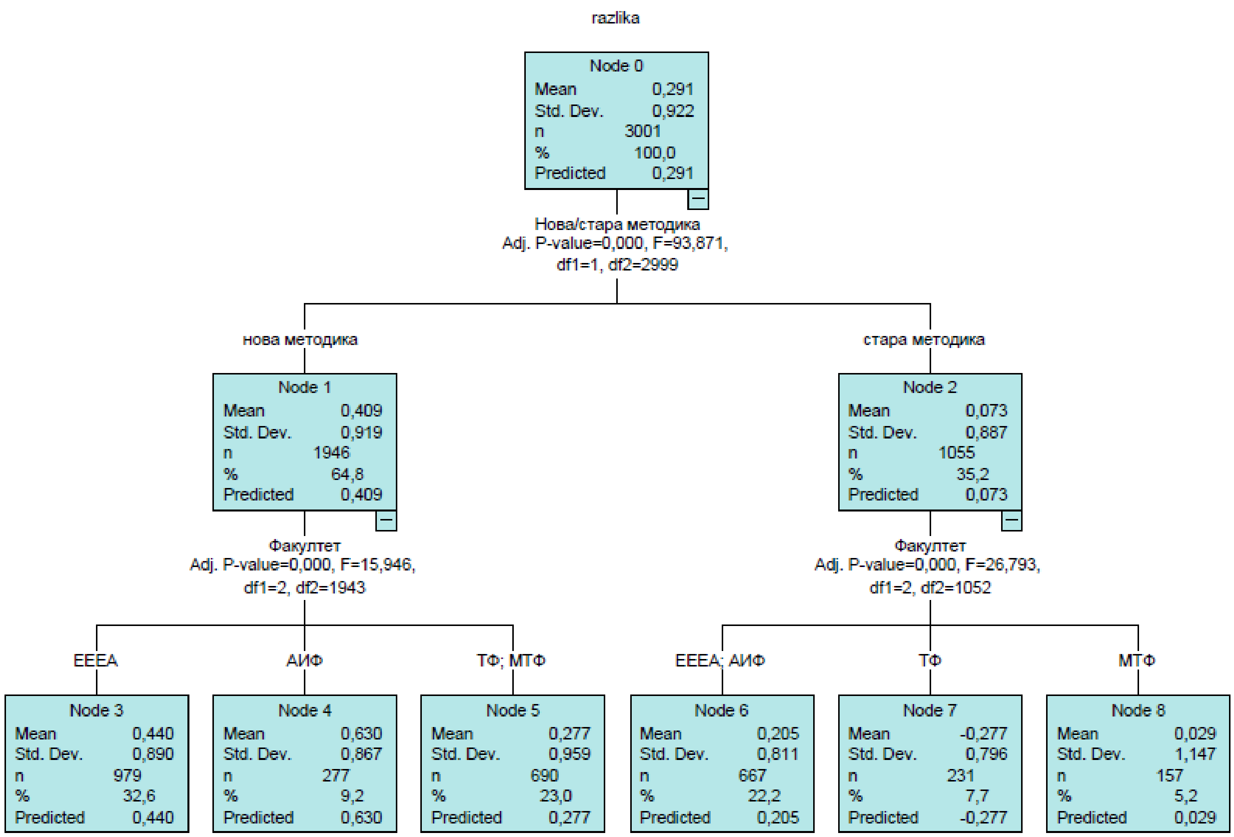
група, с най-нисък резултат, е обучена по „стара методика“.

Извод: Фактите, изложени в раздел 3.1.5.2 показват, че експерименталната методика е решаващ фактор при обучението, тъй като води до значително повишаване на успеха по Висша математика на обучаваните по експерименталната методика спрямо тези, обучавани по традиционната методика.

3.1.5.3 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“ и „факултет“

В раздел 3.1.5.3 е изследвано как факторите „методика“ и „факултет“ влияят на признака „разлика в оценките“ на изследваната съвкупност. Изследването е направено чрез метода Exhaustive CHAID и в резултат е получено класификационно дърво, фигура 3.10 и таблица 3.39.

Анализът на получените резултати показва, че според признака „разлика в оценките“ от съвкупността се оформя класификационно дърво на две нива, което включва общо 8 възела, от които 6 са крайни възли, фигура 3.10. На първо ниво (най-силен фактор) е типа на методиката, а на второ ниво е факторът „факултет“. Ясно се вижда, че обучението по „нова методика“ поражда възли, в които разликата в оценките е с положителен знак със стойности, значително по-високи от тези за обучените по традиционната методика. Например, средната стойност на повишението в оценките по „нова методика“ е 0.409 (възел 1), а за „стара методика“ това повишение е едва 0.073 (възел 2).



Фигура 3.10: Класификационно дърво на признака „разлика“ според факторите „методика“ и „факултет“

Аналогична тенденция се забелязва и за отделните факултети: във възли с номера 3, 4 и 5, породени от възел 1 („нова методика“), средните стойности са съответно 0.44, 0.63, 0.277, а за възли с номера 6, 7 и 8, породени от възел 2 („стара методика“) средните стойности са съответно 0.205, -0.277 и 0.029.

Анализът на резултатите от таблица 3.39 (б) показва, че с най-високи средни стойности са групите, обучени по експерименталната методика (възли 3, 4 и 5), а най-ниско повишение има за групите, обучени по „стара методика“ (възли 6, 7 и 8). „Положителната“ целева група е тази на студенти от факултет ЕЕА, обучени по „нова методика“ и получили средно повишение на оценката 0.44, а „отрицателната“ целева група е на студентите от ТФ, обучени по „старата методика“, които са си намалили оценката средно с 0.2771 единици.

Сравняването на средните стойности по факултети показва, че: (1) повишаването на успеха за студентите от ЕЕА по „нова методика“ е два пъти по-голямо спрямо студентите от същия факултет, обучени по „стара методика“; (2) студентите от факултет МТФ повишават успеха си 10 пъти повече ако се

Tree Table

Node	Primary Independent Variable: Variable	Sig.	F	df1	df2	Split Values
0						
1	Нова/стара методика	,000	93,871	1	2999	нова методика
2	Нова/стара методика	,000	93,871	1	2999	стара методика
3	Факултет	,000	15,946	2	1943	ЕЕЕА
4	Факултет	,000	15,946	2	1943	АИФ
5	Факултет	,000	15,946	2	1943	ТФ; МТФ
6	Факултет	,000	26,793	2	1052	ЕЕЕА; АИФ
7	Факултет	,000	26,793	2	1052	ТФ
8	Факултет	,000	26,793	2	1052	МТФ

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID
Dependent Variable: razlika

(а)

Gain Summary for Nodes

Node	N	Percent	Mean
4	277	9,2%	,6300
3	979	32,6%	,4402
5	690	23,0%	,2768
6	667	22,2%	,2046
8	157	5,2%	,0287
7	231	7,7%	-,2771

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID
Dependent Variable: razlika

(б)

Таблица 3.39: Описание на модела - класификационно дърво на признака „разлика“ според „методика“ и „факултет“

обучават по „нова методика“ спрямо студентите от същия факултет, обучени по „стара методика“; (3) за АИФ това повишение е 3 пъти по-високо спрямо обучените по „стара методика“; (4) за студентите от ТФ при обучение по „нова методика“ се наблюдава повишение, а по „стара методика“ има понижение на успеха.

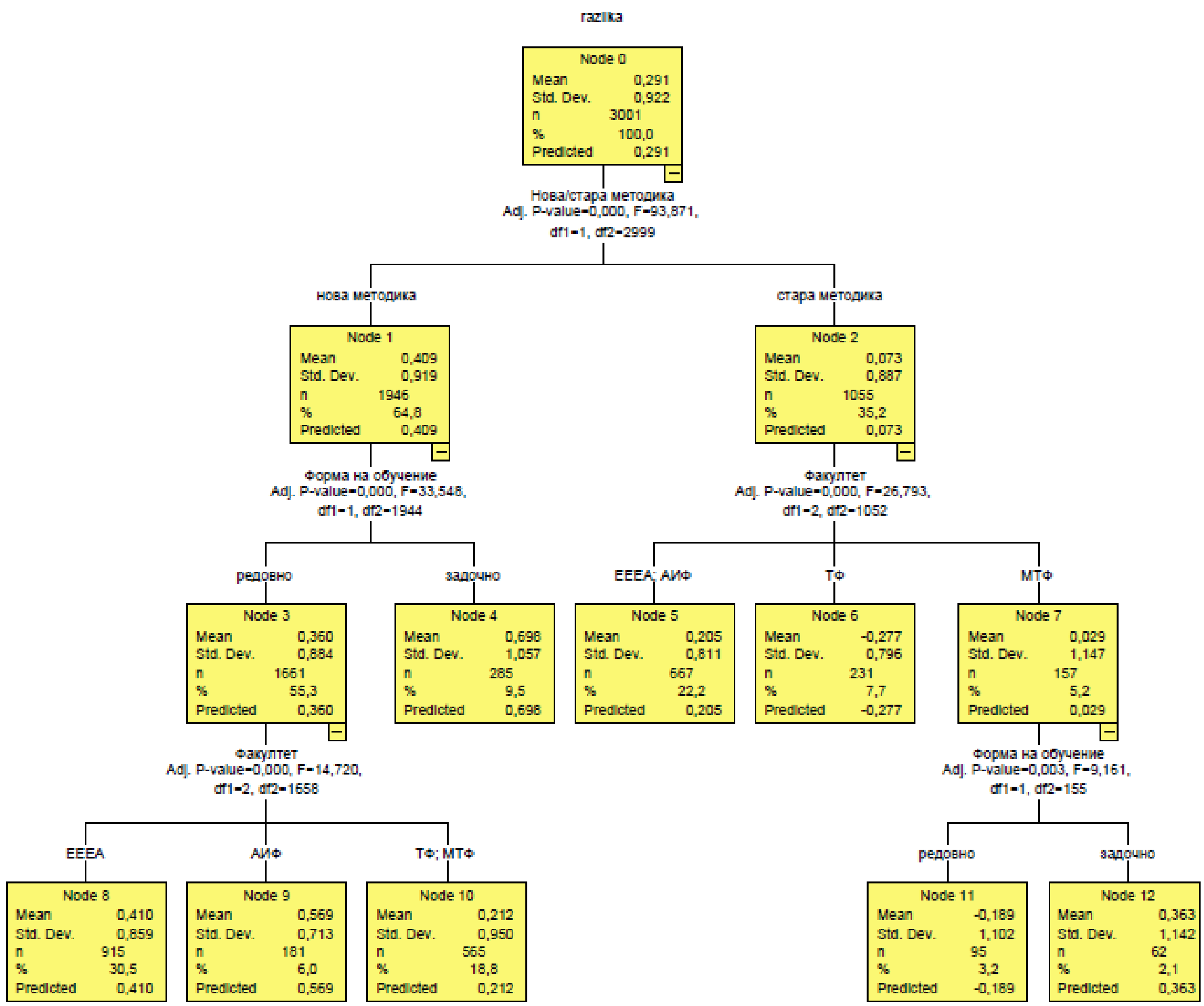
Извод: Фактите, изложени в раздел 3.1.5.3 показват, че експерименталната методика е решаващ фактор при обучението на студентите от различни факултети и води до повишаване на успеха на студентите от всички факултети, докато обучаваните по традиционната методика показват по-слабо повишение и дори в някои случаи намаляват успеха си.

3.1.5.4 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“, „факултет“ и „форма на обучение“

В раздел 3.1.5.4 е направено допълнително изследване на зависимостите, разгледани в раздел 3.1.5.3 като е добавен допълнителен фактор „форма на обучение“.

Изследването е направено чрез метода Exhaustive CHAID и в резултат е получено класификационно дърво, фигура 3.11 и таблица 3.40.

Анализът на получените резултати е аналогичен на анализа в раздел 3.1.5.3, но тук дървото има 3 нива и по-ясно се разграничават тенденциите за увеличаването на успеха по отношение на фактора „форма на обучение“. Ясно очертана е следната закономерност, наблюдавана и при анализа в раздел 3.1.5.1.



Фигура 3.11: Класификационно дърво на признака „разлика“ според факторите „форма“, „методика“ и „факултет“

Формата на обучение е важен фактор, на второ ниво по значимост след „методика“ при обучение по „нова методика“, следван от фактора „факултет“. При това, за студенти в задочна форма, обучени по „нова методика“, повишението на оценките има статистически равни стойности в отделните факултети, т.е. факултетът не е фактор за студенти задочно обучение, обучени по експерименталната методика.

Както и в раздел 3.1.5.3, тук също се наблюдават значително по-високи средни стойности за групи, обучени по „нова методика“: възли 4, 8, 9, 10 имат значително по-високи средни стойности от тези за възли 5, 6, 7, 11 („стара методика“). Вижда се също, че задочните студенти от факултет МТФ, обучени по „стара методика“ постигат почти идентични резултати с редовни

Model Summary

Specifications	Growing Method	EXHAUSTIVE CHAID
	Dependent Variable	razlika
	Independent Variables	Нова/стара методика, Факултет, Форма на обучение
	Validation	None
	Maximum Tree Depth	3
	Minimum Cases in Parent Node	100
	Minimum Cases in Child Node	50
Results	Independent Variables Included	Нова/стара методика, Форма на обучение, Факултет
	Number of Nodes	13
	Number of Terminal Nodes	8
	Depth	3

Gain Summary for Nodes

Node	N	Percent	Mean
4	285	9,5%	,6982
9	181	6,0%	,5691
8	915	30,5%	,4098
12	62	2,1%	,3629
10	565	18,8%	,2115
5	667	22,2%	,2046
11	95	3,2%	-,1895
6	231	7,7%	-,2771

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID
Dependent Variable: razlika

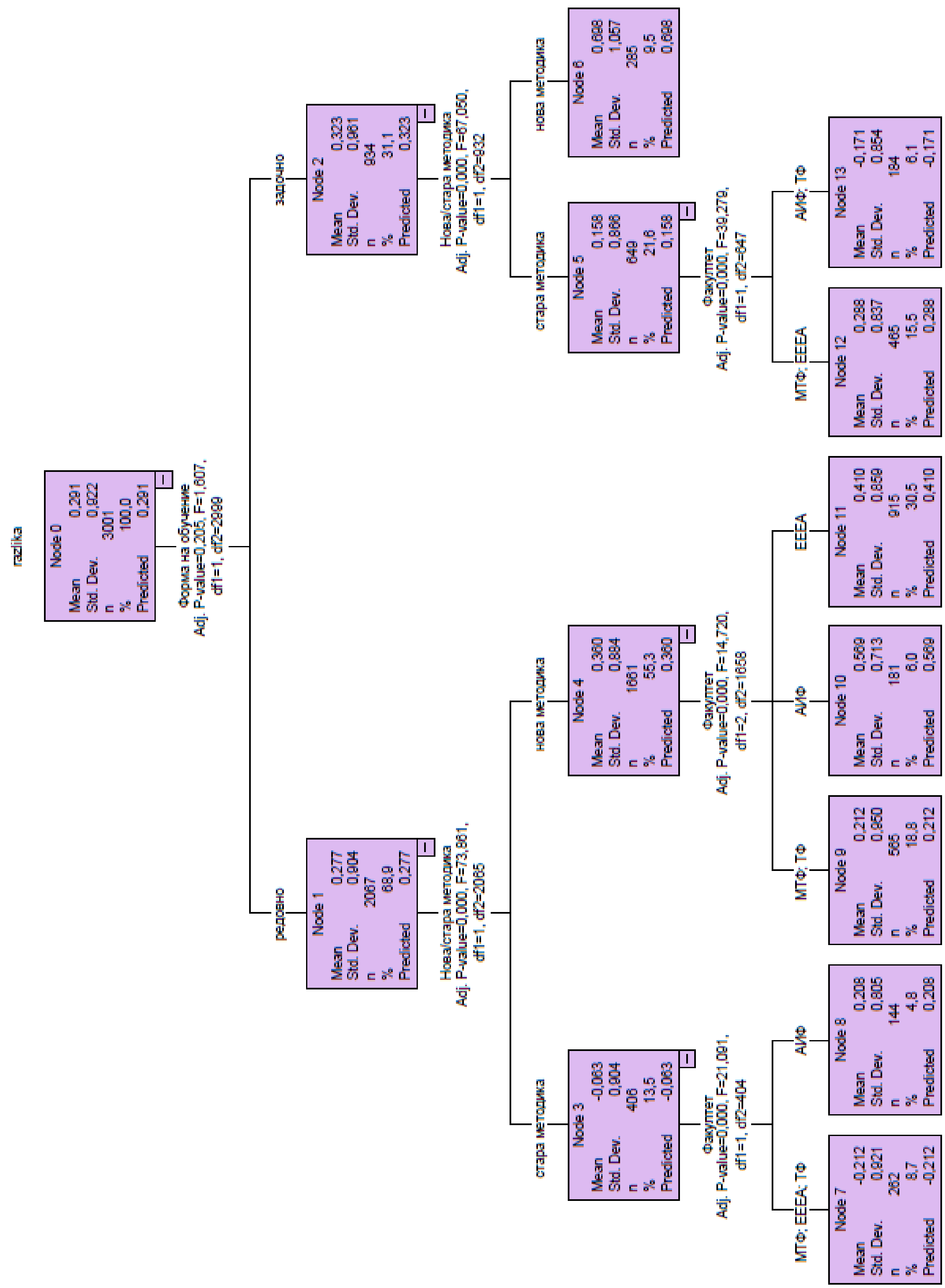
Таблица 3.40: Описание на модела - класификационно дърво признака „разлика“ според факторите „форма“, „методика“ и „факултет“

студенти, обучени по „нова методика“, което вероятно се дължи на по-силната мотивираност на студентите задочно обучение.

Изследователският интерес налага допълнително изследване за това какво е повишението на успеха отделно за редовно и задочно обучение. Изследването е направено чрез класификационно дърво при водещ фактор „форма на обучение“. Чрез този допълнителен анализ се потвърждава предположението, че задочните студенти определено постигат по-добри резултати (0.323) спрямо редовните студенти (0.277), фигура 3.12.

Анализът на характеристиките на възлите от таблица 3.41 показва, че „положителната“ целева група (възел 6) е на задочни студенти, обучени по „нова методика“, а „отрицателната“ - на редовни студенти по „стара методика“ (възел 7). Сравняването на възел 3 (редовно, „стара методика“) и възли 12 и 13 (задочно, „стара методика“) показва, че редовните студенти, обучавани по „стара методика“ понижават успеха си с 0.212 единици, докато задочните студенти от факултети МТФ и ЕЕА повишават по „стара методика“ с 0.288 оценката си по математика, а от факултети АИФ и ТФ намаляват значително успеха си ако се обучават по „стара методика“. За студентите, обучени по „нова методика“ е характерно отново значително повишение на успеха: средна стойност 0.36 (възел 4) за редовно обучение и 0.698 (възел 6) за задочно обучение.

Извод: Фактите, изложени в раздел 3.1.5.4 показват, че експерименталната методика е решаващ фактор [44] при обучението по математика. Тя оказва по-силно влияние върху студентите в задочна форма - при тях оценката



Фигура 3.12: Класификационно дърво на признака „разлика“ с водещ фактор „форма на обучение“

Gain Summary for Nodes

Node	N	Percent	Mean
6	285	9,5%	,6982
10	181	6,0%	,5691
11	915	30,5%	,4098
12	465	15,5%	,2882
9	565	18,8%	,2115
8	144	4,8%	,2083
13	184	6,1%	-,1712
7	262	8,7%	-,2118

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID
Dependent Variable: razlika

Таблица 3.41: Описание на модела - класификационно дърво на признака „разлика“ с водещ фактор „форма на обучение“

се повишава два пъти повече отколкото при редовните студенти. Студентите, обучени по традиционната методика (с изключение на някои задочни студенти) понижават успеха си, докато обучените по експерименталната методика повишават оценките си.

3.2 Статистически анализ на диагностичен тест за проверка на знания

В раздел 3.2 е извършен статистически анализ на резултатите от прилагането на диагностичен тест, описан в раздел 2.2 на стр. 48.

3.2.1 Експертен анализ на задачите от теста

За установяване на съответствие между тестова задача и учебната цел, чието постигане е предназначена да измерва, се използва *рейтинг-скалиране*. Степента на съответствието се оценява от експерти с помощта на шестстепенна оценъчна скала, като обобщените резултати се нанасят в таблица.

За целта е поискано мнението на пет колеги - експерти от Русенски университет. Всеки от тях получава екземпляр от комбинирания тест (Приложение A) и карта за експертна оценка (таблица 3.42), в която поставя оценка от 1 до

Русенски университет „Ангел Кънчев“

Карта за експертна оценка

на тест „Числени методи с Matlab”

по дисциплината „Приложна математика“

за студенти от РУ, 1 курс,
специалности: „Индустриално инженерство“ и „Мениджмънт на качеството и метрология“

Име на експерта:……………………………………………………………………

Зад.№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	Общо	Средно
Оценка																												

Подпис:……………………………..

Таблица 3.42: Карта за експертна оценка

6 на всяка задача, в зависимост от съотнасянето Цел - Задача. Обобщените резултати от експертните оценки са дадени в таблица 3.43. Анализът на резултатите от рейтинг-скалирането показва, че средната аритметична стойност на експертните оценки е 5.70 от максимално възможна 6.00, което означава, че въпросите са подходящи. Данните сочат, че задачи с номера 2, 7, 9, 11, 12, 17, 24, 25 и 26 имат максимална оценка от експертите, а задачи с номера

Задача	1	2	3	4	5	общо точки	средна оценка
1	6	5	5	6	6	28	5.60
2	6	6	6	6	6	30	6.00
3	4	6	6	6	6	28	5.60
4	5	6	6	6	5	28	5.60
5	6	6	6	6	5	29	5.80
6	3	6	6	5	6	26	5.20
7	6	6	6	6	6	30	6.00
8	6	5	6	6	5	28	5.60
9	6	6	6	6	6	30	6.00
10	5	6	5	6	6	28	5.60
11	6	6	6	6	6	30	6.00
12	6	6	6	6	6	30	6.00
13	4	4	6	5	5	24	4.80
14	6	6	6	6	5	29	5.80
15	6	5	5	4	6	26	5.20
16	6	4	5	6	6	27	5.40
17	6	6	6	6	6	30	6.00
18	5	6	5	5	6	27	5.40
19	5	6	6	6	6	29	5.80
20	5	6	6	6	6	29	5.80
21	6	6	6	5	6	29	5.80
22	5	6	6	6	6	29	5.80
23	3	6	6	6	6	27	5.40
24	6	6	6	6	6	30	6.00
25	6	6	6	6	6	30	6.00
26	6	6	6	6	6	30	6.00
Общо точки	140	149	151	150	151	741	148.20
Средна оценка	5.38	5.73	5.81	5.77	5.81	28.5	5.70

Таблица 3.43: Експертни оценки на задачите в диагностичен тест

1, 3, 4, 5, 8, 10, 14, 19, 20, 21, 22 имат средна аритметична оценка над 5.50. Това показва много добро съответствие между въпросите на теста и учебните цели.

Получените оценки от експертите показват, че въпросите са подходящи за проверка на знания и умения на студентите по раздел „Числени методи с MATLAB". От този факт следва, че те могат да се използват успешно за изграждане на тестовѝ вариант, който да бъде апробиран. Въпросите с номера 6, 13, 15, 16, 18 и 23 имат оценка по-малка от 5.50, което предполага тяхното модифициране. След модифициране на въпросите, се провежда пилотен тест.

Формиране на екстремални групи

След всяко провеждане на теста, получените резултати се подреждат в *първичен протокол*. В таблици 3.44 и 3.45 е даден първичният протокол от пилотния тест. От него се формира *редуциран протокол* в низходящ ред в зависимост от общия бал, таблица 3.46.

Въз основа на редуцирания протокол, в зависимост от баловете, студентите се разделят [11, стр.487] на две екстремални групи - първата половина образува „силна" група, а втората половина - „слаба" група. Така се получават две екстремални групи, всяка съставена от 9 студенти.

3.2.2 Надеждност на теста

Надеждността на теста показва неговата точност и достоверност на измерване. За да се анализира надеждността на теста е приложен методът на паралелните форми [11, 90] като са използвани два варианта на теста - A и B. При първо тестиране първата група студенти решава вариант A на теста, а втората - вариант B. След определено време (две седмици), при второто тестиране, се разменят вариантите, като първата група решава вариант B, а втората - вариант A, таблица 3.47.

Според различните методи за анализ на надеждността на тест [11], се използват различни видове коефициенти на корелация, чрез които се пресмята надеждността на теста.

За проверка надеждността на теста е използван коефициентът на Фланаган, препоръчван при двукратно провеждане на теста с различни варианти, при което стандартните отклонения на баловете при двете тестирания не са равни.

Задача	1			2			3			4			5			6			7			8			9			10			11			12			13		вярно	грешно	точки
№	1а	1б	1в	2а	2б	2в	3а	3б	3в	4а	4б	4в	5а	5б	5в	6а	6б	6в	7а	7б	7в	8а	8б	8в	9а	9б	9в	10а	10б	10в	11а	11б	11в	12а	12б	12в	13а	13б			
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9	4	9
2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	4	9	4
3	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	6	7	6
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	10	3	10
5	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	11	2	11
6	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	3	10	3
7	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	5	8	5
8	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	2	11	2
9	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9	4	9
10	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	5	8	5
11	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	4	9	4
12	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	11	2	11
13	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	11	2	11
14	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	8	5	8
15	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	4	9	4
16	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	11	2	11
17	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	4	9	4
18	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	9	4	9

Таблица 3.44: Първичен протокол от пилотния тест - Задачи №1 - №13

Задача	14		15		16		17		18		19			20			21				22						23			24		25		26					вярно	грешно	Нерешена
	да	не	да	не	да	не	да	не	да	не	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	да	не	да	не	2	4	6	8	10			
1	1				1		1		1				1			1		1								1				1			1					1	9	2	2
2	1										1				1										1					1				1					2	4	7
3					1		1		1				1	1					1		1							1					1		1				4	6	3
4	1		1		1		1		1		1				1								1						1		1		1					1	7	5	1
5			1				1		1				1			1				1						1			1				1				1		8	2	3
6		1					1											1						1							1		1			1			1	6	6
7	1											1		1													1					1			1				2	4	7
8							1		1				1			1			1			1					1				1					1			4	5	4
9	1		1				1		1				1		1					1						1			1	1		1						1	11	1	1
10	1								1					1				1										1					1	1					2	5	6
11			1		1							1		1						1						1					1								4	3	6
12		1			1		1		1				1			1			1						1				1	1		1			1				8	4	1
13	1		1		1		1						1			1				1						1			1	1								1	11	0	2
14	1		1		1				1							1				1									1		1	1						1	9	1	3
15		1	1													1	1										1				1		1				1		2	6	5
16	1		1				1		1				1			1				1						1				1								1	10	0	3
17					1		1						1		1									1				1					1					1	4	4	5
18	1		1				1		1				1			1				1						1			1		1		1				1		9	3	1

Таблица 3.45: Първичен протокол от пилотния тест - Задачи №14 - №26

№	1-13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	брой точки	
10	5	2				2		1	2		2			2	16	Слаба група
6	3				2				2	4				6	17	
7	5	2					2	1			1		4	4	19	
15	4		2					3	1		1			8	19	
2	4	2					1	2		5		4		2	20	
11	4		2	2			2	1	4	6				0	21	
8	2				2	2	3	3	3	2	1			6	24	
3	6			2	2	2	3	1	3	1	2			4	26	
17	4			2	2		3	2		4	2			10	29	
4	10	2	2	2	2	2	1	2		3	3			10	39	Силна група
14	8	2	2	2		2		3	4		3		4	10	40	
5	11		2		2	2	3	3	4	6	3			8	44	
18	9	2	2		2	2	3	3	4	6	3			8	44	
1	9	2		2	2	2	3	3	2	6		4		10	45	
12	11			2	2	2	3	3	3	5	3	4	4	4	46	
16	11	2	2		2	2	3	3	4	6		4		10	49	
13	11	2	2	2	2		3	3	4	6	3	4		10	52	
9	9	2	2		2	2	3	2	4	6	3	4	4	10	53	

Таблица 3.46: Редуциран протокол от пилотния тест

Методиката на изследването [7], [11, стр.493] изисква след двете тестирания да се изчисли първо коефициентът на корелация r_{12} между резултатите от двете тестирания по формулата на Пирсън-Браве, в следната форма, [52]:

$$r_{12} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}, \tag{3.2}$$

където n е обемът на извадката, x_i - първична извадка на тестовите балове при първо тестиране, y_i - първична извадка на тестовите балове при второ тестиране.

Коефициентът на корелация (3.2) се замества във формулата на Фланаган

$$r_{tt} = \frac{4S_X S_Y r_{12}}{S_X^2 + S_Y^2 + 2S_X S_Y r_{12}}, \tag{3.3}$$

където S_X, S_Y са неизместени оценки на стандартните отклонения на тестовия бал при първо и второ тестиране, а r_{12} е коефициентът на корелация между

№	Тестиране I (X)	Тестиране II (Y)
	Вариант А	Вариант В
1	48	50
2	20	20
3	27	29
4	40	42
5	46	46
6	19	18
7	21	21
8	25	24
9	54	54
	Вариант В	Вариант А
10	18	18
11	22	23
12	49	51
13	53	54
14	40	41
15	19	20
16	51	52
17	28	29
18	45	47

Таблица 3.47: Резултати от I и II тестиране

двете половини на теста, пресметнат по формула (3.2). Полученият по такъв начин коефициент на корелация r_{tt} е *коефициентът на надеждност* на теста.

При изчисленията се използват следните формули:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}, \quad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 f_i}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_i}{n}, \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2 f_i}$$

където $\overline{X}$, $\overline{Y}$ са средни стойности на резултатите от I и II тестиране, x_i, y_i са възможните балове, f_i са абсолютните честоти, n е общият брой на възможните балове, s_X, s_Y - стандартни отклонения съответно при I и II тестиране.

За пресмятане на неизместените оценки S_X, S_Y на стандартното отклонение при обеми на извадката по-малки от 30, се използват коригиращи коефициенти c_n [72, стр.188], които зависят от обема на извадката и имат стойност по-малка от 1. От [72, таблица VII, стр.343] при обем на извадката $n = 18$ се определя стойността на коригиращия коефициент $c_{18} = 0.9856$, след което се пресмятат неизместените оценки за стандартното отклонение по формулите $S_X = \dfrac{s_X}{c_n}$, $S_Y = \dfrac{s_Y}{c_n}$.

Изчисленията са извършени със системата MATLAB (таблица 3.49). Коефициентът на корелация, получен по формулата на Пирсън-Браве (3.2) е

$$r_{12} = \frac{18 \cdot 25468 - 625 \cdot 639}{\sqrt{[18 \cdot 24881 - 625^2]\,[18 \cdot 26083 - 639^2]}} \approx 0.997951. \tag{3.4}$$

Получената стойност на коефициента на корелация се използва за пресмятане на коефициента на надеждност на теста по формулата на Фланаган (3.3), като се използват резултатите в таблици 3.53a, 3.54a и (3.4):

$$r_{tt} = \frac{4 \cdot 13.88 \cdot 14.35 \cdot 0.997951}{13.88^2 + 14.35^2 + 2 \cdot 13.88 \cdot 14.35 \cdot 0.997951} \approx 0.9987.$$

Коефициентът на надеждност на теста трябва да варира [7] в интервала от 0.5 до 1. В случая, получената стойност на коефициента на надеждност $r_{tt} = 0.9987$ е висока, близка до единица, което показва, че двете форми на теста са еквивалентни, а тестът като цяло е надежден.

3.2.3 Обективност и валидност на теста

3.2.3.1 Обективност

Обективността на теста се определя от частното $\dfrac{N}{n}$, където N е броят на статистически верните резултати, а n е броят на изследваните лица [11, 90].

За пресмятане на числото N е необходимо за всяко тестиране да се направи интервална оценка [21] на средната стойност с гаранционна вероятност γ. За целта, за трите тестирания са пресметнати неизместените оценки на стандартното отклонение при обем на извадката $n = 18$ с използване на коригиращи коефициенти c_n [72, таблица VII, стр.343] и са намерени интервални оценки (доверителни интервали [72, стр. 229]) при $\gamma = 0.999$ и $t = t_{\gamma;n-1} = 3.96$:

$$I_{\gamma;n}^{E[X]} = \left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t; \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t \right)$$

Интервалните оценки и получените стойности за N и n за пилотен тест, първо и второ тестиране са дадени съответно в таблици 3.50, 3.53, 3.54.

Коефициентът на обективност за пилотния тест е 0.56, за I тестиране - 0.5, а за тестиране II - 0.44, таблица 3.48. Коефициентите на обективност при трите

Тест	N	n	Коефициент на обективност
Пилотен	10	18	0.56
Тест I	9	18	0.5
Тест II	8	18	0.44

Таблица 3.48: Коефициенти на обективност

тестирания са близки, което показва, че резултатите от теста са обективни.

3.2.3.2 Валидност

За да се определи *съдържателната валидност* на теста, се използват оценките на експертите (таблица 3.43) за съответствието на включените в дидактическия тест задачи и учебното съдържание, чието овладяване той трябва да измерва. Съдържателната валидност на теста, установена с помощта на експертите, е 95% (оценка 5,70 от максимална 6), което е показател за съдържателната валидност на теста [11, 90].

За определяне на *критериалната валидност* на теста се използва метода на контрастните групи [7, стр.233-237], като за стандарт на успешност (cut-off) се приема доверителния интервал на разпределението на баловете от пилотния тест $[21, 46]$, таблица 3.50. Резултатите показват, че извън доверителния интервал от слабата група попадат 5 студенти , а от силната - 3 (таблица 3.50a). Това означава, че при приетия стандарт, общо 8 от 18 студенти (44%) ще бъдат оценени погрешно, т.е. валидността на решението е 56%.

3.2.4 Анализ на задачите от теста

Анализът на задачите от теста се извършва по отношение на следните характеристики: *трудност, дискриминативна сила, анализ на дистракторите* (при въпроси и задачи с изборен отговор).

3.2.4.1 Анализ на трудността

Трудността на една тестова задача се определя от процентния дял на правилно решилите я студенти чрез индекса на трудност P [11, 70, 90].

В зависимост от типа на задачите, индексът на трудност се пресмята по една от формулите:

№	Тест I - X	Тест II - Y	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	$x_i - \overline{X}$	$y_i - \overline{Y}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(y_i - \overline{Y})^2$
1	48	50	2400	2304	2500	13.2778	14.5	176.2993827	210.25
2	20	20	400	400	400	-14.7222	-15.5	216.7438272	240.25
3	27	29	783	729	841	-7.7222	-6.5	59.63271605	42.25
4	40	42	1680	1600	1764	5.2778	6.5	27.85493827	42.25
5	46	46	2116	2116	2116	11.2778	10.5	127.1882716	110.25
6	19	18	342	361	324	-15.7222	-17.5	247.1882716	306.25
7	21	21	441	441	441	-13.7222	-14.5	188.2993827	210.25
8	25	24	600	625	576	-9.7222	-11.5	94.52160494	132.25
9	54	54	2916	2916	2916	19.2778	18.5	371.632716	342.25
10	18	18	324	324	324	-16.7222	-17.5	279.632716	306.25
11	22	23	506	484	529	-12.7222	-12.5	161.8549383	156.25
12	49	51	2499	2401	2601	14.2778	15.5	203.8549383	240.25
13	53	54	2862	2809	2916	18.2778	18.5	334.0771605	342.25
14	40	41	1640	1600	1681	5.2778	5.5	27.85493827	30.25
15	19	20	380	361	400	-15.7222	-15.5	247.1882716	240.25
16	51	52	2652	2601	2704	16.2778	16.5	264.9660494	272.25
17	28	29	812	784	841	-6.7222	-6.5	45.1882716	42.25
18	45	47	2115	2025	2209	10.2778	11.5	105.632716	132.25
$\sum$	625	639	25468	24881	26083	$1.42109 \cdot 10^{-14}$	0	3179.611111	3398.5

Таблица 3.49: Пресмятане на коефициента на корелация на баловете от тестиране I и II

x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^2 f_i$
16	1	1	16	-17.5	306.25	306.25
17	1	2	17	-16.5	272.25	272.25
18	0	2	0	-15.5	240.25	0
19	2	4	38	-14.5	210.25	420.5
20	1	5	20	-13.5	182.25	182.25
21	1	6	21	-12.5	156.25	156.25
22	0	6	0	-11.5	132.25	0
23	0	6	0	-10.5	110.25	0
24	1	7	24	-9.5	90.25	90.25
25	0	7	0	-8.5	72.25	0
26	1	8	26	-7.5	56.25	56.25
27	0	8	0	-6.5	42.25	0
28	0	8	0	-5.5	30.25	0
29	1	9	29	-4.5	20.25	20.25
30	0	9	0	-3.5	12.25	0
31	0	9	0	-2.5	6.25	0
32	0	9	0	-1.5	2.25	0
33	0	9	0	-0.5	0.25	0
34	0	9	0	0.5	0.25	0
35	0	9	0	1.5	2.25	0
36	0	9	0	2.5	6.25	0
37	0	9	0	3.5	12.25	0
38	0	9	0	4.5	20.25	0
39	1	10	39	5.5	30.25	30.25
40	1	11	40	6.5	42.25	42.25
41	0	11	0	7.5	56.25	0
42	0	11	0	8.5	72.25	0
43	0	11	0	9.5	90.25	0
44	2	13	88	10.5	110.25	220.5
45	1	14	45	11.5	132.25	132.25
46	1	15	46	12.5	156.25	156.25
47	0	15	0	13.5	182.25	0
48	0	15	0	14.5	210.25	0
49	1	16	49	15.5	240.25	240.25
50	0	16	0	16.5	272.25	0
51	0	16	0	17.5	306.25	0
52	1	17	52	18.5	342.25	342.25
53	1	18	53	19.5	380.25	380.25
$\sum$ 1311	18		603			3048.5

$\overline{X} = 33.5, Me = 34, S \approx 13.59, I = [21, 46]$

(а) Честотна таблица на резултатите от пилотен тест

x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
21	1	1	21
22	0	1	0
23	0	1	0
24	1	2	24
25	0	2	0
26	1	3	26
27	0	3	0
28	0	3	0
29	1	4	29
30	0	4	0
31	0	4	0
32	0	4	0
33	0	4	0
34	0	4	0
35	0	4	0
36	0	4	0
37	0	4	0
38	0	4	0
39	1	5	39
40	1	6	40
41	0	6	0
42	0	6	0
43	0	6	0
44	2	8	88
45	1	9	45
46	1	10	46
$\sum$ 871	10		358

$\overline{X} = 35.8$
$Mo = 44, Me = 39.5$
$N = 10, n = 18$

(б) Честотна таблица на резултатите от пилотен тест в интервала I

Таблица 3.50: Честотни таблици за пилотен тест

	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^2 f_i$
	39	1	1	39	-6.7778	45.9383	45.9383
	40	1	2	40	-5.7778	33.3827	33.3827
	41	0	2	0	-4.7778	22.8272	0
	42	0	2	0	-3.7778	14.2716	0
	43	0	2	0	-2.7778	7.7160	0
	44	2	4	88	-1.7778	3.1605	6.3210
	45	1	5	45	-0.7778	0.6049	0.6049
	46	1	6	46	0.2222	0.0494	0.0494
	47	0	6	0	1.2222	1.4938	0
	48	0	6	0	2.2222	4.9382	0
	49	1	7	49	3.2222	10.3827	10.3827
	50	0	7	0	4.2222	17.8272	0
	51	0	7	0	5.2222	27.2716	0
	52	1	8	52	6.2222	38.7160	38.7160
	53	1	9	53	7.2222	52.1605	52.1604
$\sum$	690			412	3.3333	280.7407	187.5556

Таблица 3.51: Честотна таблица на резултатите от пилотния тест - силна група: $\overline{X} \approx 46, S = 4.91, Me = 45, Mo = 44, I = [39, 52]$

	x_i	f_i	F	$x_i f_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^2 f_i$
	16	1	1	16	-5.2222	27.2716	27.2716
	17	1	2	17	-4.2222	17.8272	17.8272
	18	0	2	0	-3.2222	10.3827	0
	19	2	4	38	-2.2222	4.9383	9.8765
	20	1	5	20	-1.2222	1.4938	1.4938
	21	1	6	21	-0.2222	0.0494	0.0494
	22	0	6	0	0.7778	0,6049	0
	23	0	6	0	1.7778	3.1605	0
	24	1	7	24	2.7778	7.7160	7.7160
	25	0	7	0	3.7778	14.2716	0
	26	1	8	26	4.7778	22.8271	22.8271
	27	0	8	0	5.7778	33.3827	0
	28	0	8	0	6.7778	45.9383	0
	29	1	9	29	7.7778	60.4938	60.4938
$\sum$	315	9		191			147.5556

Таблица 3.52: Честотна таблица на резултатите от пилотния тест - слаба група: $\overline{X} \approx 21, S = 4.36, Me = 20, Mo = 19, I = [16, 27]$

x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})^2 f_i$
18	1	1	18	-16.72	279.63	279.63
19	2	3	38	-15.72	247.19	494.38
20	1	4	20	-14.72	216.74	216.74
21	1	5	21	-13.72	188.30	188.30
22	1	6	22	-12.72	161.85	161.86
23	0	6	0	-11.72	137.41	0
24	0	6	0	-10.72	114.97	0
25	1	7	25	-9.72	94.52	94.52
26	0	7	0	-8.72	76.08	0
27	1	8	27	-7.72	59.63	59.63
28	1	9	28	-6.72	45.19	45.19
29	0	9	0	-5.72	32.74	0
30	0	9	0	-3.72	13.85	0
31	0	9	0	-3.72	13.85	0
32	0	9	0	-2.72	7.41	0
33	0	9	0	-1.72	2.97	0
34	0	9	0	-0.72	0.52	0
35	0	9	0	0.28	0.08	0
36	0	9	0	1.28	1.63	0
37	0	9	0	2.28	5.19	0
38	0	9	0	3.28	10.74	0
39	0	9	0	4.28	18.30	0
40	2	11	80	5.28	27.85	55.71
41	0	11	0	6.28	39.41	0
42	0	11	0	7.28	52.97	0
43	0	11	0	8.28	68.52	0
44	0	11	0	9.28	86.08	0
45	1	12	45	10.28	105.63	105.63
46	1	13	46	11.28	127.19	127.19
47	0	13	0	12.28	150.74	0
48	1	14	48	13.28	176.30	176.30
49	1	15	49	14.28	203.86	203.86
50	0	15	0	15.28	233.41	0
51	1	16	51	16.28	264.97	264.97
52	0	16	0	17.28	298.52	0
53	1	17	53	18.28	334.08	334.08
54	1	18	54	19.28	371.63	371.63
1332	18		625			3179.61

$\overline{X} = 34.72, S_X = 13.88, I = [22, 48]$

(а) Честотна таблица на резултатите от тестиране I

x_i	f_i	F	$x_i f_i$
22	1	2	22
23	0	2	0
24	0	2	0
25	1	3	25
26	0	3	0
27	1	4	27
28	1	5	28
29	0	5	0
30	0	5	0
31	0	5	0
32	0	5	0
33	0	5	0
34	0	5	0
35	0	5	0
36	0	5	0
37	0	5	0
38	0	5	0
39	0	5	0
40	2	7	80
41	0	7	0
42	0	7	0
43	0	7	0
44	0	7	0
45	1	8	45
46	1	9	46
47	0	9	0
48	1	10	48
945	9		321

$\overline{X} = 35.67, Mo = Me = 40$
$N = 9, n = 18$

(б) Честотна таблица на резултатите от тестиране I в доверителния интервал

Таблица 3.53: Честотни таблици на резултатите от тестиране I

y_i	f_i	F_i	$y_i f_i$	$y_i - \overline{Y}$	$(y_i - \overline{Y})^2$	$(y_i - \overline{Y})^2 f_i$
18	2	2	36	-17.5	306.25	612.5
19	0	2	0	-16.5	272.25	0
20	2	4	40	-15.5	240.25	480.5
21	1	5	21	-14.5	210.25	210.25
22	0	5	0	-13.5	182.25	0
23	1	6	23	-12.5	156.25	156.25
24	1	7	24	-11.5	132.25	132.25
25	0	7	0	-10.5	110.25	0
26	0	7	0	-9.5	90.25	0
27	0	7	0	-8.5	72.25	0
28	0	7	0	-7.5	56.25	0
29	2	9	58	-6.5	42.25	84.5
30	0	9	0	-5.5	30.25	0
31	0	9	0	-4.5	20.25	0
32	0	9	0	-3.5	12.25	0
33	0	9	0	-2.5	6.25	0
34	0	9	0	-1.5	2.25	0
35	0	9	0	-0.5	0.25	0
36	0	9	0	0.5	0.25	0
37	0	9	0	1.5	2.25	0
38	0	9	0	2.5	6.25	0
39	0	9	0	3.5	12.25	0
40	0	9	0	4.5	20.25	0
41	1	10	41	5.5	30.25	30.25
42	1	11	42	6.5	42.25	42.25
43	0	11	0	7.5	56.25	0
44	0	11	0	8.5	72.25	0
45	0	11	0	9.5	90.25	0
46	1	12	46	10.5	110.25	110.25
47	1	13	47	11.5	132.25	132.25
48	0	13	0	12.5	156.25	0
49	0	13	0	13.5	182.25	0
50	1	14	50	14.5	210.25	210.25
51	1	15	51	15.5	240.25	240.25
52	1	16	52	16.5	272.25	272.25
53	0	16	0	17.5	306.25	0
54	2	16	108	18.5	342.25	684.5
1332	18		639			3398.5

$\overline{Y} = 35.5, S_Y = 14.35, I = [22, 49]$

(а) Честотна таблица на резултатите от тестиране II

y_i	f_i	F_i	$y_i f_i$
22	0	0	0
23	1	1	23
24	1	2	24
25	0	2	0
26	0	2	0
27	0	2	0
28	0	2	0
29	2	4	58
30	0	4	0
31	0	4	0
32	0	4	0
33	0	4	0
34	0	4	0
35	0	4	0
36	0	4	0
37	0	4	0
38	0	4	0
39	0	4	0
40	0	4	0
41	1	5	41
42	1	6	42
43	0	6	0
44	0	6	0
45	0	6	0
46	1	7	46
47	1	8	47
48	0	8	0
49	0	8	0
945	8		281

$\overline{Y} = 35.125, Me = 35$
$Mo = 29, N = 8, n = 18$

(б) Честотна таблица на резултатите от тестиране II в интервала I

Таблица 3.54: Честотни таблици на резултатите от тестиране II

- При задачи с алтернативен отговор от типа „да-не" се използва

$$P = \frac{N_r}{n} \cdot 100\%.$$

- При задачи с множествен избор или задачи за съотнасяне се използва формулата

$$P = \frac{N_r - \frac{N_f}{m-1}}{N_b} \cdot 100\%,$$

където N_r е броят на студентите от двете групи, решили вярно задачата, N_f е брой студенти, решили грешно задачата, N_b е брой студенти, решавали задачата, n е общият брой на всички студенти, m е брой възможни отговори на задачата, [7, стр.189].

Резултатите (таблица 3.55) показват, че индексът на трудност за задачите в теста варира от 22% до 72,22% при препоръчителен интервал 15% - 85%, което показва, че те отговарят на изискванията за трудност и могат да бъдат включени в теста.

3.2.4.2 Анализ на дискриминативната сила

Дискриминативната сила на тестова задача показва доколко тя може да разграничи „силните" от „слабите" студенти по техните постижения [11, 90]. Висок коефициент на дискриминативност показва, че съответната задача добре разграничава двете групи студенти. В този случай обикновено „силните" студенти решават задачата вярно, а „слабите" - грешно. Ако коефициентът е близко до нула, то както „слабите", така и „силните" студенти еднакво често ще бъдат в състояние да решат задачата. Приема се, че такава задача трябва да бъде премахната или преформулирана. При коефициент (-1), теоретично имаме случай, в който „силните" студенти не могат да решат задачата, докато „слабите" я решават вярно. Такъв случай възниква обикновено при лоша формулировка на задачата. На практика почти не се стига до екстремалните случаи.

По своята познавателна същност, индексът на дискриминативна сила е коефициент на корелация между групите на „силните" и „слабите" студенти. Най-често използваната формула [11, стр.488] за коефициента на дискриминативна сила е следната:

$$DP = \frac{2(R_u - R_l)}{T}, \tag{3.5}$$

където R_u - брой студенти от „силната“ група, вярно решили задачата, R_l - брой студенти от „слабата“ група, вярно решили задачата, а T е общият брой на всички студенти от двете екстремални групи.

Оценка за дискриминативната сила на задачи от типа „есе“ се извършва [90, стр.68] като се отчита отношението на количеството точки, получени при решаването на съответната задача в дадена група към максималния брой точки за групата.

Задача	Трудност, %	Дискриминативна сила
1	33.33	0.44
2	25.00	0.56
3	41.67	0.33
4	41.67	0.56
5	33.33	0.44
6	33.33	0.44
7	16.67	0.44
8	41.67	0.33
9	25.00	0.56
10	25.00	0.56
11	38.89	0.33
12	25.00	0.33
13	50.00	0.44
14	55.56	0.44
15	50.00	0.56
16	44.44	0.22
17	66.67	0.44
18	61.11	0.56
19	66.67	0.30
20	72.22	0.41
21	61.11	0.39
22	61.11	0.41
23	55.56	0.44
24	33.33	0.44
25	22.22	0.22
26	67.68	0.42

Таблица 3.55: Характеристики на задачите

Показателят на дискриминативната сила за дадена задача според тази процедура се получава като полученият общ брой точки в групата се раздели на максималния брой точки, които могат да получат общо студентите от дадена група за конкретната задача и от полученото за „силната“ група число се извади съответното число на „слабата“ група. Този начин за определяне на индекса на дискриминативна сила е използван за задачи с № 19, 20, 21, 22, 23 и 26. Например, при изчисляване на този индекс за задача №19 (таблица 3.46) се събират точките на студентите от силната група по тази задача (22) и се разделя на максималния възможен брой точки ($9 \cdot 3 = 27$); същото се прави и за слабата група (14/27) и накрая $\frac{22}{27} - \frac{14}{27} \approx 0.30$. За останалите задачи е приложена формула (3.5).

От практическа гледна точка [11, стр.488] индексът на дискриминативна сила DP на задача трябва да е от 0.4 до 0.6; тогава тя разграничава най-добре възможностите на тестираните. Задачата трябва да се формулира отново, ако има индекс под 0.4. Ако стойността е под 0.2, задачата трябва да се подмени, защото както добрите, така и слабите студенти еднакво често ще бъдат в състояние да я решат. Ако обаче останалите показатели на задачата са добри, може задачата да остане и без изменение.

Получените резултати за индекса на дискриминативна сила DP показват, че коефициентите на дискриминативна сила на задачите от теста са в допустимите граници: задачи № 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 24 и 26 имат DP в интервала от 0.4 до 0.6, а задачи № 3, 8, 11, 12, 16, 19, 21 и 25 имат DP в интервала от 0.2 до 0.4. Резултатите са дадени в таблица 3.55.

3.2.4.3 Анализ на дистракторите

При задачи с изборен отговор такъв анализ е необходим, за да се установи дали и до каква степен дистракторите (грешните отговори) са приемливи за студентите и доколко те позволяват да се разграничат „силните“ от „слабите“ студенти [11].

При анализа на дистракторите се отчитат трите основни критерии на Р. Берк [11]:

Критерий 1 Всеки от дистракторите трябва да бъде посочен от повече „слаби“ студенти, отколкото „силни“.

Критерий 2 Всеки дистрактор трябва да бъде посочен както от „слаби“ студенти, така и от поне няколко студенти от „силната“ група.

Критерий 3 В силната група нито един от дистракторите не трябва да бъде посочен от повече студенти, отколкото верния отговор.

Резултатите от анализа на дистракторите са дадени в таблици 3.56 и 3.57. Според горните критерии са направени следните изводи:

- Критерий 1 не е изпълнен при задачи 6 в, 10 в и 12 в.
- Критерий 2 не е изпълнен при задача 5 в.
- Критерий 3 е изпълнен за всички задачи.

Задача	**1**			**2**			**3**			**4**			**5**			**6**		
	а	**б**	в	а	б	**в**	**а**	б	в	а	**б**	в	**а**	б	в	а	**б**	в
Силна група	1	7	1	1	1	7	7	1	1	0	8	1	7	2	0	1	7	1
Слаба група	2	3	4	3	4	2	4	2	3	2	3	4	3	5	1	5	3	1

Таблица 3.56: Анализ на дистракторите - въпроси №1 - №6

Задача	**7**			**8**			**9**			**10**			**11**			**12**			**13**	
	а	б	**в**	**а**	б	в	а	б	**в**	**а**	б	в	**а**	б	в	а	**б**	в	а	**б**
Силна група	2	1	6	7	1	1	1	1	7	7	1	1	5	2	2	2	6	1	1	8
Слаба група	3	4	2	4	2	3	5	2	2	2	6	1	2	4	3	5	3	1	5	4

Таблица 3.57: Анализ на дистракторите - въпроси №7 - №13

Извод: Дистракторите 6в, 10в, 12в и 5в подлежат на замяна преди използване на теста за диагностика.

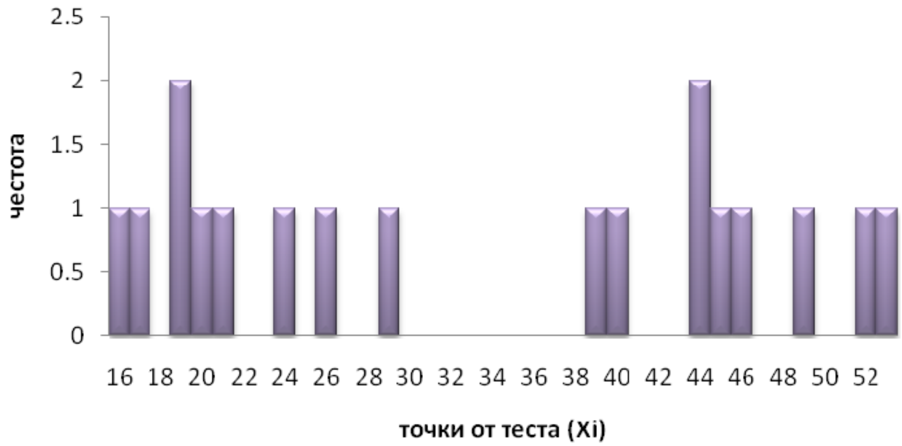
3.2.5 Графично представяне на резултатите от теста

Важно допълнение към статистическия анализ на теста, е графичното представяне на резултатите. За тази цел се използват различни графични форми - полигон, хистограма, кръгова диаграма и др.

3.2.5.1 Графично представяне на резултатите от пилотния тест

На Фигура 3.13 е представена хистограмата, отразяваща резултатите от пилотния тест. Разпределението на всички тестирани студенти показва, че резултатите са групирани в началото и края на интервала, което означава, че тестът е затруднил студентите.

Същият резултат е представен и чрез кръгова диаграма на Фигура 3.14. На



Фигура 3.13: Хистограма на резултатите от пилотния тест

Фигура 3.15 е показано разпределението на баловете на тестираните студенти, изобразено чрез диаграма от колонен тип.

На Фигура 3.16 е представена хистограмата на относителната честота на слабата група в доверителния интервал за пилотния тест.

От построената хистограма за слабата група (Фигура 3.16 и таблица 3.52), може да се направи извод, че най-много стойности има в интервала от 16 до 21 точки; половината от студентите имат резултат по-нисък от медианата 20 в доверителния интервал $[16, 27]$.

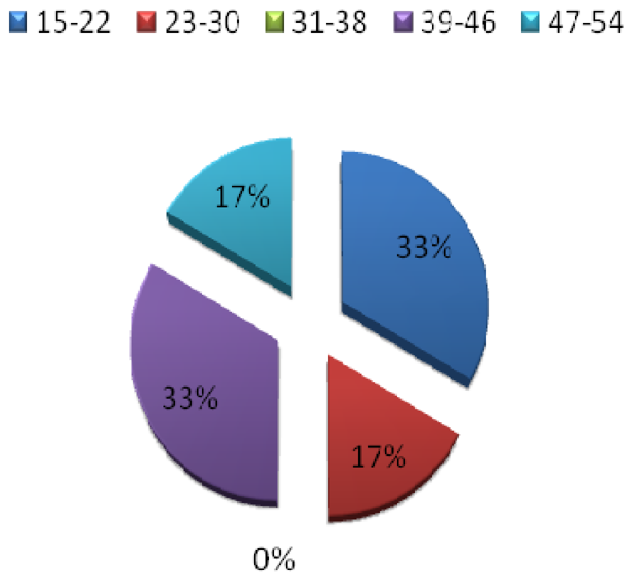
Резултатите на силната група от пилотния тест са подобни: 6 от 9 студенти имат балове от 39 до 46, което е под медианната стойност 45 в доверителния интервал $[39, 52]$, таблица 3.51. Този факт се потвърждава и от графичните изображения на полигона на относителната честота за „силна“ и „слаба“ групи, Фигури 3.17, 3.18:

3.2.5.2 Графично представяне на резултатите от Тестиране I и II

В таблица 3.58 са представени резултатите от Тестиране I за степента на усвояване на материала, изразена чрез четири степени: ниска, задоволителна, средновисока и висока.

В таблица 3.59 са представени аналогични резултати от Тестиране II чрез четири степени.

Резултатите от двете тестирания са дадени в две графични форми - чрез полигон и кръгова диаграма. На Фигури 3.19, 3.20 са представени полигони на относителната честота на баловете при I и II тестиране.



Фигура 3.14: Кръгова диаграма на баловете на студентите - пилотен тест

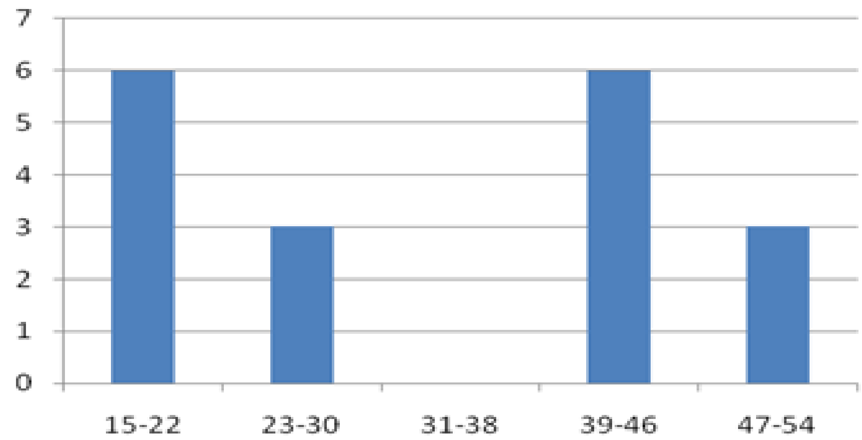
Степен на усвояване	ниска	задоволителна	средновисока	висока
%	0-52%	53-68%	70-85%	86-100%
Брой точки	0-31	32-41	42-51	52-60
Брой студенти	9	2	4	3
Дял (%)	50%	11%	22%	17%

Таблица 3.58: Резултати от Тестиране I, представени чрез четири степени на усвояване

Резултатите от I и II тестиране са представени и чрез кръгови диаграми на Фигури 3.21 и 3.22, като степента на усвояване на материала е представена отново чрез четири степени: ниска, задоволителна, средновисока и висока.

От така представените резултати се вижда, че процентите дялове при двете тестирания са сходни. С няколко процента само се е увеличил броят на студентите със средна степен на усвояване.

На Фигури 3.23 и 3.24 са представени резултатите от двете тестирания съответно на „слабата“ и „силната“ групи, представени чрез диаграми от колонен тип. По хоризонталната ос са нанесени номера от 1 до 9, съответстващи на деветте тестирани лица от съответната група, а по вертикала са нанесени получените точки съответно по I и II тестиране. Анализът на получените резултати показва, че почти всички студенти са показали по-добри резултати

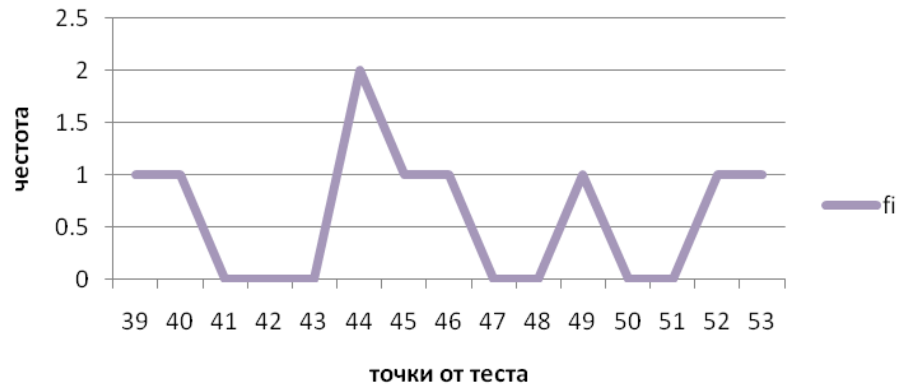


Фигура 3.15: Разпределение на баловете на студентите - пилотен тест

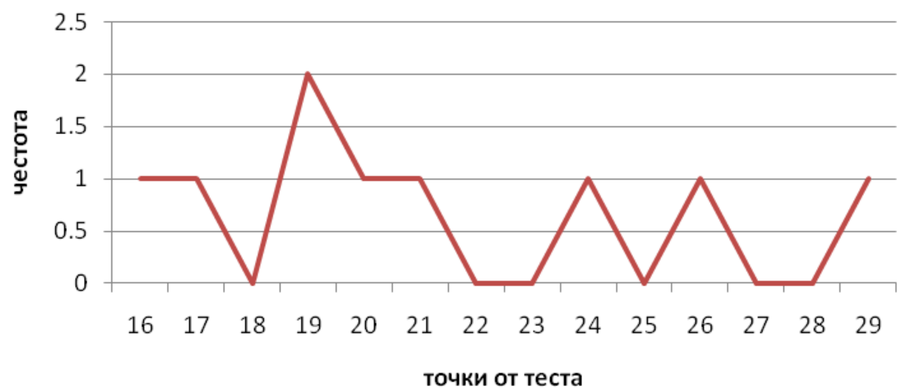
Фигура 3.16: Хистограма на относителната честота в доверителния интервал за „слаба“ група - пилотен тест

при II тестиране.

От представените изображения се вижда, че резултатите от двете тестирания са сходни. С няколко процента се е увеличил делът на студентите със средновисока успеваемост. Ниската успеваемост вероятно се дължи на по-високата трудност на някои от задачите. Например, задачи № 7, 25 ($P_7 = 16.66\%, P_{25} = 22.22\%$, таблица 3.55) са с най-висока трудност и трябва да се променят при бъдещо използване на теста, за да се повиши успеваемостта.



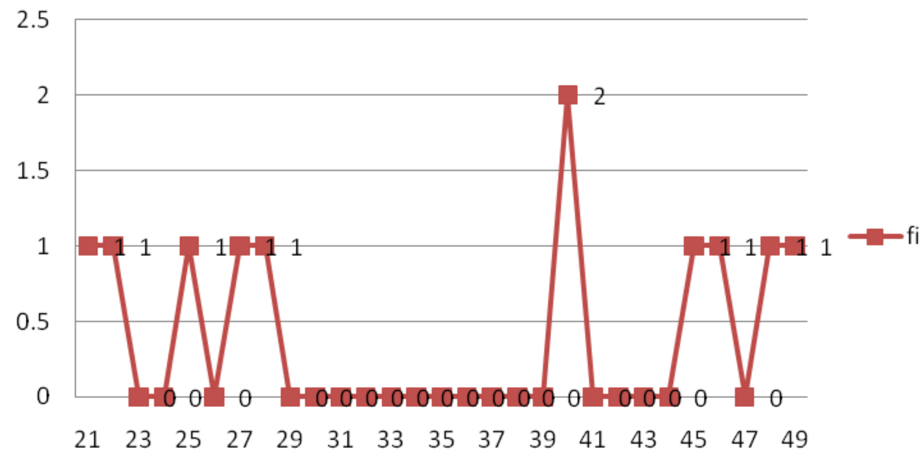
Фигура 3.17: Полигон на относителната честота за „силна“ група - пилотен тест



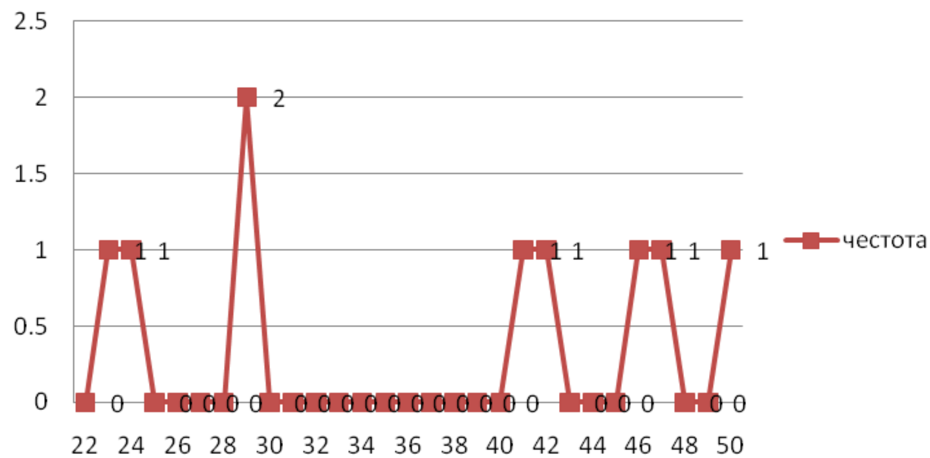
Фигура 3.18: Полигон на относителната честота за „слаба“ група - пилотен тест

Степен на усвояване	ниска	задоволителна	средновисока	висока
%	0-52%	53-68%	70-85%	86-100%
Брой точки	0-31	32-41	42-51	52-60
Брой студенти	9	1	5	3
Дял (%)	50%	5%	28%	17%

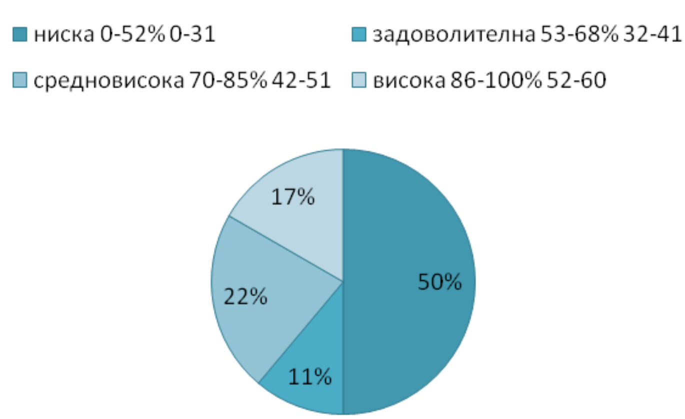
Таблица 3.59: Резултати от Тестиране II, представени чрез четири степени на усвояване



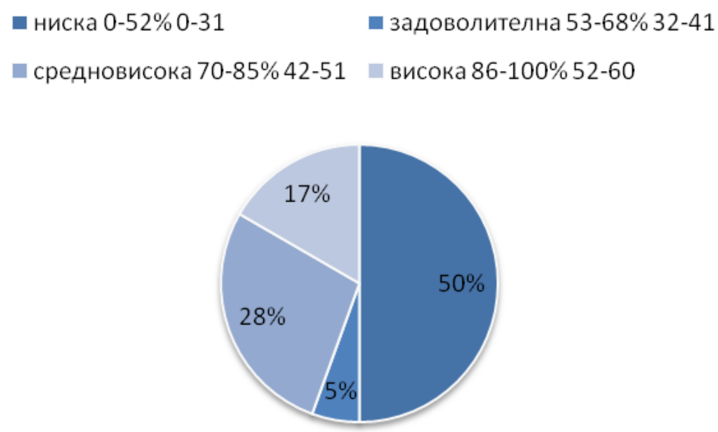
Фигура 3.19: Графично изобразяване на резултати от Тестиране I



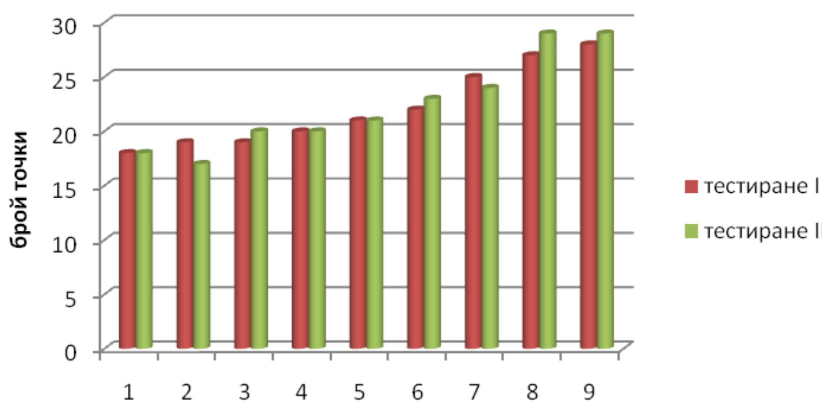
Фигура 3.20: Графично изобразяване на резултати от Тестиране II



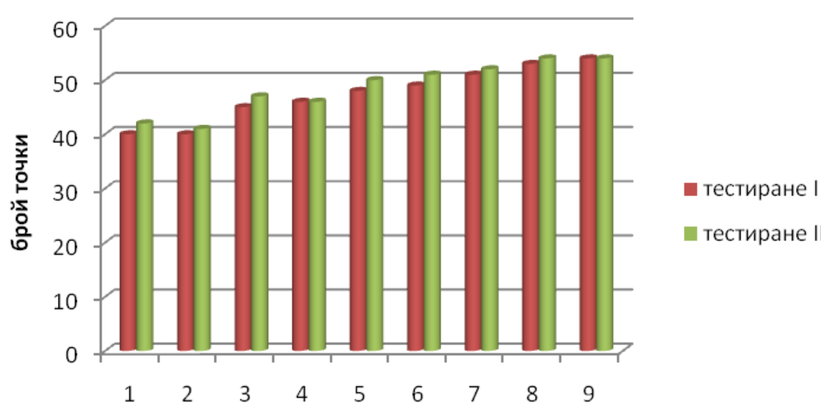
Фигура 3.21: Кръгова диаграма на резултати от Тестиране I



Фигура 3.22: Кръгова диаграма на резултати от Тестиране II



Фигура 3.23: Сравняване на резултати от Тестиране I и II - „слаба“ група



Фигура 3.24: Сравняване на резултати от Тестиране I и II - „силна“ група

3.2.6 Изводи

В заключение, по отношение на резултатите от диагностичната процедура, се налагат следните изводи:

1. Качествата на тестовите задачи и на теста като цяло отговарят на описаните в литературата основни изисквания към нормативните тестове.

2. Разработеният тест ефективно изпълнява ролята на инструментариум за диагностика и измерване на постиженията на студентите при изучаване на раздела „Числени методи с MATLAB“.

3. За да бъде оптимизиран тестът, трябва да се подобрят отделни негови компоненти:

   - Да се преформулират задачите, чиято дискриминативна сила не е в желаните граници или да отпаднат от теста (Задачи №16 и №25).
   - Да се коригират дистракторите, непокриващи съответните критерии:

     Критерий I не е изпълнен при задачи 6в; 10в и 12в.

     Критерий II не е изпълнен при задача 5в.

4. Приложената методика дава добри резултати при усвояването на учебното съдържание по раздела „Числени методи с MATLAB“, което се вижда от кръговите диаграми.

5. Прилагането на комбинирания тест дава възможност на студентите да работят задълбочено и логически последователно при решаване на задачи и ориентиране в различни ситуации.

6. Наблюденията на автора по време на експеримента показват, че студентите предпочитат тестова форма на изпитване пред устно или писмено изпитване.

7. Използването на тестове в обучението предоставя обективна, надеждна и валидна основа за определяне степента на постигане на предварително поставените цели и улеснява формите за контрол на постиженията на обучаемите.

8. Учебното съдържание по дисциплината „Приложна математика“ позволява прилагането на тестовата форма за контрол на постиженията на студентите.

Статистическият анализ на проведената диагностична процедура доказва работната хипотеза, че използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите в часовете по Висша математика стимулира познавателната им дейност и спомага за достигане на по-добро и по-задълбочено усвояване на учебния материал [46].

3.3 Анализ на резултатите от анкетно проучване

В раздел 2.4 бе представена анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика. Тук, в раздел 3.3 е извършен вариационен анализ, изследвани са корелационни зависимости между признаци. Извършен е и подробен клъстерен анализ на резултатите от анкетното проучване. Получените данни са анализирани чрез специализирания софтуерен пакет за статистически анализ SPSS [100].

За нас беше важно да получим отговори на много въпроси, най-важните от които са:

- Какво е според анкетираните лица нивото на обучение по математика и доколко това, което те получават е на най-високо ниво според тях?
- Одобряват ли анкетираните компютърно съпроводеното обучение по математика и дали според тях то е спомогнало за повишаване качеството на тяхното обучение?
- Как анкетираните оценяват степента на трудност на системата MATLAB за решаване на математически задачи и доколко биха я използвали в бъдеще?
- Считат ли анкетираните, че дистанционно обучение по математика с използване на подходящ софтуер и учебни материали би довело до повишаване качеството на обучение?

3.3.1 Вариационен анализ

Общият брой на анкетираните лица е 151, от които 70 жени (46.4%), 81 мъже (53.6%). От тях 39 (25.8%) са ученици, 107 (70.9%) студенти и 5 (3.3%) дипломирани студенти, таблица 3.60а. Съответно - 24 от студентите са от специалност КСТ, 11 - от Е, 20 – от ЕЕЕО, от КУА - 6, ТКС - 8, МИ - 1, МКМ - 24, ЗТТ - 14, ИКТ - 2, Математика - 2, ученици - 39, таблици 3.60б, 3.60г. Разпределението на изследваните лица според пол и възраст е дадено в таблица 3.60в.

Извършена е първична обработка на данните от анкетата с SPSS и чрез вариационен анализ са получени едномерните емпирични разпределения на извадката, които дават информация за това как са разпределени стойностите на наблюдаваните признаци според честотите на отделните алтернативи на

			В момента сте			Total
			ученик	студент	друго	
Пол	жена	Count	23	47	0	70
		% within Пол	32,9%	67,1%	0,0%	100,0%
		% within В момента сте	59,0%	43,9%	0,0%	46,4%
		% of Total	15,2%	31,1%	0,0%	46,4%
	мъж	Count	16	60	5	81
		% within Пол	19,8%	74,1%	6,2%	100,0%
		% within В момента сте	41,0%	56,1%	100,0%	53,6%
		% of Total	10,6%	39,7%	3,3%	53,6%
Total		Count	39	107	5	151
		% within Пол	25,8%	70,9%	3,3%	100,0%
		% within В момента сте	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	25,8%	70,9%	3,3%	100,0%

(а) Разпределение на анкетираните лица според пол и статут

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	КСТ	24	15,9	15,9	15,9
	Е	11	7,3	7,3	23,2
	ЕЕЕО	20	13,2	13,2	36,4
	КУА	6	4,0	4,0	40,4
	ТКС	8	5,3	5,3	45,7
	МИ	1	,7	,7	46,4
	МКМ	24	15,9	15,9	62,3
	ЗТТ	14	9,3	9,3	71,5
	ИКТ	2	1,3	1,3	72,8
	МИ	2	1,3	1,3	74,2
	ученик	39	25,8	25,8	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(б) Разпределение на анкетираните лица според специалност

		Възраст														Total
		17	18	19	20	21	22	23	24	25	27	28	31	33	36	
Пол	жена	18	5	2	7	3	2	0	0	1	0	0	0	1	0	39
	мъж	11	5	0	8	10	2	3	4	1	2	1	1	0	1	49
Total		29	10	2	15	13	4	3	4	2	2	1	1	1	1	88

(в) Разпределение на анкетираните лица според възраст и пол

	КСТ	Е	ЕЕЕО	КУА	ТКС	МИ	МКМ	ЗТТ	ИКТ	Мат.	Уч.	Общо
жена	6	4	5	3	6	0	15	7	0	0	24	70
мъж	18	7	15	3	2	1	9	7	2	2	15	81
Общо	24	11	20	6	8	1	24	14	2	2	39	151

(г) Разпределение на анкетираните лица според пол и специалност

Таблица 3.60: Разпределение на анкетираните лица въпросите от анкетата. В таблици 3.61, 3.71а, 3.71б са представени основните числови характеристики на разпределенията на въпросите в анкетата.

3.3.1.1 Първа група въпроси: отношение към образователната система и качеството на обучение по математика

Анализът на получените резултати показва, че едва 1.3% от анкетираните лица дават отлична оценка за нивото на обучението по математика в България, 17.2% - много добра, 30.5% - добра, а останалите 51 % дават ниски оценки.

Ниската оценка на анкетираните по този въпрос се потвърждава и от стойностите на основните числови характеристики: средната стойност е 3.54 при медиана 3.51, мода 3 и коефициент на асиметрия 0.168, при което повече от половината анкетирани дават оценка под средната (таблици 3.61 и 3.62).

По отношение мнението на анкетираните лица за това дали обучението по математика, което получават е на най-високо ниво, анализът на резултатите показва, че 20.5% от анкетираните лица отговарят утвърдително, 39.1% дават оценка „по-скоро да“, едва 6.6% дават отрицателен отговор, като повече от половината - 59.6 % дават висока оценка, а едва 16.5% дават ниски оценки.

Високата оценка на анкетираните по този въпрос се потвърждава и от стойностите на основните числови характеристики: средната стойност е 3.57 при медиана 3.68, мода 4 и коефициент на асиметрия (-0.663), при което повече от половината анкетирани дават оценка над средната (таблици 3.61 и 3.63).

Подобни резултати се получават и по отношение отговора на въпроса, свързан с мнението на анкетираните дали считат, че обучението в училище е практически ориентирано. Анализът на резултатите показа, че повече от половината (51%) анкетирани заемат неутрална позиция, 22.5% от анкетираните считат, че обучението по математика е практически ориентирано, а 26.5% категорично отговарят отрицателно на въпроса (таблица 3.64).

Подобен е резултатът и за отговора на въпроса дали образователната система насърчава учащите да използват математически софтуер – едва 25.8% отговарят утвърдително, 27.2% – отрицателно, а почти половината (47%) заемат неутрална позиция. Средната стойност на разпределението на отговорите на този въпрос е 1.99, модата - 2, медианата - 1.98, таблици 3.65 и 3.61.

Получените данни за въпросите от първата група се потвърждават и при сравнителен анализ на основните числови характеристики на въпросите от първата група, таблица 3.61.

		Вашата обща оценка за нивото на ...	Считате ли, че обучението в училище е ...	Има ли бъдеще компютърно съпроводеното ...	Полезен ли беше според Вас ...	Участвали ли сте в състезание по ...	Бихте ли участвали в състезание по ...	Считате ли, че обучението по математика, ...
N	Valid	151	151	151	151	151	151	151
	Missing	0	0	0	0	0	0	0
Mean		3,54	1,96	4,19	2,67	,04	1,66	3,57
Median		3,00	2,00	5,00	3,00	,00	2,00	4,00
Mode		3	2	5	3	0	1	4
Std. Deviation		,992	,701	1,100	,562	,196	,731	1,123
Skewness		,168	,055	-1,638	-1,496	4,760	,639	-,663
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,197	,197	,197	,197
Kurtosis		-,711	-,945	2,168	1,295	20,934	-,877	-,166
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,392	,392	,392	,392

Таблица 3.61: Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 1 част

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	слаба	23	15,2	15,2	15,2
	средна	54	35,8	35,8	51,0
	добра	46	30,5	30,5	81,5
	мн. добра	26	17,2	17,2	98,7
	отлична	2	1,3	1,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.62: Разпределение на отговорите на въпроса „Вашата обща оценка за обучението по математика“

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	10	6,6	6,6	6,6
	по-скоро не	15	9,9	9,9	16,6
	не мога да преценя	36	23,8	23,8	40,4
	по-скоро да	59	39,1	39,1	79,5
	да	31	20,5	20,5	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.63: Разпределение на отговорите на въпроса „Считате ли, че обучението по математика, което получавате е на високо ниво“

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	40	26,5	26,5	26,5
	донякъде	77	51,0	51,0	77,5
	да	34	22,5	22,5	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.64: Разпределение на отговорите на въпроса „Считате ли, че обучението в българското училище е практически ориентирано"

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	41	27,2	27,2	27,2
	донякъде	71	47,0	47,0	74,2
	да	39	25,8	25,8	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.65: Разпределение на отговорите на въпроса „Според Вас, българската образователна система насърчава ли учениците да използват математически софтуер?"

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	9	6,0	6,0	6,0
	по-скоро не	5	3,3	3,3	9,3
	не мога да преценя	10	6,6	6,6	15,9
	по-скоро да	51	33,8	33,8	49,7
	да	76	50,3	50,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.66: Разпределение на отговорите на въпроса „Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика?"

3.3.1.2 Втора група въпроси: отношение към компютърно съпроводеното обучение, резултати от обучението по математика с MATLAB и нагласа за участие в олимпиада по Компютърна математика

Мненията на анкетираните по втората група въпроси се различават съществено от първата група. На въпроса дали има бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика, повече от 84% дават отговор „да“ или „по-скоро да“. Едва 9.3% са скептично настроени за това, че използването на CAS ще спомогне за повишаване на качеството на обучение по математика (таблица 3.66). Положителната нагласа на голяма част от анкетираните по този въпрос се потвърждава и след анализа на кръговата диаграма, изобразена на фигура 3.25.

На въпроса дали използването на системи за математически изчисления ще спомогне за повишаване качеството на обучение по математика, анкетираните лица са дали отговори, разпределени по следния начин: почти половината от анкетираните (47.7%) дават утвърдителен отговор, 39.1% отговарят „донякъде“ и едва 13.2% отговарят отрицателно, таблица 3.67.

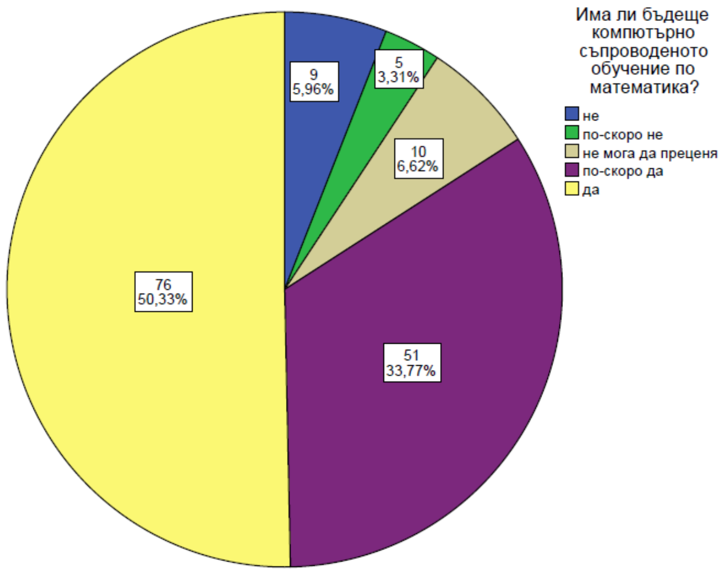
По въпроса за дистанционното обучение, мненията на анкетираните показват сходна тенденция. Около 75% от анкетираните считат, че дистанционното обучение с подходящи учебни материали и с подходяща система за математически изчисления ще спомогне за повишаване качеството на математическото образование, таблица 3.68.

Над 80% от анкетираните дават висока оценка (над 4) и на идеята част от часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на система за математически изчисления, таблица 3.69а, а едва 10 % дават ниска оценка.

Интерес от гледна точка на обучението с MATLAB представлява вариационният анализ на въпросите, свързани с използването на системата MATLAB и ползата от обучението по математика с нея. Почти 60% я определят като лесна за усвояване и едва 8% срещат сериозни трудности, таблица 3.69б.

На въпроса дали ще използват системата за решаване на задачи по математика, около 80% отговарят утвърдително и едва 3% твърдо не възнамеряват да я използват, таблица 3.69в. Не е за подценяване и факта, че почти 90% от учащите не са използвали преди система за математически изчисления, но пък затова само 4.6% не намират полза от преподавания материал, таблици 3.69г, 3.70а.

Подобни са отговорите на анкетираните лица и на въпроса за това дали



Фигура 3.25: Кръгова диаграма - разпределение на анкетираните лица според мнението по въпроса „Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика?"

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	20	13,2	13,2	13,2
	донякъде	59	39,1	39,1	52,3
	да	72	47,7	47,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.67: Разпределение на анкетираните лица според мнението по въпроса: „Според Вас, използването на компютърни системи за изчисления ще спомогне за повишаване качеството на обучение по математика?"

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	5	3,3	3,3	3,3
	по-скоро не	19	12,6	12,6	15,9
	не мога да преценя	15	9,9	9,9	25,8
	по-скоро да	54	35,8	35,8	61,6
	да	58	38,4	38,4	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.68: Разпределение на анкетираните според мнението по въпроса „Считате ли, че дистанционното обучение с подходящи учебни материали и използване на система за математически изчисления би довело до по-високо качество на обучението?"

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	4	2,6	2,6	2,6
	3	7	4,6	4,6	7,3
	4	37	24,5	24,5	31,8
	5	56	37,1	37,1	68,9
	6	47	31,1	31,1	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(а) Разпределение на анкетираните според оценката на идеята „част от часовете по математика да се провеждат в компютърна зала“

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	много лесна	33	21,9	21,9	21,9
	по-скоро лесна	56	37,1	37,1	58,9
	не мога да преценя	21	13,9	13,9	72,8
	по-скоро трудна	29	19,2	19,2	92,1
	много трудна	12	7,9	7,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(б) Разпределение на анкетираните според оценката на степента на трудност на MATLAB

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	7	4,6	4,6	4,6
	по-скоро не	16	10,6	10,6	15,2
	не мога да преценя	21	13,9	13,9	29,1
	по-скоро да	53	35,1	35,1	64,2
	да	54	35,8	35,8	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(в) Разпределение на анкетираните според това дали възнамеряват да използват системата MATLAB за решаване на задачи по математика

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	135	89,4	89,4	89,4
	да	16	10,6	10,6	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(г) Разпределение на анкетираните лица според това дали са използвали MATLAB

Таблица 3.69: Разпределение на отговорите по втора група въпроси

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	7	4,6	4,6	4,6
	не мога да преценя	36	23,8	23,8	28,5
	да	108	71,5	71,5	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(а) Разпределение на анкетираните лица според отговорите на въпроса „Полезен ли беше за вас преподаваният материал?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	4	2,6	2,6	2,6
	по-скоро не	5	3,3	3,3	6,0
	не мога да преценя	18	11,9	11,9	17,9
	по-скоро да	65	43,0	43,0	60,9
	да	59	39,1	39,1	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(б) Разпределение на анкетираните лица според това дали използването на система за изчисления ще им помага в бъдеще

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	145	96,0	96,0	96,0
	да	6	4,0	4,0	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(в) Разпределение на анкетираните лица според това дали са участвали в олимпиада по Компютърна математика

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	не	75	49,7	49,7	49,7
	не знам	53	35,1	35,1	84,8
	да	23	15,2	15,2	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

(г) Разпределение на анкетираните лица според това дали възнамеряват да участват в олимпиада по Компютърна математика

Таблица 3.70: Разпределение на отговорите по втора група въпроси - продължение

		Според вас, образователнат а система ...	Според вас, използването на CAS ще ...	Считате ли, че дистанционното обучение с ...	Оценете по скалата от 2 до 6 идеята ...	Каква е Вашата оценка степента на ...	Ще продължите ли да използвате ...	Считате ли, че изп. на CAS ще Ви помага в ...
N	Valid	151	151	151	151	151	151	151
	Missing	0	0	0	0	0	0	0
Mean		1,99	2,34	3,93	4,89	2,54	3,87	4,13
Median		2,00	2,00	4,00	5,00	2,00	4,00	4,00
Mode		2	3	5	5	2	5	4
Std. Deviation		,730	,703	1,135	,988	1,248	1,153	,933
Skewness		,020	-,598	-,949	-,753	,485	-,902	-1,302
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,197	,197	,197	,197
Kurtosis		-1,109	-,801	-,043	,328	-,882	-,041	1,949
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,392	,392	,392	,392

(а) Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 2 част

		Използвали ли сте преди CAS?	Каква оценка имате по математика?	Каква оценка имате по ИИТ?	Вашата възраст
N	Valid	151	151	151	88
	Missing	0	0	0	63
Mean		,11	4,1523	4,6623	20,10
Median		,00	4,0000	5,0000	20,00
Mode		0	3,00	4,00	17
Std. Deviation		,309	1,25830	1,05127	3,683
Skewness		2,586	,237	-,054	1,937
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,257
Kurtosis		4,751	-1,275	-1,248	4,879
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,508

(б) Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 3 част

Таблица 3.71: Вариационен анализ за втора група въпроси считат, че използването на система за математически изчисления ще им помага в бъдеще: над 82% възнамеряват да използват система за изчисления, а само 2.6% отговарят отрицателно, таблица 3.70б.

Във втората група въпроси има такива, които касаят участието на анкетираните в състезание по Компютърна математика. Тези въпроси имат мотивиращ характер за студенти и ученици, които все още не са участвали в олимпиадата, но имат интерес към нея. Анализът на отговорите по тази подгрупа въпроси показа, че интересът към олимпиадата е значителен и дори хора, които не са участвали досега, възнамеряват да го направят в бъдеще: 6 анкетирани студенти (4%) съобщават, че са участвали в олимпиада по Компютърна математика, а 23 (15.2%) заявяват, че искат да участват в бъдеще, таблици 3.70в, 3.70г.

Вариационният анализ на втората група въпроси е обобщен в таблици 3.71а и 3.71б. Например, оценката на анкетираните (по скала от 2 до 6) относно идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на CAS има средна стойност 4.89 и медиана 5, т.е. повече от половината от анкетираните дават много добра оценка (таблици 3.71а и 3.69а). Модата също е 5, което показва, че най-често срещаната оценка също е много добра. Близостта на трите стойности показва, че разпределението е близко до симетрично, за което говори и близостта до нула на коефициента на асиметрия -0.753 (лека лява асиметрия). Останалите резултати се тълкуват аналогично.

Изследователски интерес предизвиква двумерното разпределение между признаците „оценка на степента на трудност на системата MATLAB“ и „статут на анкетирания“ - ученик, студент, дипломиран студент. Анализът на резултатите от анкетното проучване показва (Таблица 3.72), че 66 студенти оценяват системата като лесна; тези 66 студенти представляват 74.2% от всички, оценяващи системата като лесна, 61.7% от всички студенти и 43.7% от всички анкетирани. По аналогичен начин се тълкуват [79] и останалите данни в таблицата.

3.3.2 Изследване на корелационни зависимости между качествени признаци

От познавателна гледна точка представлява интерес съществуването на евентуална зависимост между признаците „оценка по математика“ и „оценка

		ученик	студент	друго	Общо
лесна	брой	20	66	3	89
	% трудност	22.5%	74.2%	3.4%	100.0%
	% В момента сте	51.3%	61.7%	60.0%	58.9%
	% of Total	13.2%	43.7%	2.0%	58.9%
нито лесна, нито трудна	брой	8	13	0	21
	% трудност	38.1%	61.9%	0.0%	100.0%
	% В момента сте	20.5%	12.1%	0.0%	13.9%
	% of Total	5.3%	8.6%	0.0%	13.9%
трудна	брой	11	28	2	41
	% трудност	26.8%	68.3%	4.9%	100.0%
	% В момента сте	28.2%	26.2%	40.0%	27.2%
	% of Total	7.3%	18.5%	1.3%	27.2%
Total	брой	39	107	5	151
	% трудност	25.8%	70.9%	3.3%	100%

Таблица 3.72: Кростаблица: статут на анкетирания - трудност на системата MATLAB

на степента на трудност на системата MATLAB". Такава евентуална зависимост се проверява чрез коефициента на контингенция (Kramer's V), тъй като в случая и двата изследвани признака са качествени [2, 24, 26, 75, 52, 53, 79, 101, 102, 104, 106].

Стойността на коефициента на Phi е 0.245, на Крамер е 0.123, при вероятностни стойности на статистиките 0.909, което показва, че и двата коефициента са статистически незначими, таблица 3.73. Следователно, между двата признака не съществува зависимост и не може да се твърди, че отличниците определят системата като лесна за усвояване, а слабите - като трудна, т.е. оценяването на степента на трудност не зависи от оценката по математика.

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.245	0.909
	Cramer's V	0.123	0.909

Таблица 3.73: Изследване на зависимост между „оценка по математика" и „оценка на степента на трудност": коефициенти на Phi и Cramer

Аналогично се изследва съществуването на зависимост между признаците „оценка по Информатика и информационни технологии" и „оценка на степента на трудност на системата MATLAB". Изследването на такава евентуална зависимост ще отговори на въпроса дали само студенти, които са отличници по Информатика, оценяват системата MATLAB като лесна, или такова е мнението и на студенти, които се справят трудно с информационните технологии.

Стойността на коефициента на Phi в този случай е 0.268, а на Крамер - 0.154, при вероятностни стойности на статистиките Approx. Sig. 0.545, което показва, че и двата коефициента са статистически незначими. Следователно, между двата признака не съществува зависимост, т.е. оценката на степента на трудност на системата MATLAB не зависи от оценката на анкетирания по ИИТ, таблица 3.74.

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.268	0.545
	Cramer's V	0.154	0.545

Таблица 3.74: Изследване на зависимост между „оценка по информатика и ИТ“ и „оценка на степента на трудност“: коефициенти на Phi и Cramer

По аналогичен начин се доказва, че не съществува корелация между формата на обучение (редовно, задочно) и оценката за степента на трудност на MATLAB, таблица 3.75. Прави впечатление, че студенти в задочна форма на обучение, които по правило са силно мотивирани при усвояването на материала, дават дори по-добри резултати при обучението по Компютърна математика от студентите - редовно обучение. Такава тенденция се потвърждава и от резултатите от проучването, разгледано в Раздел 3.1.

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.219	0.837
	Cramer's V	0.155	0.837

Таблица 3.75: Изследване на зависимост между „форма на обучение“ и „оценка на степента на трудност“: коефициенти на Phi и Cramer

3.3.3 Клъстерен анализ

Целта на клъстерния анализ [45] е n на брой обекти (анкетирани) да се групират в групи (клъстери) като се използват p на брой променливи (признаци) [24, 57, 75, 76, 91, 101, 102, 104].

Хипотезата при изследването е, че по отношение оценката на идеята за компютърно съпроводено обучение и ползата от него, както и намеренията на анкетираните да използват система за математически изчисления в бъдеще, анкетираните се оформят в групи (клъстери). В качеството на изследвани признаци се използват: „1-Оценете по скала от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на CAS“, „2-Ще продължите ли да използвате MATLAB за решаване на математически задачи?“, „3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване нивото на обучение по математика?“ и „4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика?“.

Първо, чрез вариационен анализ на съответните променливи се установява разпределението на анкетираните според отговорите им по изброените по-горе въпроси, които са изобразени чрез колонни диаграми на разпределенията, фигури 3.26, 3.27, 3.28, 3.29.

От графичните изображения се вижда, че голяма част от анкетираните лица подкрепят идеята за компютърно съпроводено обучение по математика. Предполагаме, че е възможно те да се групират в клъстери. Предварително не е известен броят на клъстерите, предполага се, че са 2 или 3. Установяването на най-подходящия брой клъстери става в процеса на клъстерния анализ.

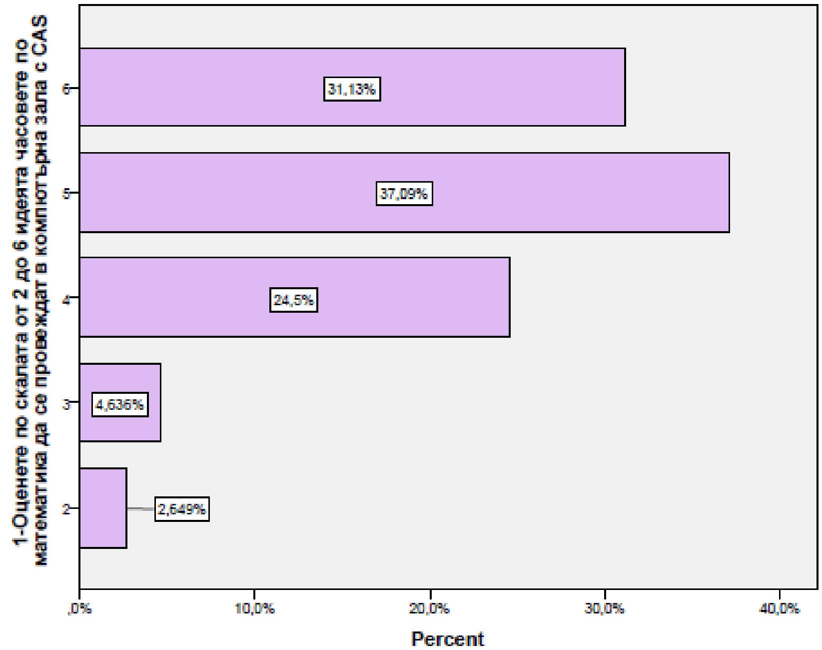
При изследването са използвани трите вида методи за клъстерен анализ [24, 102]:

- Йерархична клъстеризация.
- Нейерархична клъстеризация.
- Двустъпкова клъстеризация.

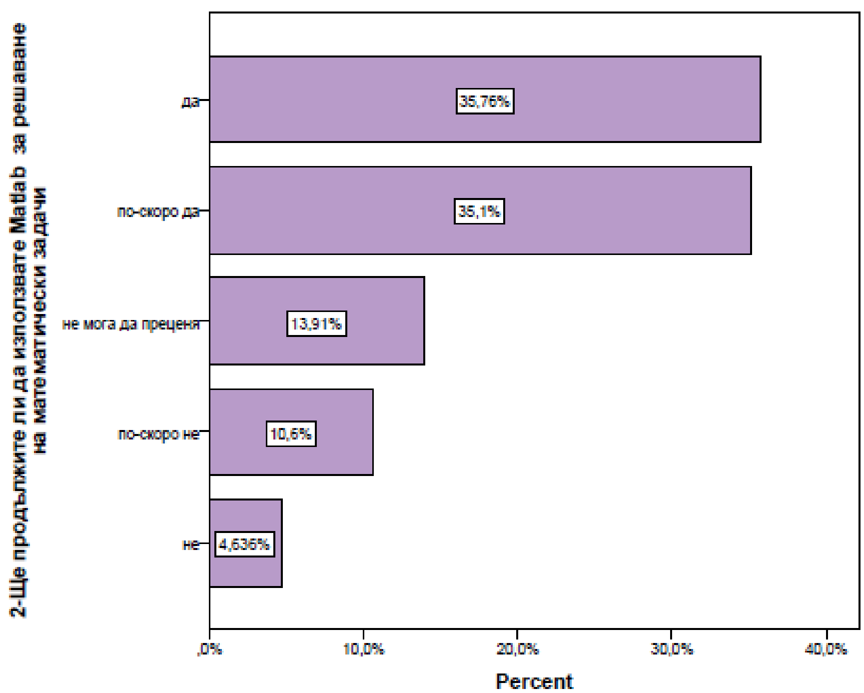
Извършеният анализ е съчетание между йерархична и нейерархична клъстеризация.

Йерархична клъстеризация се използва за определяне броя на клъстерите. Най-напред се прилагат всички възможни подметоди за йерархична клъстеризация, преценява се кога се получава добро решение; записват се резултатите от добрите решения и се сравняват. След това се прилага нейерархична клъстеризация и се записват резултатите. Сравняват се резултатите от йерархична и нейерархична клъстеризация и се определя кой метод е най-подходящ. Накрая се прави двустъпкова клъстеризация, сравняват се получените променливи от най-подходящите методи и се извеждат резултатите.

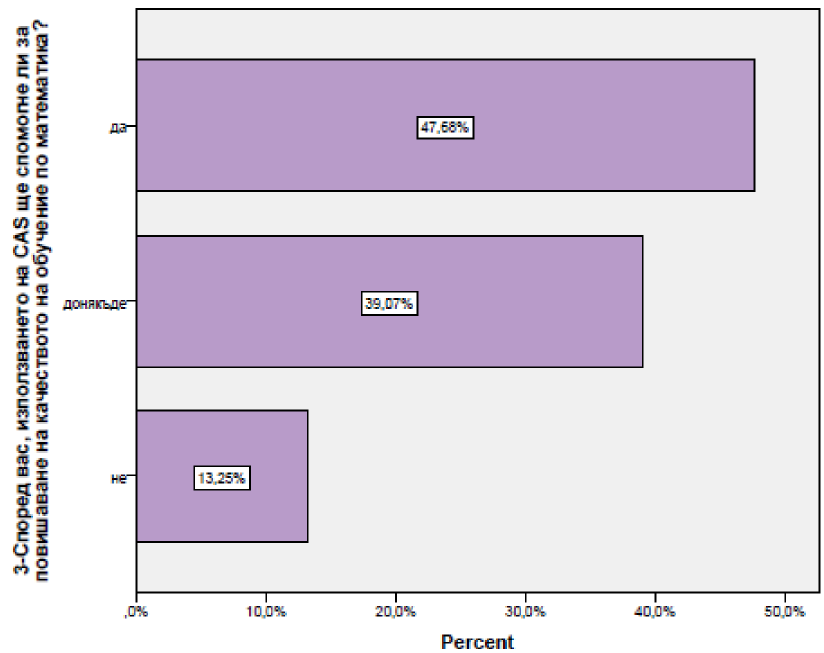
Основен инструмент при йерархична клъстеризация е *дендрограмата*. Това е графично изображение, което показва процеса на формиране на клъстерите



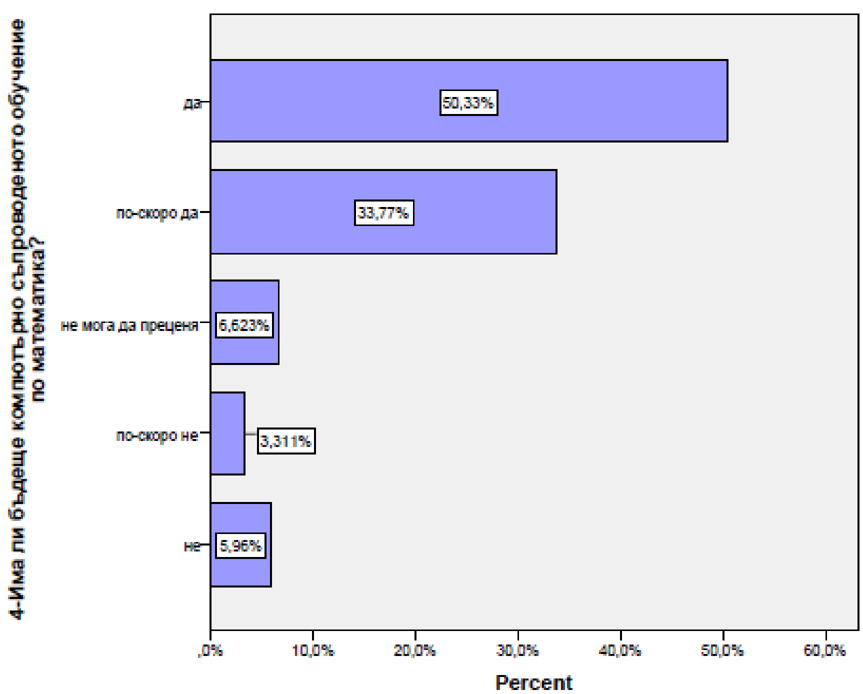
Фигура 3.26: Диаграма от колонен тип - разпределение на отговорите по въпрос №1 при клъстерен анализ



Фигура 3.27: Диаграма от колонен тип - разпределение на отговорите по въпрос №2 при клъстерен анализ



Фигура 3.28: Диаграма от колонен тип - разпределение на отговорите по въпрос №3 при клъстерен анализ



Фигура 3.29: Диаграма от колонен тип - разпределение на отговорите по въпрос №4 при клъстерен анализ

чрез присъединяване на случаите към тях. При това, поради наличните в SPSS седем метода за йерархична клъстеризация, е направено изследване с всеки един от тях, след което получените дендрограми се анализират и се избира най-подходящия метод и броя на клъстерите. Основен критерий при анализа на дендрограмите е да се формират малък на брой клъстери с възможно най-голям брой присъединени елементи.

На фигура 3.30 е показана дендрограмата, получена при използването на метода на междугрупово свързване. За конкретното изследване се определя наличието на един голям и два по-малки клъстери, които биха могли да се обединят в един по-голям клъстер. Анализирани са дендрограмите, получени по всички подметоди 3.3.3.1 при различен брой клъстери. Поради големия размер на изображенията, е представена графично само дендрограмата, изобразена на фигура 3.30.

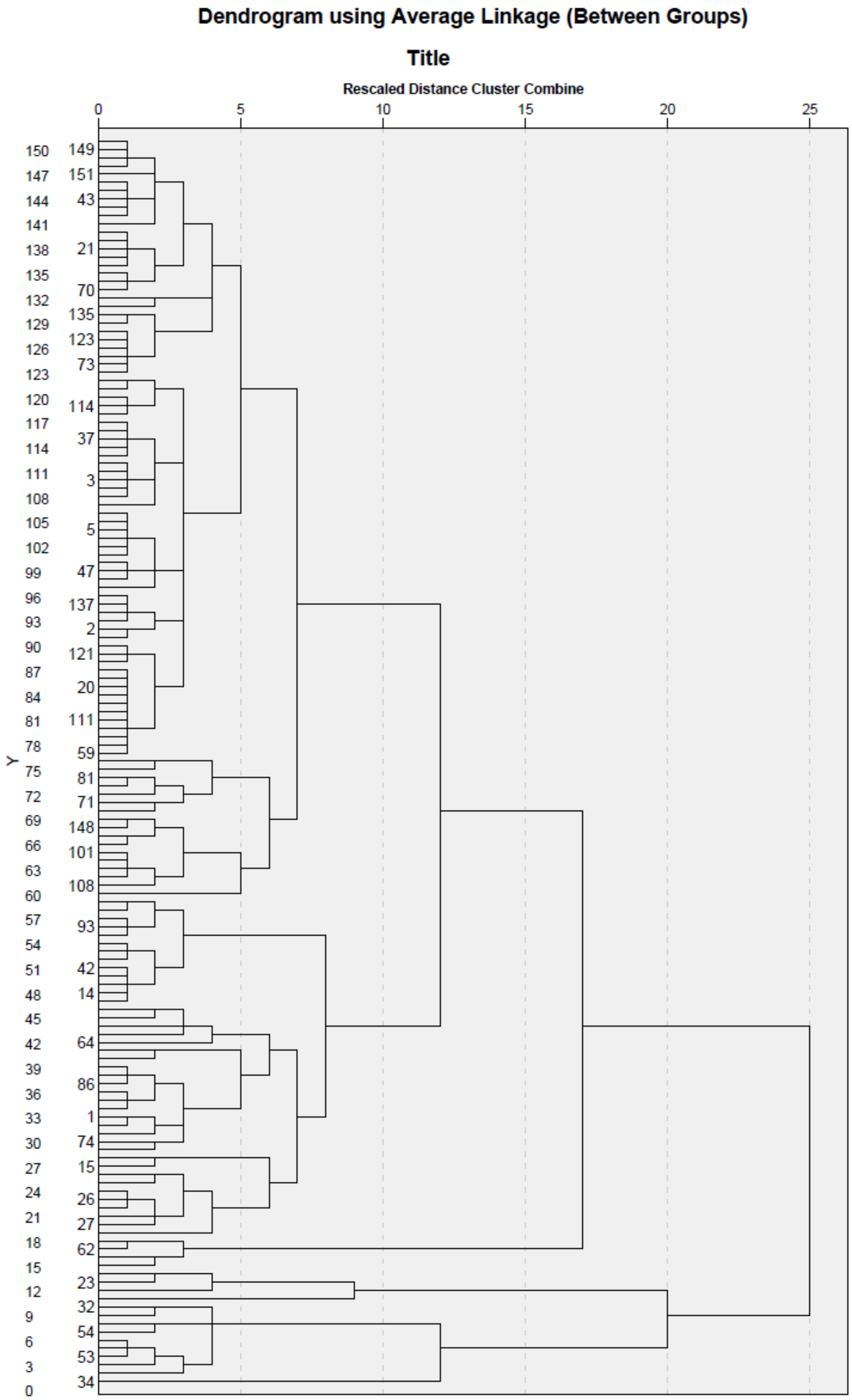
3.3.3.1 Определяне на подходящ брой клъстери и метод на клъстеризация

Определянето на най-подходящия брой клъстери става като се приложат всички подметоди на йерархична клъстеризация:

- метод на междугрупова свързаност (Between-groups linkage);
- метод на вътрешногрупова свързаност (Within-groups linkage);
- метод на най-близкия съсед (Nearest neighbor);
- метод на най-далечния съсед (Furthest neighbor);
- центроиден метод (Centroid clustering);
- медианен метод (Median clustering);
- метод на Вард (Ward's method)

и нейерархична клъстеризация по метода на K-средни (K-means clustering).

При всяко стартиране с определен метод, се избира броят на клъстерите да е от 2 до 4 и се задава всеки път опция за запис на получените резултати в нови променливи. Тези променливи съдържат цели числа от 1 до k, $k = 2, 3, 4$, които показват за всеки случай (анкетиран) към кой номер клъстер е присъединен. След вариационен анализ на генерираните от съответните методи променливи, се получават данни за разпределението на случаите за всеки отделен метод при $k = 2, 3, 4$, таблици 3.76, 3.77, 3.78.



Фигура 3.30: Дендрограма - йерархична клъстеризация по метода на междугрупово свързване

Average Linkage (Between Groups)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	137	90,7	90,7	90,7
	2	14	9,3	9,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Centroid Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	139	92,1	92,1	92,1
	2	12	7,9	7,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Average Linkage (Within Group)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	143	94,7	94,7	94,7
	2	8	5,3	5,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Median Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	21	13,9	13,9	13,9
	2	130	86,1	86,1	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Single Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	150	99,3	99,3	99,3
	2	1	,7	,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Ward Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	136	90,1	90,1	90,1
	2	15	9,9	9,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Complete Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	139	92,1	92,1	92,1
	2	12	7,9	7,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Cluster Number of Case

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	106	70,2	70,2	70,2
	2	45	29,8	29,8	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.76: Резултати от вариационен анализ на променливите, получени при йерархична и нейерархична клъстеризация $k = 2$

Average Linkage (Between Groups)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	137	90,7	90,7	90,7
	2	12	7,9	7,9	98,7
	3	2	1,3	1,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Centroid Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	139	92,1	92,1	92,1
	2	11	7,3	7,3	99,3
	3	1	,7	,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Average Linkage (Within Group)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	54	35,8	35,8	35,8
	2	89	58,9	58,9	94,7
	3	8	5,3	5,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Median Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	21	13,9	13,9	13,9
	2	119	78,8	78,8	92,7
	3	11	7,3	7,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Single Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	140	92,7	92,7	92,7
	2	10	6,6	6,6	99,3
	3	1	,7	,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Ward Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	77	51,0	51,0	51,0
	2	59	39,1	39,1	90,1
	3	15	9,9	9,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Complete Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	120	79,5	79,5	79,5
	2	12	7,9	7,9	87,4
	3	19	12,6	12,6	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Cluster Number of Case

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	97	64,2	64,2	64,2
	2	35	23,2	23,2	87,4
	3	19	12,6	12,6	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.77: Резултати от вариационен анализ на променливите, получени при йерархична и нейерархична клъстеризация $k = 3$

Average Linkage (Between Groups)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	125	82,8	82,8	82,8
	2	12	7,9	7,9	90,7
	3	2	1,3	1,3	92,1
	4	12	7,9	7,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Centroid Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	130	86,1	86,1	86,1
	2	11	7,3	7,3	93,4
	3	9	6,0	6,0	99,3
	4	1	,7	,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Average Linkage (Within Group)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	50	33,1	33,1	33,1
	2	89	58,9	58,9	92,1
	3	4	2,6	2,6	94,7
	4	8	5,3	5,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Median Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	21	13,9	13,9	13,9
	2	30	19,9	19,9	33,8
	3	89	58,9	58,9	92,7
	4	11	7,3	7,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Single Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	140	92,7	92,7	92,7
	2	9	6,0	6,0	98,7
	3	1	,7	,7	99,3
	4	1	,7	,7	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Ward Method

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	59	39,1	39,1	39,1
	2	18	11,9	11,9	51,0
	3	59	39,1	39,1	90,1
	4	15	9,9	9,9	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Complete Linkage

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	96	63,6	63,6	63,6
	2	24	15,9	15,9	79,5
	3	12	7,9	7,9	87,4
	4	19	12,6	12,6	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Cluster Number of Case

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	53	35,1	35,1	35,1
	2	12	7,9	7,9	43,0
	3	72	47,7	47,7	90,7
	4	14	9,3	9,3	100,0
	Total	151	100,0	100,0	

Таблица 3.78: Резултати от вариационен анализ на променливите, получени при йерархична и нейерархична клъстеризация $k = 4$

За да се определи най-удачния избор на метод за клъстеризация, е приложен сравнителен анализ на получените променливи за всеки отделен случай на брой клъстери $k = 2, 3, 4$, като се търси най-доброто съответствие между тях чрез коефициента на контингенция (Contingency Coefficient). Резултатите са дадени в таблици 3.82а, 3.82б, 3.82в, като значимите коефициенти са отбелязани със звезда.

Анализът на получените резултати показва, че:

- При формиране на два клъстера $k = 2$, нейерархичната клъстеризация дава по-лоши резултати в сравнение с методите на йерархична клъстеризация. От всички методи, най-добро съответствие по отношение принадлежност на анкетираните към клъстерите се получава за методите Between-groups clustering (BL) и Ward's method (WM), което личи от най-високата стойност на коефициента на контингенция (0.693). От таблица 3.76 се вижда, че при метода на междугрупово свързване, в първи клъстер попадат 137 случая, а във втори - 14, докато по метода на Вард в първи клъстер има 136 случая, а във втори - 15.

  От същата таблица се вижда, че при метода на най-близкия съсед във втори клъстер попада само един случай, което категорично показва, че методът не е подходящ (коефиценти на контингенция под 0.2), таблица 3.82а.

  Прави впечатление, че по медианния метод по-големият клъстер със 130 случая е №2, за разлика от останалите, при които по-голям обем има 1. клъстер. При сравнителен анализ например с метода на най-близкия съсед обаче се установява, че несъответствието е 4.8%. Дисбалансът се дължи на различния начин на номериране на клъстерите, таблица 3.79.

- При формиране на три клъстера $k = 3$, най-добро съответствие между променливите, показващи принадлежност към трите клъстера има при метода на междугрупово свързване (BG) и при центроиден метод (CC) - най-висок коефициент на контингенция 0.764, таблица 3.82б. Разпределението на случаите е съответно: 139, 11, 1 по центроиден метод и 137, 12, 2 при метода на междугрупово свързване съответно за 1, 2 и 3-ти клъстер, таблици 3.77, 3.80.

- При формиране на четири клъстера $k = 4$, най-добро съответствие между променливите, показващи принадлежност към четирите клъстера има отново при методите на междугрупово свързване (BG) и центроиден метод (CC) - най-висок коефициент на контингенция 0.819, таблица 3.82в. Разпределението на случаите е съответно: 130, 11, 9, 1 по метода на междугрупово свързване и 125, 12, 2, 12 при центроиден метод, таблици 3.78, 3.81.

- Основният извод от комбинираното прилагане на йерархична и нейерархична клъстеризация е, че е удачно да се изберат *два* на брой клъстери, тъй като при деление на 3 клъстера повечето случаи са разпределени в 2 клъстера, а в третия попадат малко единици. По отношение на метода, най-подходящ се оказва *методът на междугрупово свързване*, който е с най-добри показатели при всички сравнения.

3.3.3.2 Определяне на съдържателния смисъл на клъстерите и приноса на признаците при формиране на клъстерите

След определяне на броя на клъстерите и най-ефективния метод на клъстеризация, възникват логично два въпроса:

- Какъв е профилът на отделните случаи, попадащи във всеки един от клъстерите?
- Доколко (в каква степен) всеки един от разглежданите признаци (въпроси) допринася за разделянето на случаите в клъстери?

3.3.3.3 Дисперсионен анализ

За да се отговори на горните въпроси и да се провери в каква степен отделните признаци разделят случаите в клъстери, се извършва *дисперсионен анализ*. Като независими променливи се въвеждат четирите признаци (въпроси), използвани при клъстеризацията, а като зависими променливи - получените след клъстеризация променливи, показващи принадлежността на всеки отделен случай към клъстерите.

Анализът е направен за всички методи на йерархична и нейерархична клъстеризация, при което резултатите показват сходни тенденции. В таблици 3.83а, 3.83б, 3.84 са дадени резултатите от дисперсионния анализ за четирите признака и зависимата променлива, получена по метода на междугрупово свързване, показваща принадлежността на случаите към двата клъстера. Аналогични

Median Method * Single Linkage Crosstabulation

			Single Linkage		Total
			1	2	
Median Method	1	Count	20	1	21
		% within Median Method	95,2%	4,8%	100,0%
	2	Count	130	0	130
		% within Median Method	100,0%	0,0%	100,0%
Total		Count	150	1	151
		% within Median Method	99,3%	0,7%	100,0%

Таблица 3.79: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на най-близкия съсед и медианен метод при $k = 2$

Crosstab

			Centroid Method			Total
			1	2	3	
Average Linkage (Between Groups)	1	Count	137	0	0	137
		% within Between Groups	100%	0,0%	0,0%	100%
	2	Count	1	11	0	12
		% within Between Groups	8,3%	91,7%	0,0%	100%
	3	Count	1	0	1	2
		% within Between Groups	50,0%	0,0%	50,0%	100%
Total		Count	139	11	1	151
		% within Between Groups	92,1%	7,3%	0,7%	100%

Таблица 3.80: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на най-близкия съсед и центроиден метод при $k = 3$

Centroid Method * Average Linkage (Between Groups) Crosstabulation

Count

		Average Linkage (Between Groups)				Total
		1	2	3	4	
Centroid Method	1	125	1	0	4	130
	2	0	11	0	0	11
	3	0	0	1	8	9
	4	0	0	1	0	1
Total		125	12	2	12	151

Таблица 3.81: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на междугрупово свързване и центроиден метод при $k = 4$

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.234⋆	0.341⋆	0.053	0.230⋆	0.230⋆	0.135	0.214⋆
BL	0.234⋆	1	0.595⋆	0.026	0.677⋆	0.677⋆	0.127	0.693⋆
WL	0.341⋆	0.595⋆	1	0.019	0.571⋆	0.571⋆	0.095	0.580⋆
NN	0.053	0.026	0.019	1	0.024	0.024	0.199⋆	0.027
FN	0.230⋆	0.677⋆	0.571⋆	0.024	1	0.673⋆	0.117	0.663⋆
CC	0.230⋆	0.677⋆	0.571⋆	0.024	0.673⋆	1	0.117	0.663⋆
MC	0.135	0.127	0.095	0.199⋆	0.117	0.117	1	0.132
WM	0.214⋆	0.693⋆	0.580⋆	0.027	0.663⋆	0.663⋆	0.132	1

(а) Коефициенти на контингенция при $k = 2$

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.644⋆	0.597⋆	0.576⋆	0.653⋆	0.612⋆	0.561⋆	0.663⋆
BL	0.644⋆	1	0.639⋆	0.672⋆	0.688⋆	0.764⋆	0.503⋆	0.693⋆
WL	0.597⋆	0.639⋆	1	0.559⋆	0.619⋆	0.600⋆	0.516⋆	0.613⋆
NN	0.576⋆	0.672⋆	0.559⋆	1	0.682⋆	0.647⋆	0.437⋆	0.627⋆
FN	0.653⋆	0.688⋆	0.619⋆	0.682⋆	1	0.674⋆	0.579⋆	0.671⋆
CC	0.612⋆	0.764⋆	0.600⋆	0.647⋆	0.674⋆	1	0.457⋆	0.663⋆
MC	0.561⋆	0.503⋆	0.516⋆	0.437⋆	0.579⋆	0.457⋆	1	0.574⋆
WM	0.663⋆	0.693⋆	0.613⋆	0.627⋆	0.671⋆	0.663⋆	0.574⋆	1

(б) Коефициенти на контингенция при $k = 3$

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.658⋆	0.767⋆	0.540⋆	0.616⋆	0.603⋆	0.675⋆	0.600⋆
BL	0.658⋆	1	0.727⋆	0.688⋆	0.776⋆	0.819⋆	0.688⋆	0.700⋆
WL	0.767⋆	0.727⋆	1	0.692⋆	0.698⋆	0.704⋆	0.673⋆	0.683⋆
NN	0.540⋆	0.688⋆	0.692⋆	1	0.682⋆	0.691⋆	0.502⋆	0.628⋆
FN	0.616⋆	0.776⋆	0.698⋆	0.682⋆	1	0.749⋆	0.722⋆	0.732⋆
CC	0.603⋆	0.819⋆	0.704⋆	0.691⋆	0.749⋆	1	0.621⋆	0.677⋆
MC	0.675⋆	0.688⋆	0.673⋆	0.502⋆	0.722⋆	0.621⋆	1	0.686⋆
WM	0.600⋆	0.700⋆	0.683⋆	0.628⋆	0.732⋆	0.677⋆	0.686⋆	1

(в) Коефициенти на контингенция при $k = 4$

Таблица 3.82: Коефициенти на контингенция за методи KC (K-mean clustering), BL (Between-groups linkage), WL (Within-groups linkage), NN (Nearest neighbor), FN (Furthest neighbor), CC (Centroid clustering), MC (Median clustering), WM (Ward's method)

Between-groups Linkage		1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS	2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи	3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика?	4-Има ли бъдеще компютърно съпроводено то обучение по математика?
1	Mean	4,88	3,94	2,45	4,48
	N	137	137	137	137
	Median	5,00	4,00	3,00	5,00
	Std. Deviation	,978	1,069	,630	,631
2	Mean	5,00	3,14	1,29	1,36
	N	14	14	14	14
	Median	5,00	3,00	1,00	1,00
	Std. Deviation	1,109	1,657	,469	,497
Total	Mean	4,89	3,87	2,34	4,19
	N	151	151	151	151
	Median	5,00	4,00	2,00	5,00
	Std. Deviation	,988	1,153	,703	1,100

(а) Признаци и принадлежност към клъстер

ANOVA Table

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	,173	1	,173	,177	,675
	Within Groups	146,131	149	,981		
	Total	146,305	150			
2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	8,104	1	8,104	6,314	,013
	Within Groups	191,247	149	1,284		
	Total	199,351	150			
3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	17,294	1	17,294	45,4	,000
	Within Groups	56,799	149	,381		
	Total	74,093	150			
4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	124,012	1	124,01	322	,000
	Within Groups	57,419	149	,385		
	Total	181,430	150			

(б) Таблица на дисперсионен анализ: ANOVA

Таблица 3.83: Резултати от дисперсионен анализ - метод на междугрупово свързване резултати се получават и за зависимите променливи, показващи принадлежност към клъстерите по останалите методи.

От анализа на резултатите от дисперсионния анализ се оформят няколко важни извода:

- Не се установява зависимост между отговорите на анкетираните по първия въпрос и принадлежността им към клъстерите. Този факт се установява чрез сравняване на средните стойности на признака за двата клъстера. И в двата случая, средната стойност на отговорите по този въпрос е близка до средната стойност на цялата извадка, таблица 3.83а.

  Горният извод се потвърждава и от стойността на равнището на значимост за първи въпрос $Sig = 0.675$, таблица 3.83б. Голямата стойност $Sig = 0.675 > 0.05$ на равнището на значимост показва, че се приема нулевата хипотеза, т.е. няма статистически значима връзка между отговорите на анкетираните по 1. въпрос и принадлежността им към определен клъстер.

  Таблица 3.84 ни носи информация и за коефициентите на корелационно

Measures of Association

	Eta	Eta Squared
1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS * Average Linkage (Between Groups)	,034	,001
2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи * Average Linkage (Between Groups)	,202	,041
3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	,483	,233
4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	,827	,684

Таблица 3.84: Стойности на корелационно отношение и коефициент на определеност при дисперсионен анализ

  отношение и определеност. Анализът на коефициента на определеност $Eta\ square = 0.001$ показва, че едва 0.1 % от различията в принадлежността към определен клъстер се дължат на отговорите на 1. въпрос. Следователно, първият въпрос може да отпадне при окончателното клъстеризиране, тъй като той има незначителен принос при формиране на клъстерите.

- По отношение на останалите въпроси, се наблюдава значима връзка между признаците и принадлежността към определен клъстер. Това личи от таблица 3.83б, където за 2, 3 и 4. въпроси стойностите в последната колона на равнището на значимост са по-малки от риска за грешка 0.05.

  От таблица 3.84 въз основа на стойностите на коефициента на определеност може да се каже, че 4.1% от различията в принадлежността към определен клъстер се дължат на отговорите по 2. въпрос; съответно за 3. въпрос - приносът му при определяне на клъстерите е 23.3% и с най-голям принос - 68.4% е четвъртият въпрос.

След анализа на таблица 3.83а може да се даде и съдържателна характеристика на това, какви случаи попадат съответно в 1. и 2. клъстер. Сравнителният анализ на средните стойности на отговорите на въпросите показва, че в първия клъстер попадат хора, които дават високи оценки по всички въпроси - средната стойност по 1. въпрос е 4.88 при 4.89 за цялата извадка; за 2. въпрос средната стойност е 3.94 при 3.87 за извадката, за 3. въпрос съответно 2.45 при 2.34 за извадката и за 4. въпрос - 4.48 при 4.19 за извадката.

Във 2. клъстер, в който има само 14 случая, попадат хора, дали ниски оценки по 3 от въпросите и оценка близка до средната (дори по-висока от средната) по първи въпрос. За 2. въпрос средната стойност е 3.14 при 3.87 за извадката, за 3. въпрос - 1.29 при 3.24 за извадката и за 4. въпрос - 1.36 при 4.19 за извадката.

Можем условно да наречем 1. клъстер „Клъстер на положителна оценка за Компютърната математика“ и 2. клъстер „Клъстер на отрицателна оценка на КМ“. Разпределенията за всеки един от признаците бяха коментирани в раздел 2.4 на страница 54 и са представени в таблици 3.66, 3.67, 3.69а, 3.69в.

3.3.3.4 Двустъпкова клъстеризация

След като са определени броят на клъстерите, броят единици в клъстерите и профилът на случаите, попадащи в клъстерите, прилагането на метода на *двустъпкова клъстеризация* се използва за проверка и за графично изобразяване на получените резултати.

Методът на двустъпкова клъстеризация в SPSS е най-автоматизираният от всички методи за клъстерен анализ. Допускат се до 15 клъстера, като определянето им става автоматично или при фиксиране на конкретна стойност. В резултат на прилагането му се получава графичен прозорец с богати възможности за анализ на резултатите и, както при другите два типа методи (йерархична и нейерархична клъстеризация), променлива със стойности, показващи за всеки отделен случай номера на клъстера, към който е присъединен.

На фигура 3.31а е изобразен графичен прозорец с резултатите от двустъпковия клъстерен анализ на извадката с отговорите на анкетата по четирите въпроса, дискутирани в раздел 3.3.3.

Полезен инструмент за визуална оценка на качеството на клъстеризацията по този метод е *измерител за близост и различие* (Silhouette measure of cohesion and separation), позициониран в трицветна ска́ла. Ако измерителят е в червената зона, то резултатът е лош, ако е в жълтата зона - задоволителен и ако е в зелената зона - добър.

Получените резултати по метода на двустъпкова клъстеризация са сходни с тези, получени по метода на междугрупово свързване и метод на Ward - получават се автоматично два клъстера съответно със 136 и 15 случая, като измерителят на близост и различие показва добро качество на модела, тъй като е позициониран в зелената зона, фигура 3.31. В дясната част на графичния прозорец е изобразена кръгова диаграма, изобразяваща клъстерите и таблица с характеристиките на клъстера, както и съотношението между най-големия и най-малкия клъстер (9:1).

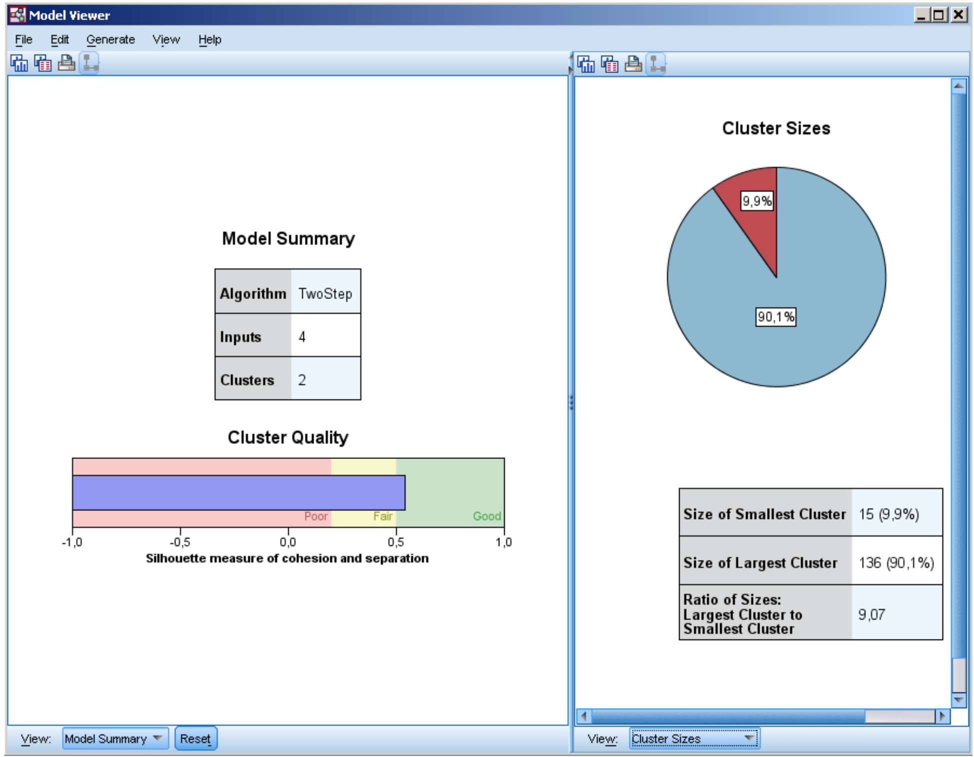
Чрез различни графични инструменти се извлича информация от графичния прозорец за най-важните въпроси както общо за клъстера, така и отделно за отделните клъстери, фигури 3.31, 3.32.

На фигура 3.32б са изобразени отделните признаци, подредени по степен на важност, като първият по важност признак има мярка единица. От графиката се потвърждава заключението, че 1. въпрос не влияе съществено при формиране на клъстерите - неговият принос е 0.01 от мярката - 4. въпрос.

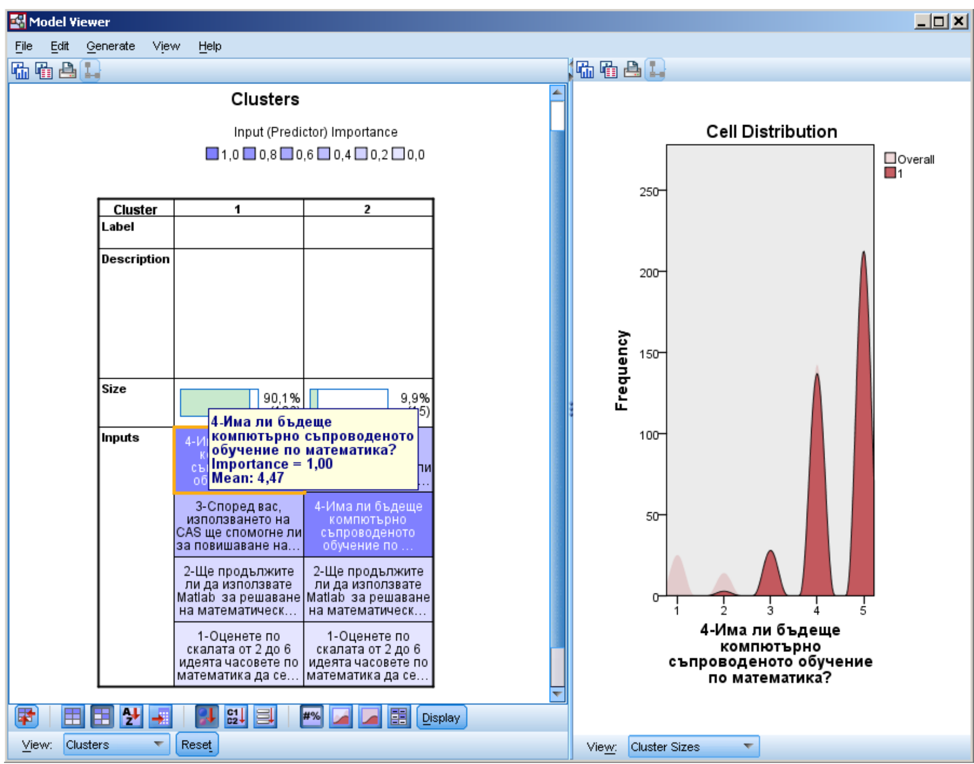
Получена е информация и за разпределението на отговорите по всички въпроси за отделните клъстери, сравнени с отговорите общо за извадката (изобразени с транспарентни цветове). Например за 2. въпрос във втория клъстер разпределението е изобразено графично на фигура 3.32а, а на фигура 3.31б е изобразено разпределението на отговорите на 4. въпрос в 1. клъстер.

Накрая се проверява при фиксиран брой клъстери $k = 3$ какво е качеството на клъстеризацията, фигура 3.33. От графиката се вижда, че при три клъстера качеството на модела е по-лошо, отколкото при два клъстера - измерителят на близост и различие е в жълтата (средна) зона.

След прилагането на всички методи за клъстерен анализ, се прави сравне-

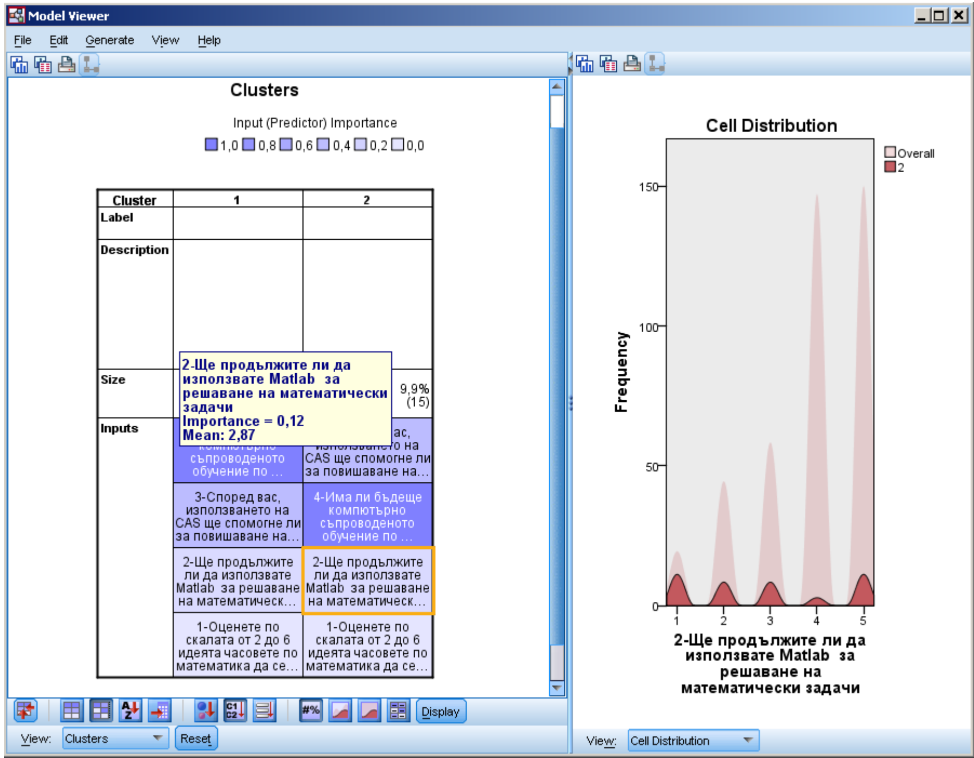


(а) Двустъпкова клъстеризация - екран 1

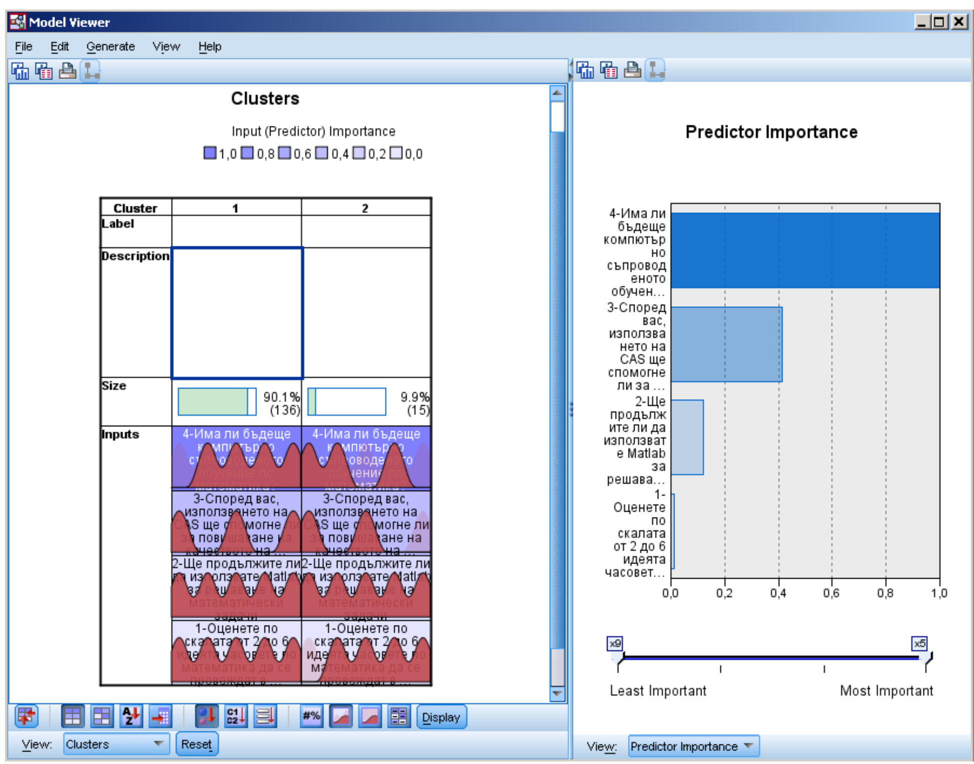


(б) Двустъпкова клъстеризация - екран 2

Фигура 3.31: Графично изобразяване на модел с два клъстера - екран 1 и 2

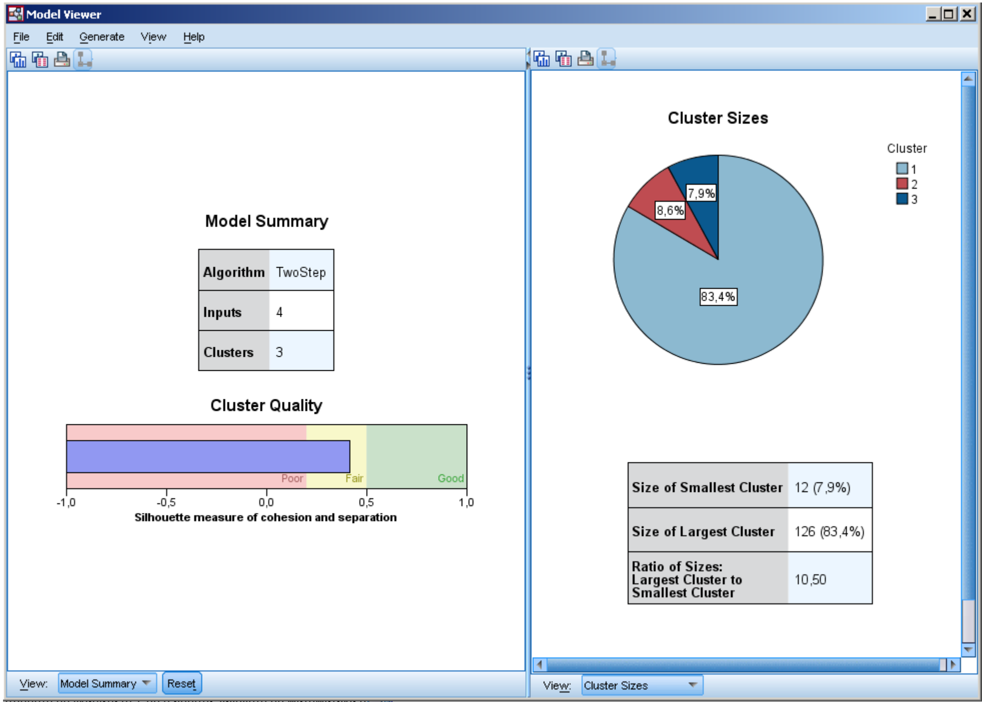


(а) Двустъпкова клъстеризация - екран 3



(б) Двустъпкова клъстеризация - екран 4

Фигура 3.32: Графично изобразяване на модел с два клъстера - екран 3 и 4



Фигура 3.33: Графично изобразяване на модел с три клъстера при двустъпкова клъстеризация - екран 5

TwoStep Cluster Number * Average Linkage (Between Groups)

Crosstab

Count

		Average Linkage (Between Groups)		
		1	2	Total
TwoStep Cluster Number	1	135	1	136
	2	2	13	15
Total		137	14	151

Symmetric Measures

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Contingency Coefficient	,663	,000
N of Valid Cases		151	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

Таблица 3.85: Сравнение между методите на двустъпкова клъстеризация и междугрупово свързване ние на съответствието между променливите, получени по методите на междугрупово свързване и двустъпкова клъстеризация чрез сравнителен анализ на съответните променливи, таблица 3.85. Полученият значим коефициент на контингенция 0.663 показва добро съответствие между променливите, показващи принадлежност на случаите към двата клъстера по метода на междугрупово свързване и метода на двустъпкова клъстеризация.

3.3.4 Изводи

В резултат на проведената анкета по Компютърна математика бяха направени следните изводи [45]:

- Почти половината от анкетираните младежи дават оценка под средната за нивото на обучение по математика, като по-малко от една четвърт считат, че обучението по математика е практически ориентирано. Едва четвърт от младите хора са на мнение, че образователната система насърчава учащите да използват математически софтуер.
- Налице е позитивна нагласа към математическия софтуер, като тази нагласа не зависи от оценките по математика и ИИТ или от формата на обучение.
- Голяма част от анкетираните не са използвали преди система за математически изчисления, но въпреки това оценяват ползата от нея и възнамеряват да я използват в бъдеще.
- Анкетираните в по-голямата си част считат, че дистанционно обучение по математика с използване на подходящ софтуер и учебни материали би довело до повишаване качеството на обучение.
- Всички анкетирани се групират в два клъстера според това каква е тяхната оценка за ползата от компютърната математика и намерението им да я използват в бъдеще. При това над 90% от анкетираните оформят клъстера на „положително оценяващи компютърната математика“.

След анализиране на резултатите от анкетното проучване бяха натрупани достатъчно данни, показващи преобладаващо мнение за ползата от компютърно съпроводеното обучение и доказващи предпочитанията на анкетираните студенти и ученици към такъв тип обучение пред традиционното обучение по математика.

Тези изводи дават ясно и категорично отговори на поставените от нас въпроси и показват, че образователните цели, които сме си поставили в процеса на обучение по Компютърна математика, са постигнати [45].

Заключение

Проведеното изследване за ефективността от прилагането на компютърни системи за изчисления при обучението по математика на студенти, обучавани по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ по раздел „Числени методи“ продължи повече от седем години, от които пет години за обучение, самообучение и експерименти, а останалите две години - за оформяне на този труд. В този том не са включени файловете с данни на изследваните 3001 лица по около 20 признака, графичните изображения и таблици, получени при изследванията с SPSS, както и множество интерактивни учебни материали, използвани в обучението он-лайн.

Тъй като основният акцент, който бе поставен на стр. (xix) е *изследване и* ***доказване ефективността*** *на описаната методика*, тук ще бъдат обобщени получените резултати по отношение на частта „доказване“.

През месеците на обработка на резултатите от експериментите авторът си постави за цел да докаже убедително чрез разнообразни научни методи хипотезата, изложена на страница 28, а именно:

Обучението по математика с използване на системи за математически изчисления и визуализация е в основата на новата дидактическа парадигма на математическото образование в България в условията на информационното общество. Чрез подхода компютърно съпроводено обучение по математика се постига по-висока ефективност на обучението по математика в сравнение с традиционния подход.

Според нас, получените в глава 3 резултати от анализа на проведените анкета и експериментални изследвания, **доказват** по-висока ефективност на приложената от автора методика на компютърно съпроводено обучение по

Висша математика в сравнение с традиционната методика.

Освен *доказването на основната хипотеза*, в раздел 3.1.4 на стр. 94 бе получен адекватен **дискриминантен модел**, чрез който може да бъде направена прогноза (с определена вероятност) дали „нов“ студент с определен профил би си повишил успеха по математика ако се обучава по експерименталната или по традиционната методика.

В раздел 3.1.5 на стр. 106 чрез метода **класификационни дървета** авторът извърши класифициране на наблюдаваните признаци чрез различни фактори. На основата на този анализ бяха направени изводи за обучението по математика по експерименталната и традиционната методика, като бе изследвано влиянието на фактора „методика“ върху различни категории студенти и бяха получени множество графични изображения.

В раздел 3.2 на стр. 118 авторът извърши **подробен анализ** на диагностичната процедура и провеждането **на диагностичен тест** за изследване резултатите от обучението по Висша математика.

В раздел 3.3 на стр. 144 авторът анализира резултатите от проведена **анкета** „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“, като направи и подробен **клъстерен** анализ с графични изображения и таблици.

Според скромното мнение на автора, този труд дава богати възможности и на други изследователи да приложат предложените методики на изследване в други предметни области и за други категории обучаеми.

март, 2016 г.
гр. Русе

Научни и приложни приноси

❶ Проучено е статуквото на проблема и съвременните тенденции за разрешаване на противоречията в обучението по математика на студенти в инженерни специалности, на основата на което е приета новаторска парадигма за преориентиране на учебния процес в дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“.

❷ Направена е таксономия на системите за компютърна алгебра, на основата на която е избран адекватен софтуер за експерименталните и внедрителски дейности по дисертационния труд, като са прилагани и облачни технологии.

❸ Разработени и операционализирани са *дидактически сценарии*, на основата на които се стига до общ модел за компютърно съпроводено обучение, където ключово място има обучаващата роля на усвояването на синтаксиса на CAS.

❹ Разработени и операционализирани са web-базирани модули за обучение по ключовите теми от дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ в рамките на Проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“ финансиран от Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“.

❺ Създадени и стандартизирани са диагностични тестове за оценка на постиженията от обучението по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ за студенти от инженерни специалности.

❻ Направен е многостранен анализ на резултатите от експерименталното обучение за доказване ефективността на приложените иновативни подходи за обучението по математика на студенти от инженерни специалности в дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“.

Публикации по изложението в дисертационния труд

1. Караколева, С., Велева, Е., *Практически курс по Числени методи за инженерни специалности*, Математика и математическо образование, стр. 260 - 265, 2014. [48] http://www.math.bas.bg/smb/2014_PK/tom_2014/pdf/260-265.pdf

2. Караколева, С., Георгиев, И., Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика, Научни трудове на РУ & СУ, стр. 46 - 51, Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2014. [50] http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp14/6.1/6.1-7.pdf

3. Караколева, С., *Модел на диагностичен тест за контрол на резултатите от компютърно съпроводено обучение по Приложна математика в Русенски университет*, Седма национална конференция „Образованието и изследванията в информационното общество“, Асоциация „Развитие на информационното общество“, ИМИ-БАН, стр. 100 - 111, 2015. [46] http://sci-gems.math.bas.bg/jspui/handle/10525/2448

4. Караколева, С. *Доказване ефективността на компютърно съпроводено обучение по Висша математика в Русенски Университет*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 90-95, Русе, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-15.pdf [43]

5. Караколева, С. *Изследване резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет чрез класификационни дървета*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 102-110, Русе, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-17.pdf [44]

6. Караколева, С. *Клъстерен анализ на резултати от анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 82-89, Русе, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-14.pdf [45]

7. Караколева, С. *Дискриминантен анализ на резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 96-101, Русе, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-16.pdf [42]

8. Lazarov, B., S. Karakoleva. Using GAS syntax for education in Mathematics. IN: Higher education in Bulgaria and the Europe 2020 strategy, International business school, Botevgrad, vol. 3, pp. 914 - 921, IBS Press, ISBN: 978-954-943-24-35. [128]

http://www.ibsedu.com/media/Conference/2011/_2020_3.pdf

Библиография

[1] Андреев, М. *Процесът на обучението: Дидактика*. Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, 1996.

[2] Афифи, А., Эйзен, С. *Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ*. Мир, Москва, 1982.

[3] Банков, К. Проблеми в обучението на учители по математика. В: *Математика и математическо образование*, том 39, София, 2010. http://www.math.bas.bg/smb/2010_PK/tom/pdf/073-085.pdf.

[4] Банков, К. Широкомащабни оценъчно-диагностични педагогически изследвания. В: *Хабилитационен труд за академичната длъжност професор*, София, 2012. http://www.fmi.uni-sofia.bg/habil_disert_trudove/habilitacionni_trudove_papka/habil_trud_K_Bankov.

[5] Банков, К. Обучението по математика е в дълбока криза. В: *Дидактическо моделиране*, том 5. Институт по математика и информатика,БАН, 2015. http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/Articles/Volume05/2015_01_Kiril_Bankov.pdf.

[6] Бижков, Г. *Методология на качествените педагогически изследвания*. *Педагогика*, №1, 1994.

[7] Бижков, Г. *Теория и методика на дидактическите тестове*. Просвета, София, 1996.

[8] Бижков, Г. *Педагого-психологическа диагностика, Втора част: Методи*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2003.

[9] Бижков, Г. *Педагого-психологическа диагностика, Първа част: Основи*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2003.

[10] Бижков, Г., Краевски, В. *Основи на педагогиката*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2005.

[11] Бижков, Г., Краевски, В. *Методология и методи на педагогическите изследвания*. Университетско издателство „Св. Кл.Охридски", София, 2007.

[12] Бонева, Ю. *Вероятности и статистика с MATLAB*. Университет по архитектура, строителство и геодезия, 2013. Учебно помагало по статистика.

[13] Буюклиева С. *Компютърна алгебра - въведение*. http://www.uni-vt.bg/pages/1356/uplft/01CompAlgUvod.pdf.

[14] Василева, Р. *Формиране на умения за решаване на обикновени диференциални уравнения от първи ред у студентите физици*. *Дисертация за ОНС „доктор"*, 2004.

[15] Велева, Е., Караколева, С. *Числени методи и статистика: теория и практика с MATLAB*. Русенски университет „Ангел Кънчев", Русе, 2011.

[16] Великова Е. *Висша математика с Maple*. Русенски университет „Ангел Кънчев", 2006.

[17] Гатев, К., Косева, Д., Спасов, А. *Обща теория на статистиката*. Наука и изкуство, София, 1991.

[18] Георгиева, М. Гроздев, С. *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. Нова динамична модификация („ndm"-парадигма) в границите на „Аз-концепцията" на математическото моделиране, София, 2005.

[19] Георгиева, П. *Приложение на програмната среда MATLAB в обучението по Висша математика*. В: *ННПК „Новите идеи в образованието – инвестиция в бъдещето"*. Бургаски Свободен Университет, 2014.

[20] Георгиева, П. *Приложение на системата за компютърна алгебра MuPAD в обучението по висша математика*. В: *Годишник на БСУ*, том XXX, стр. 236 – 245. Бургаски Свободен Университет, 2014. http://research.bfu.bg:8080/jspui/bitstream/123456789/572/1/BFU_2014_T_XXX_Georgieva.pdf.

[21] Гмурман, В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*. Высшая школа, Москва, 1977.

[22] Гоев, В. *Статистическа обработка и анализ на информацията от социологически, маркетингови и политически изследвания със SPSS*. Стопанство, София, 1996.

[23] Гочева–Илиева, С. Г. *Въведение в система Mathematica*. Университетско издателство „Паисий Хилендарски", Пловдив, 2009. http://fmi-plovdiv.org/gocheva/KChM-lekcii.pdf.

[24] Гочева–Илиева, С. Г. *Вероятности и статистика*. Университетско издателство „Паисий Хилендарски", 2013. http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/probstatmenu/index.htm.

[25] Гочева–Илиева, С. Г. *Компютърни числени методи*. Университетско издателство „Паисий Хилендарски", 2013. http://fmi-plovdiv.org/gocheva/KChM-lekcii.pdf.

[26] Гочева–Илиева, С. Г. *Приложна математика*. Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, 2013. http://fmi-plovdiv.org/gocheva/PM-lekcii.pdf.

[27] Гроздев, С. Кирилова, Б. *Формативното оценяване в педагодическата практика от Американски колеж в София*. В: *Дидактическо моделиране*, том 2. Институт по математика и информатика,БАН, 2015. http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/Articles/Volume05/2015_02_GrozdevKirilova.pdf.

[28] Гроздев, С. Лазаров, Б. Експерименталната работа в училище. *Математика и информатика*, 56(2): 103–111, 2013. ISSN 1310-2230.

[29] Гроздев, С. Сергеева, Т. Динамическое моделирование как методологическая основа школьного курса геометрии в контексте теории пространственно-образного мышления (пленарный доклад). В: *Сб. Научных трудов межд. конф. „Интеграционные процесы в естественнонаучном и математическом образовании“*, стр. 3-8, Москва, 4-6 февраля 2013. РУДН. ISBN 978 -5-209-04774-2.

[30] Гроздев, С. Терзиева, Т. Статичные и динамичные средства для визуализации методом сортировки массивов. В: *Педагогическая информатика*, том 1, стр. 60 – 72, 2012. ISSN 2070-9013.

[31] Дойчев, С. *Система за откриване и развитие на таланти в 4-7 клас*. *Дисертация за ОНС „доктор“*, 2009.

[32] Дьяконов, В. *MATLAB Учебны курс*. Питер, Санкт Петербург, 2001.

[33] Европейска комисия. Европа 2020: Стратегия за растеж на Европейския съюз. http://ec.europa.eu/europe2020/index_bg.html, 2014.

[34] Европейски съюз. *Key competences for a changing world*, 2010. http://europa.eu/legislation_summaries/education_training_youth/general_framework/ef0020_bg.htm.

[35] Желев, Ж. Евристични похвати при решаване на задачи от изявени ученици и бъдещи учители. *Дисертация за ОНС „доктор“*, 2012.

[36] Иванов, И. *Педагогическа диагностика*. Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, Шумен, 2006.

[37] Калинов, К. *Статистически методи в поведенческите и социалните науки*. Нов Български Университет, София, 2001.

[38] Калинов, К. *Теория на вероятностите и статистика*. Нов Български Университет, София, 2002.

[39] Капралов, С., Манев, М., Балев, М. Използване на системи за компютърна алгебра в обучението по математика в Технически университет – Габрово. В: *Сборник доклади от III Международна научна конференция „Техника, технологии, образование, сигурност“*, стр. 69-73, Велико Търново, 2015. http://techtos.net/sbornik/5-2015.pdf.

[40] Капралов, С., Стефанова, П. *Приложение на MATLAB, MuPAD, Maple и LPSolve в обучението по линейно оптимиране*. В: *Математика и математическо образование*, том 42, стр. 394-398, 2013. http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom_2013/pdf/394-398.pdf.

[41] Караколева, С. *Приложна математика: WEB базиран курс за специалност Индустриално инженерство, Машинно-технологичен факултет*. Русенски университет „Ангел Кънчев“, Център за дистанционно обучение, 2013. http://cdo.uni-ruse.bg.

[42] Караколева, С. *Дискриминантен анализ на резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет*. В: *Научни трудове на РУ & СУ, Том 54, серия 6.1*, стр. 96-101. Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-16.pdf.

[43] Караколева, С. *Доказване ефективността на компютърно съпроводено обучение по Висша математика в Русенски Университет*. В: *Научни трудове на РУ & СУ, Том 54, серия 6.1*, стр. 90-95. Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-15.pdf.

[44] Караколева, С. *Изследване резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет чрез класификационни дървета*. В: *Научни трудове на РУ & СУ, Том 54, серия 6.1*, стр. 102-110. Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-17.pdf.

[45] Караколева, С. *Клъстерен анализ на резултати от анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика*. В: *Научни трудове на РУ & СУ, Том 54, серия 6.1*, стр. 82-89. Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2015. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-14.pdf.

[46] Караколева, С. *Модел на диагностичен тест за контрол на резултатите от компютърно съпроводено обучение по Приложна математика в Русенски Университет*. В: *Седма национална конференция „Образованието и изследванията в информационното общество“*, стр. 100-111, Пловдив, 2015. Асоциация „Развитие на информационното общество“, ИМИ-БАН. http://sci-gems.math.bas.bg/jspui/handle/10525/2448.

[47] Караколева, С., Велева, Е. *Висша математика 3: Практикум по числени методи с MATLAB: WEB базиран курс за инженерни специалности*. Русенски университет „Ангел Кънчев“, Център за дистанционно обучение, 2005. http://ecet.ecs.ru.acad.bg/else/.

[48] Караколева, С., Велева, Е. *Практически курс по Числени методи за инженерни специалности*. *Математика и математическо образование*, стр. 260-265, 2014. http://www.math.bas.bg/smb/2014_PK/tom_2014/pdf/260-265.pdf.

[49] Караколева, С., Георгиев, И. Компютърна математика за мотивирани студенти. В: *Национална конференция „Образованието в информационното общество“*, стр. 120-127, Пловдив, 2013. ИМИ-БАН, ПУ „Паисий Хилендарски“, АРИО. sci-gems.math.bas.bg/jspui/bitstream/10525/2332/1/EIS2013-book-p12.pdf.

[50] Караколева, С. Георгиев, И. *Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика*. В: *Научни трудове на РУ & СУ*, стр. 46-51. Русенски университет „Ангел Кънчев“, 2014. http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp14/6.1/6.1-7.pdf.

[51] Караколева, С., Златаров, П. *Анкета по Компютърна математика*. *Lime Survey*, 2014. http://landing.zlatarov.info/polls/index.php/338631/lang-bg.

[52] Клаус, Г. Ебнер, Х. *Основи на статистиката за психолози, педагози и социолози*. Наука и изкуство, София, 1971.

[53] Климов, Г.П. *Приложна математическа статистика*. Наука и изкуство, София, 1975.

[54] Князева, Е., Гроздев, С., Георгиева, М., Гълъбова, Д. *Синергетичният подход във висшето педагогическо образование (Върху примери от дидактиката на математиката)*. СЛОВО, В. Търново, 2013.

[55] Константинов, М., Петков, П., Тодоров, В., Пашева, В., Тодоров, М., Пелова, Г., Бонева, Ю. *Дискусия: Нов курс по математика за техническите университети*. В: *Математика и математическо образование*, том 40, стр. 147-150, 2011. http://www.math.bas.bg/smb/2011_PK/tom/pdf/147-150.pdf.

[56] Константинов, М., Тодоров, В., Пелова, Г., Бонева, Ю. *Използване на системата MATLAB в техническите университети*. В: *Математика и математическо образование*, том 39, стр. 347-353, 2010. http://www.math.bas.bg/smb/2010_PK/tom/pdf/347-353.pdf.

[57] Крыштановский, А.О. *Анализ социологических данных с помощю пакета SPSS*. Издательский дом ГУ ВШЭ, Москва, 2006.

[58] Лазаров, Б., Василева, А. *Некоторые дидактические аспекты применении профессиональных програмных пакетов в преподавании математики в средней школе и в университетах*. *The Teaching of Mathematics*, X(1): 37–50, 2007.

[59] Лазаров, Б., Караколева, С. Елементи на обучение чрез синтаксис за студенти от професионално направление „технически науки“. В: *Национална конференция „Образованието в информационното общество“*, стр. 210-218, Пловдив, 2011. ИМИ-БАН, ПУ „Паисий Хилендарски“, АРИО. sci-gems.math.bas.bg/jspui/bitstream/10525/1546/1/adis-may-2011-210p-218p.pdf.

[60] Лазаров, Б., Улучев, Р. *Компетентностен подход и програмни пакети в дистанционното обучение по висша математика*. *Съвременни измерения на дистанционното обучение*, 2007.

[61] Луканкин, А. Лазаров, Б. О некоторых аспектах фундаментальной математической подготовки. В: *Дидактическо моделиране*, том 2. Институт по математика и информатика,БАН, 2015. http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/Articles/Volume05/2015_03_LukankinLazarov.pdf.

[62] Николова М. *Изчисления с Mathcad*. ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, Варна, 2008.

[63] Манев, М. Приложение на maple при решаване на параметрични задачи. В: *Математика и математическо образование*, том 42, стр. 412-417, София, 2013. http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom_2013/pdf/412-417.pdf.

[64] Манов, А. *Статистика с SPSS*. Тракия-М, София, 2001.

[65] Маринов, М. *Матрично смятане с Mathematica*. НБУ, София, 2008.

[66] Маринов, М. *Пресмятане на функция от матрица с Mathematica*. В: *Математика и математическо образование*, том 37, стр. 374-380, 2008. http://www.math.bas.bg/smb/2008_PK/2008/pdf/374-380.pdf.

[67] Маринов, М. *Обучение по математика със система за символно смятане*. В: *Математика и математическо образование*, том 44, стр. 137-148, 2015. http://www.math.bas.bg/smb/2015_PK/tom_2015/pdf/137-148.pdf.

[68] Маринов, М., Петров, П., Николова, Е. Пакета Mathematica като средство за преподаване и решаване на задачи по вероятности и статистика. В: БСУ, editor, *Научна конференция „Съвременни технологии – 03"*, стр. 26-31, Бургас, 2002.

[69] Матева, З. Приложение на системите MAPLE и MATLAB в обучението по темата „Уравнения на равнини и прави в пространството". В: *Математика и математическо образование*, стр. 286-291, 2014. http://www.math.bas.bg/smb/2014_PK/tom_2014/pdf/286-291.pdf.

[70] Милков, Д. *Информатика и математически методи в педагогиката*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски", София, 1996.

[71] Митков, А. *Теория на експеримента*. Библиотека за докторанта. Русенски университет „Ангел Кънчев", Русе, 2010.

[72] Митков, А. Минков, Д. *Статистически методи за изследване и оптимизиране на селскостопанската техника*, том 1. Земиздат, София, 1989.

[73] Митков, А. Минков, Д. *Статистически методи за изследване и оптимизиране на селскостопанската техника*, том 2. Земиздат, София, 1993.

[74] Михова, А. Използване на компютърната системата Mathematica при изучаване на определен интеграл. В: *Научни трудове на РУ & СУ, Том 52, серия 6.1*, Русе, 2013.

[75] Моосмюлер, Г. Ребик, Н.Н. *Маркетинговые исследования с SPSS*. ИНФРА-М, Москва, 2009.

[76] Наследов, А. *SPSS-компютерный анализ данных в психологии и социальных науках*. Питер, Москва, 2005.

[77] Наследов, А. *SPSS-профессиональный статистический анализ данных*. Питер, Москва, 2011.

[78] Ненков, В. Формиране на изследователски умения по математика с помощта на информационни технологии. *Дисертация за ОНС „доктор“*, 2010.

[79] Павлов, В. *Приложна статистика*. Препрес, София, 2013.

[80] Пелова, Г. Решаване на геометрични задачи с MATLAB. В: *Първа международна конференция на ЕПУ: Образование, наука, иновации,*, Перник, 2011.

[81] Пелова, Г. *Аналитична и диференциална геометрия с MATLAB*. Университет по архитектура, строителство и геодезия, 2012. http://uacg.bg/filebank/att_4042.pdf.

[82] Пенчева, А. *Ученици направиха първи стъпки в компютърната математика*. *в-к „Утро“*, №7057, 2014.

[83] Петров, В., Костов, С., Тодоров, Т., Ангелова, П., Цанова, С., Иванов, Л., Славева, К., Петков, К. *Ръководство по статистика*. Абагар, Велико Търново, 2004.

[84] Петров, В., Тодоров, Т. *Основи на статистиката*. Абагар, Велико Търново, 2003.

[85] Първанова, Й. Актуално състояние на съвременните очаквания към училищното образование (резултати от емпирично изследване). В: *Годишник на СУ „Св. Кл. Охридски“, Педагогика*, том 105, стр. 227-251, София, 2011. https://scholar.google.bg/citations?user=T_EMIfoAAAAJ&hl=en.

[86] Радилов, Д., Косева, Д., Русев, Ч. *Въведение в статистиката*. Университетско издателство на Икономически Университет, Варна, 2003.

[87] Сергеева, Т. Основные направления обновления содержания школьного математического образования в условиях информационного общества. Planar talk at the 2nd workshop of MITE, БАН, Varna, 2006. http://www.math.bas.bg/~albena/MITE/MITE2/.

[88] Сергеева, Т. Ф., Шабанова, М. В., Гроздев, С. И. *Основы динамической геометрии*. АСОУ, Москва, 2014.

[89] Стахин, Н.А. *Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima*. Федеральное агентство по образованию, Москва, 2008.

[90] Стоименова, Е. *Измерителни качества на тестове*. Институт по математика и информатика, БАН, София, 2000.

[91] Съйкова, И. *Статистическо изследване на зависимости*. Стопанство, 2002.

[92] Тончев, Й. *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, том 1. РУ „Ангел Кънчев“, 2010.

[93] Тончев, Й. *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, том 2. РУ „Ангел Кънчев“, 2010.

[94] Тончев, Й. *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, том 3. РУ „Ангел Кънчев“, 2010.

[95] Тончев, Й. *MATLAB 7. Преобразувания, изчисления, визуализация*. Техника, София, 2010.

[96] Тончев, Й. *MuPAD - Новият символен мотор на MATLAB*. Техника, София, 2011.

[97] Тончев, Й. *Maple. Преобразувания, изчисления, визуализация*. Техника, София, 2013.

[98] Тончев, Й. *Mathematica. Преобразувания, изчисления, визуализация*. Техника, София, 2013.

[99] Тончев, Й. Витлиемов, В. *Оптимизация с MATLAB. Прагматичен подход*. Университетско издатество „Ангел Кънчев“, Русе, 2013.

[100] Харалампиев, К. *Нетрадиционен поглед върху традиционни статистически проблеми*. Балкани, София, 2004.

[101] Харалампиев, К. *Въведение в основните статистически методи за анализ*. ИК „Йозеф Кнехт“, София, 2007.

[102] Харалампиев, К. *SPSS за напреднали*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2007.

[103] Харалампиев, К. *Работа с данни в SPSS*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2009.

[104] Харалампиев, К. *SPSS - статистически решения за приложни изследователски задачи*. ИК „Балон“, София, 2012.

[105] Хвилон, Е., Гроздев, С., Върбанова, Е., Деков, Д., Желев, Ж., Ненков, В., Пенев, П. *Дискусия „Математика с компютър (образователни традиции и дигитални технологии - ръка за ръка)“*. В: *Математика и математическо образование*, том 43, стр. 79-82, София, 2014. http://www.math.bas.bg/smb/2014_PK/tom_2014/pdf/079-082.pdf.

[106] Хог, Р., Крейг, А. *Увод в математическата статистика*. Техника, София, 1982.

[107] Христов, И. За някои проблеми и решения в българското образование. В: *Преподаване, учене и качество във висшето образование*, стр. 83-104, Ботевград, 2011. http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom_2013/pdf/412-417.pdf.

[108] ЦКОКУО. *Резултати от участието на България в програмата за международно оценяване на учениците PISA 2012*. http://www.ckoko.bg/upload/docs/2013-12/PISA_2012.pdf, 2013.

[109] Angelova, J. Halachev, P. *Monitoring in educational process via students grade points*. В: *Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, том 41, стр. 281-287, 2012. http://www.math.bas.bg/smb/2012_PK/tom_2012/pdf/281-287.pdf.

[110] Axiom. *The Scientific Computation System*, 2015. http://www.axiom-developer.org/.

[111] Biran, A., M. Breiner. *MATLAB for engineers*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[112] Boneva, G. Solving differential equations by MATLAB. В: *First International Conference EPU*, Pernik, 2011.

[113] Bower A. F. *Dynamics and Vibrations MuPAD tutoria*. *Brown University*, 2012. http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/Tutorials/Mupad_tutorial.pdf.

[114] Derive. *A powerful system for doing symbolic and numeric mathematics*, 2016. http://www.chartwellyorke.com/derive.html.

[115] Dimitrova, J. Some challanges to mathematical education of students at university programme in economics. *Management & Education, Pedagogy and quality of education*, vol. X (3): 81–86, 2014. http://www.conference-burgas.com/maevolumes/vol10/b3_v10.pdf.

[116] EMT. *Euler Math Toolbox*, 2015. http://euler-math-toolbox.software.informer.com/.

[117] Evtimova, V. Using the Maple software product in studying functions. В: *Proceedings of the Union of Scientists*, том 10, стр. 115-123, Ruse, 2013.

[118] EXPonenta. *Образовательный математический сайт*. *Softline*, 2015. www.exponenta.ru.

[119] GAUSS. *The Mathematical and Statistical System*. *APTECH*, 2015. http://www.aptech.com/products/gauss-mathematical-and-statistical-system/.

[120] K. Gravemeijer. Adapting mathematics education to the needs of ict. В: Cheongju National University of Education, editor, *Competencies in and for 21st Century*, number 1 (1) in Proceedings of the 2014 Int'l Conference on Mathematical Education. The Korean Society of Mathematical Education, October 17-18 2014.

[121] S. Grozdev. On the visualness in mathematics education. В: *Proc. 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, стр. 303-313, Palermo – Italy, 28 – 30 Jan. 2005.

[122] Grozdev, S. Ismailov, Sh. *The computer experiment in school as a methodological tool in science education*, chapter Естественнонаучное образование: время перемен, стр. 131-137. Издательство Московского университета, Сборник под общей ред. академика В. В. Лунина и проф. Н. Е. Кузьменко, М., Москва, 2014. ISBN: 978-5-19-010923-8.

[123] Haapasalo, L. Adapting mathematics education to the needs of ict. В: *eJMT*, том 1 (1), 2007.

[124] Kapralov, S. Manev, M. A new brand of math competition for university students. В: *Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015*, Bitola, Macedonia, 2015.

[125] Konstantinov, M. *Foundations of Numerical Analysis (with MATLAB Examples)*, том 2. University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, 2007. http://www.uacg.bg/filebank/acadstaff/userfiles/study_en_356_na-new.pdf.

[126] Konstantinov, M. MATLAB based mathematical education for engineers. В: *First International Conference EPU*, Pernik, 2011.

[127] Lazarov, B. *Three problem areas of the educational environment*. В: *Дидактическо моделиране, ИМИ-БАН*, том 2, 2008-2009.

[128] Lazarov, B., Karakoleva, S. *Using CAS syntax for education in mathematics*. В: *Higher education in Bulgaria and the Europe 2020 strategy*, том 3, стр. 914-921. International business school, Botevgrad, IBS Press, 2011. http://www.ibsedu.com/media/Conference/2011/_2020_3.pdf.

[129] Maple. *Technical Computing Software for Engineers*, 2016. http://www.maplesoft.com/products/maple/.

[130] Maple: *Въведение*. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", 2015. http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/studentbook/Maple1_BG.pdf.

[131] The Math Works Ink. *MATLAB Reference guide*, 2010.

[132] PTC MathCad. Engineering math software, 2016. http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad.

[133] Mathematica, 2015. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematica.

[134] Wolfram Mathematica. *Modern Technical Computing*, 2016. https://www.wolfram.com/mathematica/.

[135] MathWorks. *Центр компетенций*, 2015. MATLAB.ru.

[136] MATLAB. *The Scientific Computation System*, 2016. http://www.mathworks.com/products/matlab/.

[137] Maxima. *A Computer Algebra System*, 2016. http://maxima.sourceforge.net/.

[138] MuPAD. *Perform symbolic computations with the MuPAD language and engine*, 2016. http://www.mathworks.com/discovery/mupad.html.

[139] Pelova, G. Boneva, J. The theory of probability with MATLAB. В: *Second International Conference EPU: Education, science, inovation*, стр. 137-140, Pernik, 2012.

[140] Rashkova, Ts. Usage of the system Mathematica in the teaching and learning number theory. В: *Proceedings of the Union of Scientists*, том 10 of *Mathematics, Informatics and Physics*, стр. 107-114, Ruse, 2013.

[141] Razali, N. M., Wah, Y. B. *Power comparison of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lillieforce adn Anderson-Darling tests. Journal of Statistical Modeling and Analytics*, 2(1): 21–33, 2011.

[142] Reduce. *Computer Algebra System*, 2016. http://reduce-algebra.com/.

[143] SAGE. *Math Feature Tour*, 2015. http://www.sagemath.org.html.

[144] Shankar D. Symbolic Mathematic using MATLAB and Mupad. Department of Mechanical Engineering, India, 2015. http://seismech.org/seismech_15/documents/Mupad.pdf.

[145] Shapiro, S. S., Wilk, M. B. *An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)*. *Biometrica*, 52(3/4): 591–611, 1965.

[146] IBM SPSS Statistics. *Base system user's Guide*, 2015. http://www-01.ibm.com/support/docview.wss?uid=swg21635536&aid=1.

[147] Sutherland, R., Pozzi, S. *The changing Mathematical Background of Undergraduate Engineers*. *The Engineering Council*, 1995.

[148] Symbolic Math Toolbox 5. *MuPAD Tutorial, MATLAB*. *MathWorks*, 2015. http://www.calvin.edu/~tmk5/research/mupad_tutorial.pdf.

[149] Trifunov, Z., Fahlberg-Stojanovska, L. *Validating the use of technology in mathematics education with statistics*. В: *Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, том 41, стр. 281-287, 2012. http://www.math.bas.bg/smb/2012_PK/tom_2012/pdf/299-303.pdf.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Тест за проверка на знания по Висша математика с MATLAB

Име, презиме, фамилия: ....
Фак. № ....

Инструкция: Верните отговори за I част се означават чрез заграждане на вярната буква, а останалите - чрез изписване на отговорите в съответното поле. Времето за изпълнение е 90 минути.

Оценяването на комбинирания тест е следното:

1. За всеки верен отговор на въпросите от №1 до №13 от I част - по 1 точка.
2. Задачите от II част за допълване от №14 до №18 - по 2 точки.
3. Задачите със свободен отговор от II част от №19 до №21- по 1 точка за верен отговор.
4. С по 1 точка се оценява всяко вярно съответствие в задачите за съотнасяне №22, 23.
5. Задачите за подробно решаване от III част №24, 25 се оценяват с по 4 точки всяка.
6. Задачи №26.1 и 26.2 от IV част на теста се оценяват с по 5 точки всяка.

При грешен отговор не се дават и не се отнемат точки. Максималният брой точки за комбинирания тест е 60.

Критерии за оценка:

Брой точки	0-30	30.1-38	38.1-46	46.1-54	54.1-60
Оценка	Слаб (2)	Среден (3)	Добър (4)	Мн.добър (5)	Отличен (6)

Максимален брой точки: 60 **Преподавател**:...................

Реален брой точки: ...... Оценка: ....

Първа част

✎ **Задача 1** *Приоритетът на действията в аритметични изрази е:*

А) действия в скоби, умножение и деление, степенуване, събиране и изваждане;
Б) действия в скоби, степенуване, умножение и деление, събиране и изваждане; ✓
В) действията се извършват последователно отляво-надясно.

✎ **Задача 2** *Отбележете верния запис за въвеждане на матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

А) `A=(1,2,3;4,5,6)`
Б) `A=[1,4;2,5;3,6]`
В) `A=[1,2,3;4,5,6]` ✓

✎ **Задача 3** *Дадена е система линейни алгебрични уравнения*

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 = 3 \\ x_1 + 1{,}5x_2 = 4{,}5 \\ -3x_2 + 0{,}5x_3 = -6{,}6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0{,}8 \end{array}\right.$$

с матричен запис $Ax = b$*. Въвеждат се матрицата* `A` *и вектора* b*. Посочете буквата на верния запис:*

А) `A=[2,0,0,0;1,1.5,0,0;0,-3,0.5,0;2,-2,1,1],b=[3,4.5,-6.6,0.8]'` ✓
Б) `A=[2;1,1.5;-3,0.5;2,-2,0,0],b=[3;4.5;-6.6;0.8]`
В) `A=[2,0,0,0;1,1.5,0,0;-3,0.5,0,0;2,-2,1,1],b=[3;4.5;-6.6;0.8]`

✎ **Задача 4** *Системата алгебрични уравнения*

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ 4x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = -3 \end{array}\right.$$

трябва да се реши по метода на Гаус. Въведени са в MATLAB следните команди и е получен резултат:

```
>>A=[1,1,0,1;2,1,-1,1;4,-1,-2,2;3,-1,-1,2];
>>b=[2;1;0;-3];
>>rank(A), rank([A,b])
ans=3
ans=4
```

Какво се въвежда след това?
А) `x=A\b`
Б) Не се въвежда нищо - няма решение. ✓
В) `x=inv(A)*b`

✎ **Задача 5** *Системата уравнения*

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & =4 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +x_2 & & & =2 \\ x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & +x_4 & =5 \end{array}\right.$$

се решава по метода на Гаус. В MATLAB са въведени следните команди:

```
>>A=[1,-1/2,1,0;2,-1,-1,1;1,1,0,0;1,-1/2,1,1];
>>b=[4;5;2;5];
>>rank(A)
```

Кои са следващите две команди в посочения ред:

А) `rank([A,b]),x=A\b` ✓
Б) `x=A\b,rats(x)`
В) `x=A/b,rank([A,b])`

✎ **Задача 6** *Първата стъпка при решаване на алгебричното уравнение $x^4 - 3x = 1$ с MATLAB е:*

А) да се намерят корените на полинома с команда `roots`;
Б) уравнението да се запише във вида $f(x) = 0$; ✓
В) полиномът в лявата страна на уравнението да се запише като едномерен масив.

✎ **Задача 7** *Даден е полиномът $3x^4 + x^3 - 12x^2 = 5$. Посочете верния запис за въвеждане в MATLAB на полинома в лявата страна на уравнението $f(x) = 0$:*

А) `p=[3,1,-12]`
Б) `p=[3,1,-12,-5]`
В) `p=[3,1,-12,0,-5]` ✓

✎ **Задача 8** *Командата* `polyfit(x,y,k)` *апроксимира експериментални данни с интерполационен полином ако:*

А) броят на експерименталните данни е по-голям от k; ✓
Б) броят на експерименталните данни е точно колкото е k;
В) k е по-голямо от броя на данните.

✎ **Задача 9** *Даден е интегралът*

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{s\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$$

Отбележете вярната команда за решаването му:

А) `f=@(s)s./(4-s.^2)ds;quad(f,0,sqrt(3))`
Б) `f=@(x)s./4-s.^2;quad(f,0,sqrt(3))`
В) `f=@(s)s./sqrt(4-s.^2);quad(f,0,sqrt(3))` ✓

✎ **Задача 10** *За решаване на интеграла* $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$ *първо се дефинира подинтегралната функция* `f=@(x)(cos(x)).^2`, *след което се въвежда командата за решаване:*

А) `quad(f,0,pi/4)` ✓
Б) `quad(f,x,y)`
В) `quad(f,x,0,pi/4)`

✎ **Задача 11** *Дадена е задачата на Коши:* $4y' + xy = \ln(1 + x^2)$, $y(0) = 1$. *Означете вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(x, y)$ *като анонимна функция:*

А) `f=@(x,y)(log(1+x^2)-x*y)/4` ✓
Б) `f=@(x,y)log10(1+x^2)`
В) `f=@(x)x*y+log(1+x^2)`

✎ **Задача 12** *Дадена е задачата на Коши:* $-y' + x^2 \cos y = x^3 - 1$, $y(0) = 3$, $x \in [0, 5]$. *Изберете вярната поредица команди за нейното решаване:*

А) `f=@(x,y)x^3-1,ode45(f,[0,5],3)`
Б) `f=@(x,y)x^2*cos(y)-x^3+1,ode45(f,[0,5],3)` ✓
В) `f=@(x,y)x^3-1-x^2*cos(y),ode45(f,[0,5],3)`

✎ **Задача 13** *Дадена е система от* n *уравнения с* n *неизвестни*

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right.$$

или записана във векторна форма

$$f(x) = 0,$$

където

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Системата се нарича:

А) система нехомогенни линейни уравнения;
Б) система нелинейни уравнения. ✓

Втора част

✎ **Задача 14** *Запишете анонимна функция за решаване на уравнението* $\lg(1 + x) + x^2 = 4$

Отговор: `f=@(x)log10(1+x)+x^2-4`

✎ **Задача 15** *Запишете на езика на MATLAB функцията* $\sin 2t$*:*

Отговор: `sin(2*t)`

✎ **Задача 16** *Попълнете липсващите думи в текста: В системата уравнения*

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

числата a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ се наричат $\boxed{\text{коефициенти}}$ пред неизвестните x_j, а b_i - $\boxed{\text{свободни}}$ коефициенти.

✎ **Задача 17** *Дадена е системата уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 4x - \cos 3y = 0 \\ 2{,}3y^3 - x^2 - 4x = 3. \end{array} \right.$$

Запишете векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB:

Отговор: `f=@(x)[tan(4*x(1))-cos(3*x(2));2.3*x(2)^3-x(1)^2-4*x(1)-3]`

✎ **Задача 18** *В MATLAB е дефинирана подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$$

с командата `g=@(x)exp(3.*x).*sin(2.*x)`*. Каква е следващата команда за решаване на интеграла?*

Отговор: `quad(g,0,pi/4)`

✎ **Задача 19** *Запишете три команди за чертане на графика на функция в MATLAB:*

1) .... 2) .... 3) ....

Отговор: `plot, fplot, ezplot`

✎ **Задача 20** *Запишете три команди за решаване на интеграли с MATLAB:*

1) .... 2) .... 3) ....

Отговор: `quad, quadl, quadv, quadgk, triplequad, guad2d, dblquad`

✎ **Задача 21** *Етапите при решаване на произволна двумерна система нелинейни уравнения са следните:*

А) Получаваме решението.
Б) Въвеждаме в MATLAB векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$;
В) Записваме системата във вида $f(x) = 0$.
Г) Решаваме системата с команда `fsolve`*, като задаваме за първи аргумент функцията и за втори - началното приближение.*

Д) *Чертаем графики на функциите, които стоят в левите страни на системата $f(x) = 0$ (при n=2), за да се убедим, че системата има решение и да определим графично начално приближение.*

Подредете първите четири етапа във вярна последователност, като попълните съответните букви:

1 етап: . . . . 2 етап: . . . . 3 етап: . . . . 4 етап: . . . .

Отговор: $\boxed{\text{1-В, 2-Д, 3-Б, 4-Г}}$

Трета част

✎ **Задача 22** *Командата* `lsqcurvefit` *има следния синтаксис:* `[a,err]=lsqcurvefit(fun,a0,x,y)`. *В талона за отговори срещу цифрата пред името на параметъра запишете буквата на вярното ѝ описание:*

1 -	`a0`	А	- данни за зависима променлива;
2 -	`err`	Б	- вектор, съдържащ получените по метода на най-малките квадрати стойности за неизвестните коефициенти;
3 -	`fun`	В	- грешка на апроксимация;
4 -	`a`	Г	- начални стойности за търсените коефициенти на приближаващата функция;
5 -	`x`	Д	- данни за независима променлива;
6 -	`y`	Е	- име на апроксимиращата функция.

Отговор: $\boxed{\text{1-Г, 2-В, 3-Е, 4-Б, 5-Д, 6-А.}}$

✎ **Задача 23** *Дадени са три задачи на Коши:*

1. $(1 + t)y' = \ln(1 + y^2) + 1,\ y(0) = 0;$
2. $2y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 3x^2 + 1,\ y(0) = 2$
3. $4y' + xy = \ln(1 + x^2),\ y(0) = 1$

Срещу номера на задачата запишете буквата на вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение $y' = f(t, y)$ като анонимна функция:

А) `f=@(x,y)(log(1+x^2)-x*y)/4`
Б) `f=@(t,y)(log(1+y^2)+1)/(1+t)`
В) `f=@(x,y)(3*x^2+1-tan(x)*y)/2`

1 - . . . . 2 -. . . . . 3 - . . . .

Отговор: $\boxed{\text{1-Б, 2-В, 3-А.}}$

✎ **Задача 24** *Да се реши с MATLAB уравнението $x^6 + 2 = 2x^5 + x$. Да се опише подробно решението.*

Решение:

✎ **Задача 25** *Да се реши определения интеграл. Да се опише подробно решението.*

$$\int_1^9 3\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}).$$

Решение:

Четвърта част

Решете с MATLAB следните задачи и опишете подробно решението.

1. Да се реши системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{array}\right.$$

Решение: ***2.*** Да се реши с MATLAB уравнението $\lg x + \sin x = 1$. Да се опише подробно решението.

Решение:

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Задачи за проверка знанията на студентите по Числени методи

Основи на компютърна система MATLAB

✍ **Задача 1** *Попълнете липсващите думи в текста:*
Системата за компютърни изчисления MATLAB работи в режим калкулатор *и* програмен *режим.*

❑ **Задача 2** *Системата MATLAB се използва за*

- ➛ операции с вектори и матрици; ✓
- ➛ решаване на нелинейни уравнения и системи; ✓
- ➛ компютърна текстообработка;
- ➛ презентации;
- ➛ двумерни и тримерни графики. ✓

Задача 3 *Десетичните дроби в MATLAB се въвеждат с десетична* точка

Задача 4 *В системата MATLAB запетаята служи за* разделител*.*

✍ **Задача 5** *Попълнете липсващите думи в текста:*
В MATLAB числата се въвеждат във формат с фиксирана *точка и* плаваща *точка.*

✍ **Задача 6** *Имената на променливите в MATLAB*

- ➛ се записват задължително на латиница; ✓
- ➛ могат да се записват на кирилица.

✍ **Задача 7** *Попълнете липсващите думи в текста:*
Операторите за операциите събиране и изваждане са + *и* -*.*

☞ **Задача 8** *Операторът за умножение е* $\boxed{*}$

✍ **Задача 9** *Попълнете липсващите думи в текста:*

Операторът за деление е $\boxed{/}$*, а операторът, който се използва при решаване на матрични уравнения се нарича* $\boxed{\text{ляво}}$ *деление и е ляво наклонена черта.*

☞ **Задача 10** *Операторът за степенуване е* $\boxed{\hat{}}$

❍ **Задача 11** *Приоритетът на действията в аритметични изрази е:*

➢ действия в скоби, умножение и деление, степенуване, събиране и изваждане;

➢ степенуване, действия в скоби, събиране и изваждане;

➢ действия в скоби, степенуване, умножение и деление, събиране и изваждане; ✓

➢ действията се извършват последователно отляво-надясно.

❍ **Задача 12** *Системата MATLAB*

➢ „различава“ големи и малки букви; ✓

➢ не е чувствителна към горен и долен регистър на буквите.

❑ **Задача 13** *Имената на променливите в MATLAB*

➢ са поредица от букви и цифри; ✓

➢ могат да съдържат интервал;

➢ започват винаги с буква; ✓

➢ могат да започват с цифра;

➢ се пишат на латиница. ✓

❑ **Задача 14** *Функциите в MATLAB*

➢ имат имена, които се пишат само с малки букви; ✓

➢ съдържат скоби, в които се поставя аргумента; ✓

➢ имат имена, които се пишат с малки и големи букви;

➢ имат имена, които могат да съдържат интервали;

➢ могат да се пишат на кирилица.

☞ **Задача 15** *Операторът за присвояване в MATLAB е* $\boxed{=}$

☞ **Задача 16** *Вградената функция за квадратен корен в MATLAB е* $\boxed{\texttt{sqrt}}$

☞ **Задача 17** *Запишете синус от t на езика на MATLAB:* $\boxed{\texttt{sin(t)}}$

☞ **Задача 18** *Запишете десетичен логаритъм от 5 на езика на MATLAB:* `log10(5)`

☞ **Задача 19** *Запишете логаритъм при основа 2 от 5 на езика на MATLAB, като използвате функцията за натурален логаритъм:* `log(5)/log(2)`

❍ **Задача 20** *Аргументът на тригонометричните функции в MATLAB трябва да бъде записан в*

- ➣ радиани; ✓
- ➣ градуси;
- ➣ гради;
- ➣ без значение.

❑ **Задача 21** *Едномерни масиви в MATLAB се въвеждат като*

- ➣ елементите им се заграждат със средни скоби `[ ]`; ✓
- ➣ елементите им се разделят със запетаи; ✓
- ➣ елементите им се разделят с интервали; ✓
- ➣ елементите им се заграждат с малки скоби `( )`;
- ➣ след името на масива се пише оператор за присвояване. ✓

❑ **Задача 22** *Поелементните операции с едномерни масиви са:*

- ➣ поелементно събиране (`.+`)
- ➣ поелементно умножение (`.*`) ✓
- ➣ поелементно степенуване (`.^`) ✓
- ➣ поелементно изваждане (`.-`)
- ➣ поелементно деление (`./`) ✓

❑ **Задача 23** *Транспонирането е операция с масив, при която*

- ➣ редовете стават стълбове и обратно; ✓
- ➣ се намира обратна матрица;
- ➣ в MATLAB се използва апостроф `(')` ; ✓
- ➣ в MATLAB се използва звезда `(*)` .

❍ **Задача 24** *Отбележете верния запис за въвеждане на матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$:

- ➣ `A=(1,2,3;4,5,6)`

- ➛ `A=[1;2;3;4;5;6]`
- ➛ `A=[1,4;2,5;3,6]`
- ➛ `A=[1,2,3;4,5;6]`
- ➛ `A=[1,2,3;4,5,6]` ✓

❍ **Задача 25** *Командата* `inv(A)` *се използва за*

- ➛ определяне на детерминантата на матрицата A;
- ➛ определяне на обратната матрица на A; ✓
- ➛ дава като резултат броя на редовете и стълбовете на A;
- ➛ транспониране на A.

❍ **Задача 26** *Командата* `eye(4)` *служи за*

- ➛ получаване на едномерен масив с 4 единици;
- ➛ получаване на едномерен масив с 4 нули;
- ➛ получаване на квадратна единична матрица с 4 реда и единици по главния диагонал. ✓

❍ **Задача 27** *Командата* `zeros(1,4)` *дава*

- ➛ масив с 1 ред и 4 нули;
- ➛ масив с 1 ред и 4 стълба, с елементи нули; ✓
- ➛ масив с 1 стълб и 4 реда, който има само нули.

❑ **Задача 28** *Командата* `det(A)`

- ➛ се използва за пресмятане на детерминантата на A; ✓
- ➛ се използва за намиране на обратната матрица на A;
- ➛ се използва за проверка дали дадена матрица е особена; ✓
- ➛ се използва само при квадратна матрица A. ✓

➾ **Задача 29** *Запишете на езика на MATLAB* $\sin 2t$*:* `sin(2*t)`

➾ **Задача 30** *Запишете на езика на MATLAB* e^{-t}*:* `exp(-t)`

Решаване на системи линейни алгебрични уравнения с MATLAB

✍ **Задача 1** *Попълнете липсващите думи в текста: Система от вида*

$$\left|\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

се нарича система от m линейни алгебрични уравнения с n неизвестни.

✍ **Задача 2** *Попълнете липсващите думи в текста: В системата*

$$\left|\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

числата a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ се наричат коефициенти пред неизвестните x_j, а b_i - свободни коефициенти.

Задача 3 *Решение $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ на система линейни алгебрични уравнения се нарича такъв вектор, че ако заместим координатите му вместо x_1, x_2, …, x_n в левите страни на уравненията на системата, се получават верни равенства.*

Задача 4 *Система линейни алгебрични уравнения, за която всички свободни коефициенти b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са равни на 0, се нарича хомогенна.*

Задача 5 *Система линейни алгебрични уравнения, за която има поне един свободен коефициент, който не е равен на нула, се нарича нехомогенна.*

Задача 6 *Система линейни алгебрични уравнения, за която рангът на основната матрица е равен на ранга на разширената матрица, се нарича съвместима, т.е. има решение.*

Задача 7 *Система линейни алгебрични уравнения, за която рангът r на основната матрица е равен на ранга на разширената матрица и е число, по-малко от броя на неизвестните n, се нарича неопределена система.*

Задача 8 *Система линейни алгебрични уравнения, за която рангът на основната матрица не е равен на ранга на разширената матрица, се нарича несъвместима.*

❑ **Задача 9** *При решаване на система линейни алгебрични уравнения:*

1. Проверяваме в MATLAB дали дали `rank(A)` е равен на `rank([A,b])`.
2. Въвеждаме в MATLAB матрицата `A` и вектора `b`.
3. Записваме системата в матричен вид `Ax=b`.
4. След като сме избрали метод за решаване, решаваме системата и получаваме решението.

5. Ако системата е съвместима, избираме метод на решаване.
6. Ако рангът на основната матрица е равен на ранга на разширената матрица, то системата няма решение.

Посочете последователността от действия (алгоритъм). Възможно е да има повече от един отговор.

- 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- 3, 2, 1, 4, 6, 5;
- 3, 2, 1, 5, 4, 6; ✓
- 6, 4, 5, 1, 2, 3;
- 3, 2, 1, 6, 5, 4. ✓

❍ **Задача 10** *Командата за намиране на ранг на матрица е:*

- rank; ✓
- rang;
- det;
- eye.

❍ **Задача 11** *Преди прилагане на метода на Крамер задължително се проверява*

- дали системата има ранг, равен на 3;
- дали детерминантата на матрицата на системата е различна от нула; ✓
- дали матрицата на системата е правоъгълна;
- дали неизвестните са повече от 3.

❍ **Задача 12** *Методът на Гаус има два етапа:*

- напред и назад;
- прав и обратен ход; ✓
- триъгълен и правоъгълен.

❍ **Задача 13** *При решаване на система чрез обръщане на матрицата на системата $Ax = b$, матричното уравнение се умножава*

- отляво с обратната матрица на A; ✓
- отдясно с A;
- отдясно с обратната матрица на A;

➢ отляво с A.

❍ **Задача 14** *Командата за намиране на обратна матрица в MATLAB е:*

➢ `det`

➢ `inv` ✓

➢ `eye`

➢ `rank`

➢ `rats`

❑ **Задача 15** *Методът на простата итерация*

➢ се нарича още метод на Якоби; ✓

➢ е итерационен метод; ✓

➢ се нарича метод на Гаус;

➢ се използва само за решаване на системи, които имат безброй много решения.

❑ **Задача 16** *Посочете верните алгоритми за решаване на система линейни алгебрични уравнения по метода на Якоби:*

1. *Системата се записва в матричен вид.*
2. *Проверява се условието за край на итерационния процес.*
3. *Въвеждат се в MATLAB матрицата A на системата, вектора b на свободните коефициенти и матриците T и C.*
4. *Намира се първо приближение за решението.*
5. *Преобразува се системата във вид, удобен за итерации.*
6. *Проверява се дали системата е съвместима.*
7. *Проверява се дали итерационният процес е сходящ.*
8. *Задава се точност и начално приближение.*
9. *Ако условно за край на итерационния процес е изпълнено, се извежда резултата.*
10. *Ако условието за край на итерационния процес не е изпълнено, се търси следващо приближение.*

Верните алгоритми са:

➢ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

➢ 1, 5, 3, 6, 7, 8, 4, 2, 10, 9; ✓

➢ 1, 3, 6, 7, 8, 5, 2, 4, 9, 10;

- ➛ 1, 5, 3, 6, 7, 8, 4, 2, 9, 10; ✓
- ➛ 1, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 9, 10.

✍ **Задача 17** *Попълнете липсващите думи в текста:*

Методът на Гаус-Зайдел е модификация на метода на Якоби, при която системата, приведена във вид, удобен за итерации има матрица $T = T_1 + T_2$, където T_1 е $\boxed{\text{горна}}$ триъгълна, а T_2 - долна $\boxed{\text{триъгълна}}$ матрица.

❍ **Задача 18** *Дадена е системата $Ax = b$:*

$$\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +3x_3 & =2 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & =-1 \\ x_1 & +x_2 & & =3 \end{array}\right.$$

Въведени са в MATLAB `A` *и* `b`. *Посочете номера на верния запис:*

1. `[A,b]=[1,1,3,2;3,-3,1,-1;1,1,0,3]`
2. `A=[1,-1,3;3,-3,1;1,1],b=[2;-1;3]`
3. `A=[1,-1,3;3,-3,1;1,1,0],b=[2,-1,3]`
4. `A=[1,-1,3;3,-3,1;1,1,0],b=[2;-1;3]` ✓

❍ **Задача 19** *Дадена е системата $Ax = b$:*

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -1{,}5x_2 & +3x_3 & =1 \\ -x_1 & & +2x_3 & =3 \\ 4x_1 & -4{,}5x_2 & +5x_3 & =1 \end{array}\right.$$

Въведена е матрицата `A`. *Посочете номера на верния запис:*

1. `A=[2,-1,4;-1.5,0,-4.5;3,2,5]`
2. `A[2,-1.5,3,-1,0,2;4,-4.5,5]`
3. `A=[2,-1.5,3;-1,0,2;4,-4.5,5]` ✓
4. `A=[2␣-1,5␣3;-1␣2;4␣-4,5␣5]`
5. `A=(2,-1.5,3;-1,0,2;4,-4.5,5)`

❍ **Задача 20** *Дадена е системата $Ax = b$:*

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 = 3 \\ x_1 + 1{,}5x_2 = 4{,}5 \\ -3x_2 + 0{,}5x_3 = -6{,}6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0{,}8 \end{array}\right.$$

Въведена е матрицата `A` *и вектора b. Посочете номера на верния запис:*

1. `A=[2;1,1.5;-3,0.5;2,-2,0,0],b=[3,4.5,-6.6,0.8]`

2. `A=[2;1,1.5;-3,0.5;2,-2,0,0],b=[3;4.5;-6.6;0.8]`

3. `A=[2,0,0,0;1,1.5,0,0;-3,0.5,0,0;2,-2,1,1],b=[3;4.5;-6.6;0.8]`

4. `A=[2,0,0,0;1,1.5,0,0;0,-3,0.5,0;2,-2,1,1],b=[3,4.5,-6.6,0.8]'` ✓

❍ **Задача 21** *Системата*

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & & +x_4 & =2 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =1 \\ 4x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & =0 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & =-3 \end{array}\right.$$

трябва да се реши по метода на Гаус. Въведени са в MATLAB следните команди и е получен резултат:

```
>>A=[1,1,0,1;2,1,-1,1;4,-1,-2,2;3,-1,-1,2];
>>b=[2;1;0;-3];
>>rank(A), rank([A,b])
ans=3
ans=4
```

Каква е следващата команда?

- `x=A\b`
- `x=inv(A)*b`
- `D1=A`
- `det(A)`
- Не се въвежда нищо - няма решение. ✓

❍ **Задача 22** *Системата*

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & =4 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +x_2 & & & =2 \\ x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & +x_4 & =5 \end{array}\right.$$

се решава по метода на Гаус. Въведени са в MATLAB следните команди:

```
>>A=[1,-1/2,1,0;2,-1,-1,1;1,1,0,0;1,-1/2,1,1];
>>b=[4;5;2;5];
>>rank(A)
```

Запишете кои са следващите две команди в посочения ред:

- `rank([A,b]),x=A/b`
- `x=A/b,rank([A,b])`

- `rank([A,b]),x=A\b` ✓
- `x=A\b,rats(x)`
- `rats(x),x=A\b`

❍ **Задача 23** *Определете коя от следните наредени двойки е решение на системата (без да я решавате).*

$$\left| \begin{array}{lll} x_1 & +2x_2 & =3 \\ x_1 & -x_2 & =0 \end{array} \right.$$

- (0, 1);
- (1, 0);
- (1, 1); ✓
- (-1, 0).

❍ **Задача 24** *Системата*

$$\left| \begin{array}{rrl} 2x_1 & -x_2 & =2 \\ x_1 & +x_2 & =5 \end{array} \right.$$

се решава чрез графичен метод като се построяват правите, съответстващи на уравненията на системата. Двете прави се пресичат в една точка. Броят на решенията на системата е:

- 1 ✓
- 2
- 3
- безброй много
- няма решение

❍ **Задача 25** *Системата*

$$\left| \begin{array}{rrl} 2x_1 & -x_2 & =2 \\ 2x_1 & -x_2 & =0 \end{array} \right.$$

се решава чрез графичен метод. Изобразяват се графично правите, съответстващи на уравненията на системата. Получените прави са успоредни. Броят на решенията на системата е:

- 0 ✓
- 1
- 2
- 3
- безброй много

❍ **Задача 26** *Системата*

$$\left| \begin{array}{rrl} 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & = 5 \\ 6x_1 & -x_2 & = -5 \end{array} \right.$$

се решава чрез графичен метод. Изобразяват се графично правите, съответстващи на уравненията на системата. Получените прави се пресичат две по две, така че на чертежа има три пресечени точки. Колко решения има системата?

- 0 ✓
- 1
- 2
- 3
- 4

Числено решаване на нелинейни уравнения с MATLAB

Задача 1 *Дадено е уравнението $f(x) = 0$, където $f(x)$ е нелинейна функция на x. Числото x_0, такова, че $f(x_0) = 0$, се нарича* корен *на уравнението.*

❏ **Задача 2** *Да се реши нелинейното уравнение $f(x) = 0$ с итерационен метод означава:*

- да се въведе лявата страна като анонимна функция;
- да се установи дали има корени; ✓
- ако има корени, да се определи техният брой; ✓
- да се разложи на множители лявата страна на уравнението;
- да се намери числената стойност на всеки корен с определена точност. ✓

✍ **Задача 3** *Попълнете липсващите думи в текста: Намирането на корените на нелинейно уравнение има два етапа:* отделяне *и* уточняване *на корените.*

❏ **Задача 4** *Интервал на локализация на корен на нелинейно уравнение $f(x) = 0$ се нарича интервал $[a, b]$, в който са изпълнени условията:*

- функцията $f(x)$ е непрекъсната в (a, b); ✓
- функцията $f(x)$ е четна;
- функцията $f(x)$ е строго монотонна; ✓
- $f(x)$ има еднакви знаци в краищата на интервала;
- $f(x)$ има различни знаци в краищата на интервала. ✓

❍ **Задача 5** *Командата за изчертаване на графиката на функция в интервал е:*

- ➛ `fplot`; ✓
- ➛ `fzero`;
- ➛ `plot`;
- ➛ `roots`.

Задача 6 *Ако редицата $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ от последователни приближения за корен x_i на нелинейното уравнение $f(x) = 0$ клони при $n \to \infty$ към корена x_i, то казваме, че итерационният процес е* $\boxed{\text{сходящ}}$.

Задача 7 *Командата* $\boxed{\texttt{fzero}}$ *служи за уточняване на корен на нелинейното уравнение $f(x) = 0$, който предварително е отделен в интервал или знаем приближена негова стойност.*

Задача 8 *Командата* $\boxed{\texttt{roots}}$ *служи за решаване на алгебрични уравнения.*

Задача 9 *Алгебрично уравнение е такова уравнение, лявата страна на което е* $\boxed{\text{полином}}$ *на x.*

❍ **Задача 10** *Чрез командата* `roots` *се намират*

- ➛ корените на алгебрично уравнение; ✓
- ➛ корените на произволно нелинейно уравнение;
- ➛ квадратни корени от числа.

❍ **Задача 11** *Дадено е алгебричното уравнение $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$. В MATLAB е въведен едномерен масив* p*, в който се записват коефициентите на полинома в лявата страна на уравнението. Посочете вярната команда:*

- ➛ `p=[4,2,3,-1,-1]`
- ➛ `p=[1,2,-1,-1]`
- ➛ `p=[1,2,0,1,1]`
- ➛ `p=[1,2,0,-1,-1]` ✓

❍ **Задача 12** *Даден е полиномът $3x^4 + x^3 - 12x^2 = 5$. Посочете верния запис за въвеждане в MATLAB на полинома в лявата страна на уравнението $f(x) = 0$:*

- ➛ `p=[3,1,-12]`
- ➛ `p=[3,1,-12,-5]`
- ➛ `p=[3,1,-12,0,-5]` ✓
- ➛ `p=[3,4,3,-12,2,5]`
- ➛ `p=[4,3,2]`

❍ **Задача 13** *Даден е полиномът $2x^3 - 7x^2 - 60x = -1$. Посочете верния запис за въвеждане в MATLAB на полинома в лявата страна на уравнението $f(x) = 0$:*

- `p=(2,-7,-60)`
- `p=[2,-7,-60,-1]`
- `p=[2,-7,-60,1]` ✓
- `p=[2,-7,-60,0,1]`

❍ **Задача 14** *Дадено е алгебричното уравнение $x^4 - 3x = 1$. Първа стъпка при решаването му с MATLAB е:*

- да се запише уравнението във вида $f(x) = 0$; ✓
- да се запише полинома в лявата страна на уравнението като едномерен масив;
- да се зададе команда `roots` за решаване на полинома.

Задача 15 *Запишете на езика на MATLAB функцията $f(x) = x - 2^x + 10$ като я въведете като анонимна функция!* *Отговор:* `f=@(x)x-2^x+10`

Задача 16 *Запишете на езика на MATLAB функцията $g(x) = x + cosx - 2$, като я въведете като анонимна функция!*

Отговор: `g=@(x)x-cos(x)-2`

Задача 17 *Дадено е уравнението $2\arctan x - x = 0,2$. Запишете уравнението във вида $f(x) = 0$ и напишете на езика на MATLAB $f(x)$ като анонимна функция!*
Отговор: `f(x)=@(x)2*atan(x)-x-0.2`

❍ **Задача 18** *Дадено е алгебричното уравнение $x^4 - 3x = 1$. Преди решаване на уравнението с MATLAB чрез командата* `roots`*, се въвежда командата:*

- `p=[1,0,0,-3,1]`
- `p=[1,-3,-1]`
- `p=[1,-3,1]`
- `p=[1,0,0,-3,-1]` ✓
- `p=[1,0,0,0,-3,-1]`

❍ **Задача 19** *Дадено е алгебричното уравнение $2x^4 - x^2 = 9$. Преди решаване на уравнението с MATLAB чрез командата* `roots`*, се въвежда командата:*

- `p=[2,-1,9]`
- `p=[2,-1,-9]`
- `p=[2,0,-1,-9]`

- p=[2,0,-1,9]
- p=[2,0,-1,0,-9] ✓

❍ **Задача 20** *Дадено е алгебричното уравнение* $3x^4+7x^3+6x^2=10$. *Изберете вярната команда, чрез която се въвежда полинома, записан в лявата част на уравнението* $f(x)=0$:

- p=[3,7,6,10]
- p=[3,7,6,-10]
- p=[3,7,6,0,10]
- p=[3,7,6,0,-10] ✓
- p=[3,7,6,10,0]

Задача 21 *Дадено е уравнението* $x^3-5x^2=8$. *Запишете командата за въвеждане на полинома в MATLAB преди решаване с* `roots`*!* *Отговор:* `p=[1,-5,0,-8]`

Задача 22 *Дадено е уравнението* $x^5+x^3-2x=7$. *Запишете в полето на полинома в лявата страна на* $f(x)=0$*!* *Отговор:* `p=[1,0,1,0,-2,-7]`

Задача 23 *Въведете в полето анонимна функция за решаване на уравнението* $\lg(1+x)+x^2=4$*!*

Отговор: `f=@(x)log10(1+x)-x^2-4`

Задача 24 *Запишете като анонимна функцията за решаване на уравнението* $3^x-6x=2$*!*
Отговор: `f=@(x)3^x-6*x-2`

Задача 25 *Дадено е нелинейното уравнение* $e^{x+1}+x^2=4$. *Запишете като анонимна функцията в лявата страна на уравнението* $f(x)=0$*!*

Отговор: `f=@(x)exp(x+1)+x^2-4`

Задача 26 *Дадено е уравнението* $\lg x+\sin x=1$. *Да се запише като анонимна функцията в лявата страна на уравнението* $f(x)=0$*!*

Отговор: `f=@(x)log10(x)+sin(x)-1`

Задача 27 *Дадено е уравнението* $\cos 2x+x^2+1=0$. *Да се запише като анонимна функцията в лявата страна на уравнението* $f(x)=0$*!*

Отговор: `f=@(x)cos(2*x)-x^2+1`

Задача 28 *Дадено е уравнението* $sin(1+x)-x^2+4=0$. *Запишете функцията в лявата страна на уравнението като анонимна!*

Отговор: `f=@(x)sin(1+x)-x^2+4`

Задача 29 *Дадено е нелинейното уравнение* $x^4-14x^2+5x=8$. *Да се запише командата, с която се въвежда полинома в лявата страна на уравнението* $f(x)=0$*!*
Отговор: `p=[1,0,-14,5,-8]`

Задача 30 *При решаване с MATLAB на нелинейни уравнения чрез командата* `fzero`*, командата за намиране на корените се задава* отделно *за всеки корен.*

Числено решаване на системи нелинейни уравнения с MATLAB

❍ **Задача 1** *Дадена е система от n нелинейни уравнения с n неизвестни*

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{array} \right.$$

или записана във векторна форма

$$f(x)=0,$$

където

$$f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad , \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Системата се нарича:

- ➛ система линейни алгебрични уравнения;
- ➛ система нелинейни уравнения; ✓
- ➛ система линейни хомогенни уравнения;
- ➛ система нехомогенни линейни уравнения.

❑ **Задача 2** *За решаване на системи нелинейни уравнения се използват командите*

- ➛ fzero
- ➛ fsolve ✓
- ➛ roots
- ➛ solve ✓
- ➛ fplot

✎ **Задача 3** *Командата* `solve` *се използва за решаване само на нелинейни* $\boxed{\text{алгебрични}}$ *системи.*

✎ **Задача 4** *С командата* `fsolve` *може да се уточни корен на система нелинейни алгебрични уравнения, за които е известно* $\boxed{\text{начално}}$ *приближение.*

❑ **Задача 5** *Етапите при решаване на произволна система нелинейни уравнения са следните:*

1. *Получаваме решението.*
2. *Въвеждаме в MATLAB като анонимна векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x)=0$;*
3. *Записваме системата във вида $f(x)=0$.*

4. *Ако е зададено начално приближение, решаваме системата с команда* `fsolve`*, като задаваме за първи аргумент функцията и за втори - началното приближение.*

5. *Ако не знаем начално приближение за решението, чертаем графики на функциите, които стоят в левите страни на системата* $f(x) = 0$ *(при n=2) и определяме графично начално приближение.*

Верните алгоритми са:

- 1,2,3,4,5;
- 3,2,4,5,1; ✓
- 3,4,5,2,1; ✓
- 4,5,3,2,1.

Задача 6 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 4x - \cos 3y = 0 \\ 2{,}3y^3 - x^2 - 4x = 3 \end{array} \right.$$

Запишете векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$ *като анонимна функция на езика на MATLAB!*

Отговор: `f=@(x)[tan(4*x(1))-cos(3*x(2));2.3*x(2)^3-x(1)^2-4*x(1)-3]`

Задача 7 *Дадена е система нелинейни уравнения, лявата страна на векторното уравнение е зададена като анонимна функция* f*. Известно е начално приближение* $x = 0; y = 1$*. Запишете командата за решаване на системата!*

Отговор: `fsolve(f,[0;1])`

Задача 8 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \sin(x + 2{,}1) - 3y = -0{,}4 \\ \cos(y + 1{,}8) + 1{,}2x = 0 \end{array} \right.$$

Запишете като анонимна функция векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ *на езика на MATLAB!*

Отговор: `f=@(x)[sin(x(1)+2.1)-3*x(2)+0.4;cos(x(2)+1.8)+1.2*x(1)]`

Задача 9 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \sin(x + 1) - y = 1{,}5 \\ 2x + \cos y = 2 \end{array} \right.$$

Запишете командата на MATLAB, с която се въвежда лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$ *като анонимна функция!*

Отговор: `f=@(x)[sin(x(1)+1)-x(2)-1.5;2*x(1)+cos(x(2))-2]`

☞ **Задача 10** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}(xy + 0{,}5) = x^2 \\ 0{,}4x^2 + 2y^2 = 1 \end{array} \right.$$

Запишете я във векторна форма и попълнете в полето командата, с която се въвежда в MATLAB векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$!

Отговор: `f=@(x)[tan(x(1)*x(2)+0.5)-x(1)^2;0.4*x(1)^2+2*x(2)^2-1]`

☞ **Задача 11** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \sin x + 2y = 2 \\ \sin(y-1) + x = 0{,}8 \end{array} \right.$$

Запишете системата във векторна форма и попълнете в полето командата, с която се въвежда в MATLAB векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$!

Отговор: `f=@(x)[sin(x(1))+2*x(2)-2;sin(x(2)-1)+x(1)-0.8]`

☞ **Задача 12** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \sin(x-y) = xy \\ x^2 - y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Запишете на езика на MATLAB командата, с която се въвежда векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$!

Отговор: `f=@(x)[sin(x(1)-x(2))-x(1)*x(2);x(1)^2+x(2)^2-2]`

☞ **Задача 13** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} \sin(x+y) = 1{,}5xy \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array} \right.$$

Запишете на езика на MATLAB командата, с която се въвежда векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$!

Отговор: `f=@(x)[sin(x(1)+x(2))-1.5*x(1)*x(2);x(1)^2+x(2)^2-3]`

☞ **Задача 14** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 9 \\ x^{3/2} + y = 3 \end{array} \right.$$

Запишете на езика на MATLAB командата, с която се въвежда векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^3+x(2)^3-9;x(1)^(3/2)+x(2)-3]`

☞ **Задача 15** *Дадена е системата нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 5 \\ y = e^{-x} \end{array} \right.$$

Да се запише командата, с която се въвежда векторната функция $f(x)$ от векторната форма $f(x) = 0$ на системата. Използвайте анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^3+x(2)^3-5;x(2)-exp(-x(1))]`

Задача 16 *Дадена е система нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} x^4 + y^4 = 6 \\ y = e^{-x} \end{array} \right.$$

Запишете системата във векторна форма, определете вида на векторната функция $f(x)$ - лява страна на векторното уравнение $f(x) = 0$, въведете $f(x)$ като анонимна функция на езика на MATLAB в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^4+x(2)^4-6;x(2)-exp(-x(1))]`

Задача 17 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^4 + y^4 = 8 \\ \sin 2x + 3y = 5 \end{array} \right.$$

Запишете системата във векторна форма $f(x) = 0$, определете вида на векторната функция $f(x)$ и я въведете като анонимна функция на езика на MATLAB в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^4+x(2)^4-8;sin(2*x(1))+3*x(2)-5]`

Задача 18 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ \sin(x + y) = 0{,}3 + x \end{array} \right.$$

Запишете системата във векторна форма $f(x) = 0$, запишете векторната функция $f(x)$ като анонимна функция на езика на MATLAB и я въведете в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2+x(2)^2-1;sin(x(1)+x(2))-0.3-x(1)]`

Задача 19 *Дадена е системата нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) = \dfrac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + \sin x_3 = -1{,}06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{array} \right.$$

Да се запише векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB и да се попълни в полето!

Отговор:

```
f=@(x)[3*x(1)-cos(x(2)*x(3))-1/2;x(1)^2-81*(x(2)+0.1)^2+sin(x(3))+1.06;
exp(-x(1)*x(2))+20*x(3)+(10*pi-3)/3]
```

Задача 20 *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 3 \end{array} \right.$$

Да се запише векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB и да се попълни в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2+x(2)^2-2;x(1)^3+x(2)^3-3]`

☞ **Задача 21** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y^3 = 0{,}5 \end{array} \right.$$

Да се запише векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB и да се попълни в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2+x(2)^2-2;x(1)-x(2)^3-0.5]`

☞ **Задача 22** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2y - y = 8 \\ xy - x^2 = -10 \end{array} \right.$$

Да се запише векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB и да се попълни в полето!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2*x(2)-x(2)-8;x(1)*x(2)-x(1)^2+10]`

☞ **Задача 23** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} 2xy^2 - 4y = 7 \\ x^2 - 3xy = 5 \end{array} \right.$$

Да се запише векторната функция в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на езика на MATLAB и да се попълни в полето!

Отговор: `f=@(x)[2*x(1)*x(2)^2-4*x(2)-7;x(1)^2-3*x(1)*x(2)-5]`

☞ **Задача 24** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^4 + y^2 = 3 \\ x^3 + y^3 = 3 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$, като я запишете на езика на MATLAB като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^4+x(2)^2-3;x(1)^3+x(2)^3-3]`

☞ **Задача 25** *Дадена е системата:*

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 - 6x = 3 \\ x^3 - y^3 - 6y = 4 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето команда на MATLAB за въвеждане на лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$, като използвате анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^3+x(2)^3-6*x(1)-3;x(1)^3-x(2)^3-6*x(2)-4]`

☞ **Задача 26** *Дадена е нелинейната система:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2y - 8x = -5 \\ xy + 3y = 3 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето команда за въвеждане на функцията в лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция на MATLAB!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2*x(2)-8*x(1)+5;x(1)*x(2)+3*x(2)-3]`

Задача 27 *Дадена е система нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2y^2 - y^2 = 15 \\ x + y^2 = 12 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение $f(x) = 0$, като я запишете на езика на MATLAB като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2*x(2)^2-x(2)^2-15;x(1)+x(2)^2-12]`

Задача 28 *Дадена е системата нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} xy + x^2 = 6y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето MATLAB команда за въвеждане на лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)*x(2)+x(1)^2-6*x(2);x(1)^2+x(2)^2-4]`

Задача 29 *Дадена е системата нелинейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} x^2y + y^2 - y = 3 \\ x + xy^2 = 5 \end{array} \right.$$

Въведете в полето командата на MATLAB за въвеждане на лявата страна на системата $f(x) = 0$ като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)[x(1)^2*x(2)+x(2)^2-x(2)-3;x(1)+x(1)*x(2)^2-5]`

Задача 30 *Дадена е системата нелинейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 4 \\ 2x + y - z = -4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{array} \right.$$

Въведете в полето командата за въвеждане на лявата страна на системата като анонимна функция!

`f=@(x)[2*x(1)-3*x(2)+x(3)-4;2*x(1)+x(2)-x(3)+4;x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-4]`

Задача 31 *Дадена е системата нелинейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} 4x - y + z = xt \\ -x + 3y - 2z = yt \\ x - 2y + 3z = zt \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

Попълнете в полето векторната функция, която стои в лявата страна на векторното уравнение f(x)=0, като я запишете на езика MATLAB като анонимна функция!

Отговор:

```
f=@(x)[4*x(1)-x(2)+x(3)-x(1)*x(4);-x(1)+3*x(2)-2*x(3)-x(2)*x(4);
x(1)-2*x(2)+3*x(3)-x(3)*x(4);x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1]
```

Апроксимиране на функция. Метод на най-малките квадрати

✐ **Задача 1** *Замяната на функция $\varphi(x)$ с функция $\psi(x)$ така, че техните стойности да съвпадат в зададените точки $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се нарича* интерполация.

✐ **Задача 2** *Нека величините x и y са свързани с функционална зависимост $y = \varphi(x)$, която е неизвестна. Получени са експериментални данни (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Величината $\varepsilon_i = y_i - \varphi(x_i)$ се нарича случайна* грешка *при i-тото измерване.*

✐ **Задача 3** *Сумата от квадратите на случайните грешки*

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_r))^2$$

се нарича функция на грешката.

✐ **Задача 4** *Неизвестните параметри $a_0, a_1, \ldots, a_r$ във функцията на грешката $\mathcal{E}$ се определя от изискването за* минимум *на сумата от квадратите на случайните грешки.*

✐ **Задача 5** *В програмна среда MATLAB, апроксимацията с полином по метода на най-малките квадрати се осъществява чрез командата* `polyfit`.

✍ **Задача 6** *Попълнете липсващите думи в текст: Командата* `polyfit(x,y,k)` *е предназначена за приближаване на таблично зададена функция с* полином *от степен* `k`.

❑ **Задача 7** *В командата* `polyfit(x,y,k)`

- ➛ x е вектор от стойностите на зависимата променлива;
- ➛ x е вектор от стойностите на независимата променлива; ✓
- ➛ y е вектор от стойностите на зависимата променлива; ✓
- ➛ y е вектор от стойностите на независимата променлива;
- ➛ k е число-степента на полинома, с който се приближава.✓

✐ **Задача 8** *Ако са дадени n точки и се построи полином от степен $(n - 1)$, който минава през всички точки, то този полином се нарича* интерполационен.

❍ **Задача 9** *Командата* `polyfit(x,y,k)` *апроксимира експерименталните данни с интерполационен полином ако:*

- ➛ броят на експерименталните данни е по-голям от k; ✓
- ➛ броят на експерименталните данни е точно колкото е k;
- ➛ k е по-голямо от броя на данните.

✐ **Задача 10** *Пресмятането на стойност на таблично зададена функция в точка, различна от зададените данни се извършва с командата* `polyval`.

Задача 11 *За апроксимиране на таблично зададена функция с произволна нелинейна функция се използва командата* `lsqcurvefit`

Задача 12 *Командата* `lsqcurvefit` *има следния синтаксис:*
`[a,eps]=lsqcurvefit(fun,a0,x,y)`, *където:*

- `fun` е името на апроксимиращата функция; ✓
- `x` - зависима променлива;
- `eps` - грешката на апроксимация; ✓
- `y` - независима променлива;
- `a` - вектор ред, съдържащ получените по метода на най-малките квадрати стойности за неизвестните коефициенти. ✓

Числено решаване на определен интеграл с MATLAB

Задача 1 *Нека в интервала $[a, b]$ е зададена функцията $y = f(x)$. Чрез точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ се разбива интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, като $x_0 = a$, $x_n = b$. Във всеки от тези подинтервали се избира произволна точка ξ_j $(x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j)$ и се намира произведението s_j от стойностите на функцията в тази точка $f(\xi_j)$ и дължината на подинтервал $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$:*

$$s_j = f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Съставя се сумата на всички произведения:

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Сумата S_n се нарича интегрална *сума.*

Задача 2 *Границата на интегралната сума $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ при неограничено увеличаване броя на точките на разбиване, при което дължината на най-големия интервал клони към нула,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$$

се нарича определен интеграл.

Задача 3 *За пресмятане на определен интеграл от вида $\int_a^b f(x)\,dx$ се използва командата* `quad`

Задача 4 *Командата* quad *има следния синтаксис:*
`[q,n]=quad(@fun,a,b,eps,trace,p1,p2,...)`, *където:*

- @fun - подинтегрална функция, зададена като анонимна или във файл; ✓
- q - стойност на определения интеграл; ✓
- a - горна граница на интегриране;
- b - долна граница на интегриране;
- p1, p2 - параметри. ✓

Задача 5 *Функцията* `quadl` *реализира метода на Лобато за решаване на определен интеграл.*

Задача 6 *Функцията* `quadv` *е векторен вариант на функцията* quad.

Задача 7 *Функцията* `quadgk` *изчислява интеграл от функция на реална или комплексна променлива с квадратури на Гаус-Кронрод и се използва за решаване на несобствени интеграли.*

Задача 8 *За числено пресмятане на двоен интеграл в правоъгълна област се използва командата* `dblquad`

Задача 9 *Функцията* `quad2d` *се използва за изчисляване на двоен интеграл в произволна равнинна област.*

Задача 10 *Функцията* `triplequad` *се използва за числено пресмятане на троен интеграл.*

Задача 11 *Запишете команда за въвеждане на подинтегралната функция на*

$$\int_{10}^{20} \arcsin(\sin x^3)\,dx$$

като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)asin(sin(x.^3))`

Задача 12 *Запишете команда за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_{1}^{9} 3\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$$

като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)3.*sqrt(x).*(1+sqrt(x))`

❏ **Задача 13** *Даден е интегралът* $\int_0^{0,9} \sqrt{1-t^4}\,dt$. *Определете верните команди за решаването му!*

- `quad('1-t.^4',0,0.9)` ✓
- `f=@(x)(1-t.^4),quad(f,0,0.9)`
- `f=@(t)sqrt(1-t.^4),quad(f,0,0.9)` ✓

- ➢ `quad(f,0,0.9),f=sqrt(1-t.^4)`

❍ **Задача 14** *Определете верния запис при въвеждане на подинтегралната функция на интеграла* $\int_1^2 (\sqrt{z}-1)^2\,dz$*!*

- ➢ `f=@(x)sqrt(z-1)^2`
- ➢ `f=@(x)(sqrt(x)-1).^2dz`
- ➢ `f=@(z)sqrt(z)-1.^2`
- ➢ `f=@(z)sqrt(z-1).^2dz`
- ➢ `f=@(z)(sqrt(z)-1).^2` ✓

❍ **Задача 15** *Отбележете вярната команда за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла* $\int_0^{\pi/3} \cos^2(3t)\,dt$*!*

- ➢ `f=@(t)cos.^2(3.*t)`
- ➢ `f=@(t)cos(3.*t)^2dt`
- ➢ `f=@(x)cos(3.*t).^2`
- ➢ `f=@(t)cos(3.*t).^2` ✓

❍ **Задача 16** *Означете вярната команда за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла* $\int_0^1 e^t\sqrt{1-e^t}\,dt$

- ➢ `f=@(x)e^t*sqrt(1-e^t)dt`
- ➢ `f=@(t)e.^t.*sqrt(1-e.^t)`
- ➢ `f=@(t)exp(t).*sqrt(1-exp(t))` ✓
- ➢ `f=@(t)exp(t).*sqrt(1-exp(t))dt`

✐ **Задача 17** *Запишете в полето вярната команда за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла* $\int_0^{\pi/2} \sin 2t\cos 3t\,dt$ *като анонимна функция!*

Отговор: `f=@(t)sin(2.*t).*cos(3.*t)`

✐ **Задача 18** *Запишете в полето командата за решаване на интеграла*

$$\int_0^1 e^t\sqrt{1-e^t}\,dt$$

като използвате въвеждане на подинтегралната функция като стринг!

Отговор: `quad('sin(2.*t).*cos(3.*t)',0,pi/2)`

❑ **Задача 19** *Даден е интегралът*

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{s\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$$

Отбележете верните команди за решаването му:

- `f=@(x)s./4-s.^2;quad(f,0,sqrt(3))`
- `f=@(s)s./(4-s.^2)ds;quad(f,0,sqrt(3))`
- `f=@(s)s./sqrt(4-s.^2);quad(f,0,sqrt(3))` ✓
- `quad('s./(4-s.^2)ds',0,sqrt3)`
- `quad('s./(4-s.^2)',0,sqrt(3))` ✓

❍ **Задача 20** *Определете вярната команда за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_{0,1}^{2} \sin\frac{1}{x}\,dx$$

като анонимна функция:

- `f=@(x)sin1/xdx`
- `f=@(x)sin(1/x)`
- `f=@(x)sin(1./x)` ✓
- `f=@(x)sin(1./x)dx`

Задача 21 *Запишете в полето командата за задаване на подинтегралната функция f на интеграла*

$$\int_{0,5}^{1} e^{ln(arctan\frac{1}{x})}\,dx$$

като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)exp(log(atan(1./x)))`

Задача 22 *Запишете в полето командата за задаване на подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\arcsin x\,dx$$

като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)x.^2./(1+x.^2).*asin(x)`

Задача 23 *Запишете командата за въвеждане на подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_1^{1,5} x^2 ln(x)\,dx$$

като анонимна функция!

Отговор: `f=@(x)x.^2.*log(x)`

❏ **Задача 24** *Даден е интегралът* $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$. *Означете верните команди за решаване му:*

- ➛ `quad('x.^2.*exp(-x)dx',0,1)`
- ➛ `quad('x^2*e^(-x)',0,1)`
- ➛ `f=@(x)x.^2.*exp(-x);quad(f,0,1)` ✓
- ➛ `quad('x.^2.*exp(-x)',0,1)` ✓
- ➛ `f=@(x)x.^2.*e^(-x),quad(f,0,1)`

Задача 25 *Въведете в полето командата за дефиниране на подинтегралната функция* f *на интеграла* $\int_0^{0{,}35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$!

Отговор: `f=@(x)2./(x.^2-4)`

Задача 26 *Попълнете в полето командата за дефиниране на подинтегралната функция f на интеграла* $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$ *като анонимна функция!*

Отговор: `f=@(x)x.^2.*sin(x)`

Задача 27 *В MATLAB е дефинирана подинтегралната функция на интеграла*

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$$

с командата `g=@(x)exp(3.*x).*sin(2.*x)`. *Каква е следващата команда за решаване на интеграла?*

Отговор: `quad(g,0,pi/4)`

Задача 28 *В MATLAB е въведена команда* `quad(f,1,1.6)` *за решаване на интеграла*

$$\int_1^{1{,}6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx.$$

Коя е била предходната команда?

Отговор: `f=@(x)2.*x./(x.^2-4)`

❏ **Задача 29** *Даден е интегралът* $\int_3^{3{,}5} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. *Означете верните команди за решаването му:*

- ➛ `f=@(x)x./sqrt(1+x^2),quad(3,3.5)`
- ➛ `f=@(x)x./sqrt(1+x.^2),quad(f,3,3,5)`
- ➛ `f=@(x)x./sqrt(1+x.^2),quad(f,3,3.5)` ✓
- ➛ `quad('x./sqrt(1+x.^2)',3,3.5)` ✓
- ➛ `g=x/sqrt(x^2+1),quad(g,3,3.5)`

❍ **Задача 30** *За решаване на интеграла* $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$ *първо се дефинира подинтегралната функция* `f=@(x)(cos(x)).^2`, *след което се въвежда командата за решаване:*

- ➛ `fzero(f,0,pi/4)`
- ➛ `quad(f,0,pi/4)` ✓
- ➛ `quad(f,x,y)`
- ➛ `fplot(x,y)`
- ➛ `fzero(f,x,y)`

Задача 31 *Даден е интегралът* $\int_0^1 x^{1/3}\, dx$. *Въведете в полето командата за дефиниране на подинтегралната функция!*

Отговор: `f=@(x)x.^(1./3)`

Решаване на диференциални уравнения и системи с MATLAB

Задача 1 *Задачата за намиране на функция* $Y(t)$, *удовлетворяваща диференциалното уравнение* $Y'(t) = F(t, Y(t))$ *за* $t \geq t_0$ *при начално условие* $Y(t_0) = f_0$ *се нарича задача на* *Коши*.

❑ **Задача 2** *Означете командите, с които се решават диференциални уравнения:*

- ➛ `fzero`
- ➛ `ode45` ✓
- ➛ `ode15s` ✓
- ➛ `fsolve`
- ➛ `ode`

❑ **Задача 3** *Командите за решаване на диференциални уравнения имат сходен синтаксис:* `[T,Y]=команда('име',[t0,tf],y0,options)`, *където:*

- ➛ t_0 е крайна стойност на t;
- ➛ 'име' е името на файл или анонимна функция, съдържащ/а десните страни на системата обикновени диференциални уравнения; ✓
- ➛ y_0 е вектор-стълб, задаващ началното условие; ✓
- ➛ t_f е начална стойност на t;
- ➛ Y е изходна матрица, стълбовете на която са стойностите на търсената функция и нейните производни. ✓

❍ **Задача 4** *Дадена е задачата на Коши:* $2y' - y \sin t = t^2$, $y(0) = 1$. *Отбележете верния запис като анонимна функция на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(t, y)$!

- ➛ `f=@(t,y)t^2`
- ➛ `f=@(t,y)y*sin(t)+t^2`
- ➛ `f=@(t,y)(y*sin(t)+t^2)/2` ✓
- ➛ `f=@(t,y)2*y-y*sin(t)-t^2`

❍ **Задача 5** *Дадена е задачата на Коши:* $-y' - 2ty = 1 + t^2$, $y(0) = 3$. *Означете верния запис на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(t, y)$ *като анонимна функция!*

- ➛ `f=@(t,y)-1-t^2-2*t*y` ✓
- ➛ `f=@(t)2*t*y+1+t^2`
- ➛ `f=@(y,t)y+2*t*y+1+t^2`
- ➛ `f=@(t)-2*t*y+1+t^2`
- ➛ `f=@(t)1+t^2`

❍ **Задача 6** *Дадена е задачата на Коши:* $3y' + (1 + t^2)y = \cos t$, $y(0) = 1$. *Отбележете верните команди за решаването ѝ в интервала* $[0, 5]$*!*

- ➛ `f=@cost,ode45(f,[0,5],1)`
- ➛ `f=@(t,y)(cos(t)-(1+t^2)*y)/3,[T,Y]=ode45(f,[0,5],1)` ✓
- ➛ `f=@(t,y)(1+t^2)*y+cos(t),[T,Y]=ode45(f,[5,0],1)`
- ➛ `f=@(t)3*y+(1+t^2)*y,[T,Y]=ode45(f,[0,5],1)`

❍ **Задача 7** *Дадена е задачата на Коши:* $3y' + 2(1 + t)y + t^3 = 5$, $y(0) = 2$. *Отбележете верните команди за решаването ѝ в интервала* $[0, 5]$*!*

- ➛ `y=@(x,y)5-t^3-2*(1+t)*y,ode45(f,[0,5],2)`
- ➛ `f=@(t,y)(5-t^3-2*(1+t)*y)/3,ode45(f,[0,5],2)` ✓
- ➛ `f=@(t)3*y+2*(1+t)*y+t^3,ode45(f,2)`
- ➛ `f=2(1+t)*y+t^3-5,ode45(f,[0,5],2)`
- ➛ `f=@(t,y)5-t^3,ode45(f,[0,5],2)`

❍ **Задача 8** *Дадена е задачата на Коши:* $-y' \sin 2t = y \cos t$, $y(0) = 0$. *Означете вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(y, t)$ *като анонимна функция!*

- ➛ `f=@(t,y)y*cost`
- ➛ `f=@(t,y)y*cos(t)`
- ➛ `f=@(t,y)sin(2*t)-y*cos(t)` ✓

- ➛ `f=@(t)sin(2*t)+y*cos(t)`

❍ **Задача 9** *Дадена е задачата на Коши:* $y' + (1{,}2 + \sin 10t)y = 0$, $y(0) = 1$. *Означете вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(t, y)$ *като анонимна функция!*

- ➛ `f=@(t,y)-(1,2+sin(10*t))*y`
- ➛ `f=@(t,y)-(1.2+sin(10*t))*y` ✓
- ➛ `f=@(t)1,2+sin(10t)*y`
- ➛ `f=@(t,y) 0`

❍ **Задача 10** *Дадена е задачата на Коши:* $(1+t)y' = \ln(1+y^2) + 1$, $y(0) = 0$. *Означете вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(t, y)$ *като анонимна функция!*

- ➛ `f=@(t,y)log(1+y^2)+1`
- ➛ `f=@(t,y)log(1+y^2)+1-(1+t)`
- ➛ `f=@(t,y)(log(1+y^2)+1)/(1+t)` ✓
- ➛ `f=@(t)log(1+y^2)+1/(1+t)`

❍ **Задача 11** *Дадена е задачата на Коши:* $4y' + xy = \ln(1+x^2)$, $y(0) = 1$. *Означете вярната команда за въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(x, y)$ *като анонимна функция!*

- ➛ `f=@(t,y)log(1+x^2)`
- ➛ `f=@(x,y)log10(1+x^2)`
- ➛ `f=@(x,y)(log(1+x^2)-x*y)/4` ✓
- ➛ `f=@(x)x*y+log(1+x^2)`
- ➛ `f=@(x)log(1+x^2)`

❍ **Задача 12** *Дадена е задачата на Коши:* $2y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 3x^2 + 1$, $y(0) = 2$. *Вярната команда при въвеждане на дясната страна на диференциалното уравнение* $y' = f(x, y)$ *като анонимна функция е!*

- ➛ `f=@(x,y)3*x^2+1`
- ➛ `f=@(x,y)3*x^2+1-tan(x)*y`
- ➛ `f=@(x,y)(3*x^2+1-tan(x)*y)/2` ✓
- ➛ `f=@(t,y)(3*x^2+1+tan(x)*y)/2`

❍ **Задача 13** *Дадена е задачата на Коши:* $-y' + x^2 \cos y = x^3 - 1$, $y(0) = 3$, $x \in [0, 5]$. *Означете вярната поредица команди за решаването ѝ!*

- ➛ `f=@(x,y)x^3-1,ode45(f,[0,5],3)`
- ➛ `f=@(x,y)x^2*cos(y)-x^3+1,ode45(f,[0,5],3)` ✓
- ➛ `f=@(x,y)x^3-1-x^2*cosy,ode45(f,[0,5],3)`
- ➛ `f=@(x,y)x^3-1-x^2*cos(y),ode45(f,[0,5],3)`

❍ **Задача 14** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред* $y'' + y = 4xe^x$ *с начални условия* $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. *Извършете полагане* $y_1 = y$, $y_2 = y'$ *и преобразувайте до система от първи ред. Функцията - дясна страна на системата има вида:*

- ➛ `f=@(x,y)[y(2);2*x*exp(x)-y(1)]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)[4*x*exp(x);y]`
- ➛ `f=@(x,y)[y(1),y(2)]`
- ➛ `f=@(x,y)[4*x*e^x-y1,y2]`

❍ **Задача 15** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x},$$

при начални условия $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$. *След полагане* $y_1 = y$, $y_2 = y'$ *и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата* $y' = f(x, y)$ *като векторна анонимна функция. Тя е:*

- ➛ `f=@(x,y)e^(4*x)`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);2*y(2)-3*y(1)+exp(4*x)]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);2*y(2)-3*y+e^(4*x)]`
- ➛ `f=@(x,y)[2*y(2)-3*y(1)+exp(4*x)]`

❍ **Задача 16** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x,$$

при начални условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. *След полагане* $y_1 = y$, $y_2 = y'$ *и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата* $y' = f(x, y)$ *като векторна анонимна функция. Верният запис е:*

- ➛ `f=@(x,y)[y(2);4*sin(3*x)-3*y(2)-2*y(1)]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)4*sin(3*x)-2*y`
- ➛ `f=@(x,y)4*sin(3*x)-2*y-3*y(1)`
- ➛ `f=@(t,y)[4*sin(3x)-2y;y(1);y(2)]`

❍ **Задача 17** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' + 9yx^2 = 6\cos 3x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

След полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(x, y)$ като векторна анонимна функция. Вярната команда е:

- ➛ `f=@(x,y)[y(1);6*cos3x-9yx^2]`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);6*cos(3*x)-9*y(1)*x^2]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)6*cos(3*x)`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);6*cos(3*x)-9*y*x^2]`

❍ **Задача 18** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

След полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(x, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(x,y)[y(1),2*x^2*exp(x)+4*y(2)-5*y(1)]`
- ➛ `f=@(x)2*x^2*e^x`
- ➛ `f=@(x)2*x^2*exp(x)`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2),2*x^2*exp(x)+4*y(2)-5*y(1)]` ✓

❍ **Задача 19** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0{,}1.$$

Чрез полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(x, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(x,y)x^2-x+3-9*y`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);6*y(2)-9*y(1)+x^2-x+3]` ✓
- ➛ `f=@(x)x^2-x+3`
- ➛ `f=@(x,y)[y,6*y-9*y+x^2-x+3]`

❍ **Задача 20** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3y = 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Чрез полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(t, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(t,y)[y(2);(2-2*t*y(2)-3*y(1))/(1+t^2)]` ✓
- ➛ `f=@(t,y)[2-2*t*y(2)-3*y(1)]`
- ➛ `f=@(x,y)[2-3*y(1)/(1+t^2);2*t*y(2)]`

❍ **Задача 21** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' + 2(y^2 - 1)y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Чрез полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(t, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(y)2*(y(1)^2-1)*y(2)+y(1)`
- ➛ `f=@(x,y)[y(2);2*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)[y(1);2*(y(1)^2-1)*y(2)+y(1)]`

❍ **Задача 22** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' + xy' + y + 5x^2 + 1 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Чрез полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(t, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(x,y)[y(2);-x*y(2)-y(1)-5*x^2-1]` ✓
- ➛ `f=@(x,y)[-y-5*x^2-1;y(2)*x]`
- ➛ `f=@(x,y)[x*y(2)+y(1)+5*x^2+1]`

❍ **Задача 23** *Дадено е диференциалното уравнение от втори ред:*

$$y'' + 5x^2y' + (1 - x)y = 7,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$$

Чрез полагане $y_1 = y$, $y_2 = y'$ и преобразуване на уравнението до система от първи ред, се въвежда в MATLAB дясната страна на системата $y' = f(t, y)$ като векторна анонимна функция. Верният запис е:

- ➛ `f=@(x,y)[y(2);7+(x-1)*y(1)-5*x^2*y(2)]`
- ➛ `f=@(x,y)[7-(1-x)*y-5*x^2+y]`
- ➛ `f=@(x,y)[5*x^2*y(2);(1-x)*y(1);7]`

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Анкета по Компютърна математика

1. Вашата обща оценка за равнището на обучението по математика:
   (а) слаба;
   (б) средна;
   (в) Добра;
   (г) много добра;
   (д) отлична.
2. Считате ли, че обучението по математика, което Вие получавате е на най-високо ниво?
   (а) да;
   (б) по-скоро да;
   (в) по-скоро не;
   (г) не;
   (д) без отговор.
3. Считате ли, че обучението в българското училище е практически ориентирано?
   (а) да;
   (б) донякъде;
   (в) не;
   (г) без отговор.
4. Според Вас, образователната система насърчава ли учениците да използват математически софтуер?
   (а) да;
   (б) донякъде;

(в) не;

(г) без отговор.

5. Според Вас има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика?

   (а) да;

   (б) по-скоро да;

   (в) по-скоро не;

   (г) не;

   (д) без отговор.

6. Според Вас, използването на компютърни системи за изчисление ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика?

   (а) да;

   (б) донякъде;

   (в) не;

   (г) без отговор.

7. Според Вас, в кои дисциплини могат да се използват системи за математически изчисления? (възможен е повече от един отговор)

   (а) Математика;

   (б) Информатика;

   (в) Физика;

   (г) Химия;

   (д) Биология;

   (е) други.

8. Считате ли, че дистанционното обучение по математика чрез подходящи учебни материали и използване на система за математически изчисления би довело до по-високо качество на обучението?

   (а) да;

   (б) по-скоро да;

   (в) по-скоро не;

   (г) не;

   (д) без отговор.

9. Оценете с оценка от 2 до 6 идеята част от часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на система за математически изчисления:

   2 3 4 5 6

10. Каква е Вашата оценка за степента на трудност на системата Matlab за решаване на математически задачи?

(а) много лесна;
(б) по-скоро лесна;
(в) по-скоро трудна;
(г) много трудна;
(д) без отговор.

11. Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на задачи по математика?
    (а) да;
    (б) по-скоро да;
    (в) по-скоро не;
    (г) не;
    (д) без отговор.

12. Считате ли, че използването на Компютърна система за изчисления ще Ви помага в бъдеще?
    (а) да;
    (б) по-скоро да;
    (в) по-скоро не;
    (г) не;
    (д) без отговор.

13. Използвали ли сте преди система за математически изчисления?
    (а) да;
    (б) не.

14. За кои от следните системи за математически изчисления (CAS) сте чували? (възможен е повече от един отговор)
    (а) Mathematica;
    (б) Matlab;
    (в) Wolfram Alpha;
    (г) Maple;
    (д) Maxima;
    (е) Euler Math Toolbox;
    (ж) Sage;
    (з) MathCAD.

15. Полезен ли беше за Вас преподаваният материал по Компютърна математика с Matlab?
    (а) да;
    (б) не;

(в) без отговор.

16. Участвали ли сте в състезание по Компютърна математика?

    (а) да;
    (б) не;
    (в) без отговор.

17. Бихте ли участвали в състезание по Компютърна математика?

    (а) да;
    (б) не;
    (в) без отговор.

18. Каква оценка имате по математика?

    (а) Слаб(2)
    (б) Среден(3)
    (в) Добър(4)
    (г) Много добър(5)
    (д) Отличен(6)

19. Каква оценка имате по Информатика и Информационни технологии?

    (а) Слаб(2)
    (б) Среден(3)
    (в) Добър(4)
    (г) Много добър(5)
    (д) Отличен(6)

20. Вие сте:

    (а) мъж;
    (б) жена.

21. В момента вие сте:

    (а) ученик;
    (б) студент;
    (в) друг отговор.

22. Посочете клас ....(курс ....) и специалност ....

23. Вашата възраст в навършени години е ....

24. Какво бихте променили в образователната система, ако Вие сте Министър на образованието? ....

    ....

    ....

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

GUI за решаване на СЛАУ по метода на Гаус

```
function varargout = slau(varargin)
% SLAU MATLAB code for slau.fig
%    SLAU, by itself, creates a new SLAU or raises the existing
%    singleton*.
%
%    H = SLAU returns the handle to a new SLAU or the handle to
%    the existing singleton*.
%
%    SLAU('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
%    function named CALLBACK in SLAU.M with the given input arguments.
%
% SLAU('Property','Value',...) creates a new SLAU or raises the
% existing singleton*.  Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before slau_OpeningFcn gets called.  An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop.  All inputs are passed to slau_OpeningFcn via varargin.
%
%  *See GUI Options on GUIDE's Tools menu.  Choose "GUI allows only one
%  instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
% Edit the above text to modify the response to help slau
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @slau_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @slau_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
```

```
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before slau is made visible.

function slau_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin   command line arguments to slau (see VARARGIN)

% Choose default command line output for slau
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes slau wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = slau_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
disp('Рангът на матрицата A=')
disp(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))))
disp('e')
disp(rank(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String')))))
```

```

% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
disp('Рангът на разширената матрица A|b=')
disp([str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))),
        str2num(str2mat(get(handles.edit2,'String')))])
disp('e')
disp(rank([str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))),
        str2num(str2mat(get(handles.edit2,'String')))]))

% --- Executes on button press in pushbutton3.
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
Ra=rank(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))));
Rab=rank([str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))),
        str2num(str2mat(get(handles.edit2,'String')))]);
[m,n]=size(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))));
if Ra~=Rab
    disp('Системата е несъвместима')
elseif (Ra==Rab)&(Ra==n)
    disp('Системата има единствено решение')
else
  disp('Системата има безброй много решения')
end

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
```

```
            get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

%Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
%str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2 as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
            get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in pushbutton4.
function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
Ra=rank(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))));
A=str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String')));
b=str2num(str2mat(get(handles.edit2,'String')));
Rab=rank([str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))),
        str2num(str2mat(get(handles.edit2,'String')))]);
[m,n]=size(str2num(str2mat(get(handles.edit1,'String'))));
if Ra~=Rab
    disp('Няма решение')
elseif (Ra==Rab)&(Ra==n)
    disp('Решението на системата е:')
    disp(A\b)
else
  disp('Едно от решенията на системата е:')
  disp(pinv(A)*b)
end
```