

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

Катедра „Приложна математика и статистика“

Стефка Романова Караколева

---

Изследване ефективността от прилагането на  
компютърни програмни системи за изчисление  
и визуализация в обучението по математика

---

**АВТОРЕФЕРАТ**

на ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

за присъждане на образователна и научна степен ДОКТОР

по докторска програма

МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

**Научни ръководители:**

проф.д-р Велизар Павлов  
Русенски университет „Ангел Кънчев“  
Катедра „Приложна математика и статистика“

доц.д-р Борислав Лазаров  
Институт по математика и информатика  
Българска академия на науките  
София

Русе, 2016

Дисертационният труд има обем 244 страници, като съдържа списък на фигури и таблици, увод, три глави, заключение, приноси, публикации, библиография на използваната литература и четири приложения. Библиографията съдържа 149 заглавия, от които 95 на български език, 16 - на руски език и 38 на английски език. За илюстрация на изложението са включени 61 фигури и 90 таблици.

Докторантът работи в катедра „Приложна математика и статистика“, Факултет „Природни науки и образование“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“. Докторант е към катедра „Приложна математика и статистика“ в свободна форма на обучение. Изследванията по дисертацията са докладвани и обсъждани в катедра ПМС и ИМИ–БАН.

Дисертационният труд е обсъден на 25.03.2016 г. от разширен научен съвет на катедра „Приложна математика и статистика“ и е насочен за защита пред научно жури.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на открито заседание пред научно жури, утвърдено от Ректора на РУ „Ангел Кънчев“ на .....2016 г. от ..... часа в зала ..... на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

Материалите на докторанта са на разположение на заинтересованите лица в катедра „Приложна математика и статистика“. Авторефератът е публикуван в електронната страница „Развитие на академичния състав“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

Автор: *Стефка Романова Караколева*

Заглавие: *Изследване ефективността от прилагането на компютърни програмни системи за изчисление и визуализация в обучението по математика*

Университетски издателски център на Русенски университет „Ангел Кънчев“ - гр. Русе

---

## Обща характеристика на дисертационния труд

---

Съвременното общество функционира в глобалното информационно пространство. Няма област на науката или практиката, в която да не се използват компютърни и информационни технологии. Процесът на глобална компютризация и технологизация има своите безспорни предимства, но води и до негативни процеси, които се наблюдават и в сферата на образованието. В частност - възникват проблеми при прилагане на *традиционния подход* в обучението по математика.

Нашите наблюдения са, че развитието на информационното общество и масовото използване на компютърните и мобилни технологии води до по-ниско ниво на подготовка по математика в училищата и университетите. Голям е броят на учениците, които нямат необходимата математическа култура, не познават и не могат да използват на практика математическите закони, показват липса на логическо и абстрактно мислене, не умеят да се изразяват и да пишат на математически език. Днес тези млади хора постъпват в университет без нужната подготовка и знания, без навици за учене, което задълбочава още повече проблема и го прави проблем на цялото общество.

Основният проблем в образованието днес е в *начина на преподаване*. Нашата образователна система в настоящия момент не поощрява младите хора към самостоятелно мислене, което в перспектива става пречка за тяхното развитие.

Тези факти показват, че са необходими промени не само в нормативната база, а и в същността на учебния процес. Проблемите на обучението по математика на всички нива изискват въвеждане на нови подходи, методи на обучение и оценяване, съответстващи на нивото на математическа подготовка на обучаваните и отговарящи на високите съвременни изисквания на информационното общество.

Глобалното информационно пространство налага преосмисляне на образователната парадигма и учебното съдържание по математика. Според Коено Грейвмайер днес ударението трябва да падне върху обучението студентите:

- да разпознават проблемите, които могат да бъдат решавани с математически методи;
- да представят проблемна ситуация като математическа задача, която да могат да атакуват с компютър;
- да разбират математическите операции, които използват;
- да интерпретират и оценяват компютърно-генерираните резултати.

В настоящата дисертация е описан дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика по раздел „Числени методи“. Моделът е приложен за студенти от област на висше образование „Технически науки“, степен „бакалавър“ в Русенски Университет. Разработена е диагностична процедура за проверка на знанията и уменията на студентите. Резултатите от обучението са документирани и са извършени експерименти в периода 2010-2014 години. В глава 3, чрез статистически анализ, е доказана по-висока ефективност на експерименталната (условно наречена „нова“<sup>1</sup>) методика спрямо традиционната методика на преподаване.

Подходът на *компютърно съпроводено обучение (КСО) по математика* има следните основни характеристики:

- КСО по математика е *съвременно* обучение, при което обучаваният използва персонален компютър и система за математически изчисления и визуализация като инструмент за *решаване* на математически задачи.
- Чрез КСО *се намалява времето* за усвояване на материала чрез прилагане на съвременни компютърни средства за обучение.
- В КСО се използват *подходящи интерактивни учебни материали*.
- КСО по математика се приема с ентузиазъм от обучаваните и *отговаря на високите изисквания* на младите хора за съвременно обучение с използване на модерни методи и средства.
- Чрез КСО се прилага *убедително* принципа за *нагледност* в обучението.
- Чрез КСО се повишава ефективността на обучението по математика, доказването на което е предмет на настоящата дисертация.

## Обем и структура на дисертацията

Дисертационният труд има обем 244 страници, като съдържа списъци на фигури и таблици, увод, три глави, заключение, приноси, публикации, библиография на използваната литература и четири приложения. Библиографията съдържа 149 заглавия, от които 95 на български език, 16 - на руски език и 38 на английски език. За илюстрация на изложението са включени 61 фигури и 90 таблици.

Изследването е проведено сред студенти - инженерен профил, обучавани по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“.

Акцентът в разработката е поставен върху *изследване и доказване ефективността на описаната методика* чрез задълбочен статистически анализ на резултатите от обучението. Експерименталните изследвания са извършени с компютърните системи SPSS и MATLAB.

В Глава 1 са анализирани системите за математически изчисления и визуализация с приложение в обучението по математика. Направен е обзор на публикациите, свързани с темата на дисертацията. Анализирани са българският и световен опит в преподаването на математически дисциплини с използване на математически софтуер.

В Глава 2 е описан дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика с използване на системата за математически изчисления и визуализация MATLAB. Предложени са дидактически сценарии и общ модел на обучение и самоподготовка в ИТ среда.

<sup>1</sup>Използваните в дисертацията наименования „нова“ и „стара“ методики са условни и не следва да се разбират в буквален смисъл.

В Глава 3 са описани експериментални изследвания и резултати от проведени анкети, доказващи ефективността на приложената от автора методика на компютърно съпроводено обучение по Висша математика.

Глава 3 съдържа три раздела:

- В раздел 3.1 са описани серия експериментални изследвания на резултатите от обучението по Висша математика, извършени през пет последователни години – от 2010 до 2014. Представена е методиката на формиране на експериментални и контролни групи на изследване за всяка серия.
  - В раздел 3.1.1 е извършен вариационен анализ на изследваните съвкупности.
  - В раздел 3.1.2 е направена проверка за нормалност на разпределенията на изследваните признаци.
  - В раздел 3.1.3 е доказана ефективността на експерименталната методика за всяка от петте серии на проведения експеримент.
  - В раздел 3.1.4 е извършен задълбочен дискриминантен анализ, базиран на всички налични данни за 3001 изследвани студенти. В резултат на дискриминантния анализ е изграден адекватен дискриминантен модел, чрез който са получени прогнози (със съответните им вероятности) за нови случаи, неучастващи в извадката.
  - В раздел 3.1.5 са изследвани връзки между наблюдавани признаци и са открити най-силните от тях. Чрез метода *класификационни дървета* са класифицирани наблюдавани признаци чрез различни фактори. На основата на анализа са направени изводи за обучението по математика по експерименталната и традиционната методика, като е изследвано влиянието на фактора „методика“ върху различни категории студенти.
- В раздел 3.2 е извършен анализ на диагностичната процедура и провеждането на диагностичен тест за изследване резултатите от обучението по Висша математика.
- В раздел 3.3 са анализирани резултатите от проведена анкета „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“. Извършен е подробен *кълъстерен* анализ.

Приложение А съдържа диагностичен тест за проверка на знанията на студентите по Висша математика.

Приложение Б съдържа тестови задачи по Висша математика, включени в web-базирания електронен курс за обучение по дисциплината, предназначени за самостоятелна работа на студентите, които са „банка от задачи“ за контрол.

Приложение В съдържа анкета по „Компютърна математика“, чрез която са изследвани ученици и студенти и резултатите от която са анализирани в раздел 3.3.

Приложение Г съдържа компютърен код на създаден графичен потребителски интерфейс за решаване на СЛАУ.

### **Използвани web-базирани дидактически материали**

Обучението на студенти по методиката, предмет на настоящата дисертация, се извършва в учебна компютърна зала с използване на учебни материали - лекции, упражнения, тестове, видео-уроци, задачи и др, разработени по проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на

електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“, публикувани в страницата на Центъра по дистанционно обучение <http://cdo.uni-ruse.bg>.

### **Техническо оформление на дисертацията**

Дисертацията е подготвена чрез компютърна издателска система  $\LaTeX$ , компилирана с програмата PDF $\LaTeX$  като електронна книга с хипервръзки. Литературата е изработена с програмата Bi $\TeX$ . Електронният документ е приложен на оптичен носител към дисертацията. За четене на резултатния pdf-файл са необходими мобилно устройство или персонален компютър с програма Adobe Acrobat Reader. Навигацията в електронния документ се осъществява чрез навигационни бутони: хипер-съдържание, библиография, активни връзки към интернет-ресурси.

### **Участие в проекти при разработване на дисертацията**

Работата по дисертацията включва изследвания, частично финансирани по следните проекти:

- Проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“.
- Проект № 2015 - ФОЗЗГ-03, Финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

### Актуалност на темата

Образованието и обучението играят ключова роля за изграждането на Европейския съюз като общество, изградено на основата на познанието. С приемането на Лисабонската стратегия през 2000 г. бе определена нуждата от радикална реформа в образованието, поради нарастващата роля на информационните и комуникационни технологии в обществото. Чрез работната програма „Образование и обучение 2010“, последвана от стратегическата рамка за европейско сътрудничество в образованието и обучението „ЕТ 2020“ бяха формулирани общи цели и инициативи, които обхващат всички видове образование и обучение и всички етапи на обучението през целия живот. Те се подкрепят от няколко програми за финансиране, като „Програмата за обучение през целия живот“ и „Еразмус Мундус“ както и множество програми по стратегията „Учене през целия живот“ за общо образование, висше образование и електронно обучение.

Европейските ангажименти на България като член на Европейския съюз изискват въвеждане на нови, модерни методи на обучение по всички фундаментални дисциплини, в това число и по математика.

Една от приоритетните цели, заложи в „Стратегията за развитие на Висшето образование в Република България за периода 2014-2020“, приета през февруари 2015 от Народното събрание е: „Съществено повишаване на качеството на висшето образование и на съвместимостта му с европейските системи за Висше образование, с цел заемане на достойно място в Европейско пространство за висше образование“. За постигане на тази цел се предвижда „реформиране на учебните програми и учебното съдържание“ в съответствие с изискванията на Европейската комисия.

Широкото използване и развитие на компютърната техника във всички области на науката и практиката изисква създаване на компетентни, висококвалифицирани и информирани кадри, добре познаващи компютърните и информационни технологии. Създаването и обучението на такива специалисти е задача на съвременното образование. То трябва да осигурява необходимите условия за изграждане на система от знания и умения, обезпечавачи създаването на кадри, подготвени за творческа ефективна реализация в съответната област на знанието в условията на динамично развиващите се информационни и телекомуникационни технологии.

На преден план днес стои въпросът „Как да повишим интереса на младите хора към ученето?“

През последните години интерактивните професионални компютърни системи масово навлизат като нова форма на обучение в университетите на Европа, САЩ, Япония, Русия и др. Те стават задължителен елемент на преподаването и научните изследвания. Чрез подхода на „компютърно съпроводено обучение по математика“, предмет на настоящата дисертация: се засилва интереса на обучаваните към математиката и се аргументира ползата от нея; провокира се състезателния елемент и екипната дейност в часовете и извън тях; програмните компютърни системи стават основен инструмент и добър помощник в обучението като се ускорява процеса на разбиране на математическите понятия и методи; задоволяват се високите образователни изисквания на учащите; създават се умения за работа с компютърни системи за изчисление и визуализация, което води до повишаване на дигиталната и математическа компетентност на обучаемите – необходимо условие за успешна реализация на младите хора в условията на пазарна икономика и развито информационно общество.

## 1.1 Обзор и анализ на състоянието на проблема

В процеса на работа по дисертацията, авторът на настоящия труд изследва текущото състояние на преподаването на Висша математика със система за математически изчисления в България. Това изследване е проведено в три основни направления:

- Проучване на съдържанието на учебни програми по математика в български университети и използването на системи за математически изчисления в тях.
- Запознаване със съдържанието на научни статии от автори, които преподават в различни български университети и споделят опита си при използването на различни системи за изчисления в различни раздели от математиката.
- Проучване на съществуващите добри практики в обучението с CAS в България и анализ на участието на студенти в Националната олимпиада по компютърна математика „Акад. Стефан Додунеков“.

По отношение на използваните системи за изчисления, в повечето университети в България се използват три от системите: MATLAB, Mathematica и Maple, като системата Mathematica се прилага предимно в обучението на студенти от Област на ВО „Природни науки, математика и информатика“, докато системите MATLAB и Maple – за студенти от Област на ВО „Технически науки“. Най-масово в българските университети се използват системите MATLAB и Mathematica.

Анализирано е обучението на студенти по математически дисциплини с използване на системи за математически изчисления в Бургаски Свободен Университет, Великотърновски Университет, Габровски университет, Нов Български Университет, Пловдивски Университет, Софийски Университет, Русенски Университет, Технически Университет - Варна, Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия (УАСГ) и Технически Университет - София. Направен е анализ на участието на студенти в Националната студентска олимпиада по Компютърна математика „Акад. Стефан Додунеков“ за периода 2011-2015 г. Проучени са публикации и дискусии по темата на дисертацията. Анализиран е опитът и добрите практики на компютърно съпроводено обучение в различни университети.

Една от целите на проучването на наличната литература от автора бе да намери резултати от изследвания за ефективността на прилаганите методики на обучение чрез системи за математически изчисления. В дисертацията авторът цитира такива заглавия, като изказва мнение,



че изследванията и научните доказателства за ефективността от прилагането на системи за компютърна математика в България НЕ са достатъчни и убедителни. В настоящия труд е направен опит да се направи такова изследване и да се докаже ефективността от прилагането на компютърни системи за математически изчисления и визуализация конкретно в Русенски Университет.

В световен мащаб използването на системи за Компютърна математика в обучението по математика има дългогодишни традиции. Самите производители на такива системи предлагат богат арсенал от ръководства, списания, книги и курсове на своите електронни страници.

Например, за студентите и преподавателите фирмата MathWorks има специално разработени студентски безплатни версии на MATLAB, публикуват се студентски разработки, организират се курсове в университети в САЩ, Германия, Япония и др. В Япония много университети предоставят безплатни версии на своите студенти и организират конкурси с награден фонд за сложни изследователски проекти. В Русия академичната общност активно ползва образователния сайт Экспонента, където се публикуват множество разработки с MATLAB, Mathematica, Maple, MathCad и др, автори на които са преподаватели и студенти от различни университети; провеждат се конкурси, обсъждат се проблеми, провеждат се вебинари чрез официалния YouTube канал MATLABinRussia.

## 1.2 Обзор на системите за математически изчисления и визуализация

В раздел 1.2 е направен кратък обзор и сравняване на най-разпространените CAS, след което се аргументира избора на системата MATLAB като инструмент в обучението по математика, предмет на настоящата дисертация.

Системите за математически изчисления и визуализация са колекция от компютърни програми и библиотеки, предназначени за числени пресмятания и аналитични преобразувания, чрез които се решават бързо и ефективно, с помощта на компютър, разнообразни задачи. През последните години в България стана популярен терминът „Компютърна математика“, който се използва масово вместо популярния в чужбина термин Computer Algebra Systems (CAS).

Анализирани са общите и специфичните характеристики на системите за компютърна математика. Разгледани са видове, структура и спектър от приложенията им.

Описани са подробно основните характеристики на най-популярните компютърни системи за изчисления и визуализация: Euler Math Toolbox, Gauss, Maple, MathCad, Mathematica, Wolfram Alpha, MATLAB, Maxima, MuPAD, Reduce, Sage Math, като е обобщена информацията за тях по години на развитие, лиценз и производител.

Аргументиран е изборът на система за изчисления, използвана в обучението по математика в Русенски Университет.

## 1.3 Цели и задачи на изследването

*Обект* на изследване са резултатите от обучението по Висша математика.

*Предмет* на изследването са нови изследователски методи на обучение с използване на компютърни системи за математически изчисления и визуализация като средство за повишаване качеството на обучение.

## Цели на изследването

### *Теоретични цели*

- Създаване на дидактически модел на обучение за формиране на умения за решаване на различни видове математически задачи чрез използване на системи за математически изчисления.
- Изграждане на методика на обучение по математика, основана на използване на системи за компютърни изчисления и визуализация.
- Доказване ефективността на използваната методика.

### *Практически цели*

- Създаване на компютърно базирани материали за обучение.
- Създаване на компютърно базирани тестове за проверка на знанията.
- Дидактически анализ на създадените тестове.
- Статистически анализ на получените резултати от обучението.

## Използвани методи на изследване

- Изучаване и анализ на дидактическа, методическа, приложно-статистическа литература и учебна документация, свързана с темата на изследването.
- Изучаване и анализ на различни системи за математически изчисления от гледна точка на техните възможности за приложение при обучението по математика.
- Наблюдение на процесите на обучение.
- Беседи с ученици и студенти.
- Анкети с ученици и студенти.
- Проверка на знанията на обучаемите чрез специализирани тестове.
- Статистически анализ на емпирични данни за резултатите от обучението.

## Основна хипотеза на изследването

Обучението по математика с използване на системи за математически изчисления и визуализация е в основата на новата дидактическа парадигма на математическото образование в България в условията на информационното общество. Чрез подхода *компютърно съпроводено обучение по математика* се постига по-висока ефективност на обучението по математика в сравнение с традиционния подход.

---

## Дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика

---

В глава 2 е описан дидактически модел на компютърно съпроводено обучение по Висша математика по раздела „Числени методи“ за студенти инженерен профил. Моделът е приложен за студенти от област на висше образование „Технически науки“, степен „бакалавър“ в Русенски университет. Разработена е диагностична процедура за проверка на знанията и уменията на студентите. Резултатите от обучението са документирани и са извършени експерименти в периода 2010-2014 години. В глава 3, чрез статистически анализ, е доказана по-висока ефективност на експерименталната методика спрямо традиционната методика на преподаване.

Обучението по математика е непрекъснат процес, който предполага не само последователност в преподаването на материала, но и в още по-голяма степен контрол на усвояването на основните математически структури. Съществува тясна връзка между обучението по математика в средното и висшето училище, поради която трябва да се отчита нивото на математическа подготовка на студентите и според това ниво да се избира подходяща методика на обучение.

Основание за разработване на предложения дидактически модел ни дава от една страна - необходимостта от съвременен подход на обучение по Числени методи и от друга - ограничения хорариум на аудиторните часове по Висша математика.

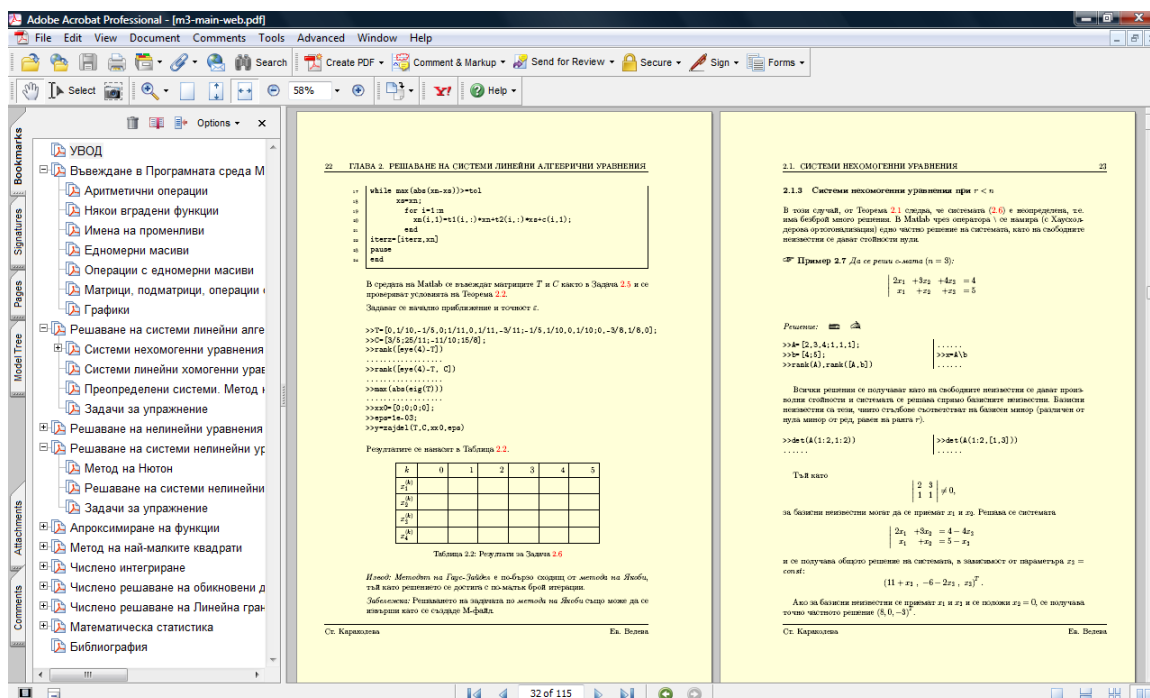
При изследване на процесите в науката и техниката, бъдещият инженер се интересува от математиката не като наука сама за себе си, а като инструмент за решаване на конкретни практически задачи. Успешното решаване на даден проблем е възможно само при добро познаване на основните числени методи и начините за тяхното реализиране.

Предвид факта, че обучението по Числени методи е немислимо без използване на компютър, за постигане на качествено съвременно обучение ние въведохме методиката на компютърно съпроводено обучение по Числени методи, прилагана успешно вече над петнадесет години в Русенски университет. Изучаването на числените методи е обвързано тясно с практическото им използване в средата на системата MATLAB.

Съдържанието на учебната дисциплина дава възможност студентите да придобият знания и практически опит за числено решаване на системи линейни уравнения, нелинейни системи, апроксимиране на функции, числено интегриране, диференциални уравнения и системи. Обучението по експерименталната методика има за цел, чрез усвояване на изучавания материал,

студентите да придобият компетенции и практически умения за самостоятелно решаване на конкретни задачи от практиката.

През последните години се наблюдава трайна тенденция към намаляване на аудиторните часове за изучаване на фундаментални математически дисциплини при запазване съдържанието на изучавания материал. Този проблем е факт и при обучението по Числени методи на бъдещите инженери в Русенски университет. Намаленият хорариум по дисциплината наложи въвеждане на методика на обучение с практическа насоченост, при която обучението по два от разделите - Числени методи и Статистика се провежда в компютърна зала с терминали и персонални компютри при използване на компютърни системи за изчисления и визуализация MATLAB и SPSS.



Фигура 2.1: Учебно пособие по Числени методи с MATLAB

При обучението по Числени методи се използват учебно пособие и web-базиран курс по дисциплината, включващ лекции, упражнения, тестове, задачи, видео-уроци и др, чрез които се подпомага усвояването на материала от студентите в извънаудиторната им работа, фигура 2.1. За проверка на знанията на студентите са разработени тестови въпроси, публикувани в web-базирания курс по дисциплината с ключ към верните **отговори**, приложение Б.

## 2.1 Дидактически сценарии и общ модел

В раздел 2.1 е направен анализ на учебното съдържание и методиката на преподаване на числени методи, посочени са трудностите, с които се сблъскват студенти и преподаватели в процеса на обучение, анализират се причините и подходите за тяхното овладяване. Предложени са дидактически сценарии и общ модел на обучение и самоподготовка в ИТ среда.

Разглеждат се основните числени методи с приложение в инженерната практика: решаване на системи линейни алгебрични уравнения, числено решаване на нелинейни уравнения и

системи, метод на най-малките квадрати за апроксимиране на таблично зададена функция, числено интегриране, числено решаване на обикновени диференциални уравнения и системи, статистика.

За добро усвояване на материала от студентите, към електронния курс са подготвени серия видео-уроци, които са достъпни за всички регистрирани потребители. Общото времетраене на всички видео-уроци по всички теми е над 5 часа.

### 2.1.1 Въведение в програмната среда MATLAB

Това е въвеждаща тема, в която се прави кратък обзор на системите за математически изчисления и в частност - характеристика на системата MATLAB. С множество примери, в директен режим на работа, студентите, контролирани от преподавателя, се запознават пред монитора с основните обекти и операции в MATLAB, вградените често използвани математически функции, различните формати на запис на числата, оператора за присвояване, преобразуване на ъгли от градуси в радиани, едномерни масиви и операции с тях, матрици и операции с матрици, различни видове графики и анимация. Всички примери се въвеждат самостоятелно от всеки студент, който има индивидуално работно място.

Темата е въвеждаща, но затова пък много важна за бъдещата работа на студентите през семестъра. Основните трудности тук идват от първата среща с новата система, непознатия интерфейс и работата в директен режим, чрез въвеждане на команди в командния ред. Тези трудности се преодоляват неусетно през семестъра.

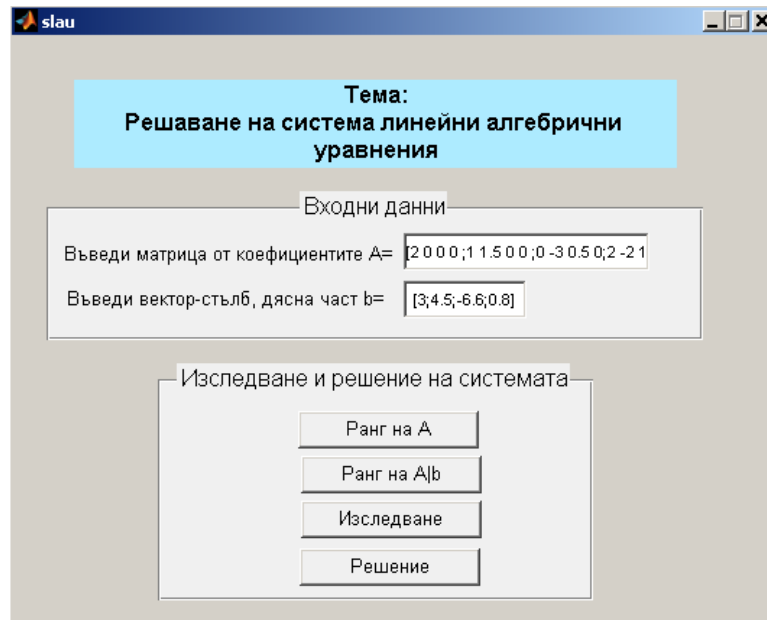
### 2.1.2 Системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

Темата започва с кратък обзор на теорията за СЛАУ - матричен запис, видове, теорема за съществуване и единственост на решението. Подробно се разглеждат точните методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения. Решава се моделна задача с три неизвестни с MATLAB, като се набляга на етапите на решаване, а именно: преминаване от матричен запис на системата към линеен запис, проверка на теоремата за съществуване и единственост на решение чрез сравняване ранговете на основната и разширената матрица, решаване по три различни метода - метод на Крамер, метод за решаване с обратна матрица и метод на Гаус.

Някои студенти имат в началото затруднения, свързани с това, че при изучаване на системи линейни алгебрични уравнения по Математика - 1 не са обучени да записват системата в матричен вид, а са преобразували директно разширената матрица на системата. Част от студентите имат затруднения и при преминаване от матричен към линеен запис. За преодоляване на тези трудности, след решаване на моделната задача, решена в учебното пособие, студентите решават самостоятелно, при непрекъснат контрол и помощ от страна на преподавателя, още няколко СЛАУ с различни методи, като се разглеждат случаи на липсващи или разместени неизвестни, повече от три неизвестни, липса на решение. За по-добро усвояване на материала се препоръчва на студентите винаги да записват на лист матрицата от коефициенти пред неизвестните и стълба на свободните коефициенти, като на мястото на липсващите коефициенти въвеждат нули. В процеса на самостоятелно решаване на задачи, непрекъснато се подчертава важността на проверката за равенство на ранговете на основната и разширената матрица и сравняването им с броя на неизвестните, което дава отговор на въпроса за съществуване и единственост на решението.

Решаването на примерите става по два начина: директно от командния ред на системата MATLAB и чрез използване на графичен интерфейс (GUI), създаден от автора за нуждите

на обучението, кодът на който е даден в приложение Г (фигура 2.2). Чрез използване на



Фигура 2.2: Графичен интерфейс по темата „Системи линейни алгебрични уравнения“

графичния интерфейс се изследват самостоятелно и задачи с безброй решения и без решение.

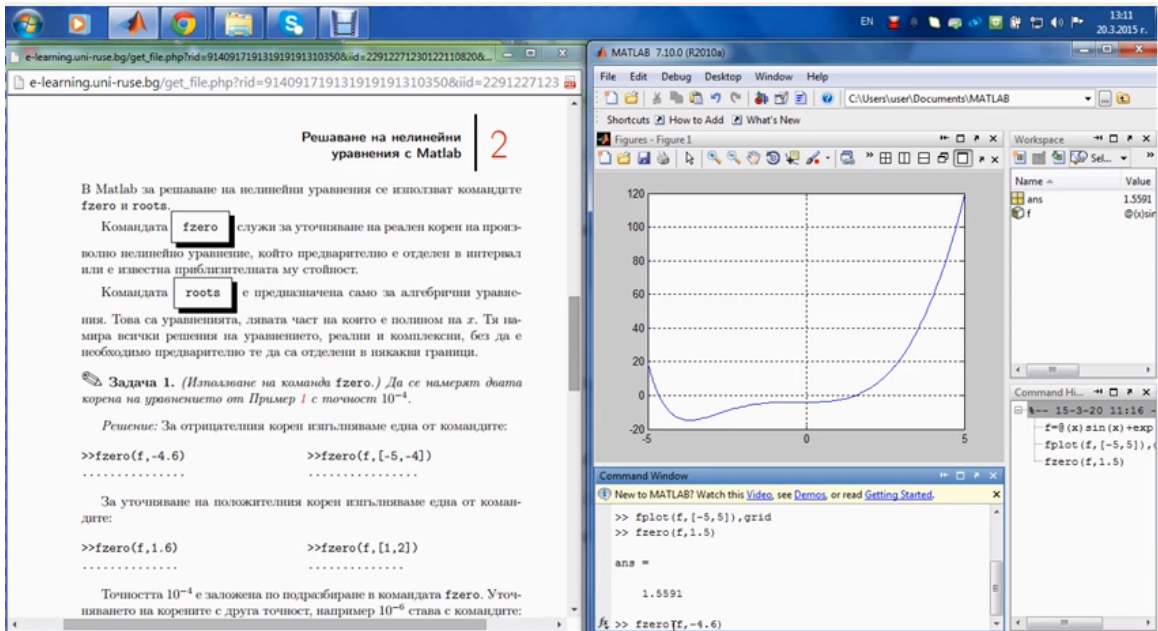
Наблюденията на автора по време на упражнението показват, че диалоговият режим на работа е по-полезен за студентите от използването на графичния интерфейс, тъй като по този начин студентите по-добре овладяват синтаксиса на системата и се научават самостоятелно да изследват и да откриват решението на системата.

Във втората част от темата се разглежда фундаменталната идея за итерационен метод и конкретно итерационни методи за решаване на СЛАУ. Въвежда се понятието *сходящ итерационен процес* като граница на редицата от получените приближения за решението на системата. Чрез дадената решена моделна задача се прилагат *стъпка по стъпка* етапите на решаване на СЛАУ по метода на Якоби: преобразуване на системата във вид, удобен за итерации, задаване на начално приближение и точност на изчисление, намиране на ново приближение и проверка на условието за край на итерационния процес. В края на упражнението се решават самостоятелно задачи с итерационен метод, като за мотивираните студенти е предвиден допълнителен материал - програмиране в MATLAB на Метода на Гаус-Зайдел и сравняване на скоростта на сходимост на двата итерационни метода.

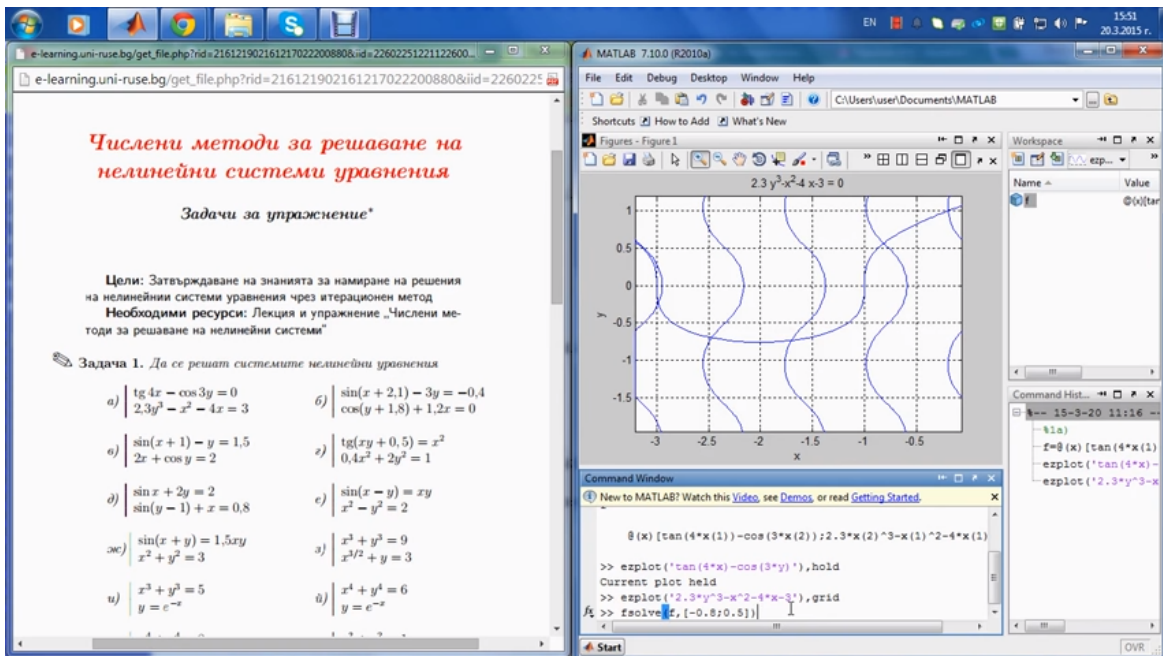
С мотивираните студенти се провеждат допълнителни занятия по тази тема в рамките на подготовката за олимпиада по Компютърна математика, като се използва символния пакет Symbolic Math Toolbox на MATLAB (MuPAD), разглеждат се задачи с параметър, системи с безброй много решения, приложения в геометрията и други.

### 2.1.3 Нелинейни уравнения (НУ) и системи (СНУ)

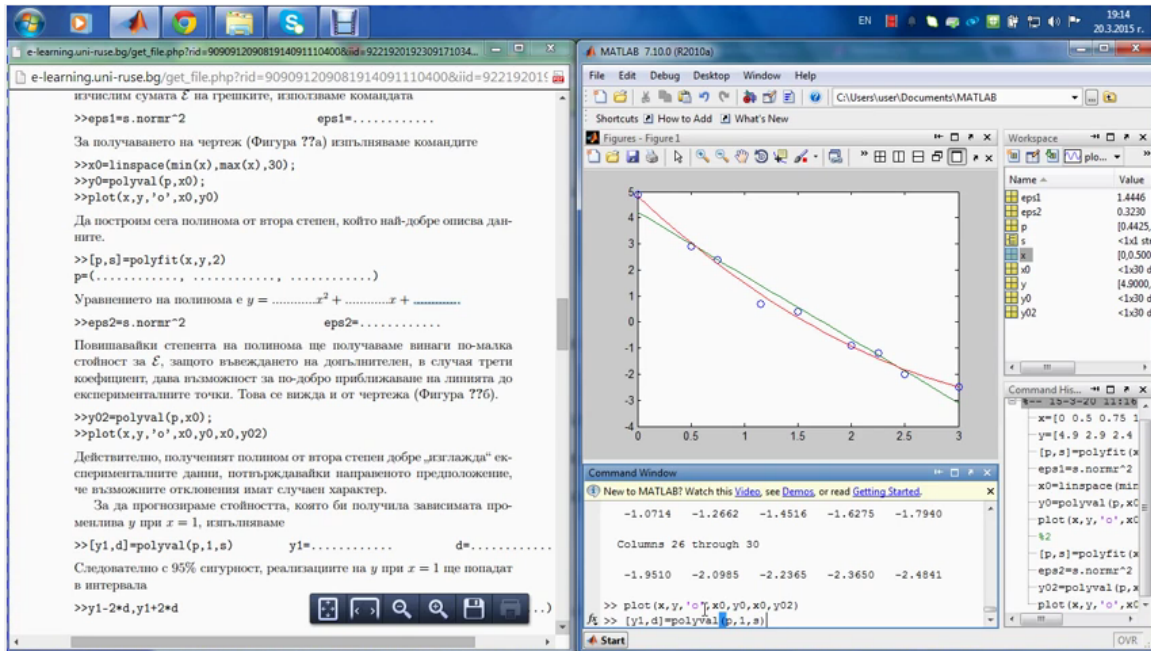
В началото на упражнението се разглеждат двата основни етапа при търсене на числено решение на нелинейно уравнение  $f(x) = 0$  - изолиране и уточняване на корените. Подчертава се важността на графичното изобразяване на функцията  $f(x)$  и намиране на пресечните ѝ точки с абсцисната ос, което дава информация за наличието на реални корени на уравнението



Фигура 2.3: Решаване на нелинейно уравнение с командата fzero



Фигура 2.4: Решаване на система нелинейни уравнения



Фигура 2.5: Апроксимиране с линейна и квадратна функция

и техните приблизителни стойности. Разглежда се моделен пример, върху който се коментира и синтаксиса на командите за изолиране и намиране на реалните корени на НУ. Подробно се разглеждат няколко класически методи за уточняване на изолиран в интервал корен на НУ: метод на разполовяването, секущите, допирателните и др. Отделно се разглежда случай на алгебрични уравнения и решаването им с командата `roots`.

Упражнението се състои от две части – решаване на трансцендентни (фигура 2.3) и алгебрични уравнения. Анализирани са затрудненията на студентите по темата.

Важен момент в обучението по тази тема е практическата работа на студентите по кодиране на различни функции с цел да се научат правилно да използват вградените функции и да усвоят технологията на писане на математически формули в линеен вид. Акцент се поставя и на въпроса за правилно определяне на допустимите стойности на променливата и коректно задаване на интервал, в който да се визуализира графиката на функцията.

Намирането на решенията на алгебрични уравнения също е свързано с немалко трудности. Голяма част от студентите не са усвоили основни математически понятия и теореми, не разбират добре понятията „степен“, „коефициент“, „индекс“, „полином“. Посочени са дидактически техники за преодоляване на трудностите.

След добро усвояване на методите за решаване с MATLAB на нелинейни уравнения, се пристъпва към решаване на системи нелинейни уравнения с две или три неизвестни. Описана е технологията на обучението. За илюстрация са представени графични изображения на отделни етапи от работата. Например, за нагледност при изследване на системите НУ (фигура 2.4) в случай на две неизвестни, се изобразяват графиките на функциите - леви страни на системата и се търсят пресечните им точки. Така се определят визуално и координатите на началните точки, които се задават на по-късен етап в командата `fsolve`. Графичното изобразяване се извършва чрез `ezplot`, която има лек синтаксис и се усвоява бързо от студентите.



### 2.1.4 Метод на най-малките квадрати

Темата е изключително важна за бъдещите инженери поради факта, че в инженерната практика често се налага да се апроксимира таблично зададена функция с полином и нелинейни функции, зависещи от два и три параметъра.

Първо се разглежда теоретичната постановка на задачата и синтаксиса на командите в MATLAB, след което се пристъпва към приближаване на таблично зададена функция с полином от първа и втора степен, като се сравняват грешките на апроксимация. За целта се разглежда моделен пример, фигура 2.5.

Втората част от упражнението е посветена на по-общата задача: приближаване на таблично зададена функция с нелинейна функция, зависеща от няколко параметъра и дефинирана от потребителя като анонимна функция. Решава се моделна задача като за апроксимираща функция се използва експоненциална функция, зависеща от два параметъра. Представени са изображения на работния екран при апроксимиране на таблично зададена функция с линейна и квадратна функция и апроксимиране с нелинейни функции, зависещи от два параметъра.

Важен момент в процеса на обучение е осъзнаването на основната цел при апроксимирането: получаване на възможно най-малка грешка на апроксимация. За целта в края на упражнението се задава изследователска самостоятелна работа на студентите, която се провежда под контрола на обучаващия. Задачата е да се апроксимира таблично зададена функция с четири функции - линейна, логаритмична, експоненциална и степенна, от които да се избере най-подходящата, т.е. тази, за която грешката е възможно най-малка.

### 2.1.5 Числено интегриране

Разглеждат се числените методи за решаване на определен интеграл, като се набляга на практическото приложение на разглежданата тема. В началото на упражнението се припомня дефиницията и геометричния смисъл на определен интеграл (изучени в Математика 1), задава се подробно синтаксиса на командите за решаване на различни типове интегрални, достъпни от командния ред на MATLAB, като се набляга на важноста на правилното изписване на подинтегралната функция на езика на MATLAB чрез използване на поелементните операции умножение, деление и степенуване. Решават се подробно две моделни задачи, разликата между които е в начина на въвеждане на подинтегралната функция - като стринг и като „анонимна“ функция. Тъй като студентите вече са усвоили добре работата със системата, трудностите, с които се сблъскват, са предимно от технически характер. Темата е благодатна и с разнообразието на задачи по отношение на вида на интеграла и вида на подинтегралната функция. Представени са изображения на работни екрани при решаване на определени интегрални и приложение, както и на двойни и тройни интегрални.

Съответното видео-упражнение включва приложение на интегрални за намиране лице на равнинна фигура дължина на линия, зададена параметрично; решаване на интегрални, зависещи от параметър, несобствени, двойни, тройни интегрални, интегрални в комплексната област и други. Подчертава се, че тъй като решаването на интегрални е числено, не е проблем да бъдат решени и интегрални, които са нерешими в елементарни функции.

Студентите, които не успяват в часа да разберат добре решенията на всички задачи или са пропуснали упражнението, могат да прегледат отново видео-урока по темата <http://youtu.be/acZYF2ZCFBE> и след това да направят справка как се решават задачите за упражнение <http://youtu.be/z0zgsvX9iCY>.

### 2.1.6 Диференциални уравнения и системи

Всички процеси в природата и обществото се описват с диференциални уравнения. Темата се изгражда на основата на приложни задачи от различни области на знанието - физика, екология и др. В началото на упражнението се разглеждат подробно числените методи за решаване на задачата на Коши - методи на Ойлер, Рунге-Кута, адаптивни алгоритми, както и съответните MATLAB процедури за намиране на решението. Обсъжда се с пример как система ДУ от втори ред може да се сведе с подходящо полагане до система от първи ред (канонизиране). Разглежданите задачи са практически и са степенувани по трудност. В първата задача функцията зависи само от времето и параметри, зададено е точно решение и освен намиране на численото решение се изисква сравняване на точното и приближеното решение и изобразяване на грешката. Във втората задача дясната страна зависи от независимата променлива и от търсената функция; третата задача е система от две диференциални уравнения от първи ред, а в четвъртата задача диференциалното уравнение е от втори ред и е необходимо да се направи подходящо полагане, за да се сведе до система диференциални уравнения от първи ред. В дисертацията са представени графични изображения на решаването на две от задачите.

Очакваните резултати от обучението по раздел „Числени методи“, предмет на настоящото изследване, са свързани с уменията на студентите да прилагат на практика своите знания, като използват команди и процедури от функционалния интерфейс на компютърната система MATLAB за: решаване на системи линейни алгебрични уравнения с точни и итерационни методи; нелинейни уравнения и системи; апроксимиране на таблично зададени функции по метода на най-малките квадрати; числено решаване на интеграли и приложения, числено решаване на диференциални уравнения от първи и втори ред.

Според автора, студентите приемат с ентузиазъм (въпреки трудностите) този начин на обучение и определят практическата работа като изключително полезна за тяхната бъдеща практика. Не са редки случаите, в които те започват да използват наученото в часовете по Висша математика в други дисциплини и при подготовка на курсови работи. Тази практика продължава и в по-горните курсове. От разговори със студенти-дипломанти става ясно, че наученото по Висша математика 3 се използва до дипломирането им.

### 2.1.7 Архитектура на общия модел

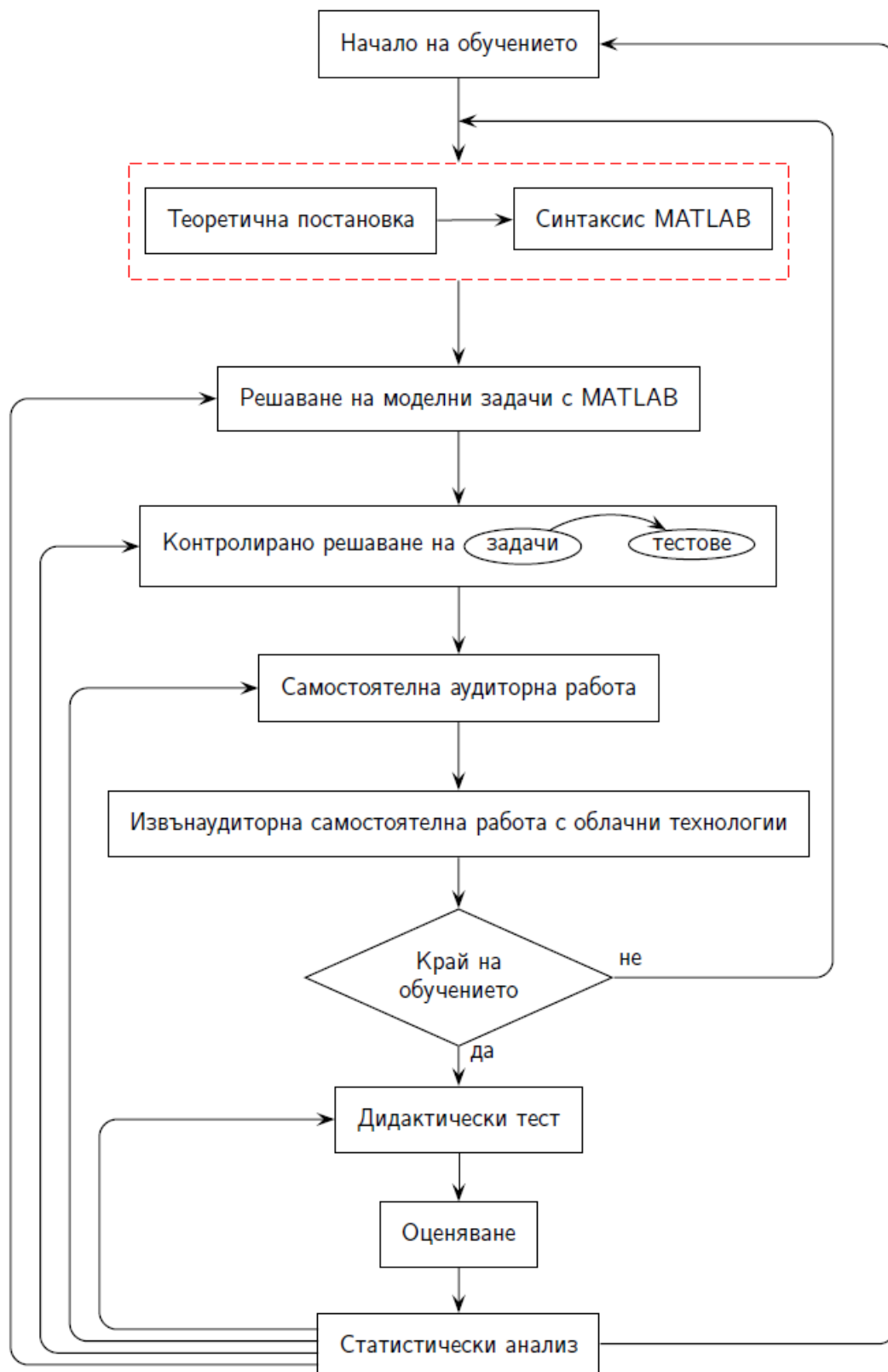
Приведените дидактически сценарии в раздел 2.1 реализират нашия общ модел за обучение и оценка на постиженията по отделните модули от програмата, фигура 2.6.

Ключовите нововъведения са в преноса на технически трудоемките и рутинни дейности в CAS-среда. Самостоятелната аудиторна работа се допълва чрез самоподготовка с прилагане на облачни технологии. Постигнатият по този начин синергичен ефект се оценява с адекватен статистически инструментариум, за който става въпрос в раздел 2.2.

## 2.2 Дизайн на диагностичен тест за изследване резултатите от обучението по Висша математика

В раздел 2.2 е представена диагностичната процедура за разработване и експериментално изследване на резултатите от прилагане на тестов модел за проверка на знанията на студенти от професионално направление „Технически науки“ по раздел „Числени методи“.

В глава 3, раздел 3.2 е извършен статистически анализ на модела и резултатите от неговото прилагане.



Фигура 2.6: Архитектура на модел за обучение и самоподготовка в ИТ среда

Обект на изследването е учебно - познавателната дейност на студентите от специалности „Индуриално инженерство“ и „Мениджмънт на качеството и метрология“ на Русенски университет - техните знания и умения при изучаването на раздела „Числени методи“ в учебната дисциплина „Приложна математика“.

Цел на изследването е да се разработи и експериментира диагностичен тест „Числени методи с MATLAB“ (даден в Приложение А на дисертацията) за текущ контрол на знанията на студентите при следната хипотеза.

Хипотеза. Използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите по дисциплината „Приложна математика“ стимулира познавателната им дейност и води до по-добро и качествено усвояване на учебния материал.

За постигане на поставената цел са поставени и изпълнени следните основни задачи:

1. Проучване на литературни източници, свързани с теоретичната концепция на диагностичната процедура.
2. Анализ на учебното съдържание по дисциплината.
3. Разработване на инструментариум и апробация на комбиниран тест за проверка на знания.
4. Статистическа обработка и анализ на теста.
5. Формулиране на изводи.

### 2.2.1 Проучване на литературни източници

За нуждите на изследването авторът на настоящия дисертационен труд проучи множество литературни източници, свързани с теоретичната концепция на диагностичната процедура, които са посочени в библиографията към дисертацията.

### 2.2.2 Диагностичен анализ на учебното съдържание

Учебното съдържание в раздел „Числени методи“ включва: решаване на системи линейни алгебрични уравнения, нелинейни уравнения и системи, интегрални, диференциални уравнения и системи, апроксимиране на функции.

Обучението по раздел „Числени методи“ се провежда в компютърна зала и има за цел, чрез усвояване на изучавания материал, студентите да придобият компетенции и практически умения за самостоятелно решаване на задачи с помощта на MATLAB.

В раздел 2.1 е направен подробен анализ на методиката на преподаване на учебното съдържание по раздел „Числени методи“.

### 2.2.3 Разработване на инструментариум

#### 2.2.3.1 Планиране съдържанието на теста

В комбинирания тест (даден в Приложение А) са включени 26 задачи. В дисертацията е дадено тяхното разпределение по теми.

#### 2.2.3.2 Конструиране на теста

В дисертацията е представена съдържателната рамка на теста в матрицата на Тейлър, като в хоризонтален ред са посочени нивата на усвояване според таксономията на Блум, а във вертикален ред - целите на учебното съдържание.

Подреждането на задачите в теста е извършено на основата на критерия на В.Нол и Д.Скенел, според който тестът има четири групи въпроси. В първа група са включени задачи с изборен отговор, във втора - задачи с кратък отговор или задачи за допълване, в трета - задачи за съотнасяне и в четвърта - задачи тип „есе“.

### 2.2.3.3 Начин на оценяване

Оценяването на всеки верен отговор на задачите от комбинирания тест става по следния начин:

- А) За всеки верен отговор на въпросите от I част - по 1 точка.
- Б) Задачите от II част за допълване се оценяват с по 2 точки.
- В) Задачите със свободен отговор от II част - по 1 точка.
- Г) За вярно съответствие в задачите за съотнасяне - 1 точка.
- Д) Задачите за подробно решаване от III част - по 4 точки.
- Е) Задачите от IV част за подробно решаване се оценяват по 5 точки.

При грешен отговор не се отнемат точки. Максималният брой точки е 60.

### 2.2.4 Статистически анализ на диагностичен тест за проверка на знания

Анализът на резултатите, извършен с MATLAB, е част от експерименталните изследвания и е представен в глава 3, раздел 3.2.

Статистическият анализ на проведената диагностична процедура доказва работната хипотеза, че използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите в часовете по Висша математика стимулира познавателната им дейност и спомага за достигане на по-добро и по-задълбочено усвояване на учебния материал.

## 2.3 Електронни тестове за самоконтрол, базирани в сайта за електронно обучение E-learning Shell 2

През 2013 г. по проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенския университет“, осъществен с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“ и съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз, авторът на настоящия дисертационен труд разработи web-базирано съдържание по дисциплините „Приложна математика“ и „Висша математика 3“, които включват тестове за проверка на знания по петнадесет теми.

В раздел 2.3 са разгледани част от темите - само тези, които имат пряко отношение към темата на дисертацията, а именно: „Основи на компютърната система MATLAB“, „Решаване на системи линейни алгебрични уравнения с MATLAB“, „Решаване на нелинейни уравнения с MATLAB“, „Решаване на системи нелинейни уравнения с MATLAB“ „Апроксимиране на функция. Метод на най-малките квадрати“ , „Числено решаване на определен интеграл с MATLAB“ и „Решаване на диференциални уравнения и системи“. Всички публикувани материали се използват активно в учебния процес. Всички задачи от гореизброените теми са дадени в приложение Б.

Съгласно изискванията на проекта и използваната платформа на сайта [http://e-learning.uni-ruse.bg/index.php?site\\_step=1](http://e-learning.uni-ruse.bg/index.php?site_step=1), се използват четири вида тестови въпроси:

1. *Единичен избор.* Допускат се до пет алтернативи, като верният отговор е само един и се отбелязва чрез радио-бутон с кръгла форма: ○
2. *Множествен избор.* допускат се няколко верни отговора (от 1 до 5) като възможният брой алтернативи също е пет. Избраните отговори се отбелязват чрез радио-бутони с квадратна форма: □
3. *Попълни полето.* Изисква се да се въведе вярно дума или команда.
4. *Попълни текст.* Този тип въпроси е подобен на (3), като се допуска попълване в няколко полета. Има възможност за визуализиране на думите за попълване.

При съставянето на тестовите задачи авторът използва дистрактори, които са пряко отражение на често допусканите от студентите грешки в компютърната зала.

В приложение Б са дадени въпросите с решения на електронните тестове за самоконтрол, публикувани в E-Learning Shell 2.

## 2.4 Анкетно проучване „Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика“

В раздел 2.4 е представена анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика. Изследвани са 151 лица - ученици, студенти и дипломирани студенти. Представен е анализ на формата на анкетата и типа на въпросите в нея. В глава 3, раздел 3.3 е извършен вариационен анализ, изследвани са корелационни зависимости между признаци. Извършен е подробен клъстерен анализ.

*Целта* на проведената анкета е да се съберат и анализират данни за мнението на обучаващите за резултатите от обучението по Компютърна математика и нагласата им към идеята за компютърно съпроводено обучение по математика.

Анкетата отговаря на всички изисквания за структура (уводна, основна и заключителна част), прегледност, естетическа издържаност, икономичност. Резултатите се обработват бързо и точно с помощта на програмите Lime Survey и SPSS.

### 2.4.1 Формата на анкетата

Според типа на комуникационния процес между изследователя и анкетираните, проведената анкета е *частично стандартизирана*. Въпросите и техните отговори са предварително конструирани в конкретна последователност. От анкетираните се иска да отбележат един или повече отговори, които съответстват на тяхното мнение или състояние. Има въпроси, при които от анкетираните се изисква сам да конструира отговора.

Според степента на точност на получените отговори, анкетата е *писмена*. Анкетираните попълват отговорите си в специално разработена за целта *анкетна карта*. През 2014 г. на анкетираните лица се предоставя възможност да попълнят анкетната карта on-line чрез разработения електронен вариант с програмата Lime Survey.

Анкетната карта съдържа три *групи* въпроси:

- В първата група са включени въпроси, свързани с отношението към образователната система и качеството на обучение по математика.
- Във втората група са въпроси за резултатите от обучението по математика с MATLAB, отношението към компютърно съпроводеното обучение и нагласата на анкетираните за участие в олимпиада по „Компютърна математика“.
- В третата група има въпроси, свързани с профила на анкетираните лица.

## 2.4.2 Видове въпроси в анкетата

- В зависимост от *съдържанието*, анкетната карта съдържа следните видове въпроси:
  - въпроси за социално положение и *статус* (идентификация) - пол, възраст, образование;
  - за *степен на информираност* по дадена тема;
  - за *ролеви позиции* и поведение в миналото и сега;
  - *проективни въпроси*, касаещи бъдещето или въображаема ситуация;
  - *въпроси за вътрешно състояние*, удовлетвореност;
  - за *изясняване на мотиви*, намерения и цели;
  - за *изясняване на нагласи*, отношения, ценностни ориентации.
- В зависимост от *формата*, в анкетата има два типа въпроси: *закрити* и *открити*.  
Закритите въпроси в анкетата са три вида:
  - алтернативни;
  - скалирани;
  - въпроси с пълно изброяване на възможните случаи.

Откритите (свободни) въпроси се отнасят до възрастта, статута на анкетирувания (ученик, студент и др.), данни за контакт и мнение за необходими промени в образователната система.

- В зависимост от *функцията*, която изпълняват, въпросите в анкетата са:
  - основни** Чрез основните въпроси се получава необходимата за целите на конкретното изследване информация.
  - функционални** Тези въпроси изпълняват различни функции в анкетата. Към тях се отнасят:
    - **въвеждащи** Наричат се още контактни и се използват за установяване на връзка с анкетирувания в началото на анкетата.
    - **подготвителни** или преходни въпроси се използват при смяна на тема или като въвеждащи в тема.
    - **мотивационни** за засилване на вярата в себе си или за преодоляване на задръжки.
    - **филтриращи** Използват се за разделяне на анкетираните на подгрупи.
    - **контролни** За откриване на противоречия в отговорите.

Статистическият анализ на проведената анкета включва вариационен, клъстерен и дискриминантен анализ, които са представени в раздел 3.3 на глава 3.

В глава 3 са описани експерименталните изследвания, свързани с настоящата дисертация, проведени през периода 2010-2014 година.

### 3.1 Изследване резултатите от обучението по Висша математика

*Предмет* на изследването са резултатите от обучението на студенти по Висша математика с използване на система за математически изчисления и визуализация MATLAB (експериментална методика).

*Генералната съвкупност* обхваща студенти от Русенски университет, които изучават Висша математика, т.е. това са студенти, които теоретично могат да бъдат изследвани.

Според обхвата на единиците от генералната съвкупност, изследването е *извадково*. За целта на изследването е направена *извадка* от общо 3001 лица – студенти от 1. и 2. курс в Русенски университет „Ангел Кънчев“, обучавани през периода 2010-2014 години.

По своята същност, извадката е *серийна*. Генералната съвкупност се разбива на серии (според година на изследване), като след това по метода на случайния избор във всяка серия се избират *елементи за изследване*.

Елементите за изследване във всяка *серия* се разделят в две хомогенни групи - *контролна група* (КГ) и *експериментална група* (ЕГ). Контролната група включва студенти, които са обучавани по традиционната методика, без използване на система за математически изчисления, а експерименталната група - студенти, обучавани по експерименталната методика (с използване на системи за математически изчисления).

Формирането на извадката отговаря на всички изисквания за формиране на извадки в педагогическите изследвания:

- Разглежданата извадка отразява най-общите типични качества на генералната съвкупност. Представена е таблица с разпределение на случаите според специалност и година на изследване. Единиците от извадката са избрани чрез случаен подбор измежду студенти от 4 факултета и 18 специалности на Русенски университет, обучавани по Висша математика 3 през периода 2010-2014 години. В таблица е дадено разпределението на студентите от извадката според тяхната специалност и годината, в която е проведено из-



следването. На кръгови диаграми са изобразени разпределенията на изучаваните случаи според факултет и специалност.

- Обемът на извадката е достатъчно голям.

В изследването участват 3001 студенти, което представлява около 30% от всички обучавани студенти в РУ и 45% от студентите 1 и 2 курс, изучаващи Висша математика;

- Изборът на групите на изследване (КГ и ЕГ) във всяка серия става при спазване на принципа на случайност и при съблюдаване на изискването за хомогенност на извадките в началото на експеримента, т.е. двете групи да имат относително равни възможности. Спазено е изискването КГ и ЕГ от всяка серия да имат приблизително равни обеми и във всяка от тях да има приблизително еднакъв брой отличници, средни и слаби по успех студенти.

За проверка на хомогенността на групите са изчислени коефициентите на вариация, от които се съди за степента на еднородност на КГ и ЕГ във всяка серия. В таблица са дадени данни за обемите на контролните и експерименталните групи за всички серии на извадката. В раздел 3.1.1 е извършен вариационен анализ на петте серии експерименти по изследваните признаци, при което са изчислени и съответните им коефициенти на вариация.

- Изборът на единиците от различни специалности е направен пропорционално на броя на студентите в съответните специалности. В изследването участват студенти, обучаващи се в редовна и заочна форма, чийто брой е в съотношение, също отговарящо на съотношението в генералната съвкупност.

За целите на изследването е събрана информация за състоянието на наблюдавани признаци на изследваните случаи. За всеки признак е дефинирана променлива и са въведени техните стойности, които съответстват на значенията на наблюдаваните признаци. В таблица са дадени въведените и допълнително изчислени променливи за цялата извадка, които са подложени на статистическа обработка. За всяка серия на извадката са изследвани зависимости между признаците: Средна оценка по Висша математика 1 и 2 (BEG\_012), Оценка по ВМ3 (END\_03) и Разлика (END\_03-BEG\_012).

### 3.1.1 Вариационен анализ

За постигане на целта и решаване на задачите на изследването, е извършен вариационен анализ на променливите, съдържащи информация за началните и крайните данни за всяка от петте серии на експеримента.

Целта на вариационния анализ е да се определят основните числови характеристики на променливите „Средна оценка по ВМ12“, „Оценка по ВМ3“ и „Разлика“, и чрез сравнителен анализ да се провери каква е тенденцията на тяхното изменение в експерименталната и контролната групи за всяка от проведените серии на експеримента.

За всяка серия са пресметнати коефициентите на вариация по формулата  $V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100\%$  в началото на експеримента, където  $s$  и  $\bar{X}$  са съответно стандартно отклонение и средна стойност на извадката. Това е необходимо, за да се спази изискването контролната и експерименталната групи да имат приблизително равни възможности в началото на експеримента.

#### 3.1.1.1 Вариационен анализ за Серия 2010

В таблица 3.1 са дадени основните числови характеристики на признаците: средна оценка по Висша математика 1 и 2 общо за цялата серия 2010 и отделно за експерименталната и

контролната групи, оценка по Висша математика 3 за серията и отделно за експериментална и контролна групи, както и разлика между оценките ВМ3 и ВМ\_12 за серията и отделно за ЕГ и КГ. Пресметнати са коефициентите на вариация по формулата  $V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100\%$  в началото на експеримента, където в таблицата  $\bar{X} = Mean, s = Std$ . Получените коефициенти за двете групи ( $V_{ЕГ}^{2010} = 32.98\%$ ,  $V_{КГ}^{2010} = 32.34\%$ ) показват, че ЕГ и КГ са приблизително еднородни по признака оценка по ВМ12.

Серия 2010	ВМ12 общо	ВМ12 ЕГ	ВМ12 КГ	ВМ3 общо	ВМ3 ЕГ	ВМ3 КГ	Разлика общо	Разлика ЕГ	Разлика КГ
N	260	130	130	260	130	130	260	130	130
Mean	3.4115	3.4692	3.3538	3.6692	4.0077	3.3308	0.2558	0.5423	-0.0308
Me	3	3	3	3	4	3	0.5	0.5	0
Mo	3	3	3	3	4	3	0	1	0
Std	1.1141	1.1442	1.0845	1.1382	1.2168	0.9433	0.9357	0.9625	0.8159
Sk	1.092	0.881	1.342	0.581	0.011	1.317	-0.472	-0.605	-0.867
SE(Sk)	0.151	0.212	0.212	0.151	0.212	0.2121	0.151	0.212	0.212
Ku	0.346	-0.091	1.006	-0.436	-0.808	1.713	0.661	0.680	1.096
SE(Ku)	0.301	0.422	0.422	0.301	0.422	0.422	0.301	0.422	0.422

Таблица 3.1: Вариационен анализ за серия 2010 - оценки в началото и края на изследването на експериментална и контролна групи

Сравнителният анализ на получените характеристики показва, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока подобряване на резултатите, докато при КГ се наблюдава намаляване на оценките в края на експеримента, таблица 3.1. В раздел 3.1.3.1 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

Аналогично на вариационния анализ, извършен в раздел 3.1.1.1, се получават данни за разпределенията на изследваните признаци за всички останали серии. Получените резултати от вариационния анализ са дадени в дисертацията и са направени изводи.

Изводи: Коефициентите на вариация за всички серии на извадката за КГ и ЕГ са близки помежду си и са в интервала 10-40%, откъдето следва, че двете групи са приблизително еднородни по признака „оценка по ВМ12“ за всички серии на извадката.

Чрез сравнителен анализ на получените характеристики за Серии 2011 и 2013 се установява, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока на значително повишаване, докато при КГ това повишаване в края на експеримента е незначително. За серии 2010, 2012 и 2014 се установява, че в ЕГ средните стойности на оценките се изменят в посока подобряване на резултатите, докато при КГ се наблюдава намаляване на оценките в края на експеримента. В раздел 3.1.3 чрез статистически анализ е установена достоверността на тези изменения.

### 3.1.2 Проверка за нормалност на емпиричните разпределения в изследваните съвкупности

Проверката за нормалност на емпиричните разпределения е важен етап, предшестващ статистическия анализ. В зависимост от това дали разпределенията са нормално разпределени или не, се прилагат различни методи за анализ - при нормално разпределени извадки се използват параметрични методи, а при такива, които не са нормално разпределени - непараметрични методи.

Методиката на проверката за нормалност на емпиричните разпределения при големи извадки (обем  $> 30$ ) включва следните числови и визуални анализи:

1. Определяне на съответните z-values на асиметрията и ексцеса на разпределенията и проверка дали те са в теоретичните граници за нормално разпределение. При риск за грешка 0.05 тези стойности за нормално разпределение трябва да удовлетворяват едновременно неравенствата

$$\frac{|Sk|}{SE(Sk)} < 1.96, \quad \frac{|Ku|}{SE(Ku)} < 1.96,$$

където  $Sk$ ,  $Ku$ ,  $SE(Sk)$  и  $SE(Ku)$  са съответно коефициент на асиметрия, коефициент на ексцес, стандартна грешка на коефициента на асиметрия и стандартна грешка на коефициента на ексцес.

2. Проверка за нормалност на извадките чрез непараметричен критерий - тест на Колмогоров - Смирнов (Kolmogorov - Smirnov) и Шапиро-Уилк (Shapiro - Wilk). Тестовата стойност p-value (в SPSS - Sig.) за нормално разпределена извадка е над риска за грешка 0.05;
3. Визуални анализи на хистограми, Q-Q Plot, Box-plots.

Проверката за нормалност на емпиричните разпределения на оценките в началото и края на експеримента и прираста на оценките, отчетен в края на експеримента, е извършена чрез процедурата Explore в SPSS като се задава зависима променлива оценка (BEG\_012, END\_03 или razlika) и независима променлива X1- принадлежност към контролна или експериментална групи. Проверката на всички числови и визуални характеристики е извършена за всяка от петте серии експерименти. За Серия 2010 анализът е описан подробно, а за останалите серии е извършен аналогично, като са посочени основните моменти и изводи.

### 3.1.2.1 Проверка за нормалност за Серия 2010

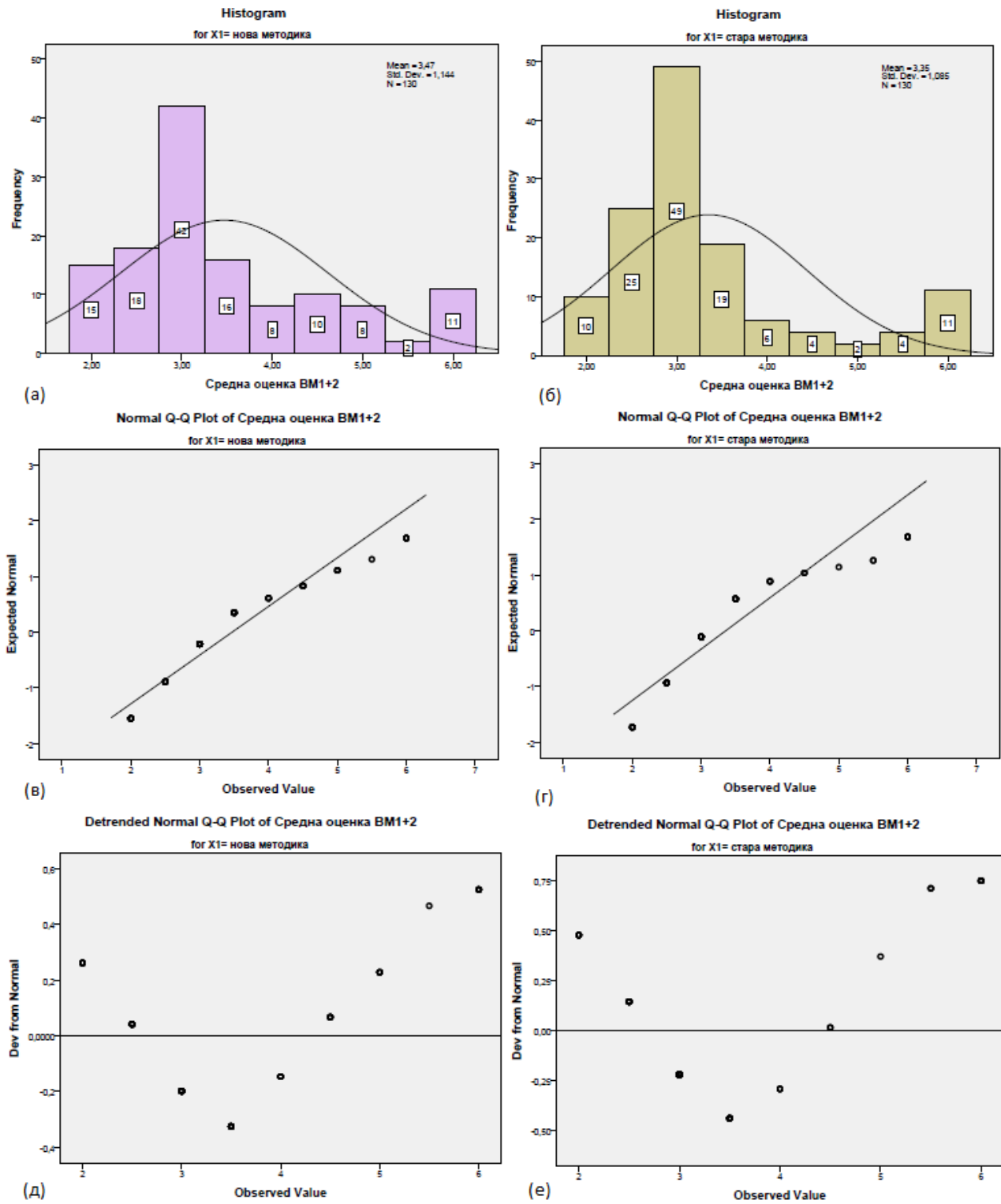
В таблица 3.2 са дадени стойностите на изчислените характеристики за ЕГ и КГ в началото и края на изследването за серия 2010. Получените стойности (таблица 3.2) показват, че

Серия 2010	Асиметрия $Sk$	Грешка $SE(Sk)$	z-value $\frac{ Sk }{SE(Sk)}$	Ексцес $Ku$	Грешка $SE(Ku)$	z-value $\frac{ Ku }{SE(Ku)}$
начало ЕГ	0.881	0.212	4.16	-0.091	0.422	0.216
начало КГ	1.342	0.212	6.33	1.006	0.422	2.38
край ЕГ	0.011	0.212	0.052	-0.808	0.422	1.91
край КГ	1.317	0.212	6.21	1.713	0.422	4.06
разлика ЕГ	-0.605	0.212	2.85	0.680	0.422	1.61
разлика КГ	-0.867	0.212	4.09	1.096	0.422	2.6

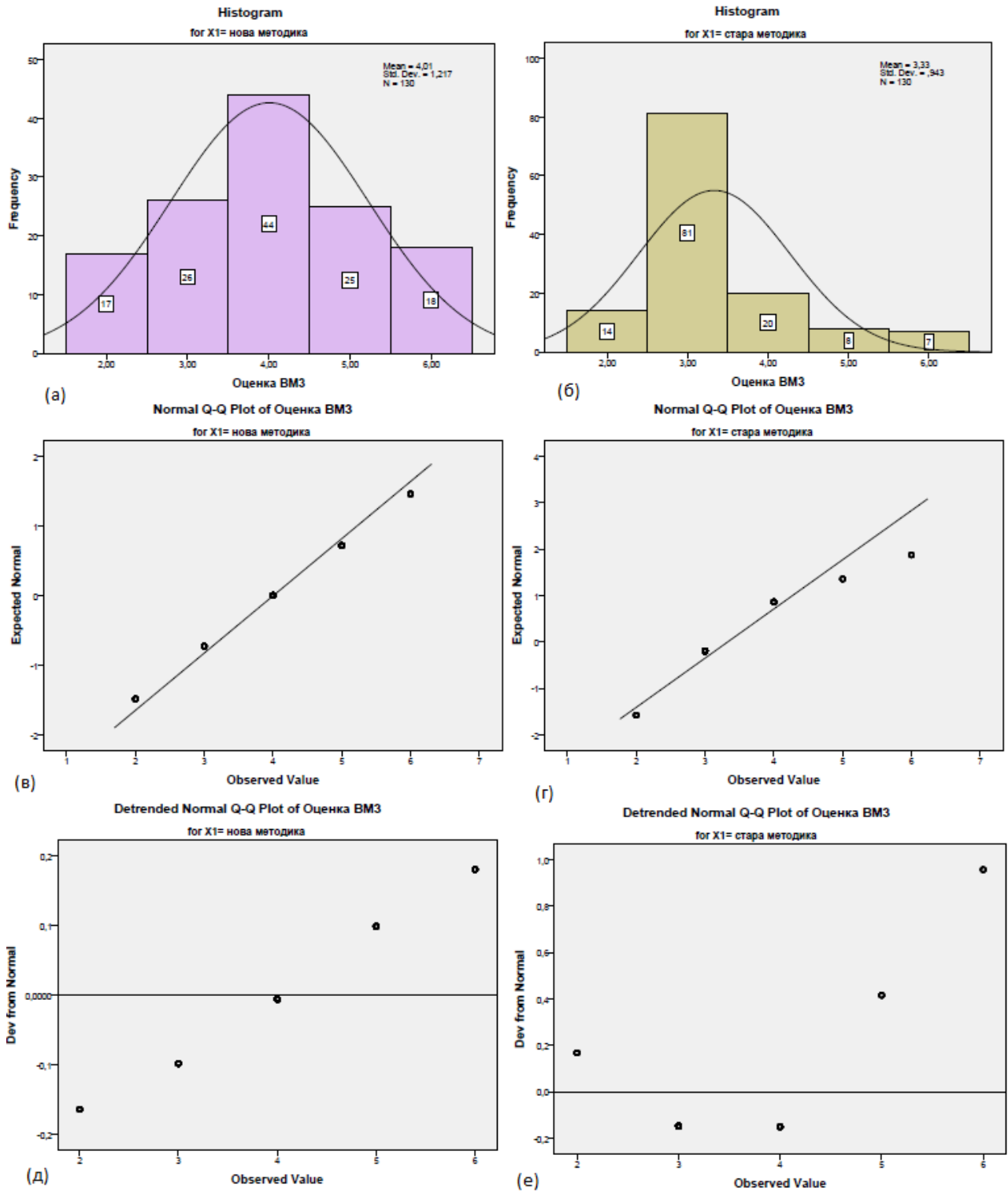
Таблица 3.2: Числови характеристики, използвани за проверка за нормалност на разпределенията на начална и крайна оценки за експериментална и контролна групи - Серия 2010

и в началото, и в края на експеримента разпределенията на оценките и прираста на оценките по отношение на двете групи (експериментална и контролна) НЕ са близки до нормално разпределение - всички стойности (с изключение на четири: 0.052, 0.216, 1.91 и 1.61) z-value са по-големи по модул от 1.96 и всички стойности p-value по непараметричните критерии на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк НЕ са по-малки от 0.05, фигура 3.4 - (г).

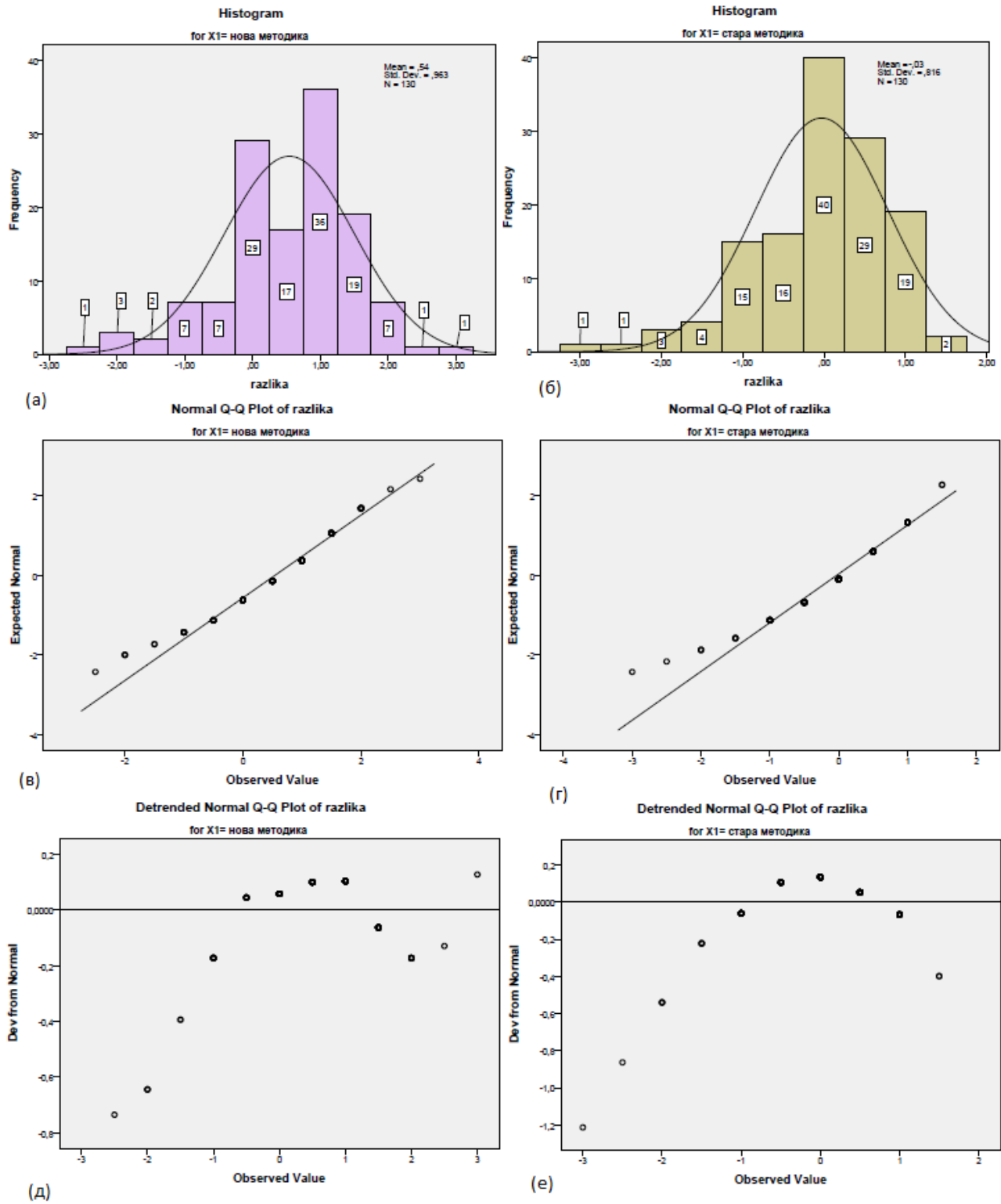
Фактът, че всички разглеждани разпределения НЕ са нормални, се потвърждава и след внимателно анализиране на графичните изображения на хистограмите, Q-Q Plot и Box-plot диаграмите, фигури 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.



Фигура 3.1: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на началната оценка на експериментална и контролна групи - серия 2010



Фигура 3.2: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на крайната оценка за експериментална и контролна групи - серия 2010



Фигура 3.3: Хистограми и Q-Q Plot диаграми на разпределенията на разликата в оценките за експериментална и контролна групи - серия 2010

Тълкуването на графичните изображения е следното:

- Хистограмите на разпределенията за началната оценка НЕ следват нормалната крива на разпределение (камбана), фигура 3.1 - (а), (б). Това е така и за хистограмата на разпределението на крайната оценка за контролната група, фигура 3.2 - (б).

- Q-Q Plot (Quantile-Quantile plot) диаграмата е графика, която се използва за изобразяване на степента, в която квантилите на нормалното разпределение се различават от квантилите на извадката. Методът изобразява две графики - Normal Q-Q plot и Detrended Normal Q-Q Plot. За да бъде разпределението близко до нормално, трябва точките, изобразени на графиката, да са близо до правата линия.

На фигура 3.1 (в) - (е) се вижда, че и за експерименталната, и за традиционната методика по отношение на началните оценки това изискване не е изпълнено. То не е изпълнено и за крайните оценки на КГ, фигура 3.2 (г) и (е). На съответните графики Detrended Normal Q-Q Plot са изобразени разликите между квантилите на двете разпределения. От фигури 3.1 и 3.2 (д) и (е) се вижда, че отклоненията от нормалното разпределение са значителни.

До същите изводи се стига и след анализиране на изображенията за разпределенията на разликата в оценките, фигура 3.3.

- Box-plot диаграмата е правоъгълник, който при нормално разпределение е симетричен спрямо медианната линия, приблизително намираща се в центъра на правоъгълника и със симетрични „мустаци“ с дължина, по-голяма от съответните подсектори на правоъгълника.

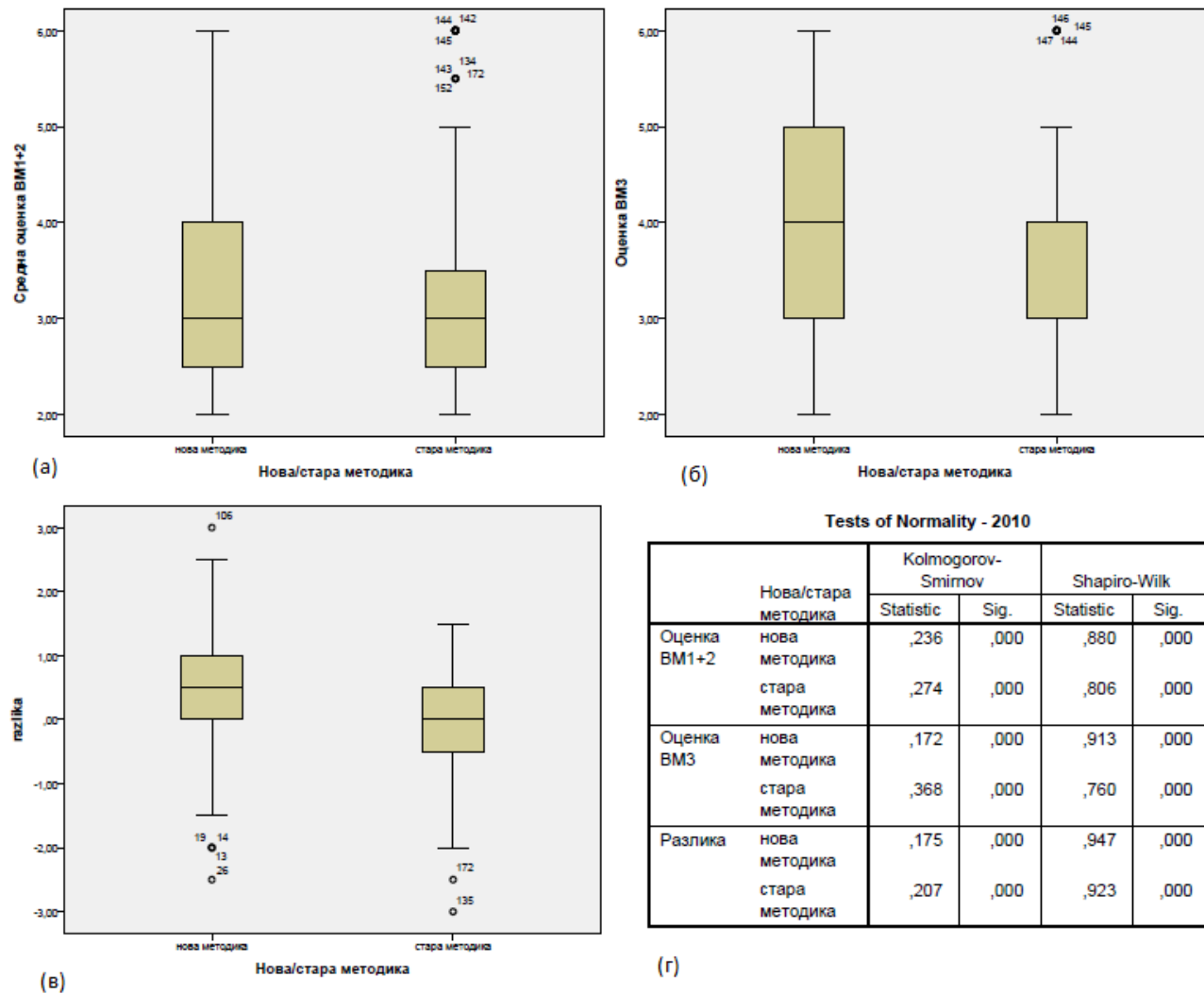
От графичното изображение на фигури 3.4 (а), (б) се вижда, че изобразените box-plot диаграми за началото на изследването не отговарят на тези условия. За началото на изследването и двете диаграми нямат симетрични „мустаци“, а за края на изследването - медианната линия за „традиционна методика“ не е по средата на правоъгълника, а в неговия долен край. Аналогичен е изводът и за разпределението на разликите в оценките, фигура 3.4 (в).

От всички разпределения, най-близки до нормално разпределение са тези за оценките по ВМЗ на експерименталната група (ЕГ) и разликите в оценките на ЕГ. За разпределението на оценките на ЕГ това се потвърждава от хистограмата на фигура 3.2 и от таблица 3.2 - на ред „край ЕГ“ съответните стойности z-value, изчислени от коефициентите на асиметрия и ексцес са съответно 0.052 и 1.91, като изпълняват условието да са едновременно по-малки по модул от 1.96. Тестът за нормалност обаче показва, че разпределението на крайната оценка за ЕГ НЕ е нормално - тестовите стойности p-value по критериите на Колмогоров Смирнов (0.172) и Шапиро-Уилк (0.913) имат стойности по-големи от 0.05, което означава, че разпределението НЕ е нормално, фигура 3.4 - (г).

За разпределението от разликите в оценките за ЕГ: от хистограмата на фигура 3.3 (а) и таблица 3.2 (ред „разлика ЕГ“) се вижда, че стойностите на z-value, изчислени от коефициентите на асиметрия и ексцес са съответно 2.85 и 1.61, които са сравнително ниски, но само вторият коефициент изпълнява условието (по-малък по модул от 1.96). Тестът за нормалност показва, че разпределението НЕ е нормално, тъй като тестовата стойност p-value по критериите на Колмогоров Смирнов (0.175) и Шапиро-Уилк (0.947) има стойност по-голяма от 0.05, фигура 3.4 - (г).

Извършени са проверки за нормалност на разпределенията за Серии 2011, 2012, 2013 и 2014 по методиката, изложена на стр. 26. Резултатите от проверките са дадени в дисертацията във вид на таблици. Те са аналогични на резултатите за Серия 2010. Направени са съответните

изводи, отделно за всяка серия на извадката.



Фигура 3.4: Box Plot диаграми на разпределенията и проверка за нормалност за експериментална и контролна групи - серия 2010

**Извод:** Въз основа на получените резултати при проверката за нормалност на извадките от Серии 2010, 2011, 2012, 2013 и 2014 в началото и края на експеримента, може категорично да се направи извод, че те *НЕ* са нормално разпределени. Това налага използването на *непараметрични* методи при по-нататъшните изследвания.

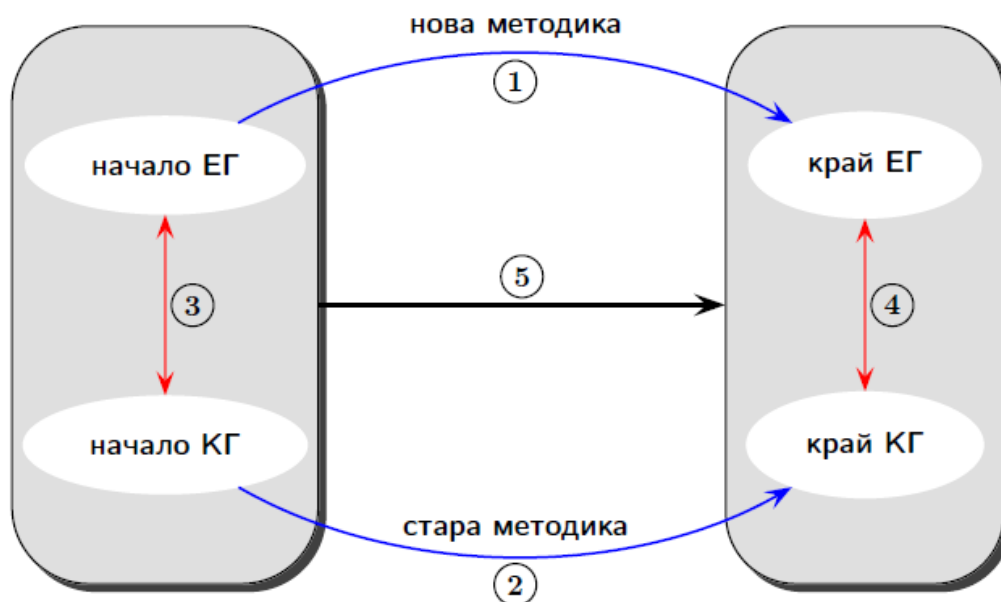
### 3.1.3 Доказване ефективността на експерименталната методика

За проверка ефективността на експерименталната методика се изследват връзки и се проверяват статистически хипотези за изследваните подсъвкупности на извадката.

Поради установеното в раздел 3.1.2, че разпределенията на значенията на изследваните признаци за експерименталните и контролните групи за петте серии на извадката *НЕ* са нормално разпределени, то в раздел 3.1.3 за изследване на връзките между разглежданите признаци се използват *непараметрични* методи.



На фигура 3.5 е изобразена схема на изследването, която се прилага за доказване на ефективност на експерименталната методика за петте серии на извадката.



Фигура 3.5: Схема на изследване за ефективност на експерименталната методика

В процеса на статистически анализ за всяка серия експерименти, се решават следните основни задачи, фигура 3.5:

- Установяване на ефекта от прилаганите въздействия за всяка от групите:
  - ① Установяване на ефекта от прилагането на *експерименталната методика* върху експерименталната група.
  - ② Установяване на ефекта от прилагането на *традиционната методика* върху контролната група.
- Сравняване на ефективността на прилаганите въздействия в цялата серия на извадката по отношение на наблюдавания признак: експериментална/традиционна методика:
  - ③ Проверка на статистическата значимост на различията в оценките на контролната и експерименталната групи в началото на експеримента - необходимо е да се установи липса на статистически значими различия, т.е. двете групи да имат „равен старт“.
  - ④ Изследване на статистическа значимост на различията в оценките на контролната и експерименталната групи в края на експеримента.
  - ⑤ Установяване на статистическа значимост на различията между прирастите на двете групи в края на експеримента. Това е най-важното сравнение по отношение на доказване на по-висока ефективност на експерименталната методика спрямо традиционната методика.

В процеса на изследване са използвани три непараметрични критерии: на Колмогоров-Смирнов, на Ман-Уитни и на Уилкоксън за проверка на значимост на връзките между признаците. Използват се променливите BEG012 и END03 за оценките в началото и края на експеримента, както и променлива *razlika*, равна на разликата между крайната и началната оценка.

Изследването е извършено със SPSS. Извършени са по пет сравнения за всяка от петте серии на извадката.

### 3.1.3.1 Ефективност за Серия 2010

В таблици 3.3а, 3.3б, 3.3в, 3.3г и 3.3д са дадени средните стойности на разглежданите КГ и ЕГ за серия 2010 на извадката, стойностите на получените коефициенти, както и съответните нива на значимост при двустранна критична област (2-Tail Sig.), получени чрез SPSS с използване на посочените методи.

Серия	Сравнение 1	<i>n</i>	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilcoxon)
2010	ЕГ - начало	130	3.4692	1.14417	<b>-5.579</b>
	ЕГ - край	130	4.0077	0.9676	
Asymp. Sig. (2-tailed)					<b>0.000</b>

(а) Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната група в началото и края на експеримента – Серия 2010

Серия	Сравнение 2	<i>n</i>	Mean	Std. Deviation	z-value (Wilcoxon)
2010	КГ - начало	130	3.3538	1.0845	<b>-0.115</b>
	КГ - край	130	3.3308	0.94326	
Asymp. Sig. (2-tailed)					<b>0.908</b>

(б) Непараметричен тест на различията в оценките за контролната група в началото и края на експеримента – Серия 2010

Серия	Сравнение 3	<i>n</i>	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
2010	ЕГ - начало	130	3.4692	1.14417	<b>0.744</b>	<b>-0.844</b>
	КГ - начало	130	3.3538	1.0845		
Asymp. Sig. (2-tailed)					<b>0.637</b>	<b>0.398</b>

(в) Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната и контролната група в началото на експеримента – Серия 2010

Серия	Сравнение 4	<i>n</i>	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
2010	ЕГ - край	130	4.0077	1.21678	<b>3.225</b>	<b>-5.112</b>
	КГ - край	130	3.3308	0.94326		
Asymp. Sig. (2-tailed)					<b>0.000</b>	<b>0.000</b>

(г) Непараметричен тест на различията в оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента- Серия 2010

Серия	Сравнение 5	<i>n</i>	Mean	Std. Deviation	z-value (K-S)	z-value (M-W)
2010	ЕГ - прираст	130	0.5423	0.96254	<b>2.667</b>	<b>-5.204</b>
	КГ - прираст	130	-0.0308	0.81591		
Asymp. Sig. (2-tailed)					<b>0.000</b>	<b>0.000</b>

(д) Непараметричен тест на различията в прираста на оценките на експерименталната и контролната група в края на експеримента- Серия 2010

Таблица 3.3: Резултати от непараметрични тестове

- ❶ Непараметричен тест на различия на две *зависими* извадки - оценки по математика в *началото* и в *края* на експеримента за *експерименталната* група (експериментална методика).

Изследването на различията в оценките на експерименталната група в началото и края на експеримента за Серия 2010 чрез непараметричния тест на Уилкоксън (Wilcoxon Signed Ranks Test) показва, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е  $0.000 < 0.05$ ), таблица 3.3а.

- ② Непараметричен тест на различия на две *зависими* извадки - оценки по математика в началото и в края на експеримента за контролната група (традиционна методика) Изследването на различията в оценките на контролната група в началото и края на експеримента за Серия 2010 чрез непараметричния тест на Уилкоксън (Wilcoxon Signed Ranks Test) показва, че между двете извадки *няма* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е  $0.908 > 0.05$ ), таблица 3.3б

- ③ Непараметричен тест на различия за две *независими* извадки - оценки по математика на експерименталната група и на контролната група за серия 2010 в началото на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в началото на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *няма* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е  $0.637 > 0.05$  по теста на Колмогоров - Смирнов и  $0.398 > 0.05$  по теста на Ман - Уитни), таблица 3.3в. Това означава, че разглежданите групи студенти имат „равен старт“.

- ④ Непараметричен тест на различия за две *независими* извадки - оценки по математика на експерименталната група и на контролната група за серия 2010 в края на експеримента.

Изследването на различията между оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е  $0.000 < 0.05$ ), таблица 3.3г.

- ⑤ Непараметричен тест на различия за две *независими* извадки - прираст на оценките по математика на експерименталната група и на контролната група за серия 2010 в края на експеримента

Изследването на различията между прираста в оценките на експерименталната и контролната група за Серия 2010 в края на експеримента е извършено чрез непараметричните тестове на Колмогоров - Смирнов (Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test) и на Ман - Уитни (Mann-Whitney Test). Проверките показват, че между двете извадки *има* статистически значими различия (Asymp. Sig. (2-tailed) е  $0.000 < 0.05$ ), таблица 3.3д.

*Аналогично на изследването за Серия 2010, са извършени изследванията и за останалите серии на извадката. Резултатите са дадени в дисертацията в съкратен вид, като са оформени изводи.*

### Изводи за ефективността на експерименталната методика

Чрез задълбочен статистически анализ на данните за контролната и експерименталната групи за серии 2011, 2012, 2013 и 2014, са решени всички задачи според методиката на изс-

ледване по схемата на изследване, изобразена на фигура 3.5, в резултат на което в раздел 3.1.3 е доказана ефективността на експерименталната методика за всички серии на извадката.

В таблица 3.4 са обобщени резултатите от тези изследвания.

Сравнение	ЕГ край и начало	КГ край и начало	ЕГ и КГ начало	ЕГ и КГ край	ЕГ и КГ прираст	Доказана ефективност
2010	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна ЕМ
2011	има ЗР	има ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна ЕМ
2012	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна ЕМ
2013	има ЗР	няма ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна ЕМ
2014	има ЗР	има ЗР	няма ЗР	има ЗР	има ЗР	ефективна ЕМ

Таблица 3.4: Резултати от изследванията за значими различия (ЗР) в оценките на ЕГ и КГ за петте серии на извадката и изводи за ефективността на експерименталната методика (ЕМ)

### 3.1.4 Прогнозиране резултатите от обучението чрез дискриминантен модел

В раздел 3.1.4 чрез дискриминантен анализ се изследват различията между изследваните обекти (студенти) по признака „Повишаване на успеха по математика“. Получен е дискриминантен модел, чрез който за всеки нов случай може да се определи с различна степен на увереност дали той ще си повиши успеха или не, ако бъде обучаван по експерименталната или традиционната методики.

В резултат на дискриминантния анализ се получава *дискриминантна функция* (модел), която има вида:

$$D = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n,$$

където

- $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  са дискриминационни променливи;
- $a$  - свободен член;
- $b_i$ ,  $i = 1 \dots n$  - коефициенти на дискриминантната функция.

С използване на получения дискриминантен модел, знаейки характеристиките на студент (нов случай, неучастващ в изследването), може да се определи с различна степен на увереност дали студентът ще си повиши успеха или не, със или без приложена експериментална методика.

Построяването на модела включва следните изследователски етапи:

- ① Избор на групираща (зависима) дискриминантна променлива.
- ② Избор и оценка на избора на дискриминационните променливи.
- ③ Построяване на дискриминантния модел и определяне на неговата точност и статистическа значимост.
- ④ Определяне на дискриминантен критерий.
- ⑤ Тълкуване на получените резултати.

За решаване на изследователските задачи се използва процедура Discriminant от менюто Classify на SPSS.

❶ Избор на групираща (зависима) дискриминантна променлива.

Като дискриминантна променлива се въвежда „повишаване на успеха“ с две дихотомни стойности 0-не и 1-да;

❷ Оценка на избора на дискриминационните променливи.

За независими (дискриминационни) променливи се задават първоначално „експериментална/традиционна методика“<sup>1</sup>, „оценка по ВМ12“, „пол“, „народност“, „факултет“, „специалност“, „форма на обучение“. В процеса на анализа се установява, че за отличителни признаци на разглежданата съвкупност не могат да служат „форма на обучение“ и „народност“, затова те отпадат от разглеждане.

От таблица 3.5 се определя кои от първоначално въведените дискриминационни промен-

Tests of Equality of Group Means

	Wilks' Lambda	F	df1	df2	Sig.
Нова/стара методика	,975	49,150	1	1933	,000
Средна оценка ВМ1+2	,897	221,808	1	1933	,000
Факултет	,995	10,054	1	1933	,002
Специалност	,983	33,167	1	1933	,000
Пол	,995	9,234	1	1933	,002
Народност	,999	2,052	1	1933	,152
Форма на обучение	1,000	,056	1	1933	,814

Таблица 3.5: Оценка на дискриминационните променливи при дискриминантен анализ

ливи действително могат да служат като отличителни признаци за разделяне на разглежданата съвкупност. Оценката на избора на дискриминационните признаци се извършва чрез тест за равенство на средните стойности в групите чрез критерия Wilk's Lambda. Чрез него се проверява дали се различават значимо средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи. Построеният дискриминантен модел трябва да отразява точното разделяне на изследваните групи.

Като изходна хипотеза се издига  $H_0$  : Средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи са равни. Верността на изходната хипотеза се определя от стойността на показателя Significance (Sig.) При това, нулевата хипотеза се приема, ако тестовата величина Sig. има стойност по-голяма от избрания риск за грешка (0.05) и съответната променлива следва да отпадне от анализа. Стойност на  $Sig. < 0.05$  доказва погрешност на нулевата хипотеза и статистическа значимост на различията на средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи.

Тъй като признаците „форма на обучение“ и „народност“ не притежават необходимите дискриминиращи (разделителни) свойства – съответните им показатели по критерия Lambda Wilk's са по-големи от риска за грешка, следва те да отпаднат от анализа, таблица 3.5. След премахване на факторите, за които дискриминантната функция има незначими различия в средните стойности, като дискриминационни променливи се разглеждат останалите 5 фактора.

<sup>1</sup>За краткост вместо „експериментална/традиционна методика“ се използва съкращението „нова/стара методика“.



#### 4 Определяне на дискриминантен критерий

Важен етап от дискриминантния анализ е определянето на *дискриминантния критерий* за принадлежност на отделен случай към всяка от групите, т.е. определяне за какви стойности на функцията  $D$  може да се твърди (с определена степен на увереност), че успехът на нов студент ще се повиши и съответно - за какви стойности на  $D$  можем да твърдим, че успехът няма да се повиши.

За определяне на дискриминантния критерий се използват груповите центроиди, т.е. средните стойности на дискриминантната функция в изследваните групи, таблица 3.6 (б). Въз основа на тези стойности се построяват интервалите, които показват принадлежност на нов случай към едната или другата група, таблица 3.6 (в). В случая, отрицателните стойности на  $D$  показват повишаване на успеха.

Точността на различията между изследваните групи зависи и от разсейването на стойностите в изследваните групи. Това разсейване се определя при анализ на хистограмите на разпределението на дискриминантната функция, фигури 3.6 (а) и (б).

За точно определяне на съответствието между стойност на дискриминантната функция, групова принадлежност и вероятност на прогнозата, се използват съхранените чрез Save променливи на дискриминантния анализ.

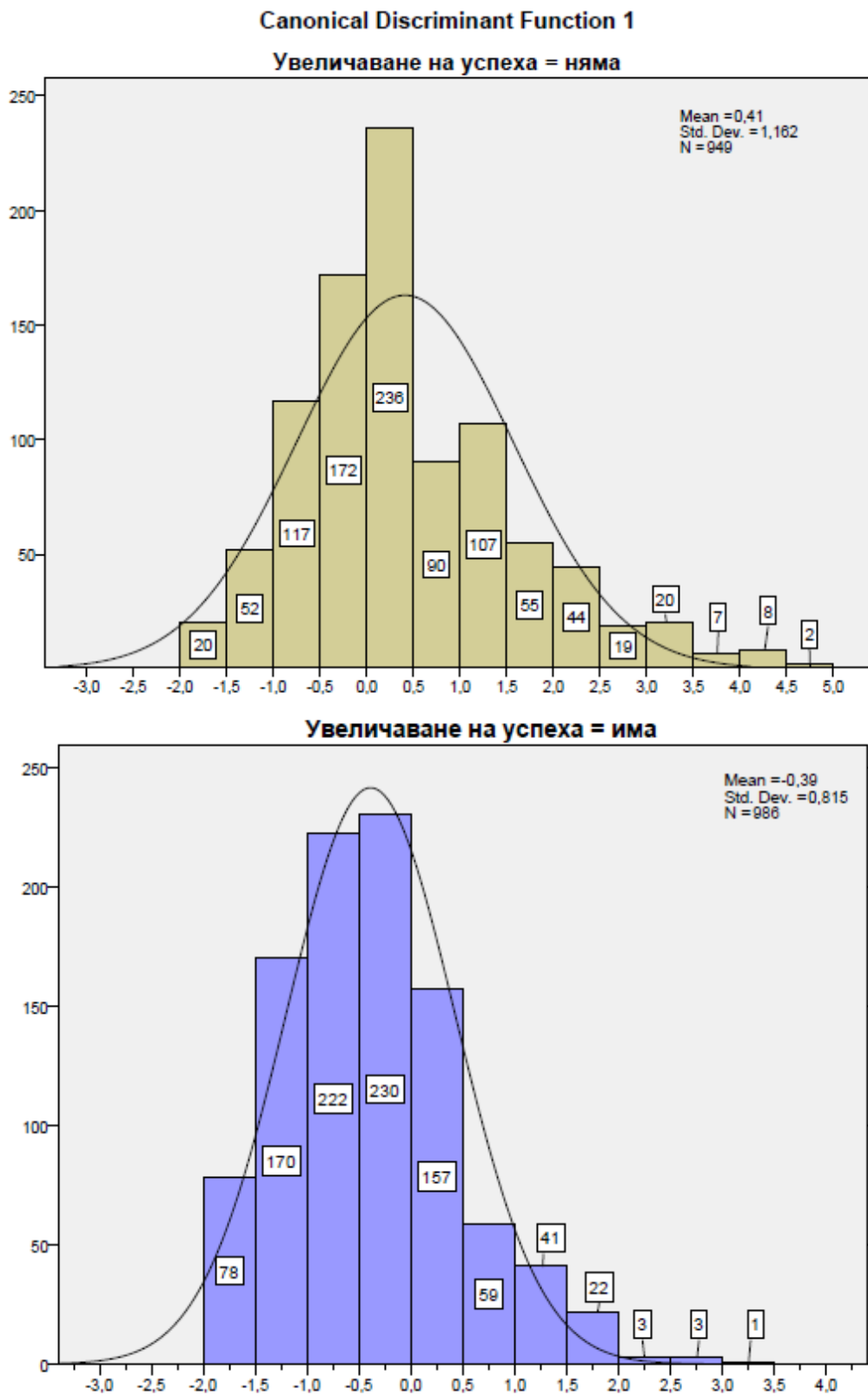
#### 5 Тълкуване на получените резултати.

Полученият дискриминантен модел (3.1) се използва за прогнозиране на резултатите от обучението с традиционна или експериментална методика за всеки нов студент, за който се знае средната оценка по Висша математика 1 и 2, факултет, специалност и пол.

Чрез дискриминантния модел (3.1) са получени стойностите на дискриминантната функция и са направени прогнози за повишаване на успеха (и съответните им вероятности) за студенти от всички факултети и специалности. В дисертацията са дадени в таблици резултатите от тези експерименти за различни категории студенти от Факултет ЕЕО, обучавани с различен тип методика.

*Изводи:* На базата на получените резултати от дискриминантния анализ авторът направи следните изводи:

- Наблюдава се ясно очертаваща се тенденция в полза на „експериментална методика“ по отношение на повишаване на успеха. Във всяка от групите, повишаване на успеха се наблюдава 2-3 пъти по-често при студенти, обучавани по експерименталната методика, отколкото при тези, обучавани по традиционната методика. Например, мъжете от специалности КСТ и Електроника в 4 от 8 случая повишават успеха си ако се обучават по „експериментална методика“, докато ако бъдат обучавани по „традиционна методика“ едва в 2 от 8 случая се очаква да се повиши успеха и то само за оценки от 2 до 2.50.
- В случаите на прогноза за повишаване на успеха, вероятностите за това са по-високи при обучени по „експериментална методика“, отколкото съответните вероятности за увеличаване на успеха при обучение по „традиционна методика“. Това означава, че студент, обучен по „експериментална методика“ е по-вероятно да повиши успеха си, отколкото ако се обучава по „традиционна методика“.
- В случаите на прогноза за липса на повишение на успеха, вероятностите за това са по-ниски при обучени по „експериментална методика“, отколкото съответните вероятности за липса на повишение на успеха при обучение по „традиционна методика“. Това означава,



Фигура 3.6: Хистограми на разпределението на дискриминантната функция



че студент, обучен по „експериментална методика“ е по-малко вероятно да не повиши успеха си, отколкото ако се обучава по „традиционна методика“.

- Като се използват хистограмите на дискриминантната функция, фигура 3.6, може да се направи извод, че за студенти с еднакви характеристики, например при определена стойност на  $D \in [-1.5; -1]$ , броят на случаите, в които успехът се повишава (170 или 17% от всички, при които има повишение) е над 3 пъти по-голям от студентите със същите характеристики (52 случая или 5% от всички без повишение), които не повишават успеха си.

### 3.1.5 Изследване на зависимости и връзки между признаци чрез класификационни дървета

Методът *класификационни дървета* се използва за изследване на връзки и вземане на решения в условия на риск, като е възможно да се изследват както количествени, така и качествени признаци и комбинация от тях.

На всеки етап съвкупността се разделя на подсъвкупности. Методът търси връзки между всички фактори поотделно и резултата. Ако факторът е качествен, методът търси връзки както поотделно между отделните категории на фактора, така и между съвкупности от неговите категории, така че да се открие най-силната възможна връзка. Ако факторът е количествен, то интервалът на изменение на фактора се разделя на подинтервали и се измерва силата на връзките за отделните интервали, след което се обединяват съседни интервали и отново се търси най-силната връзка. В резултат, методът „класификационни дървета“:

1. Открива всички фактори (количествени и качествени), които влияят на резултата и отхвърля тези, които не влияят.
2. Подрежда факторите, които влияят на резултата по важност и ги структурира във вид на дърво от най-важните (1 ниво) към по-маловажните.
3. Оформя „положителна“ и „отрицателна“ целеви групи, в които разглежданият признак има съответно най-висока и най-ниска стойност.

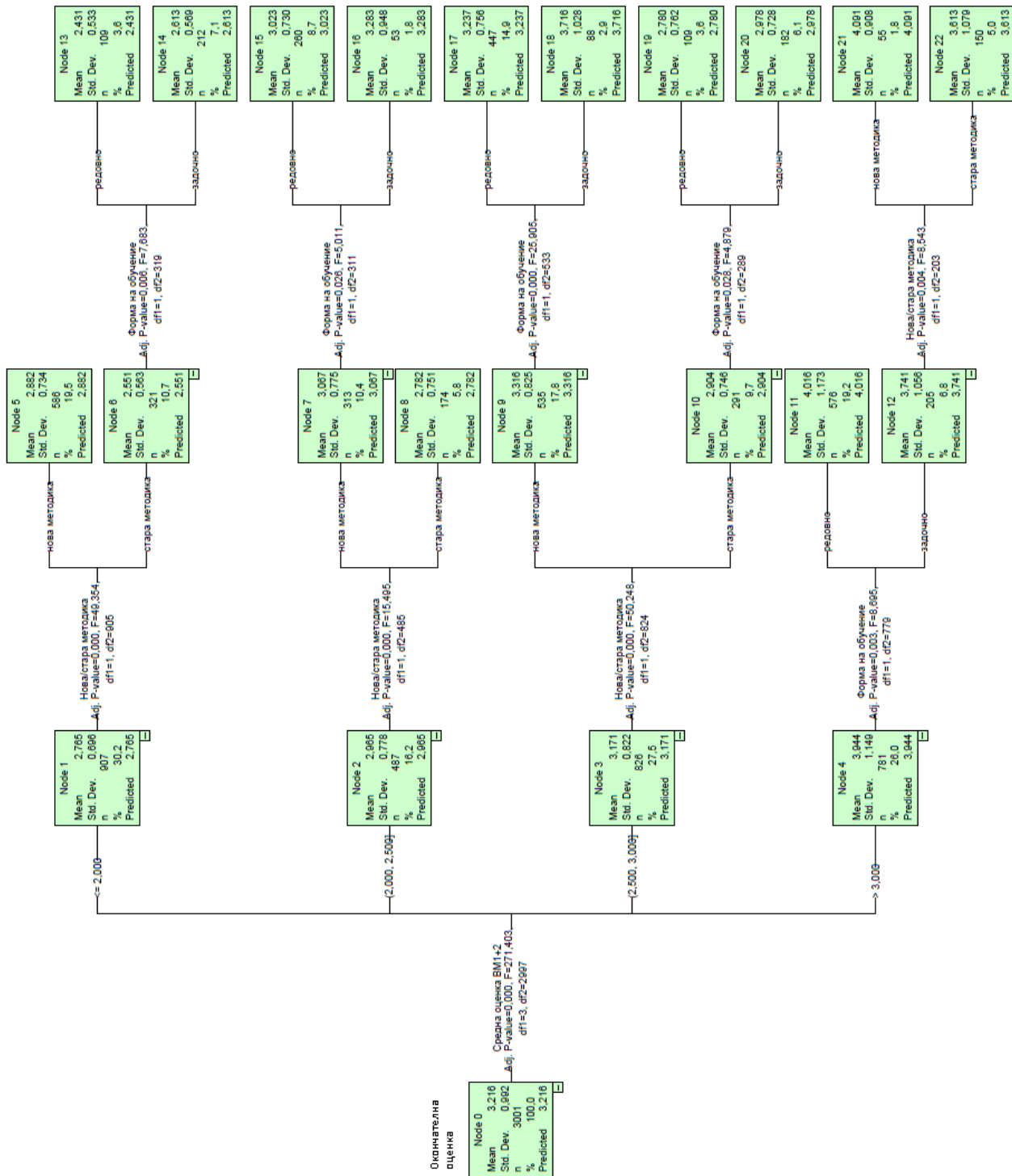
В раздел 3.1.5 се използват методите CHAID (Chi-squared Automatic Interaction Detection) и Exhaustive CHAID (пълен CHAID) за изследване на връзки между различни признаци, с цел - доказване на предимствата на експерименталната методика при обучението на студентите от различни факултети и специалности, редовна и задочна форма на обучение.

#### 3.1.5.1 Класифициране на признака „окончателна оценка“ според факторите „методика“, „форма на обучение“ и „средна оценка по ВМ12“

Изследването на извадката с метода Exhaustive CHAID по признака „окончателна оценка“ показва, че факторът, оказващ най-силно влияние върху окончателната оценка е средната оценка по Висша математика 1 и 2, следван от типа методика и формата на обучение, фигура 3.7, таблица 3.7.

Анализът на получените резултати, фигура 3.7, показва, че според признака „окончателна оценка“ от извадката се оформя класификационно дърво на три нива, което включва общо 23 възела, от които 13 са крайни, таблица 3.7 (а). Най-силен фактор е оценката по Висша математика 1 и 2; следващи по важност са факторите „методика“ и „форма на обучение“.

За всички възли, получени според признака „методика“, се наблюдават по-високи стойности на средната оценка при студентите, обучени по експериментална методика в сравнение с обучените по традиционна методика. Например, средната стойност на оценките за възел 5



Фигура 3.7: Класификационно дърво на признака „окончателна оценка“ според факторите „методика“, „средна оценка по BM12“ и „форма на обучение“

Model Summary			Gain Summary for Nodes			
Specifications	Growing Method	EXHAUSTIVE CHAID	Node	N	Percent	Mean
	Dependent Variable	Окончателна оценка	21	55	1,8%	4,0909
	Independent Variables	Нова/стара методика, Форма на обучение, Средна оценка BM1+2	11	576	19,2%	4,0156
	Validation	None	18	88	2,9%	3,7159
	Maximum Tree Depth	3	22	150	5,0%	3,6133
	Minimum Cases in Parent Node	100	16	53	1,8%	3,2830
	Minimum Cases in Child Node	50	17	447	14,9%	3,2371
Results	Independent Variables Included	Средна оценка BM1+2, Нова/стара методика, Форма на обучение	15	260	8,7%	3,0231
	Number of Nodes	23	20	182	6,1%	2,9780
	Number of Terminal Nodes	13	5	586	19,5%	2,8823
	Depth	3	8	174	5,8%	2,7816
			19	109	3,6%	2,7798
			14	212	7,1%	2,6132
			13	109	3,6%	2,4312

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID  
Dependent Variable: Окончателна оценка

(a)

(б)

Таблица 3.7: Описание на модела - класификационно дърво на признака „окончателна оценка“ според „методика“, „средна оценка по BM12“ и „форма на обучение“

(2.882) е по-голяма от тази за възел 6 (2.551); средната стойност за възел 7 (3.067) е по-висока от тази за възел 8 (2.782); за възел 9 средната стойност е 3.316 при средна стойност за 10-ти възел 2.904; за възел 21 тя е 4.091 при средна стойност за задочни студенти по традиционна методика 3.613. Прави впечатление също, че средните стойности на оценките на студентите задочно обучение е винаги по-висока от средната оценка на редовните студенти.

Анализът на резултатите в таблица 3.7 (б) показва как са класифицирани възлите на дървото според техните средни стойности и кои са целевите групи в изследваната съвкупност. „Положителната“ целева група, постигнала най-висок резултат е групата на задочни студенти с оценки над среден, обучени по експериментална методика (средна стойност 4.091), а „отрицателната“ целева група, с най-нисък резултат, е от редовни студенти, обучени по традиционна методика. Подреждането на възлите според нивата на средните стойности на оценките показва тенденция на по-високи резултати за обучените по експериментална методика. Анализът на таблица 3.7 показва, че за възли с номера 21, 18, 16, 17, 15 са постигнати високи резултати при обучение по експериментална методика, а за възли с номера 20, 8, 19, 14 и 13 са постигнати ниски резултати по традиционна методика.

*Извод:* Фактите, изложени в раздел 3.1.5.1 доказват, че експерименталната методика е решаващ фактор при формиране на окончателната оценка, тъй като води до значително по-високи средни стойности на окончателната оценка за студенти, обучени по експерименталната методика спрямо тези, обучавани по традиционната методика.

### 3.1.5.2 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“ и „окончателна оценка“

Изследването на съвкупността от изследваните случаи с метода CHAID по признака „разлика в оценките“ показва наличие на силна връзка на признака с факторите „тип на приложената методика“ и „окончателна оценка по Висша математика 3“.

*Извод:* Фактите, изложени в раздел 3.1.5.2 показват, че експерименталната методика е

решаващ фактор при обучението, тъй като води до значително повишаване на успеха по Висша математика на обучаваните по експерименталната методика спрямо тези, обучавани по традиционната методика.

### 3.1.5.3 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“ и „факултет“

В раздел 3.1.5.3 е изследвано как факторите „методика“ и „факултет“ влияят на признака „разлика в оценките“ на изследваната съвкупност. Изследването е направено чрез метода Exhaustive CHAID и в резултат е получено класификационно дърво. Получените резултати са анализирани.

*Извод:* Фактите, изложени в раздел 3.1.5.3 показват, че експерименталната методика е решаващ фактор при обучението на студентите от различни факултети и води до повишаване на успеха на студентите от всички факултети, докато обучаваните по традиционната методика показват по-слабо повишение и дори в някои случаи намаляват успеха си.

### 3.1.5.4 Класифициране на признака „разлика“ според факторите „методика“, „факултет“ и „форма на обучение“

В раздел 3.1.5.4 е направено допълнително изследване на зависимостите, разгледани в раздел 3.1.5.3 като е добавен допълнителен фактор „форма на обучение“.

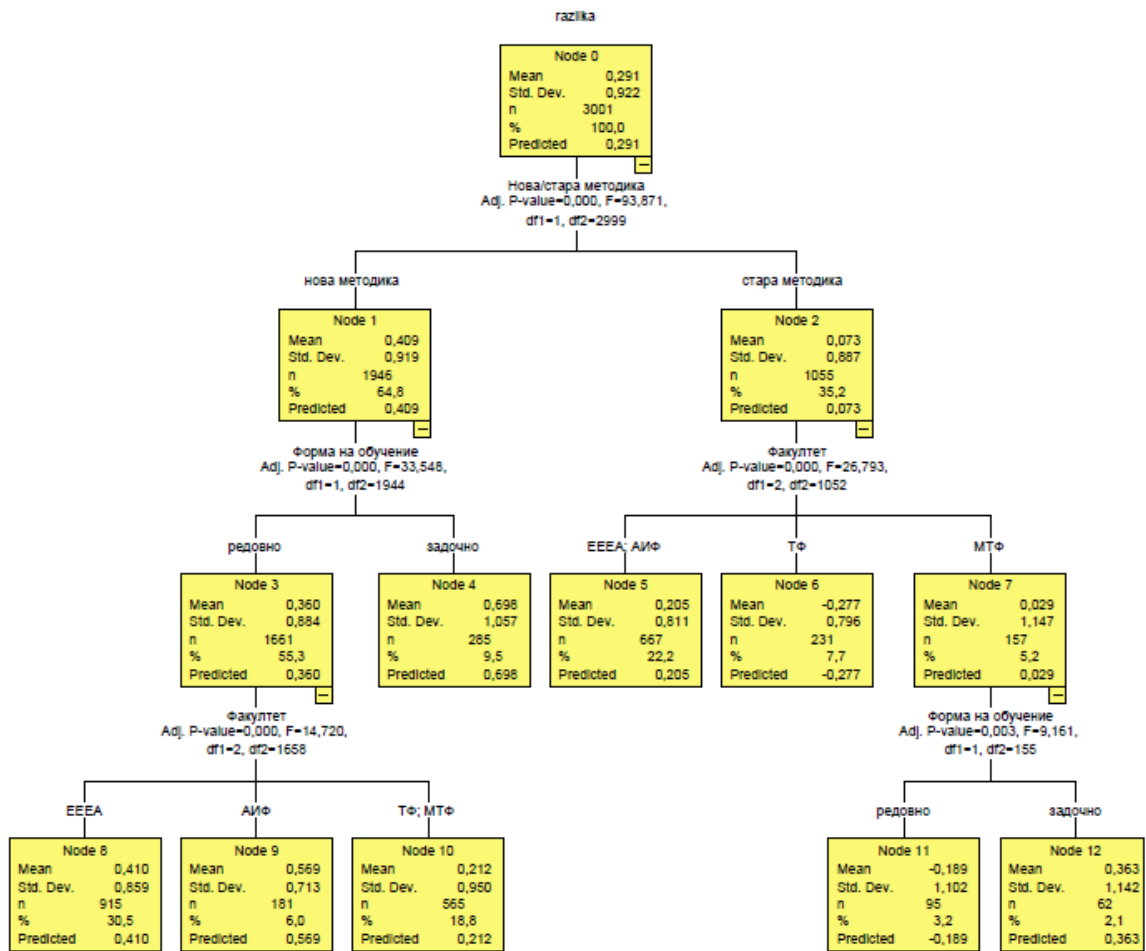
Изследването е направено чрез метода Exhaustive CHAID и в резултат е получено класификационно дърво, фигура 3.8 и таблица 3.8.

Анализът на получените резултати е аналогичен на анализа в раздел 3.1.5.3, но тук дървото има 3 нива и по-ясно се разграничават тенденциите за увеличаването на успеха по отношение на фактора „форма на обучение“. Ясно очертана е следната закономерност, наблюдавана и при анализа в раздел 3.1.5.1. Формата на обучение е важен фактор, на второ ниво по значимост след „методика“ при обучение по „нова методика“, следван от фактора „факултет“. При това, за студенти в задочна форма, обучени по „нова методика“, повишението на оценките има статистически равни стойности в отделните факултети, т.е. факултетът не е фактор за студенти задочно обучение, обучени по експерименталната методика.

Както и в раздел 3.1.5.3, тук също се наблюдават значително по-високи средни стойности за групи, обучени по „нова методика“ в сравнение с тези, обучени по „стара методика“.

Изследователският интерес налага допълнително изследване за това какво е повишението на успеха отделно за редовно и задочно обучение. Изследването е направено чрез класификационно дърво при водещ фактор „форма на обучение“. Чрез този допълнителен анализ се потвърждава предположението, че задочните студенти определено постигат по-добри резултати спрямо редовните студенти.

*Извод:* Фактите, изложени в раздел 3.1.5.4 показват, че експерименталната методика е решаващ фактор при обучението по математика. Тя оказва по-силно влияние върху студентите в задочна форма - при тях оценката се повишава два пъти повече отколкото при редовните студенти. Студентите, обучени по традиционната методика (с изключение на някои задочни студенти) понижават успеха си, докато обучените по експерименталната методика повишават оценките си.



Фигура 3.8: Класификационно дърво на признака „разлика“ според факторите „форма“, „методика“ и „факултет“

Model Summary	
Specifications	Growing Method Dependent Variable Independent Variables Validation Maximum Tree Depth Minimum Cases in Parent Node Minimum Cases in Child Node
Results	Independent Variables Included Number of Nodes Number of Terminal Nodes Depth
	EXHAUSTIVE CHAID razlika Нова/стара методика, Факултет, Форма на обучение None 3 100 50 Нова/стара методика, Форма на обучение, Факултет 13 8 3

Gain Summary for Nodes			
Node	N	Percent	Mean
4	285	9,5%	,6982
9	181	6,0%	,5691
8	915	30,5%	,4098
12	62	2,1%	,3629
10	565	18,8%	,2115
5	667	22,2%	,2046
11	95	3,2%	-,1895
6	231	7,7%	-,2771

Growing Method: EXHAUSTIVE CHAID  
Dependent Variable: razlika

Таблица 3.8: Описание на модела - класификационно дърво признака „разлика“ според факторите „форма“, „методика“ и „факултет“

## 3.2 Статистически анализ на диагностичен тест за проверка на знания

В раздел 3.2 е извършен статистически анализ на резултатите от прилагането на диагностичен тест, описан в раздел 2.2 на стр. 18.

### 3.2.1 Експертен анализ на задачите от теста

За установяване на съответствие между тестова задача и учебната цел, чието постигане е предназначена да измерва, се използва *рейтинг-скалиране*. Степента на съответствието се оценява от експерти с помощта на шестстепенна оценъчна скала, като обобщените резултати се нанасят в таблица.

За целта е поискано мнението на пет експерти. Всеки от тях получава екземпляр от комбинирания тест и карта за експертна оценка, в която поставя оценка от 1 до 6 на всяка задача, в зависимост от съотнасянето Цел - Задача.

Обобщените резултати от експертните оценки са дадени в дисертацията. Извършен е анализ на резултатите от рейтинг-скалирането. Той показва много добро съответствие между въпросите на теста и учебните цели. След модифициране на въпроси, получили оценка от експертите по-малка от 5.50, се провежда пилотен тест.

### 3.2.2 Формиране на екстремални групи

След провеждане на теста, получените резултати се подреждат в *първичен протокол* от пилотния тест. От него се формира *редуциран протокол* в низходящ ред в зависимост от общия бал.

Въз основа на редуцирания протокол, в зависимост от баловете, студентите се разделят на две екстремални групи - първата половина образува „силна“ група, а втората половина - „слаба“ група. Така се получават две екстремални групи, всяка съставена от 9 студенти. Всички протоколи са дадени в дисертацията във вид на таблици.

### 3.2.3 Надеждност на теста

Надеждността на теста показва неговата точност и достоверност на измерване. За да се анализира надеждността на теста е приложен методът на паралелните форми, като са използвани два варианта на теста - А и В. При първо тестиране първата група студенти решава вариант А на теста, а втората - вариант В.

След определено време, при второто тестиране, се разменят вариантите, като първата група решава вариант В, а втората - вариант А. Резултатите от тестиранятия са дадени в дисертацията. За проверка надеждността на теста е използван коефициентът на Фланаган, препоръчван при двукратно провеждане на теста с различни варианти, при което стандартните отклонения на баловете при двете тестираня не са равни.

Методиката на изследването изисква след двете тестираня да се изчисли първо коефициентът на корелация  $r_{12}$  между резултатите от двете тестираня по формулата на Пирсън-

Браве, в следната форма:

$$r_{12} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}, \quad (3.2)$$

където  $n$  е обемът на извадката,  $x_i$  - първична извадка на тестовите балове при първо тестиране,  $y_i$  - първична извадка на тестовите балове при второ тестиране.

Коефициентът на корелация (3.2) се замества във формулата на Фланаган

$$r_{tt} = \frac{4S_X S_Y r_{12}}{S_X^2 + S_Y^2 + 2S_X S_Y r_{12}}, \quad (3.3)$$

където  $S_X$ ,  $S_Y$  са неизместени оценки на стандартните отклонения на тестовия бал при първо и второ тестиране, а  $r_{12}$  е коефициентът на корелация между двете половини на теста, пресметнат по формула (3.2). Полученият по такъв начин коефициент на корелация  $r_{tt}$  е *коефициентът на надеждност* на теста.

При изчисленията се използват следните формули:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i f_i}{n}, \quad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 f_i}, \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 f_i}$$

където  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  са средни стойности на резултатите от I и II тестиране,  $x_i$ ,  $y_i$  са възможните балове,  $f_i$  са абсолютните честоти,  $n$  е общият брой на възможните балове,  $s_X$ ,  $s_Y$  - стандартни отклонения съответно при I и II тестиране.

Изчисленията са извършени със системата MATLAB. Пресметнат е коефициентът на корелация по формулата на Пирсън-Браве (3.2):  $r_{12} \approx 0.997951$ . Получената стойност на коефициента на корелация се използва за пресмятане на коефициента на надеждност на теста по формулата на Фланаган (3.3), като се използват резултатите от таблиците за първо и второ тестиране. В случая, получената стойност на коефициента на надеждност  $r_{tt} = 0.9987$  е висока, близка до единица, което показва, че двете форми на теста са еквивалентни, а тестът като цяло е надежден.

### 3.2.4 Обективност и валидност на теста

#### 3.2.4.1 Обективност

Обективността на теста се определя от частното  $\frac{N}{n}$ , където  $N$  е броят на статистически верните резултати, а  $n$  е броят на изследваните лица.

За пресмятане на числото  $N$  е необходимо за всяко тестиране да се направи интервална оценка на средната стойност с гаранционна вероятност  $\gamma$ . За целта, за трите тестираня са пресметнати неизместените оценки на стандартното отклонение при обем на извадката  $n = 18$  с използване на коригиращи коефициенти  $c_n$  и са намерени интервални оценки при  $\gamma = 0.999$  и  $t = t_{\gamma; n-1} = 3.96$ . Всички изчисления, интервалните оценки и получените стойности за  $N$  и  $n$  за пилотен тест, първо и второ тестиране са дадени в дисертацията в таблици.

Коефициентът на обективност за пилотния тест е 0.56, за I тестиране - 0.5, а за тестиране II - 0.44. Коефициентите на обективност при трите тестираня са близки, което показва, че резултатите от теста са обективни.

### 3.2.4.2 Валидност

За да се определи *съдържателната валидност* на теста, се използват оценките на експертите за съответствието на включените в дидактическия тест задачи и учебното съдържание, чието овладяване той трябва да измерва. Съдържателната валидност на теста, установена с помощта на експертите, е 95% (оценка 5,70 от максимална 6), което е показател за съдържателната валидност на теста.

За определяне на *критериалната валидност* на теста се използва метода на контрастните групи, като за стандарт на успешност (cut-off) се приема доверителния интервал на разпределението на баловите от пилотния тест. Резултатите показват, че извън доверителния интервал от слабата група попадат 5 студенти, а от силната - 3. Това означава, че при приетия стандарт, общо 8 от 18 студенти (44%) ще бъдат оценени погрешно, което означава, че валидността на решението е 56%.

### 3.2.5 Анализ на задачите от теста

Анализът на задачите от теста се извършва по отношение на следните характеристики: *трудност, дискриминативна сила, анализ на дистракторите* (при въпроси и задачи с избран отговор).

#### 3.2.5.1 Анализ на трудността

Трудността на една тестова задача се определя от процентния дял на правилно решилите я студенти чрез индекса на трудност  $P$ . В зависимост от типа на задачите, индексът на трудност се пресмята по една от формулите:

- При задачи с алтернативен отговор от типа „да-не“ се използва формулата

$$P = \frac{N_r}{n} \cdot 100\%.$$

- При задачи с множествен избор или задачи за съотнасяне се използва формулата

$$P = \frac{N_r - \frac{N_f}{m-1}}{N_b} \cdot 100\%,$$

където  $N_r$  е броят на студентите от двете групи, решили вярно задачата,  $N_f$  е брой студенти, решили грешно задачата,  $N_b$  е брой студенти, решавали задачата,  $n$  е общият брой на всички студенти,  $m$  е брой възможни отговори на задачата.

Резултатите показват, че индексът на трудност за задачите в теста варира от 22% до 72,22% при препоръчителен интервал 15% - 85%, което показва, че те отговарят на изискванията за трудност и могат да бъдат включени в теста.

#### 3.2.5.2 Анализ на дискриминативната сила

Дискриминативната сила на тестова задача показва доколко тя може да разграничи „силните“ от „слабите“ студенти по техните постижения. Висок коефициент на дискриминативност



показва, че съответната задача добре разграничава двете групи студенти. В този случай обикновено „силните“ студенти решават задачата вярно, а „слабите“ - грешно. Ако коефициентът е близко до нула, то както „слабите“, така и „силните“ студенти еднакво често ще бъдат в състояние да решат задачата. Приема се, че такава задача трябва да бъде премахната или преформулирана. При коефициент (-1), теоретично „силните“ студенти не могат да решат задачата, докато „слабите“ я решават вярно. Такъв случай възниква обикновено при лоша формулировка на задачата. На практика почти не се стига до екстремалните случаи.

По своята познавателна същност, индексът на дискриминативна сила е коефициент на корелация между групите на „силните“ и „слабите“ студенти. Най-често използваната формула за коефициента на дискриминативна сила е следната:

$$DP = \frac{2(R_u - R_l)}{T}, \quad (3.4)$$

където  $R_u$  - брой студенти от „силната“ група, вярно решили задачата,  $R_l$  - брой студенти от „слабата“ група, вярно решили задачата, а  $T$  е общият брой на всички студенти от двете екстремални групи.

Оценка за дискриминативната сила на задачи от типа „есе“ се извършва като се отчита отношението на количеството точки, получени при решаването на съответната задача в дадена група към максималния брой точки за групата.

Показателят на дискриминативната сила за дадена задача според тази процедура се получава като полученият общ брой точки в групата се раздели на максималния брой точки, които могат да получат общо студентите от дадена група за конкретната задача и от полученото за „силната“ група число се извади съответното число на „слабата“ група. Този начин за определяне на индекса на дискриминативна сила е използван за шест от задачите. За останалите задачи е приложена формула (3.4).

От практическа гледна точка индексът на дискриминативна сила  $DP$  на задача трябва да е от 0.4 до 0.6; тогава тя разграничава най-добре възможностите на тестираните. Задачата трябва да се формулира отново, ако има индекс под 0.4. Ако стойността е под 0.2, задачата трябва да се подмени, защото както добрите, така и слабите студенти еднакво често ще бъдат в състояние да я решат. Ако обаче останалите показатели на задачата са добри, може задачата да остане и без изменение.

Получените резултати за индекса на дискриминативна сила  $DP$  показват, че коефициентите на дискриминативна сила на задачите от теста са в допустимите граници: 18 задачи имат  $DP$  в интервала от 0.4 до 0.6, а 8 задачи имат  $DP$  в интервала от 0.2 до 0.4. Резултатите са дадени в дисертацията в таблица.

### 3.2.5.3 Анализ на дистракторите

При задачи с избран отговор такъв анализ е необходим, за да се установи дали и до каква степен дистракторите (грешните отговори) са приемливи за студентите и доколко те позволяват да се разграничат „силните“ от „слабите“ студенти.

При анализа на дистракторите се отчитат трите основни критерии на Р. Берк:

- **Критерий 1.** Всеки от дистракторите трябва да бъде посочен от повече „слаби“ студенти, отколкото „силни“.
- **Критерий 2.** Всеки дистрактор трябва да бъде посочен както от „слаби“ студенти, така и от поне няколко студенти от „силната“ група.

- **Критерий 3.** В силната група нито един от дистракторите не трябва да бъде посочен от повече студенти, отколкото верния отговор.

Резултатите от анализа на дистракторите са дадени в таблици 3.9а и 3.9б.

Според горните критерии са направени следните изводи: Критерий 1 не е изпълнен при задачи 6 в, 10 в и 12 в. Критерий 2 не е изпълнен при задача 5 в. Критерий 3 е изпълнен за всички задачи.

*Извод:* Дистракторите 6в, 10в, 12в и 5в подлежат на замяна преди използване на теста за диагностика.

### 3.2.6 Графично представяне на резултатите от теста

Важно допълнение към статистическия анализ на теста, е графичното представяне на резултатите. За тази цел в дисертацията са използвани различни графични форми - полигон, хистограма, кръгова диаграма и др.

На Фигури 3.9а и 3.9б са представени резултатите от двете тестирувания съответно на „слабата“ и „силната“ групи, представени чрез диаграми от колонен тип. По хоризонталната ос са нанесени номера от 1 до 9, съответстващи на деветте тествани лица от съответната група, а по вертикала са нанесени получените точки съответно по I и II тестване. Анализът на получените резултати показва, че почти всички студенти са показали по-добри резултати при II тестване.

### Изводи

В заключение, по отношение на резултатите от диагностичната процедура, се налагат следните изводи:

1. Качествата на тестовите задачи и на теста като цяло отговарят на описаните в литературата основни изисквания към нормативните тестове.
2. Разработеният тест ефективно изпълнява ролята на инструментариум за диагностика и измерване на постиженията на студентите при изучаване на раздела „Числени методи с MATLAB“.
3. За да бъде оптимизиран тестът, трябва да се подобрят отделни негови компоненти:
  - Да се преформулират задачите, чиято дискриминативна сила не е в желаните граници или да отпаднат от теста.
  - Да се коригират дистракторите, непокриващи съответните критерии.
4. Приложената методика дава добри резултати при усвояването на учебното съдържание по раздела „Числени методи с MATLAB“.
5. Прилагането на комбинирувания тест дава възможност на студентите да работят задълбочено и логически последователно при решаване на задачи и ориентиране в различни ситуации.
6. Наблюденията на автора по време на експеримента показват, че студентите предпочитат тестова форма на изпитване пред устно или писмено изпитване.
7. Използването на тестове в обучението предоставя обективна, надеждна и валидна основа за определяне степента на постигане на предварително поставените цели и улеснява формите за контрол на постиженията на обучаемите.
8. Учебното съдържание по дисциплината „Приложна математика“ позволява прилагането на тестовата форма за контрол на постиженията на студентите.

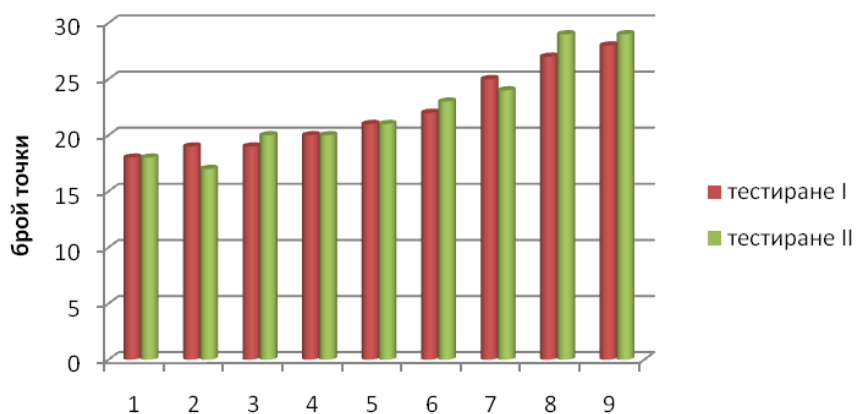
Задача	1			2			3			4			5			6		
	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в
Силна група	1	7	1	1	1	7	7	1	1	0	8	1	7	2	0	1	7	1
Слаба група	2	3	4	3	4	2	4	2	3	2	3	4	3	5	1	5	3	1

(а) Анализ на дистракторите - въпроси №1 - №6

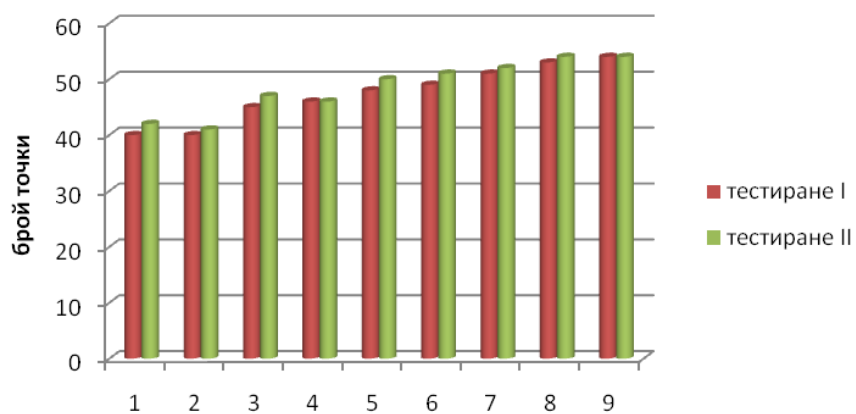
Задача	7			8			9			10			11			12			13	
	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б
Силна група	2	1	6	7	1	1	1	1	7	7	1	1	5	2	2	2	6	1	1	8
Слаба група	3	4	2	4	2	3	5	2	2	2	6	1	2	4	3	5	3	1	5	4

(б) Анализ на дистракторите - въпроси №7 - №13

Таблица 3.9: Анализ на дистракторите



(а) Сравняване на резултати от Тестиране I и II - „слаба“ група



(б) Сравняване на резултати от Тестиране I и II - „силна“ група

Фигура 3.9: Сравняване на резултати от Тестиране I и II

Статистическият анализ на проведената диагностична процедура доказва работната хипотеза, че използването на разработения тест като метод за оценка на знанията на студентите в часовете по Висша математика стимулира познавателната им дейност и спомага за достигане на по-добро и по-задълбочено усвояване на учебния материал.

### 3.3 Анализ на резултатите от анкетно проучване

В раздел 2.4 е представена анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика. В раздел 3.3 е извършен вариационен анализ, изследвани са корелационни зависимости между признаци. Извършен е и подробен клъстерен анализ на резултатите от анкетното проучване. Получените данни са анализирани чрез специализирания софтуерен пакет за статистически анализ SPSS.

За нас беше важно да получим отговори на много въпроси, най-важните от които са:

- Какво е според анкетиранията лица нивото на обучение по математика и доколко това, което те получават е на най-високо ниво според тях?
- Одобряват ли анкетиранията компютърно съпроводеното обучение по математика и дали според тях то е спомогнало за повишаване качеството на тяхното обучение?
- Как анкетиранията оценяват степента на трудност на системата MATLAB за решаване на математически задачи и доколко биха я използвали в бъдеще?
- Считат ли анкетиранията, че дистанционно обучение по математика с използване на подходящ софтуер и учебни материали би довело до повишаване качеството на обучение?

#### 3.3.1 Вариационен анализ

Общият брой на анкетиранията лица е 151, от които 70 жени (46.4%), 81 мъже (53.6%). От тях 39 (25.8%) са ученици, 107 (70.9%) студенти и 5 (3.3%) дипломирани студенти. Разпределенията на изследваните лица според специалност, пол и възраст са дадени в дисертацията в таблици.

Извършена е първична обработка на данните от анкетата с SPSS и чрез вариационен анализ са получени едномерните емпирични разпределения на извадката, които дават информация за това как са разпределени стойностите на наблюдаваните признаци според честотите на отделните алтернативи на въпросите от анкетата. В таблици 3.10, 3.11a, 3.11b са представени разпределенията на отговорите на анкетиранията и основните числови характеристики на разпределенията на отговорите на въпросите в анкетата.

##### 3.3.1.1 Първа група въпроси: отношение към образователната система и качеството на обучение по математика

Анализът на получените резултати показва, че едва 1.3% от анкетиранията лица дават отлична оценка за нивото на обучението по математика в България, 17.2% - много добра, 30.5% - добра, а останалите 51 % дават ниски оценки.

Ниската оценка на анкетиранията по този въпрос се потвърждава и от стойностите на основните числови характеристики: средната стойност е 3.54 при медиана 3.51, мода 3 и коефициент на асиметрия 0.168, при което повече от половината анкетиранията дават оценка под средната, таблица 3.10.

По отношение мнението на анкетиранията лица за това дали обучението по математика, което получават е на най-високо ниво, анализът на резултатите показва, че 20.5% от анкетиранията

лица отговарят утвърдително, 39.1% дават оценка „по-скоро да“, едва 6.6% дават отрицателен отговор, като повече от половината - 59.6 % дават висока оценка, а едва 16.5% дават ниски оценки. Високата оценка на анкетираните по този въпрос се потвърждава и от стойностите на основните числови характеристики: средната стойност е 3.57 при медиана 3.68, мода 4 и коефициент на асиметрия (-0.663), при което повече от половината анкетираните дават оценка над средната.

Подобни резултати се получават и по отношение отговора на въпроса, свързан с мнението на анкетираните дали считат, че обучението в училище е практически ориентирано. Анализът на резултатите показва, че повече от половината (51%) анкетираните заемат неутрална позиция, 22.5% от анкетираните считат, че обучението по математика е практически ориентирано, а 26.5% категорично отговарят отрицателно на въпроса.

Подобен е резултатът и за отговора на въпроса дали образователната система насърчава учащите да използват математически софтуер – едва 25.8% отговарят утвърдително, 27.2% - отрицателно, а почти половината (47%) заемат неутрална позиция. Средната стойност на разпределението на отговорите на този въпрос е 1.99, модата - 2, медианата - 1.98.

Получените данни за въпросите от първата група се потвърждават и при сравнителен анализ на основните числови характеристики на въпросите от първата група, таблица 3.10.

		Вашата обща оценка за нивото на ...	Считате ли, че обучението в училище е ...	Има ли бъдеще компютърно съпроводеното	Полезен ли беше според Вас ...	Участвали ли сте в състезание по ...	Бихте ли участвали в състезание по ...	Считате ли, че обучението по математика, ...
N	Valid	151	151	151	151	151	151	151
	Missing	0	0	0	0	0	0	0
Mean		3,54	1,96	4,19	2,67	,04	1,66	3,57
Median		3,00	2,00	5,00	3,00	,00	2,00	4,00
Mode		3	2	5	3	0	1	4
Std. Deviation		,992	,701	1,100	,562	,196	,731	1,123
Skewness		,168	,055	-1,638	-1,496	4,760	,639	-,663
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,197	,197	,197	,197
Kurtosis		-,711	-,945	2,168	1,295	20,934	-,877	-,166
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,392	,392	,392	,392

Таблица 3.10: Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 1 част

### 3.3.1.2 Втора група въпроси: отношение към компютърно съпроводеното обучение, резултати от обучението по математика с MATLAB и нагласа за участие в олимпиада по Компютърна математика

Мненията на анкетираните по втората група въпроси се различават съществено от първата група. На въпроса дали има бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика, повече от 84% дават отговор „да“ или „по-скоро да“. Едва 9.3% са скептично настроени за това, че използването на CAS ще спомогне за повишаване на качеството на обучение по математика. За потвърждение на тези резултати са представени таблици и кръгова диаграма.

На въпроса дали използването на системи за математически изчисления ще спомогне за повишаване качеството на обучение по математика, анкетираните лица са дали отговори, раз-

		Според вас, образователната система ...	Според вас, използването на CAS ще ...	Считате ли, че дистанционното обучение с ...	Оценете по скалата от 2 до 6 идеята ...	Каква е Вашата оценка степента на ...	Ще продължите ли да използвате ...	Считате ли, че изп. на CAS ще Ви помага в ...
N	Valid	151	151	151	151	151	151	151
	Missing	0	0	0	0	0	0	0
Mean		1,99	2,34	3,93	4,89	2,54	3,87	4,13
Median		2,00	2,00	4,00	5,00	2,00	4,00	4,00
Mode		2	3	5	5	2	5	4
Std. Deviation		,730	,703	1,135	,988	1,248	1,153	,933
Skewness		,020	-,598	-,949	-,753	,485	-,902	-1,302
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,197	,197	,197	,197
Kurtosis		-1,109	-,801	-,043	,328	-,882	-,041	1,949
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,392	,392	,392	,392

(а) Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 2 част

		Използвали ли сте преди CAS?	Каква оценка имате по математика?	Каква оценка имате по ИИТ?	Вашата възраст
N	Valid	151	151	151	88
	Missing	0	0	0	63
Mean		,11	4,1523	4,6623	20,10
Median		,00	4,0000	5,0000	20,00
Mode		0	3,00	4,00	17
Std. Deviation		,309	1,25830	1,05127	3,683
Skewness		2,586	,237	-,054	1,937
Std. Error of Skewness		,197	,197	,197	,257
Kurtosis		4,751	-1,275	-1,248	4,879
Std. Error of Kurtosis		,392	,392	,392	,508

(б) Сравнение между средна стойност, мода, медиана, коефициент на асиметрия и ексцес - 3 част

Таблица 3.11: Вариационен анализ за втора група въпроси

пределени по следния начин: почти половината от анкетиранияте (47.7%) дават утвърдителен отговор, 39.1% отговарят „донякъде“ и едва 13.2% отговарят отрицателно.

По въпроса за дистанционното обучение, мненията на анкетиранияте показват сходна тенденция. Около 75% от анкетиранияте считат, че дистанционното обучение с подходящи учебни материали и с подходяща система за математически изчисления ще спомогне за повишаване качеството на математическото образование.

Над 80% от анкетиранияте дават висока оценка (над 4) и на идеята част от часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на система за математически изчисления, а едва 10 % дават ниска оценка.

Интерес от гледна точка на обучението с MATLAB представлява вариационният анализ на въпросите, свързани с използването на системата MATLAB и ползата от обучението по математика с нея. Почти 60% я определят като лесна за усвояване и едва 8% срещат сериозни трудности, което се потвърждава и от представената в дисертацията таблица.

На въпроса дали ще използват системата за решаване на задачи по математика, около 80% отговарят утвърдително и едва 3% твърдо не възнамеряват да я използват. Не е за подценяване и факта, че почти 90% от учащите не са използвали преди система за математически изчисления, но пък затова само 4.6% не намират полза от преподавания материал.

Подобни са отговорите на анкетиранияте лица и на въпроса за това дали считат, че използването на система за математически изчисления ще им помага в бъдеще: над 82% възнамеряват да използват система за изчисления, а само 2.6% отговарят отрицателно.

Във втората група въпроси има такива, които касаят участието на анкетиранияте в състезание по Компютърна математика. Тези въпроси имат мотивиращ характер за студенти и ученици, които все още не са участвали в олимпиадата, но имат интерес към нея. Анализът на отговорите по тази подгрупа въпроси показва, че интересът към олимпиадата е значителен и дори хора, които не са участвали досега, възнамеряват да го направят в бъдеще: 6 анкетирани студенти (4%) съобщават, че са участвали в олимпиада по Компютърна математика, а 23 (15.2%) заявяват, че искат да участват в бъдеще.

		ученик	студент	друго	Общо
лесна	брой	20	66	3	89
	% трудност	22.5%	74.2%	3.4%	100.0%
	% В момента сте	51.3%	61.7%	60.0%	58.9%
	% of Total	13.2%	43.7%	2.0%	58.9%
нито лесна, нито трудна	брой	8	13	0	21
	% трудност	38.1%	61.9%	0.0%	100.0%
	% В момента сте	20.5%	12.1%	0.0%	13.9%
	% of Total	5.3%	8.6%	0.0%	13.9%
трудна	брой	11	28	2	41
	% трудност	26.8%	68.3%	4.9%	100.0%
	% В момента сте	28.2%	26.2%	40.0%	27.2%
	% of Total	7.3%	18.5%	1.3%	27.2%
Total	брой	39	107	5	151
	% трудност	25.8%	70.9%	3.3%	100%

Таблица 3.12: Кростаблица: статут на анкетирания - трудност на системата MATLAB

Вариационният анализ на втората група въпроси е обобщен в таблици 3.11а и 3.11б. Направено е тълкуване на резултатите.

Изследователски интерес предизвиква двумерното разпределение между признаците „оцен-

ка на степента на трудност на системата MATLAB“ и „статут на анкетирания“ - ученик, студент, дипломиран студент. Анализът на резултатите от анкетното проучване показва (таблица 3.12), че 66 студенти оценяват системата като лесна; тези 66 студенти представляват 74.2% от всички, оценяващи системата като лесна, 61.7% от всички студенти и 43.7% от всички анкетиранни. По аналогичен начин се тълкуват и останалите данни в таблицата.

### 3.3.2 Изследване на корелационни зависимости между качествени признаци

От познавателна гледна точка представлява интерес съществуването на евентуална зависимост между признаците „оценка по математика“ и „оценка на степента на трудност на системата MATLAB“. Такава евентуална зависимост се проверява чрез коефициента на контингенция (Kramer's V), тъй като в случая и двата изследвани признака са качествени. Стойността на коефициента на Phi е 0.245, на Крамер е 0.123, при вероятностни стойности на статистиките 0.909, което показва, че и двата коефициента са статистически незначими, таблица 3.13. Следователно, между двата признака не съществува зависимост и не може да се твърди, че отличниците определят системата като лесна за усвояване, а слабите - като трудна, т.е. оценяването на степента на трудност не зависи от оценката по математика.

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.245	0.909
	Cramer's V	0.123	0.909

Таблица 3.13: Изследване на зависимост между „оценка по математика“ и „оценка на степента на трудност“: коефициенти на Phi и Cramer

Аналогично се изследва съществуването на зависимост между признаците „оценка по Информатика и информационни технологии“ и „оценка на степента на трудност на системата MATLAB“. Изследването на такава евентуална зависимост отговаря на въпроса дали само студенти, които са отличници по Информатика, оценяват системата MATLAB като лесна, или такова е мнението и на студенти, които се справят трудно с информационните технологии. Стойността на коефициента на Phi в този случай е 0.268, а на Крамер - 0.154, при вероятностни стойности на статистиките Approx. Sig. 0.545, което показва, че и двата коефициента са статистически незначими. Следователно, между двата признака не съществува зависимост, т.е. оценката на степента на трудност на системата MATLAB не зависи от оценката на анкетирания по ИИТ, таблица 3.14.

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.268	0.545
	Cramer's V	0.154	0.545

Таблица 3.14: Изследване на зависимост между „оценка по информатика и ИТ“ и „оценка на степента на трудност“: коефициенти на Phi и Cramer

По аналогичен начин се доказва, че не съществува корелация между формата на обучение (редовно, задочно) и оценката за степента на трудност на MATLAB, таблица 3.15. Прави впечатление, че студенти в задочна форма на обучение, които по правило са силно мотивирани при усвояването на материала, дават дори по-добри резултати при обучението по Компютърна математика от студентите - редовно обучение. Такава тенденция се потвърждава и от резултатите от проучването, разгледано в раздел 3.1.



		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	0.219	0.837
	Cramer's V	0.155	0.837

Таблица 3.15: Изследване на зависимост между „форма на обучение“ и „оценка на степента на трудност“: коефициенти на Phi и Cramer

### 3.3.3 Клъстерен анализ

Целта на клъстерния анализ е  $n$  на брой обекти (анкетирани) да се групират в групи (клъстери) като се използват  $p$  на брой променливи (признаци).

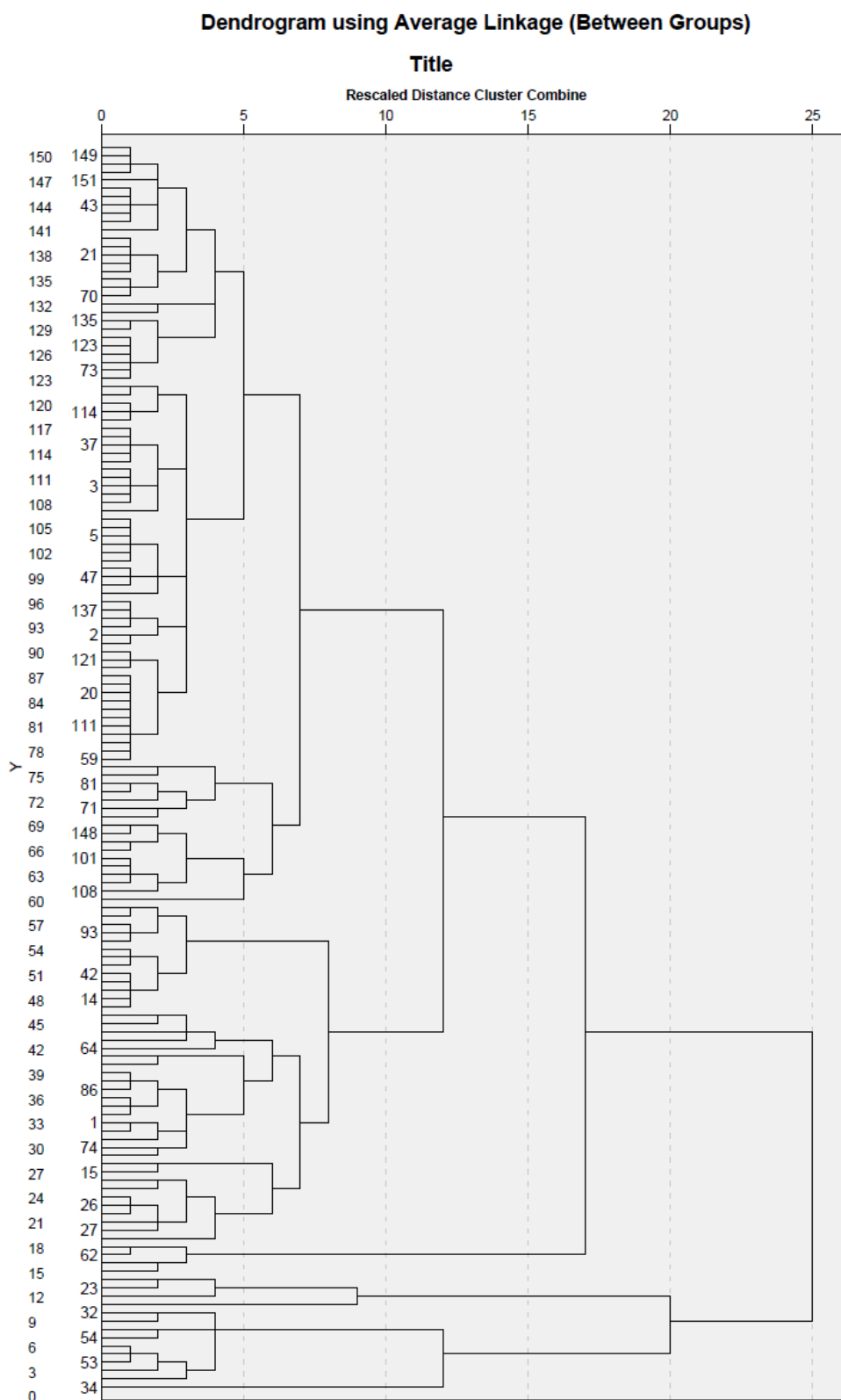
Хипотезата при изследването е, че по отношение оценката на идеята за компютърно съпроводено обучение и ползата от него, както и намеренията на анкетирани да използват система за математически изчисления в бъдеще, анкетирани се оформят в групи (клъстери). В качеството на изследвани признаци се използват: „1-Оценете по скала от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с използване на CAS“, „2-Ще продължите ли да използвате MATLAB за решаване на математически задачи?“, „3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване нивото на обучение по математика?“ и „4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика?“.

Първо, чрез вариационен анализ на съответните променливи се установява разпределението на анкетирани според отговорите им по изброените по-горе въпроси, които в дисертацията са изобразени чрез колонни диаграми на разпределенията. От представените в дисертацията графични изображения се вижда, че голяма част от анкетирани лица подкрепят идеята за компютърно съпроводено обучение по математика. Предполагаме, че е възможно те да се групират в клъстери. Предварително не е известен броят на клъстерите, предполага се, че са 2 или 3. Установяването на най-подходящия брой клъстери става в процеса на клъстерния анализ.

При изследването са използвани трите вида методи за клъстерен анализ: йерархична, нейерархична и двустъпкова клъстеризация. Извършеният анализ е съчетание между йерархична и нейерархична клъстеризация.

Йерархична клъстеризация се използва за определяне броя на клъстерите. Най-напред се прилагат всички възможни подметоди за йерархична клъстеризация, преценява се кога се получава добро решение, записват се резултатите от добрите решения и се сравняват. След това се прилага нейерархична клъстеризация и се записват резултатите. Сравняват се резултатите от йерархична и нейерархична клъстеризация и се определя кой метод е най-подходящ. Накрая се прави двустъпкова клъстеризация, сравняват се получените променливи от най-подходящите методи и се извеждат резултатите.

Основен инструмент при йерархична клъстеризация е *дендрограмата*. Това е графично изображение, което показва процеса на формиране на клъстерите чрез присъединяване на случаите към тях. Основен критерий при анализа на дендрограмите е да се формират малък на брой клъстери с възможно най-голям брой присъединени елементи. На фигура 3.10 е показана дендрограмата, получена при използването на метода на междугрупово свързване. За конкретното изследване се установява наличието на един голям и два по-малки клъстери, които биха могли да се обединят в един по-голям клъстер. Анализирани са дендрограмите, получени по всички подметоди при различен брой клъстери. Поради големия размер на изображенията, в дисертацията е представена графично само дендрограмата, изобразена на фигура 3.10.



Фигура 3.10: Дендрограма - йерархична клъстеризация по метода на междугрупово свързване

### 3.3.3.1 Определяне на подходящ брой клъстери и метод на клъстеризация

Определянето на най-подходящия брой клъстери става като се приложат всички подметоди на йерархична клъстеризация:

- метод на междугрупова свързаност (Between-groups linkage);
- вътрешногрупова свързаност (Within-groups linkage);
- метод на най-близкия съсед (Nearest neighbor);
- метод на най-далечния съсед (Furthest neighbor);
- центроиден метод (Centroid clustering);
- медианен метод (Median clustering);
- метод на Вард (Ward's method)

и нейерархична клъстеризация по метода на К-средни (K-means clustering). При всяко стартиране с определен метод, се избира броят на клъстерите да е от 2 до 4 и се задава всеки път опция за запис на получените резултати в нови променливи. Тези променливи съдържат цели числа от 1 до  $k$ ,  $k = 2, 3, 4$ , които показват за всеки случай (анкетирани) към кой номер клъстер е присъединен. След вариационен анализ на генерираните от съответните методи променливи, се получават данни за разпределението на случаите за всеки от осемте метода при  $k = 2, 3, 4$ . В дисертацията тези данни са представени в 24 таблици.

За да се определи най-удачния избор на метод за клъстеризация, е приложен сравнителен анализ на получените променливи за всеки отделен случай на брой клъстери  $k = 2, 3, 4$ , като се търси най-доброто съответствие между тях чрез коефициента на контингенция (Contingency Coefficient). Резултатите са дадени в таблици 3.16а, 3.16б, 3.16в, като значимите коефициенти са отбелязани със звезда.

Анализът на получените резултати показва, че:

- При формиране на два клъстера  $k = 2$ , нейерархичната клъстеризация дава по-лоши резултати в сравнение с методите на йерархична клъстеризация. От всички методи, най-добро съответствие по отношение принадлежност на анкетирани към клъстерите се получава за методите Between-groups clustering (BL) и Ward's method (WM), което личи от най-високата стойност на коефициента на контингенция (0.693). При метода на междугрупово свързване, в първи клъстер попадат 137 случая, а във втори - 14, докато по метода на Вард в първи клъстер има 136 случая, а във втори - 15. При метода на най-близкия съсед във втори клъстер попада само един случай, което категорично показва, че методът не е подходящ (коефициенти на контингенция под 0.2), таблица 3.16а. Прави впечатление, че по медианния метод по-големият клъстер със 130 случая е №2, за разлика от останалите, при които по-голям обем има 1. клъстер. При сравнителен анализ например с метода на най-близкия съсед обаче се установява, че несъответствието е 4.8%. Дисбалансът се дължи на различния начин на номериране на клъстерите, таблица 3.17.
- При формиране на три клъстера  $k = 3$ , най-добро съответствие между променливите, показващи принадлежност към трите клъстера има при метода на междугрупово свързване (BG) и при центроиден метод (CC) - най-висок коефициент на контингенция 0.764, таблица 3.16б. Разпределението на случаите е съответно: 139, 11, 1 по центроиден метод и 137, 12, 2 при метода на междугрупово свързване съответно за 1, 2 и 3-ти клъстер, таблица 3.18.
- При формиране на четири клъстера  $k = 4$ , най-добро съответствие между променливите, показващи принадлежност към четирите клъстера има отново при методите на междугрупово свързване (BG) и центроиден метод (CC) - най-висок коефициент на контингенция

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.234*	0.341*	0.053	0.230*	0.230*	0.135	0.214*
BL	0.234*	1	0.595*	0.026	0.677*	0.677*	0.127	0.693*
WL	0.341*	0.595*	1	0.019	0.571*	0.571*	0.095	0.580*
NN	0.053	0.026	0.019	1	0.024	0.024	0.199*	0.027
FN	0.230*	0.677*	0.571*	0.024	1	0.673*	0.117	0.663*
CC	0.230*	0.677*	0.571*	0.024	0.673*	1	0.117	0.663*
MC	0.135	0.127	0.095	0.199*	0.117	0.117	1	0.132
WM	0.214*	0.693*	0.580*	0.027	0.663*	0.663*	0.132	1

(а) Коэффициенты на контингенция при  $k = 2$ 

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.644*	0.597*	0.576*	0.653*	0.612*	0.561*	0.663*
BL	0.644*	1	0.639*	0.672*	0.688*	0.764*	0.503*	0.693*
WL	0.597*	0.639*	1	0.559*	0.619*	0.600*	0.516*	0.613*
NN	0.576*	0.672*	0.559*	1	0.682*	0.647*	0.437*	0.627*
FN	0.653*	0.688*	0.619*	0.682*	1	0.674*	0.579*	0.671*
CC	0.612*	0.764*	0.600*	0.647*	0.674*	1	0.457*	0.663*
MC	0.561*	0.503*	0.516*	0.437*	0.579*	0.457*	1	0.574*
WM	0.663*	0.693*	0.613*	0.627*	0.671*	0.663*	0.574*	1

(б) Коэффициенты на контингенция при  $k = 3$ 

	KC	BL	WL	NN	FN	CC	MC	WM
KC	1	0.658*	0.767*	0.540*	0.616*	0.603*	0.675*	0.600*
BL	0.658*	1	0.727*	0.688*	0.776*	0.819*	0.688*	0.700*
WL	0.767*	0.727*	1	0.692*	0.698*	0.704*	0.673*	0.683*
NN	0.540*	0.688*	0.692*	1	0.682*	0.691*	0.502*	0.628*
FN	0.616*	0.776*	0.698*	0.682*	1	0.749*	0.722*	0.732*
CC	0.603*	0.819*	0.704*	0.691*	0.749*	1	0.621*	0.677*
MC	0.675*	0.688*	0.673*	0.502*	0.722*	0.621*	1	0.686*
WM	0.600*	0.700*	0.683*	0.628*	0.732*	0.677*	0.686*	1

(в) Коэффициенты на контингенция при  $k = 4$ 

Таблица 3.16: Коэффициенты на контингенция за методи KC (K-mean clustering), BL (Between-groups linkage), WL (Within-groups linkage), NN (Nearest neighbor), FN (Furthest neighbor), CC (Centroid clustering), MC (Median clustering), WM (Ward's method)

0.819, таблица 3.16в. Разпределението на случаите е съответно: 130, 11, 9, 1 по метода на междугрупово свързване и 125, 12, 2, 12 при центроиден метод, таблица 3.19.

- Основният извод от комбинираното прилагане на йерархична и нейерархична клъстеризация е, че е удачно да се изберат два на брой клъстери, тъй като при деление на 3 клъстера повечето случаи са разпределени в 2 клъстера, а в третия попадат малко единици. По отношение на метода, най-подходящ се оказва *методът на междугрупово свързване*, който е с най-добри показатели при всички сравнения.

### 3.3.3.2 Определяне на съдържателния смисъл на клъстерите и приноса на признаците при формиране на клъстерите

След определяне на броя на клъстерите и най-ефективния метод на клъстеризация, възникват логично два въпроса:

- Какъв е профилът на отделните случаи, попадащи във всеки един от клъстерите?
- Доколко (в каква степен) всеки един от разглежданите признаци (въпроси) допринася за разделянето на случаите в клъстери?

### 3.3.3.3 Дисперсионен анализ

За да се отговори на горните въпроси и да се провери в каква степен отделните признаци разделят случаите в клъстери, се извършва *дисперсионен анализ*. Като независими променливи се въвеждат четирите признаци (въпроси), използвани при клъстеризацията, а като зависимы променливи - получените след клъстеризацията променливи, показващи принадлежността на всеки отделен случай към клъстерите.

Анализът е направен чрез всички методи на йерархична и нейерархична клъстеризация, при което резултатите показват сходни тенденции. В таблици 3.20а, 3.20б, 3.21 са дадени резултатите от дисперсионния анализ за четирите признака и зависимата променлива, получена по метода на междугрупово свързване, показваща принадлежността на случаите към двата клъстера. Аналогични резултати се получават и за зависимите променливи, показващи принадлежност към клъстерите по останалите методи.

От анализа на резултатите от дисперсионния анализ се оформят няколко важни извода:

- Не се установява зависимост между отговорите на анкетираните по първия въпрос и принадлежността им към клъстерите. Този факт се установява чрез сравняване на средните стойности на признака за двата клъстера. И в двата случая, средната стойност на отговорите по този въпрос е близка до средната стойност на цялата извадка, таблица 3.20а. Този извод се потвърждава и от стойността на равнището на значимост за първи въпрос  $Sig = 0.675$ , таблица 3.20б. Голямата стойност  $Sig = 0.675 > 0.05$  на равнището на значимост показва, че се приема нулевата хипотеза, т.е. няма статистически значима връзка между отговорите на анкетираните по 1. въпрос и принадлежността им към определен клъстер.

Таблица 3.21 ни носи информация и за коефициентите на корелационно отношение и определеност. Анализът на коефициента на определеност  $Eta\ square = 0.001$  показва, че едва 0.1 % от различията в принадлежността към определен клъстер се дължат на отговорите на 1. въпрос. Следователно, първият въпрос може да отпадне при окончателното клъстеризиране, тъй като той има незначителен принос при формиране на клъстерите;

- По отношение на останалите въпроси, се наблюдава значима връзка между признаците и принадлежността към определен клъстер. Това личи от таблица 3.20б, където за 2, 3

Median Method		* Single Linkage		Crosstabulation	
		Single Linkage			
		1	2	Total	
Median Method	1	Count	20	1	21
		% within Median Method	95,2%	4,8%	100,0%
	2	Count	130	0	130
		% within Median Method	100,0%	0,0%	100,0%
Total		Count	150	1	151
		% within Median Method	99,3%	0,7%	100,0%

Таблица 3.17: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на най-близкия съсед и медианен метод при  $k = 2$

Crosstab						
			Centroid Method			Total
			1	2	3	
Average Linkage (Between Groups)	1	Count	137	0	0	137
		% within Between Groups	100%	0,0%	0,0%	100%
	2	Count	1	11	0	12
		% within Between Groups	8,3%	91,7%	0,0%	100%
	3	Count	1	0	1	2
		% within Between Groups	50,0%	0,0%	50,0%	100%
Total		Count	139	11	1	151
		% within Between Groups	92,1%	7,3%	0,7%	100%

Таблица 3.18: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на най-близкия съсед и центроиден метод при  $k = 3$

Centroid Method		* Average Linkage (Between Groups)				Crosstabulation	
Count		Average Linkage (Between Groups)					
		1	2	3	4	Total	
Centroid Method	1	125	1	0	4	130	
	2	0	11	0	0	11	
	3	0	0	1	8	9	
	4	0	0	1	0	1	
Total		125	12	2	12	151	

Таблица 3.19: Резултати от сравнителен анализ на променливите, получени по методите на междугрупово свързване и центроиден метод при  $k = 4$

		1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS	2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи	3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика?	4-Има ли бъдеще компютърно съпроводено то обучение по математика?
<b>Between-groups Linkage</b>					
1	Mean	4,88	3,94	2,45	4,48
	N	137	137	137	137
	Median	5,00	4,00	3,00	5,00
	Std. Deviation	,978	1,069	,630	,631
2	Mean	5,00	3,14	1,29	1,36
	N	14	14	14	14
	Median	5,00	3,00	1,00	1,00
	Std. Deviation	1,109	1,657	,469	,497
Total	Mean	4,89	3,87	2,34	4,19
	N	151	151	151	151
	Median	5,00	4,00	2,00	5,00
	Std. Deviation	,988	1,153	,703	1,100

(а) Признаци и принадлежност към клъстер

ANOVA Table

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	,173	1	,173	,177	,675
	Within Groups	146,131	149	,981		
	Total	146,305	150			
2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	8,104	1	8,104	6,314	,013
	Within Groups	191,247	149	1,284		
	Total	199,351	150			
3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	17,294	1	17,294	45,4	,000
	Within Groups	56,799	149	,381		
	Total	74,093	150			
4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	Between Groups	124,012	1	124,01	322	,000
	Within Groups	57,419	149	,385		
	Total	181,430	150			

(б) Таблица на дисперсионен анализ: ANOVA

Таблица 3.20: Резултати от дисперсионен анализ - метод на междугрупово свързване

и 4. въпроси стойностите в последната колона на равнището на значимост са по-малки от риска за грешка 0.05. От таблица 3.21 въз основа на стойностите на коефициента на определеност може да се каже, че 4.1% от различията в принадлежността към определен клъстер се дължат на отговорите по 2. въпрос; съответно за 3. въпрос - приносът му при определяне на клъстерите е 23.3% и с най-голям принос - 68.4% е четвъртият въпрос;

След анализа на таблица 3.20а може да се даде и съдържателна характеристика на това, какви случаи попадат съответно в 1. и 2. клъстер. Сравнителният анализ на средните стойности на отговорите на въпросите показва, че в първия клъстер попадат хора, които дават високи оценки по всички въпроси - средната стойност по 1. въпрос е 4.88 при 4.89 за цялата извадка; за 2. въпрос средната стойност е 3.94 при 3.87 за извадката, за 3. въпрос съответно 2.45 при 2.34 за извадката и за 4. въпрос - 4.48 при 4.19 за извадката.

Във 2. клъстер, в който има само 14 случая, попадат хора, дали ниски оценки по 3 от въпросите и оценка близка до средната (дори по-висока от средната) по първи въпрос. За 2. въпрос средната стойност е 3.14 при 3.87 за извадката, за 3. въпрос - 1.29 при 3.24 за извадката и за 4. въпрос - 1.36 при 4.19 за извадката.

Можем условно да наречем 1. клъстер „Клъстер на положителна оценка за Компютърната математика“ и 2. клъстер „Клъстер на отрицателна оценка на КМ“. Разпределенията за всеки един от признаците са коментирани в раздел 2.4 на страница 22 и са представени в дисертацията чрез таблици.

**Measures of Association**

	Eta	Eta Squared
1-Оценете по скалата от 2 до 6 идеята часовете по математика да се провеждат в компютърна зала с CAS * Average Linkage (Between Groups)	,034	,001
2-Ще продължите ли да използвате Matlab за решаване на математически задачи * Average Linkage (Between Groups)	,202	,041
3-Според вас, използването на CAS ще спомогне ли за повишаване на качеството на обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	,483	,233
4-Има ли бъдеще компютърно съпроводеното обучение по математика? * Average Linkage (Between Groups)	,827	,684

Таблица 3.21: Стойности на корелационно отношение и коефициент на определеност при дисперсионен анализ

#### 3.3.3.4 Двустъпкова клъстеризация

След като са определени броят на клъстерите, броят единици в клъстерите и профилът на случаите, попадащи в клъстерите, прилагането на метода на *двустъпкова клъстеризация* се използва за проверка и за графично изобразяване на получените резултати.

Методът на двустъпкова клъстеризация в SPSS е най-автоматизираният от всички методи за клъстерен анализ. Допускат се до 15 клъстера, като определянето им става автоматично или при фиксиране на конкретна стойност. В резултат на прилагането му се получава графичен прозорец с богати възможности за анализ на резултатите и, както при другите два типа методи (йерархична и нейерархична клъстеризация), променлива със стойности, показващи за всеки



отделен случай номера на клъстера, към който е присъединен. На фигура 3.11a е изобразен графичен прозорец с резултатите от двустъпковия клъстерен анализ на извадката с отговорите на анкетата по четирите въпроса, дискутирани в раздел 3.3.3.

Полезен инструмент за визуална оценка на качеството на клъстеризацията по този метод е *измерител за близост и различие* (Silhouette measure of cohesion and separation), позициониран в трицветна скала. Ако измерителят е в червената зона, то резултатът е лош, ако е в жълтата зона - задоволителен и ако е в зелената зона - добър.

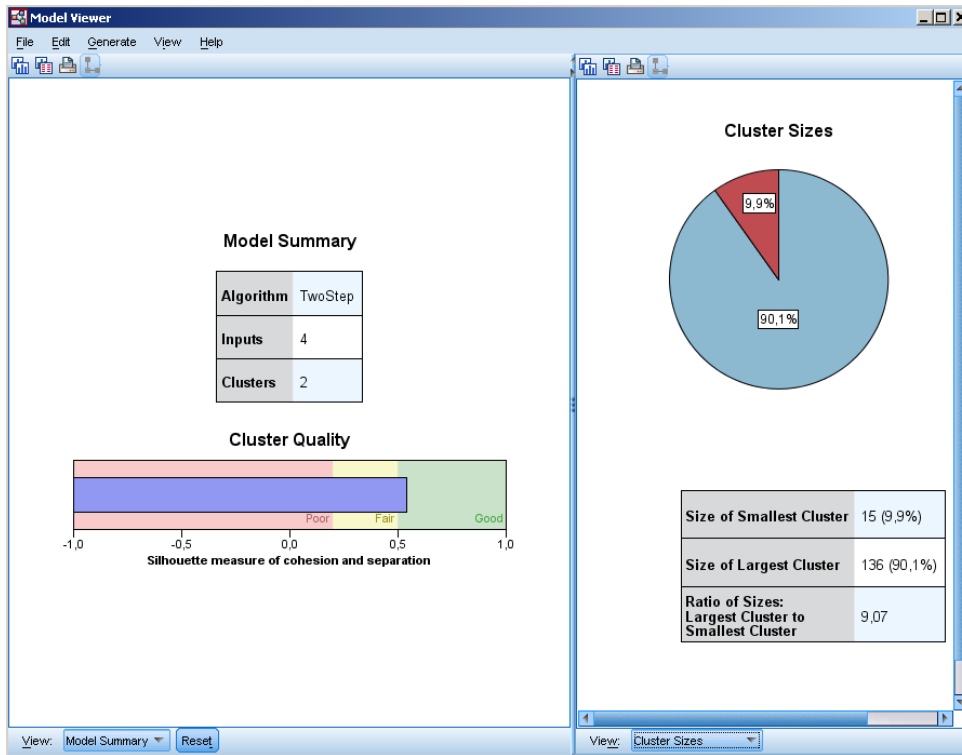
Получените резултати по метода на двустъпкова клъстеризация са сходни с тези, получени по метода на междугрупово свързване и метод на Ward - получават се автоматично два клъстера съответно със 136 и 15 случая, като измерителят на близост и различие показва добро качество на модела, тъй като е позициониран в зелената зона, фигура 3.11a. В дясната част на графичния прозорец е изобразена кръгова диаграма, изобразяваща клъстерите и таблица с характеристиките на клъстера, както и съотношението между най-големия и най-малкия клъстер (9:1).

Чрез различни графични инструменти се извлича информация от графичния прозорец за най-важните въпроси както общо за клъстера, така и отделно за отделните клъстери, фигура 3.11.

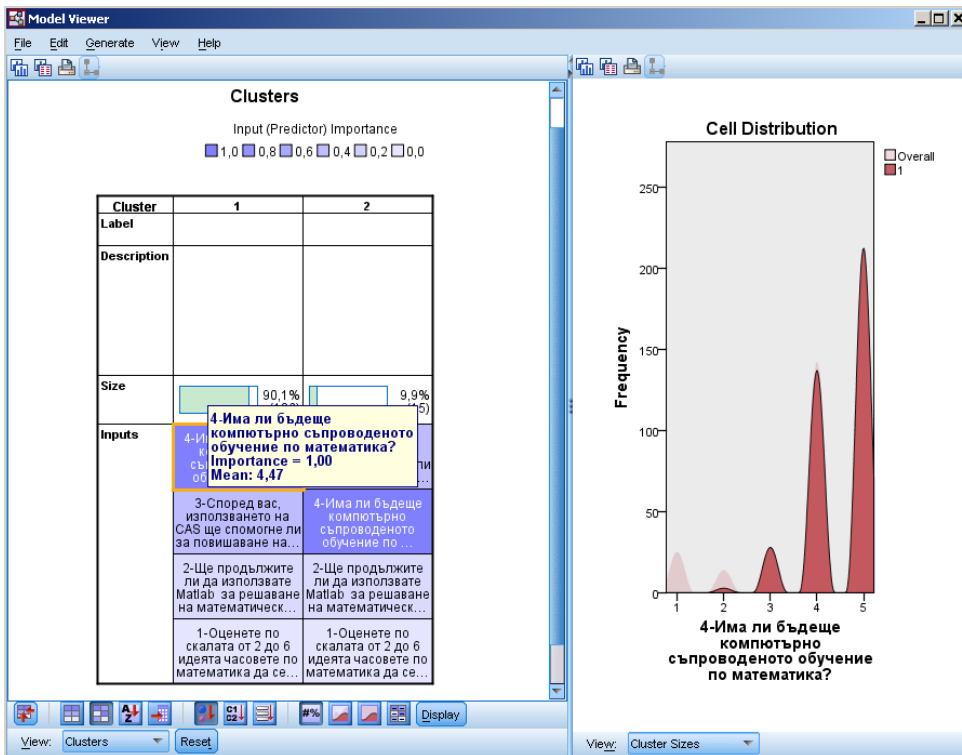
Получена е информация и за разпределението на отговорите по всички въпроси за отделните клъстери, сравнени с отговорите общо за извадката (изобразени с транспарентни цветове).

Накрая се проверява при фиксиран брой клъстери  $k = 3$  какво е качеството на клъстеризацията, фигура 3.12. От графиката се вижда, че при три клъстера качеството на модела е по-лошо, отколкото при два клъстера - измерителят на близост и различие е в жълтата (средна) зона.

След прилагането на всички методи за клъстерен анализ, се прави сравнение на съответствието между променливите, получени по методите на междугрупово свързване и двустъпкова клъстеризация чрез сравнителен анализ на съответните променливи, таблица 3.22. Полученият значим коефициент на контингенция 0.663 показва добро съответствие между променливите, показващи принадлежност на случаите към двата клъстера по метода на междугрупово свързване и метода на двустъпкова клъстеризация.

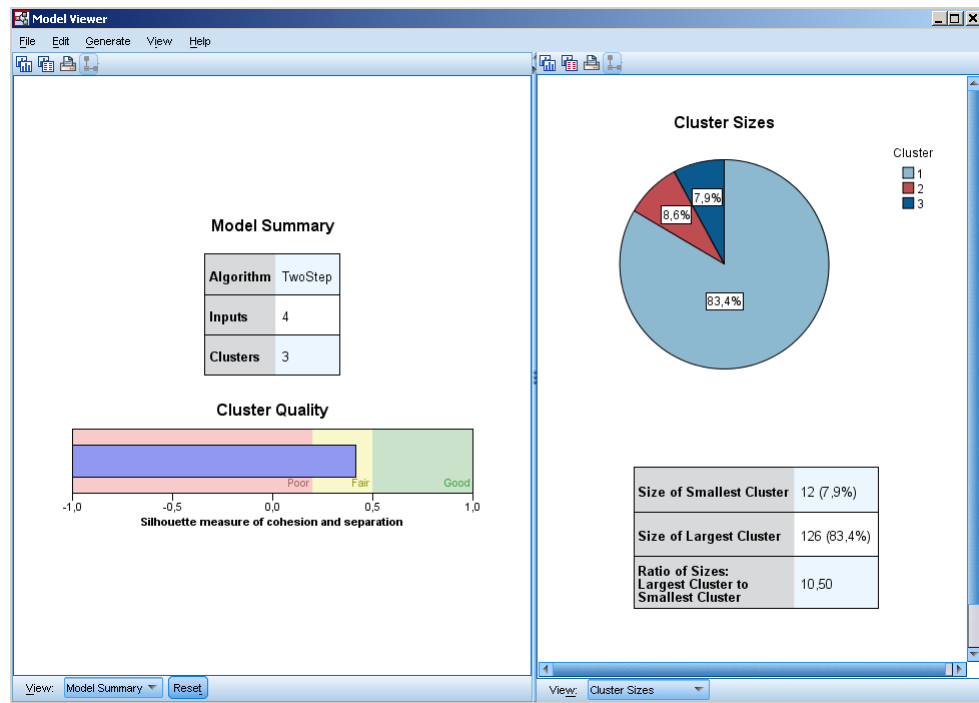


(а) Двустъпкова клъстеризация - екран 1



(б) Двустъпкова клъстеризация - екран 2

Фигура 3.11: Графично изобразяване на модел с два клъстера - екран 1 и 2



Фигура 3.12: Графично изобразяване на модел с три клъстера при двустъпкова клъстеризация - екран 5

## TwoStep Cluster Number \* Average Linkage (Between Groups)

### Crosstab

Count		Average Linkage (Between Groups)		Total
		1	2	
TwoStep Cluster Number	1	135	1	136
	2	2	13	15
Total		137	14	151

### Symmetric Measures

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Contingency Coefficient	,663	,000
N of Valid Cases		151	

- Not assuming the null hypothesis.
- Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

Таблица 3.22: Сравнение между методите на двустъпкова клъстеризация и междугрупово свързване

## Изводи

В резултат на проведената анкета по Компютърна математика бяха направени следните изводи:

- Почти половината от анкетираните младежи дават оценка под средната за нивото на обучение по математика, като по-малко от една четвърт от анкетираните считат, че обучението по математика е практически ориентирано. Едва четвърт от младите хора считат, че образователната система насърчава учащите да използват математически софтуер.
- Налице е позитивна нагласа към математическия софтуер, като тази нагласа не зависи от оценките по математика и ИИТ или от формата на обучение.
- Голяма част от анкетираните не са използвали преди система за математически изчисления, но въпреки това оценяват ползата от нея и възнамеряват да я използват в бъдеще.
- Анкетираните в по-голямата си част считат, че дистанционно обучение по математика с използване на подходящ софтуер и учебни материали би довело до повишаване качеството на обучение.
- Всички анкетираните се групират в два клъстера според това каква е тяхната оценка за ползата от компютърната математика и намерението им да я използват в бъдеще. При това над 90% от анкетираните оформят клъстера на „положително оценяващи компютърната математика“.

След анализиране на резултатите от анкетното проучване бяха натрупани достатъчно данни, показващи преобладаващо мнение за ползата от компютърно съпроводеното обучение и доказващи предпочитанията на анкетираните студенти и ученици към такъв тип обучение пред традиционното обучение по математика.

Тези изводи дават ясно и категорично отговори на поставените от нас въпроси и показват, че образователните цели, които сме си поставили в процеса на обучение по Компютърна математика, са постигнати.

## Научни и приложни приноси

- ❶ Проучено е статуквото на проблема и съвременните тенденции за разрешаване на противоречията в обучението по математика на студенти в инженерни специалности, на основата на което е приета новаторска парадигма за преориентиране на учебния процес в дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“.
- ❷ Направена е таксономия на системите за компютърна алгебра, на основата на която е избран адекватен софтуер за експерименталните и внедрителски дейности по дисертационния труд, като са прилагани и облачни технологии.
- ❸ Разработени и операционализирани са *дидактически сценарии*, на основата на които се стига до общ модел за КСО, където ключово място има обучаващата роля на усвояването на синтаксиса на CAS.
- ❹ Разработени и операционализирани са web-базирани модули за обучение по ключовите теми от дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ в рамките на Проект № BG051PO001-4.3.04-0007 „Развитие на електронни форми на дистанционно обучение в Русенски университет“ финансиран от Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“.
- ❺ Създадени и стандартизирани са диагностични тестове за оценка на постиженията от обучението по дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“ за студенти от инженерни специалности.
- ❻ Направен е многостранен анализ на резултатите от експерименталното обучение за доказване ефективността на приложените иновативни подходи за обучението по математика на студенти от инженерни специалности в дисциплините „Висша математика 3“ и „Приложна математика“.

Публикации по изложението в дисертационния труд

- ① Караколева, С., Велева, Е., *Практически курс по Числени методи за инженерни специалности*, Математика и математическо образование, стр. 260 - 265, София, 2014. [http://www.math.bas.bg/smb/2014\\_PK/tom\\_2014/pdf/260-265.pdf](http://www.math.bas.bg/smb/2014_PK/tom_2014/pdf/260-265.pdf)
- ② Караколева, С., Георгиев, И., *Изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика*, Научни трудове на РУ & СУ, стр. 46 - 51, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 2014. <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp14/6.1/6.1-7.pdf>
- ③ Караколева, С., *Модел на диагностичен тест за контрол на резултатите от компютърно съпроводено обучение по Приложна математика в Русенски университет*, Седма национална конференция „Образованието и изследванията в информационното общество“, Асоциация „Развитие на информационното общество“, ИМИ-БАН, стр. 100 - 111, Пловдив, 2015. <http://sci-gems.math.bas.bg/jspui/handle/10525/2448>
- ④ Караколева, С. *Доказване ефективността на компютърно съпроводено обучение по Висша математика в Русенски Университет*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 90-95, Русе, 2015. <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-15.pdf>
- ⑤ Караколева, С. *Изследване резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет чрез класификационни дървета*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 102-110, Русе, 2015. <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-17.pdf>
- ⑥ Караколева, С. *Клъстерен анализ на резултати от анкета за изследване удовлетвореността от обучението по Компютърна математика*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 82-89, Русе, 2015. <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-14.pdf>
- ⑦ Караколева, С. *Дискриминантен анализ на резултатите от обучението по Висша математика в Русенски Университет*, В: Научни трудове на Русенския университет, Том 54, серия 6.1, стр. 96-101, Русе, 2015. <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp15/6.1/6.1-16.pdf>
- ⑧ Lazarov, B., S. Karakoleva. *Using GAS syntax for education in Mathematics*. IN: Higher education in Bulgaria and the Europe 2020 strategy, International business school, vol. 3, pp. 914 - 921, IBS Press, Botevgrad, 2011. ISBN: 978-954-943-24-35. [http://www.ibsedu.com/media/Conference/2011/\\_2020\\_3.pdf](http://www.ibsedu.com/media/Conference/2011/_2020_3.pdf)

---

# Study on the Effectiveness of Incorporating CAS into University-level Mathematics Education

## PhD thesis

Stefka Romanova Karakoleva

The objective of the study is the mathematics and IT competence of the students in engineering profiles.

The subject of the study is the incorporation of CAS and cloud technologies in training university students aimed to avoid the heavy routine calculations. This approach allows to put the stress on the qualitative aspects of mathematics applications.

The new educational paradigm stated is that mathematics education should be oriented to the application of CAS in solving problems. The crucial point is the elaboration of the CAS-syntax knowledge and the ability to interpret the outcomes of CAS based solutions.

A didactic model of computer-supported education is designed. The model was approbated in several didactic scenarios in „Numerical Methods“ for the courses „Higher Mathematics 3“ and „Applied Mathematics“, using web-based teaching materials for training and test control.

The observed population includes 3001 university students who were examined by serial statistical sample. A thorough analysis of the learning outcomes in Higher Mathematics was performed by developing methods of testing for serial sample which proved a higher efficiency of the new education method compared to traditional one.

It has been established a diagnostic test to measure the learning outcomes under the new method. It was performed a detailed analysis of the diagnostic procedure and the results of its implementation.

An adequate discriminant model is applied to predict the results of teaching Higher Mathematics which allows to estimate (with a certain probability) whether a student with a specific profile would have better progress in studying mathematics when (s)he is trained by the experimental approach or in traditional method.

Classification of the observed indicators is done by the method of classification trees. The effectiveness of the experimental approach was confirmed comparing the outcomes of the experimental and control groups.

A survey to study the appreciation of learning „Computer mathematics“ was developed. The statistics of the inquiry is performed by cluster analysis. The correlation between quality variables was analyzed.

The dissertation work is 244 pages, including a list of figures and tables, introduction, three chapters, contributions, publications, bibliography of references and four applications. The bibliography contains 149 titles, among them 95 in Bulgarian, 16 in Russian and 38 in English. 61 figures and 90 tables illustrate the main topics.