МАТЕМАТИЧЕСКИ ИНСТИТУТ С ИЗЧИСЛИТЕЛЕН ЦЕНТЪР ПРИ БАН

СЕКТОР: ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

ХАБИЛИТАЦИОНЕН ТРУД

НА

ГЕОРГИ ХРИСТОВ ИВАНОВ

ТЕМА: ХИПЕРБОЛИЧНИ И ИЗРОДЕНИ КВАДРАТИЧНИ ОПТИМИЗАЦИОННИ ЗАДАЧИ

Теория и числени методи

СОФИЯ, 1983 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

У В О Д

Математическото оптимиране е основен елемент на математическите методи в изследване на операциите. Оптимизационният подход е важен резерв за повишаване на качеството на управление, планиране и проектиране на сложни системи. Ето защо в последните 3-4 десетилетия развиването на теорията и числените методи на оптимизационните задачи е реална необходимост. Това определя и големия интерес на специалистите към тази област.

Числените методи на математическото оптимиране са обикновенно много трудоемки и често нерезултатни при решаването на практически задачи, поради голямата им размерност. Това налага да се търсят нови ефективни методи за по-тесни, но важни за практиката класове задачи.

В хабилитационната работа се разглеждат два типа оптимизационни задачи:

1. Хиперболични /дробно-линейни/ оптимизационни задачи

$$/1/ \qquad \sup \left\{ H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ / \ x \in \Omega \right\}$$

2. Изродени квадратични оптимизационни задачи

$$/2/ \qquad \sup \left\{ F(x) = P(x)\, Q(x) \ / \ x \in \Omega \right\},$$

където $P(x)$, $Q(x)$ са афинни функции, а Ω е изпъкнало многостенно множество зададено със система линейни неравенства т.е. $\Omega = \{ x \ / \ Ax \leqq b \}$.

Тези задачи имат голямо практическо значение, тъй като описват много реални системи и процеси. Основното им преимущество пред линейните задачи е, че дават възможност да се моделират много по-съдържателни, от икономическа гледна точка, показатели за полезност, като рентабилност /относителна печалба/, количествено-качествен индекс и др. Изобщо, те дават възможност да се моделират смислено, в компактна форма, двукритериални показатели. Заедно с линейните задачи, те образуват основна група оптимизационни задачи. Числените им методи могат да се използват като стандартни процедури в числените методи на много по-широки /общи/ класове оптимизационни задачи.

Целевите функции в линейните задачи и в задачите /1/ и /2/ имат едно важно обединяващо свойство. В изпъкнало затворено множество те достигат екстремумите си върху фасади от нулев и първи ред /при многостенни множества - във връх или на ребро/. Това дава възможност за създаване на ефективни числени методи използващи симплексната процедура предложена от Данциг /1949 г./ за решаване на линейни задачи.

Изложените в настоящата работа методи са изградени на тази основа. Освен ефективност, тези методи имат и това преимущество, че при програмната им реализация може да се използва извънредно богатия практически опит натрупан при многочислените модификации и реализации на симплекс метода за линейни задачи.

Глава I съдържа сведения от теорията на изпъкналите множества / §1/ и в частност на изпъкналите многостенни множества / §2/ , необходими за изграждането на теорията и методите в глави II и III. Голяма част от тези резултати се съдържат в [5] .

Глава II е основната част на хабилитационния труд. Тук се изгражда в известен смисъл цялостно теорията / §3, §4 / и числени методи / §5, §6, §7 / на хиперболичното оптимиране. В този си вид, хиперболичното оптимиране е съизмеримо с линейното оптимиране, в смисъл на пълнота и завършеност на теория и числени методи.

В края на глава II / §8 / се разглежда и възможността за разширяване на сферата на използване на алгоритмите на хиперболичното оптимиране при по-широки класи оптимизационни задачи, както и при един частен случай на хиперболична задача.

Част от резултатите в тази глава са отразени в [13,14,23] и в отчетните материали на договора между ФММ на Софийския университет и ДСО "Балканкар" от 1970 г. /с ръководители акад. Бл. Сендов и проф. Б.Пенков/ и са докладвани на IX-тия международен симпозиум по математическо оптимиране в Будапеща през 1976 г.

Основният алгоритъм за решаване на хиперболичните оптимизационни задачи / § 5 / е реализиран програмно за компютрите от Единната серия /ЕС/ от З.Карамитева и Вл.Кючукова в "Пакет приложни програми по операционни изследвания". Пакетът е създаден по договор с ДКНТП, предаден на Централната програмна библиотека /ЦППБ/ през 1975 г. и е внедрен в редица изчислителни центрове на страната. Алгоритъмът за частната хиперболична задача / § 8 / е реализиран програмно от Е.Сендова и използван в договора с ДСО "Балканкар".

Глава III обхваща теория и методи за решаване на квадратичните задачи /2/. Част от резултатите са отразени в [6] и са докладвани на конференция по математическо оптимиране в Хидензее през 1979 г., организирана от Хумболдтовия университет в Берлин. Алгоритъмът за решаване на този клас задачи е реализиран програмно в [16].

Изказвам сърдечна благодарност на Р.Калтинска за голямата помощ, която ми оказа при оформянето и редактирането на настоящата работа.

ГЛАВА I

ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА

В тази глава са систематизирани някои основни свойства и резултати от теорията на изпъкналите множества в n -мерното евклидово пространство E^n, необходими при изучаването на свойствата на разглежданите оптимизационни задачи. Добре познатите свойства се привеждат без доказателства.

§ 1. ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА.КОНУСИ.

Задачите, които разглеждаме, са свързани с оптимизация върху изпъкнали множества и изпъкнали конуси, затова свойствата им са необходима основа за изграждането на теорията и методите за решаване на тези задачи.

Дефиниция 1. Множеството X наричаме изпъкнало, ако за всяко $a \in X$ и всяко $b \in X$ имаме $\lambda a + (1-\lambda) b \in X$ при $0 \leq \lambda \leq 1$.

По определение приемаме празното множество $\emptyset$ изпъкнало.

Теорема 1. Ако множеството X е изпъкнало, $x_i \in X$ / $i=\overline{1,s}$ /, $\alpha_i \geq 0$ / $i=\overline{1,s}$ / и $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i \in X$ /[5]/.

Теорема 2. Ако множествата X_i / $i=\overline{1,s}$ / са изпъкнали, то мнажествата*

$$\bigcap_{i=1}^{s} X_i, \quad \prod_{i=1}^{s} X_i, \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X_i$$

/ α_i - реални числа/ са изпъкнали /[5]/.

Дефиниция 2. Афинна обвивка на изпъкнало множество X наричаме сечението на всички афинни многообразия съдържащи множеството X /означаваме с $\mathrm{aff}\, X$/.

Дефиниция 3. Размерност на едно изпъкнало множество X наричаме размерността на афинната му обвивка т.е. $\rho(X) = \rho(\mathrm{aff}\, X)$.

Дефиниция 4. Една точка x наричаме относително вътрешна за множеството X, ако е вътрешна по отношение на $\mathrm{aff}\, X$.

---

*/ $\bigcap$ - сечение, $\prod$ - декартово произведение

Очевидно, всяко изпъкнало множество има относително вътрешна точка.

Дефиниция 5. Една точка x наричаме истински контурна за множеството X, ако е контурна и по отношение на $\mathrm{aff}\, X$. Множеството от всички истински контурни точки на X означаваме с $r\partial X$.

Дефиниция 6. Хиперравнината $H: \langle a, x \rangle = \alpha$ наричаме опорна за изпъкналото множество X, ако $\overline{X} \cap H \neq \emptyset$ и $\langle a, x \rangle \leqq \alpha$ /$\geqq 0$/ за всяко $x \in X$.

Лема 1. Ако X е изпъкнало множество и $y^* \notin \overline{X}$, то съществува хиперравнина през точката y^* такава, че множеството $\overline{X}$ се съдържа във вътрешността на едното от двете полупространства определени от нея т.е. $\langle a, y^* \rangle = \alpha$ и $\langle a, x \rangle > \alpha$ при $x \in \overline{X}$ /[5]/.?

Лема 2. Ако X е изпъкнало множество и x^* е контурна точка за X, то съществува опорна хиперравнина за $\overline{X}$ минаваща през x^* т.е. съществува ненулев вектор a и скалар α такива, че $\langle a, x^* \rangle = \alpha$ и $\langle a, x \rangle \geqq \alpha$ при $x \in \overline{X}$ /[5]/.

Теорема 3. През всяка контурна точка на изпъкнало множество може да се прекара опорна хиперравнина /[5]/.

Теорема 4. През всяка истинска контурна точка на изпъкнало множество X може да се прекара опорна хиперравнина H такава, че $H \not\supset X$ /[5]/.

Теорема 5. Ако X е изпъкнало затворено множество и съдържа права /лъч/ с направляващ вектор b, тя съдържа и всяка права /лъч/ с уравнение $y = x + bt$ / $y = x + bt$, $t \geqq 0$ / за всяко $x \in X$ т.е. съдържа всички прави /лъчи/ с направляващ вектор b минаващи /излизащи/ през произволна негова точка.

Доказателство. Нека X съдържа правата $y = x_0 + bt$ т.е. $x_0 + bt \in X$ за всяко t и нека $\bar{x} \in X \setminus \{x_0\}$. Ще покажем, че $\bar{x} + bt \in X$ за всяко t. Нека t_0 е произволно реално число.

1/ Ако $t_0 > 0$, то

$$x(t) = \frac{t}{t_0+t}\bar{x} + \frac{t_0}{t_0+t}(x_0+bt) \in X \quad \text{за всяко } t>0.$$

Но от $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} + bt_0$ следва $\bar{x} + bt_0 \in X$.

2/ Ако $t_0 < 0$, то

$$x(t) = \frac{t}{t_0+t}\bar{x} + \frac{t_0}{t_0+t}(x_0+bt) \in X \quad \text{за всяко } t<0.$$

и от $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \bar{x} + bt_0$ следва $\bar{x} + bt_0 \in X$.

Дефиниция 7. Изпъкнала обвивка на множеството X /означаваме C_oX / наричаме сечението на всички изпъкнали множества съдържащи множеството X .

Теорема 6. Неотрицателна /изпъкнала/ линейна комбинация* на повече от n / $n+1$ / точки може да се представи като неотрицателна /изпъкнала/ линейна комбинация на не повече от n / $n+1$ / от тези точки / n е размерността на пространството/ /[5,12]/.

Теорема 7. В сила е /[5]/

$$C_oX = \left\{ z / z = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i ,\ x_i \in X,\ \alpha_i \geqq 0,\ i=\overline{1,n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}$$

Теорема 8. Изпъкналата обвивка на компактно множество е компактно множество /[5]/.

Дефиниция 8. Точката $\hat{x} \in X$ наричаме крайна /екстремна/ точка на изпъкналото затворено множество X , ако от $\hat{x} = \alpha x_1 + \beta x_2$, където $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, следва $x_1 = x_2 = \hat{x}$ т.е. една крайна точка не може да се представи като изпъкнала комбинация на две различни от нея точки на множеството.

Множеството от крайните точки на едно изпъкнало затворено множество X ще означаваме с $\hat{X}$.

Теорема 9. Всяко изпъкнало компактно множество има крайна точка /[5]/.

---

*/Изпъкнала комбинация наричаме линейна комбинация $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i$ с коефициенти $\alpha_i \geqq 0$, $i = \overline{1,s}$, $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$.

Теорема 10. Ако X е изпъкнало затворено множество и H е опорна хиперравнина за X, то $\widehat{X \cap H} \subset \widehat{X}$ /[5]/.

Дефиниция 9. Едно множество K наричаме конус /с връх в нулата*/, ако със всяка своя точка z съдържа и точката λz за всяко $\lambda \geqq 0$ т.е. съдържа лъча $\Lambda = \{\lambda z / \lambda \geqq 0\}$.

Всеки лъч Λ с начало върха на конуса K и съдържащ се в него ще наричаме лъч на конуса и ще означаваме $\Lambda \subset K$.

Две точки z_1, z_2 ще наричаме еквивалентни, ако лежат на един и същ лъч и ще означаваме $z_1 \sim z_2$ /$z_1 \nsim z_2$ - нееквивалентни/. Ясно е, че два елемента отлични от θ са еквивалентни, ако и само ако са положително колинеарни.

Дефиниция 10. Един конус ще наричаме изпъкнал конус, ако е изпъкнало множество.

Очевидни са следните свойства на изпъкналите конуси:

1/ Всяка опорна хиперравнина на конуса минава през върха му;

2/ Ако една опорна хиперравнина на конуса съдържа точката z, тя съдържа и лъча $\{\lambda z / \lambda \geqq 0\}$.

Теорема 11. Едно множество K е изпъкнал конус, ако и само ако със всеки два свои елемента съдържа и всяка тяхна неотрицателна линейна комбинация, т.е. когато от $z_1 \in K$, $z_2 \in K$, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, следва $\alpha z_1 + \beta z_2 \in K$ /[5]/.

Сечение на изпъкнали конуси е изпъкнал конус.

Дефиниция 11. Един изпъкнал затворен конус наричаме заострен, ако има крайна точка.

Очевидно, ако един изпъкнал конус има крайна точка, то тя е върхът му /точката θ/. Лесно се вижда, че един заострен конус не съдържа едновременно точките z и $-z$ $(z \neq \theta)$.

---

*/ Множество от вида $\hat{x} + K$, където K е конус, наричаме конус с връх точката $\hat{x}$.

Теорема 12. Един изпъкнал затворен конус K е заострен, ако и само ако не съдържа права.

Доказателство. Ако K е заострен конус и допуснем, че съдържа права с направляващ вектор b, то на конуса ще принадлежат едновременно точките b и $-b$, което е невъзможно. Ако K не е заострен, точката θ не е крайна за него и ще съществуват две точки $b_1 \neq \theta$ и $b_2 \neq \theta$, $b_1 \in K$, $b_2 \in K$ такива, че $\theta = b_1 + b_2$. Но тогава $b_1 = -b_2$, следователно правата с направляващ вектор b се съдържа в K / K съдържа лъчите $b_1 \lambda$ и $-b_1 \lambda$ /.

Следствие 1. Ако K е изпъкнал заострен конус и H е негова опорна хиперравнина, то $K \cap H$ е също заострен конус.

Теорема 13. Един изпъкнал затворен конус е заострен, ако и само ако съществува опорна хиперравнина през върха му, която няма други общи точки с конуса.

Доказателство. Нека K е заострен изпъкнал конус. Разглеждаме множеството $X = \{x / x \in K, \|x\| = 1\}$. То е компактно, следователно $C_0 X$ е също компактно и $\theta \notin C_0 X$ / θ е крайна точка/. Тогава съществува хиперравнина $H: \langle a, x \rangle = 0$ такава, че $\langle a, x \rangle > 0$ за всяко $x \in X \subset C_0 X$. Ще покажем, че тя няма други общи точки с конуса. Нека $y \neq \theta$ е произволна точка на K. Тогава $z = \frac{y}{\|y\|} \in K$ и $\|z\| = 1$ т.е. $z \in X$. Следователно

$$\langle a, z \rangle = \frac{1}{\|y\|} \langle a, y \rangle > 0 .$$

откъдето $\langle a, y \rangle > 0$ т.е. $y \notin H$.

Обратно, ако съществува опорна хиперравнина $H: \langle a, x \rangle = 0$ през върха на K, която няма други общи точки с него, то K не съдържа права линия и следователно е заострен.

Дефиниция 12. Един лъч на изпъкнал затворен конус K ще наричаме краен /екстремен/ за K, ако всяка ~~коя да~~ е негова точка, отлична от θ, не може да се представи като положителна линейна комбинация на две разлчни точки от конуса нележащи едновременно на този лъч.

Лесно се вижда, че ако една точка /отлична от θ / от даден лъч има такова свойство, то всичките му точки го имат.

Множеството от крайните лъчи на конуса K ще означаваме $\vec{K}$.

Теорема 14. Ако K е изпъкнал затворен конус, $H: \langle a, z \rangle = 0$ е негова опорна хиперравнина и лъчът $\Lambda \in \overrightarrow{K \cap H}$, то $\Lambda \in \vec{K}$.

Доказателство. Нека $\langle a, z \rangle \leqq 0$ за всяко $z \in K$. Ако допуснем, че $\Lambda \notin \vec{K}$, то ще съществуват точки $z_1 \in K$, $z_2 \in K$ нележащи едновременно на Λ и такива, че за точка $\bar{z} \in \Lambda$ ще имаме $\bar{z} = \alpha z_1 + \beta z_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Но

$$0 = \langle a, \bar{z} \rangle = \alpha \langle a, z_1 \rangle + \beta \langle a, z_2 \rangle ,$$

следователно $\langle a, z_1 \rangle = \langle a, z_2 \rangle = 0$ $/\langle a, z_1 \rangle \leqq 0$, $\langle a, z_2 \rangle \leqq 0$ / т.е. $z_1 \in K \cap H$, $z_2 \in K \cap H$, което противоречи на $\bar{z} \in \overrightarrow{K \cap H}$.

Теорема 15. Един затворен изпъкнал конус има краен лъч, ако и само ако е заострен / $K \neq \{\theta\}$ /.

Доказателство. Достатъчността ще докажем с индукция по размерността на конусите. За конус с размерност единица, твърдението е очевидно вярно, тъй като заострен едномерен конус е лъч. Нека твърдението е вярно за конуси с размерност $s < k$. Ще покажем, че е вярно за k-мерен заострен конус K. Ако $\theta \neq z \in K$ е истинска контурна точка, то съществува опорна хиперравнина H през z такава, че $H \not\supset K$. Тогава $K \cap H$ е изпъкнал заострен конус с размерност по-малка от k и за него твърдението е вярно т.е. $\overrightarrow{K \cap H} \neq \emptyset$. Но от $\overrightarrow{K \cap H} \subset \vec{K}$ следва $\vec{K} \neq \emptyset$.

Необходимост. Нека $z \neq \theta$ е точка от краен лъч. Допускаме, че K не е заострен. Тогава той съдържа права, например правата $y = z + bt$:

1/ Ако $\pm b \not\sim z$, то $z' = z + bt_0 \not\sim z$ и $z'' = z - bt_0 \not\sim z$ $/t_0 > 0/$. Но тогава $z = z' + z''$ – противоречие.

2/ Ако $b \sim z$ т.е. $z = \lambda b$ $/\lambda > 0/$, то $z'' = z - bt_0 \not\sim z$ при $t_0 > \lambda$. Тогава $z = z' + z''$, където $z' = z + t_0 b$ и също стигаме до противоречие. Аналогичен е случаят при $-b \sim z$. Следователно K е заострен конус.

Дефиниция 13. Конична обвивка на множеството $A \subset E^n$ наричаме множеството $ray\, A = \{z = \lambda a \,/\, a \in A, \lambda \geq 0\}$.

Очевидно, коничната обвивка е конус и ако A е конус $ray\, A = A$. Ако K е конус, с $\mathcal{R}(K)$ ще означаваме множеството на всички подмножества на K, които не съдържат положително колинеарни вектори и за всяко $A \in \mathcal{R}(K)$, $ray\, A = K$ т.е.

$$\mathcal{R}(K) = \{A \,/\, A \subset K, A \cap \lambda A = \emptyset \text{ за всяко } \lambda > 0, ray\, A = K\}.$$

Дефиниция 14. Изпъкнала конична обвивка на множеството $A \subset E^n$ наричаме сечението на всички изпъкнали конуси съдържащи A и ще я означаваме с $con\, A$.

Очевидно, $con\, A = Co(ray\, A) = ray\,(Co\, A)$. Ако $K = con\, A$, то множеството A се нарича пораждащо множество за конуса K.

Едно пораждащо за конуса K множество наричаме минимално, ако $con\{A \setminus \{z\}\} \neq K$ за всяко $z \in A \setminus \{\theta\}$. Множеството от всички минимални пораждащи множества на конуса K ще означаваме с $\mathcal{B}(K)$. И така, ако $A \in \mathcal{B}(K)$, то

$$K = \{z \,/\, z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \; a_i \in A, \; \alpha_i \geq 0, \; i = \overline{1,n}\}.$$

Теорема 16. Всяка относително вътрешна точка на изпъкнал заострен конус K се представя като изпъкнала комбинация на две истински контурни точки.

Доказателство. Нека $z \in ri\, K$. Понеже K е заострен, съществува хиперравнина H през върха му, която няма други общи точки с K. През точката z прекарваме права с направляващ вектор $b \parallel H \cap aff\, K$. Тогава $\pm b \notin K$ / $H \cap K = \{\theta\}$ /. Следователно

$$t_1 = \max\{t \,/\, z + bt \in K\} < \infty$$
$$t_2 = \max\{t \,/\, z - bt \in K\} < \infty .$$

Но $z_1 = z + t_1 b$ и $z_2 = z - t_2 b$ са истински контурни точки и

$$z = \frac{t_2}{t_1+t_2}(z+t_1 b) + \frac{t_1}{t_1+t_2}(z-t_2 b).$$

Теорема 17. Всяка точка на изпъкнал затворен заострен конус се представя като изпъкнала комбинация на точки от крайни лъчи.

Доказателство. Ще използваме индукция по размерността на конуса. За едномерен конус твърдението е очевидно вярно. Допускаме, че е вярно за конуси с размерност по-малка от k и нека K е k-мерен конус. Ако $z \in K$ е истински контурна точка, прекарваме през нея опорна хиперравнина $H \not\supset K$. Тогава $K \cap H$ е конус с размерност по-малка от k и следователно

$$z = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bar z_i, \; \alpha_i \geqq 0, \; i=\overline{1,s}, \; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \; \bar z_i \in \overrightarrow{K \cap H}, \; i=\overline{1,s}.$$

Но $\overrightarrow{K \cap H} \subset \vec{K}$.

Ако $z \in \mathrm{rint}\, K$, тя се представя във вида

$$z = \lambda z' + (1-\lambda) z'', \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad z' \in r\partial K, \quad z'' \in r\partial K.$$

Но

$$z' = \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_i \bar y_i, \quad z'' = \sum_{j=1}^{s_2} \beta_j \bar z_j, \quad \bar y_i \in \vec{K}, \quad \bar z_j \in \vec{K}, \; i=\overline{1,s_1}, \; j=\overline{1,s_2}$$

$$\alpha_i \geqq 0, \; \beta_j \geqq 0, \; i=\overline{1,s_1}, \; j=\overline{1,s_2}, \quad \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{s_2} \beta_j = 1,$$

и понеже изпъкнала комбинация от изпъкнали комбинации е изпъкнала комбинация, то z се представя като изпъкнала комбинация на точки от крайни лъчи.

Следствие 1. Ако K е изпъкнал затворен заострен конус и $A \in \mathcal{R}(\vec{K})$, то всяка точка на K се представя като неотрицателна линейна комбинация на точки от A т.е.

$$K = \left\{ z \,/\, z = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \bar z_i, \; \alpha_i \geqq 0, \; \bar z_i \in A, \; i=\overline{1,n+1} \right\}.$$

/Следва непосредствено от $\vec{K} = \mathrm{ray}\, A$ /.

Следствие 2. Ако K е изпъкнал затворен конус, то $\mathcal{R}(\vec{K}) = \mathcal{B}(K)$.

Доказателство. От следствие 1 се вижда, че A е пораждащо множество за K. Понеже в A участва само по една точка от всяко крайно ребро, то A е минимално пораждащо множество и $K = \operatorname{con} A$. Следователно $\mathcal{R}(\vec{K}) \subset \mathcal{B}(K)$. От друга страна, всяко минимално пораждащо множество се състои само от точки на крайни ребра т.е. $\mathcal{B}(K) \subset \mathcal{R}(\vec{K})$. Така че $\mathcal{B}(K) = \mathcal{R}(\vec{K})$.

Следствие 2 показва, че всяко минимално пораждащо множество на изпъкнал затворен заострен конус се състои от по един елемент /различен от θ / от всяко крайно ребро.

Теорема 18. Ако $X \neq \emptyset$ е изпъкнало компактно множество, то $X = C_0 \hat{X}$ /[5]/.

Дефиниция 15. Векторът $z \in E^n$ наричаме рецесивно направление за изпъкналото множество X, ако за всяка точка $x \in X$ и всяко $\lambda > 0$ точката $x + \lambda x \in X$. Множеството от всички рецесивни направления на X наричаме рецесивен конус на X и означаваме с $V(X)$.

Очевидно, ако $x_0 + \lambda z \in X$ за всяко $\lambda \geqq 0$ при някое $x_0 \in X$, то $x + \lambda z \in X$ за всяко $x \in X$ и $\lambda > 0$.

Теорема 19. Ако $x_k \in X$, $k = 1,2,\dots$ и $\|x_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, всяка точка на сгъстяване на редицата $\frac{x_k}{\|x_k\|}$ е рецесивно направление/[5]/.

Теорема 20. Ако X е изпъкнало затворено множество, то/[5]/

1/ $V(X)$ е изпъкнал затворен конус

2/ X е неограничено множество, ако и само ако $V(X) \setminus \{\theta\} \neq \emptyset$

3/ $\hat{X}$ не е празно, ако и само ако $V(X)$ е заострен конус.

Теорема 21. Ако X, Y са изпъкнали затворени множества и $Z = X + Y$, то $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

Доказателство. 1/ Нека $v \in V(Z)$, $\|v\| = 1$ и $\{z_k\}_1^\infty$ е неограничена редица от елементи на Z такава, че $\frac{z_k}{\|z_k\|} \xrightarrow[k\to\infty]{} v$. Но за всяко z_k имаме $z_k = x_k + y_k$, където $x_k \in X$, $y_k \in Y$. Очевидно е, че поне една от редиците $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ е неограничена. Но

$$\frac{z_k}{\|z_k\|} = \frac{x_k}{\|z_k\|} + \frac{y_k}{\|z_k\|} = \frac{\|x_k\|}{\|z_k\|}\cdot\frac{x_k}{\|x_k\|} + \frac{\|y_k\|}{\|z_k\|}\cdot\frac{y_k}{\|y_k\|} .$$

Редиците $\frac{\|x_k\|}{\|z_k\|}\cdot\frac{x_k}{\|x_k\|}$, $\frac{\|y_k\|}{\|z_k\|}\cdot\frac{y_k}{\|y_k\|}$ са ограничени и ще смятаме, че са сходящи. Тогава при граничен преход получаваме $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, като $v_1 \in V(X)$, а $v_2 \in V(Y)$. Следователно $V(Z) \subset V(X) + V(Y)$.

2/ Нека $v_1 \in V(X)$, $v_2 \in V(Y)$ и $z \in Z$. Понеже $z = x+y$, $x \in X$, $y \in Y$, то

$$z + t(v_1+v_2) = x + t v_1 + y + t v_2$$

Следователно за всяко $t > 0$ имаме $z + t(v_1+v_2) \in X + Y = Z$ т.е. $v_1 + v_2 \in V(Z)$ или $V(X) + V(Y) \subset V(Z)$.

От 1/ и 2/ получаваме $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

Теорема 22. Ако X е изпъкнало затворено множество, то множеството $W(X) = V(X) \cap (-V(X))$ е подпространство /[5]/.

$W(X)$ наричаме рецесивно подпространство на X .

Очевидно, ако X е изпъкнало компактно множество, то $V(X) = \{\theta\}$ и ако X е неограничено, но $\hat{X} \neq \emptyset$, то $W(X) = \{\theta\}$.

Теорема 23. Ако X е изпъкнало затворено множество и $\hat{X} \neq \emptyset$, то $X = C_0 X + V(X)$ /[5]/.

Теорема 24. Ако $X \neq \emptyset$ е изпъкнало затворено множество и T е допълнително подпространство на $W(X)$ / $W(X) + T = E^n$ и $W(X) \cap T = \{\theta\}$ /, то $\widehat{X \cap T} \neq \emptyset$ /[5]/.

Теорема 25. Ако X е изпъкнало затворено множество, що

$$X = C_0(\widehat{X \cap T}) + V(X \cap T) + W(X),$$

където T е допълнително подпространство на $W(X)$ /[5]/.

Теорема 26. Ако X е изпъкнало затворено множество, то /[5]/

$$X = C_0(\widehat{X \cap T}) + V(X)$$

Дефиниция 16. Векторът $z \in E^n$ наричаме възможно направление за точката $x \in X$ относно множеството X , ако съществува $\lambda_0 > 0$ такова, че $x + \lambda z \in X$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

Множеството от възможните направления за точката x относно множеството X означаваме с $U(x, X)$ и наричаме конус на възможните направления.

Теорема 27. Ако X е изпъкнало множество, то $U(x, X)$ е изпъкнал конус за всяко $x \in X$.

Доказателство. Нека $z_1 \in U(x, X)$ и $z_2 \in U(x, X)$. Тогава съществува $\lambda_0 > 0$ такова, че $x + \lambda z_1 \in X$ и $x + \lambda z_2 \in X$ за всяко $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$. Нека $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогава

$$x(\mu) = x + \mu(\alpha z_1 + \beta z_2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[x + \mu(\alpha+\beta) z_1\right] + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[x + \mu(\alpha+\beta) z_2\right]$$

и за всяко $0 \leqq \mu \leqq \frac{\lambda_0}{\alpha+\beta}$ имаме $x(\mu) \in X$, следователно $z \in U(x, X)$ т.е. $U(x, X)$ е изпъкнал конус.

Очевидно, ако X е изпъкнало множество, то

$$U(x, X) = \{ z \,/\, z = \lambda(y - x),\ y \in X,\ \lambda \geqq 0 \}.$$

От дефиницията на рецесивен конус също веднага се вижда, че $V(X) \subset U(x, X)$ за всяко $x \in X$.

Накрая ще отбележим едно свойство на линейните функции върху изпъкнали множества.

Теорема 28. Ако X е изпъкнало затворено множество и $\langle a, x\rangle \leqq \alpha$ в X, то $\langle a, v\rangle \leqq 0$ в $V(X_1)$ и $\langle a, w\rangle = 0$ в $W(X)$, където $X_1 = X \cap T$, а T е допълнително подпространство на $W(X)$.

Доказателство. Ако $x \in X$, $v \in V(X_1)$ и $w \in W(X)$, то за всяко $\lambda > 0$ и $\mu \in E_1$ точката $x(\lambda, \mu) = x + \lambda v + \mu w \in X$. Следователно $\langle a, x\rangle + \lambda \langle a, v\rangle + \mu \langle a, w\rangle \leqq \alpha$ за всяко $\lambda > 0$ и $\mu \in E_1$. Но това е възможно, ако и само ако $\langle a, v\rangle \leqq 0$ в $V(X_1)$ и $\langle a, w\rangle = 0$ в $W(X)$.

Теорема 29. Ако X е изпъкнало затворено множество и $L(x) = \langle a, x\rangle < \infty$ в X, то съществува $x^* \in \widehat{X \cap T}$ такова, че

$$L(x^*) = \max \{ L(x) \,/\, x \in X \}$$

/ T е допълнително подпространство на $W(X)$ /.

§2. МНОГОСТЕННИ МНОЖЕСТВА

В този параграф ще разгледаме някои специфични свойства на изпъкналите многостенни множества. Последните са важен подклас на изпъкналите множества, тъй като от една страна, много практически задачи водят до оптимизация в многостенни области, а от друга - всяко изпъкнало множество се апроксимира /в известен смисъл/ достатъчно добре с многостенно множество. Понеже навсякъде по-нататък ще става дума само за изпъкнали многостенни множества, ще ги наричаме за краткост многостени[ж].

Дефиниция 17. Множество от вида

/2.1/ $$\Omega = \{x \mid Ax \leqq b\}$$

където $A=(a_{ij})_{m,n}$ е реална матрица, $b=(b_1,\dots,b_m)^T \in E_m$, наричаме многостен.

В дефиницията на многостен могат да участват и равенства, но това не променя нещата, понеже всяко равенство е еквивалентно на две неравенства. Неравенствата и равенствата участващи в дефиницията на многостен наричаме условия или ограничения.

Казваме, че една съвкупност от условия са линейно независими, ако рангът на матрицата от коефициентите им е равен на броят им. Навсякъде по-нататък в този раздел ще предполагаме, че $\Omega \neq \emptyset$ т.е. определящата го система неравенства е съвместима.

Едно условие наричаме активно за точката $x \in \Omega$, ако се удовлетворява от тази точка като равенство.

Очевидно многостените са изпъкнали множества.

Лесно се вижда, че

/2.2/ $$K = \{z \mid Az \leqq 0\}$$

е изпъкнал затворен конус.

Дефиниция 18. Множество от вида /2.2/ наричаме многостенен конус.

ж/ Обикновено многостен се нарича ограничено многостенно множество.

Дефиниция 19. Изпъкнало затворено подмножество F на изпъкнало затворено множество X наричаме фасада от ред k / k - фасада/ за X, ако $\dim F = k$ и никоя негова точка не може да се представи като изпъкнала комбинация на две различни от нея точки от X, нележащи едновременно в F.

Очевидни са следните твърдения:

1/ Крайните точки на едно изпъкнало множество са фасади от нулев ред

2/ Ако F е фасада за $\overline{X}$, то $\hat{F} \subset \hat{X}$

3/ Ако $\hat{X} \neq \emptyset$, то $\hat{F} \neq \emptyset$ за всяка фасада на X

4/ Ако F_1 и F_2 са фасади за X от ред съответно k_1 и k_2 и $F = F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, то F е фасада за X от ред $k \leqq \min(k_1, k_2)$.

Крайните точки на многостен наричаме върхове, а фасадите от първи ред - ребра на многостена. Два върха свързани с ребро наричаме съседни.

От казаното по-горе се вижда, че едно ребро може да съдържа най-много два върха и това са крайните точки на реброто. Ако многостенът има поне един връх, то всяко ребро съдържа поне един връх. Ребрата съдържащи два върха са ограничени /като множество/, а тези съдържащи един връх са неограничени. Ако многостенът няма връх, всичките му ребра /ако има такива/ са неограничени.

Ще въведем някои означения, които ще ползваме нататък.

1/ За фиксирана точка $\bar{x} \in \Omega$, с $A\bar{x} \leqq b$ ще означаваме, че поне в едно от неравенствата $Ax \leqq b$ имаме за точката $\bar{x}$ строго по-малко, а с $A\bar{x} < b$ ще означаваме, че за точката $\bar{x}$ всички неравенства са изпълнени като строго по-малко.

2/ Ако $F \subset \Omega$, с A_F и b_F ще означаваме съответно матрицата от коефициентите и вектора от съответните десни части на активните за всяко $x \in F$ условия. Останалата част от матрицата A и вектора b ще означаваме съответно с $A_F^<$ и $b_F^<$. Когато F

е само една точка y , ще означаваме съответна с A_y, b_y, $A_y^<$, $b_y^<$.

Теорема 30. $F \subset \Omega$ е k-фасада за Ω , ако и само ако

1/ $F = \Omega_F = \{x \in \Omega / A_F x = b_F\}$

2/ $rank\ A_F = n-k$

Доказателство. Необходимост. Нека F е k-фасада за Ω. Тогава $F \subset \Omega_F$ и съществува точка $\bar{x} \in F$, за която $A_F^< \bar{x} < b_F^<$. Ако допуснем, че има точка $\tilde{x} \in \Omega_F \setminus F$, то тъй като при достатъчно малко $\delta > 0$ точката $\bar{x} + \delta(\bar{x} - \tilde{x}) \in \Omega$ и

$$\bar{x} = \frac{\delta}{1+\delta}\tilde{x} + \frac{1}{1+\delta}\left[\bar{x} + \delta(\bar{x} - \tilde{x})\right],$$

ще стигнем до противоречие с това, че F е фасада. Следователно $F = \Omega_F$, а от тук и $rank\ A_F = n-k$.

Достатъчност. Ако $F = \Omega_F$ и $rank\ A_F = n-k$, то F е изпъкнало подмножество на Ω с размерност k . Ако допуснем, че съществува точка $\tilde{x} \in F$ такава, че $\tilde{x} = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ $x_{1,2} \in \Omega$ и $(x_1, x_2) \notin F \times F$, то

$$b_F = A_F \tilde{x} = \alpha A_F x_1 + \beta A_F x_2 \leq b_F$$

понеже или $A_F x_1 \leq b_F$ или $A_F x_2 \leq b_F$. Стигнахме до противоречие. Следователно F е фасада.

Теорема 31. Ако $\Omega = \{x / Ax \leq b\}$, то

1/ $V(\Omega) = \{v / Av \leq \theta\}$

2/ $W(\Omega) = \{w / Aw = \theta\}$

3/ $U(x, \Omega) = \{u / A_x u \leq \theta\}$, $(x \in \Omega)$.

Доказателство. 1/ Ако $x \in \Omega$, то $A(x + \lambda v) = Ax + \lambda Av \leq b$ за всяко $\lambda > 0$ точно тогава, когато $Av \leq 0$. Следователно $x + \lambda v \in \Omega$ за всяко $\lambda > 0$, ако и само ако $Av \leq \theta$ т.е.

$$V(\Omega) = \{v / Av \leq \theta\}.$$

2/ Следва непосредствено от $W(\Omega) = V(\Omega) \cap (-V(\Omega))$. 3/ Ако $u \in \{u / A_x u \leq \theta\}$, то $A_x(x + \lambda u) = A_x x + \lambda A_x u \leq b_x$ за всяко $\lambda > 0$ и $A_x^<(x + \lambda u) = A_x^< x + \lambda A_x^< u \leq b_x^<$ за достатъчно малко $\lambda > 0$. Следователно $u \in U(x, \Omega)$. Обратно, ако $u \in U(x, \Omega)$, то за достатъчно малко $\lambda > 0$, $x + \lambda u \in \Omega$ т.е.

$$A_x(x+\lambda u) = A_x x + \lambda A_x u \leq b_x$$

но това е възможно само ако $A_x u \leq \theta$.

Теорема 32. Ако K е заострен многостенен конус, $\vec{K}$ съвпада с множеството на ребрата му.

Твърдението следва непосредствено от дефинициите на краен лъч и ребро.

Точка $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ има по отношение на всяко излизащо от нея ребро на Ω , точно едно /с точност до $\|\cdot\|$ / възможно направление. Тези направления наричаме направления на ребрата излизащи от точката $\hat{x}$ и съвкупността им ще бележим с $Z(\hat{x})$ / в $Z(\hat{x})$ участва по един представител за всяко ребро/.

Теорема 33. Ако $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, то $Z(\hat{x}) \in B(U(\hat{x},\Omega))$.

Доказателство. 1/ Ако $z \in Z(\hat{x})$ е възможно направление по реброто ℓ излизащо от $\hat{x}$, то $A_\ell z = \theta$ и

/2.3/ $$\operatorname{rank} A_\ell = n-1$$

т.е. $z \in \Lambda = \{u / A_\ell u = \theta\}$. Но от /2.3/ следва $\Lambda \in \vec{U}(\hat{x}, \Omega)$.

2/ Ако $\bar{u} \in \Lambda \in \vec{U}(\hat{x},\Omega)$, понеже $\Lambda = \{u / A_\Lambda u = \theta\}$ и $\operatorname{rank} A_\Lambda = n-1$, то $\bar{u}$ поражда ребро на многостена излизащо от $\hat{x}$ т.е. $\bar{u} \in \operatorname{ray} Z(\hat{x})$.

Изложеното по-горе може да обединим в следните твърдения:

1/ $\hat{\Omega} \neq \emptyset$, ако и само ако $\operatorname{rank} A = n$

2/ $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, ако и само ако $\operatorname{rank} A_{\hat{x}} = n$

3/ $\hat{\Omega}$ съдържа краен брой точки

4/ Ребрата на Ω са краен брой

5/ $V(\Omega)$ е многостенен конус

6/ $V(\Omega)$ е заострен, ако и само ако $\operatorname{rank} A = n$

7/ $\vec{V}(\Omega)$ съдържа краен брой елементи

8/ $U(x, \Omega)$ е многостенен конус за всяко $x \in \Omega$, следователно е затворен

9/ $U(x, \Omega)$ е заострен, ако и само ако $x \in \hat{\Omega}$

10/ $Z(\hat{x}) \in \mathcal{B}(U(\hat{x},\Omega))$

Теорема 34. Ако Ω е многостен и $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, то $\langle a,x\rangle \equiv \langle a,\hat{x}\rangle$ в Ω, ако и само ако $\langle a,z\rangle \equiv 0$ в $Z(\hat{x})$.

Доказателство. 1/ Ако $\langle a,x\rangle \equiv \langle a,\hat{x}\rangle$ в Ω, то $\langle a,x-\hat{x}\rangle = 0$ за всяко $x \in \Omega$ т.е. $\langle a,u\rangle \equiv 0$ в $U(\hat{x},\Omega)$. Но $Z(\hat{x}) \subset U(\hat{x},\Omega)$, следователно $\langle a,z\rangle \equiv 0$ в $Z(\hat{x})$.

2/ Ако $\langle a,z\rangle \equiv 0$ в $Z(\hat{x})$, понеже $Z(\hat{x}) \in \mathcal{B}(U(\hat{x},\Omega))$, то $\langle a,u\rangle \equiv 0$ в $U(\hat{x},\Omega)$. Но за всяко $x \in \Omega$ имаме $x-\hat{x} \in U(\hat{x},\Omega)$. Следователно $\langle a,x-\hat{x}\rangle \equiv 0$ в Ω т.е. $\langle a,x\rangle \equiv \langle a,\hat{x}\rangle$ в Ω.

Теорема 35. Ако Ω е многостен и $\langle a,x\rangle < 0$ в Ω, то съществува $\delta > 0$ такова, че $\langle a,x\rangle \leqq -\delta$ в Ω.

Твърдението следва от това, че ако една линейна функция е ограничена отгоре в многостен, тя достига супремума си.

Теорема 36. Ако Ω е многостен и $L': \langle a,x\rangle = \alpha$ е опорна хиперравнина за Ω /$\langle a,x\rangle \leqq \alpha$ в Ω/, а $L'': \langle b,x\rangle = \beta$ е опорна хиперравнина за $\Omega \cap L'$ /$\langle b,x\rangle \leqq \beta$ в $\Omega \cap L'$/, то съществува $\delta > 0$ такова, че хиперравнината

$$L: \langle a+\varepsilon b, x\rangle = \alpha + \varepsilon\beta = \gamma$$

е опорна за Ω за всяко $0 < \varepsilon \leqq \delta$.

Доказателство. Очевидно L е опорна за $\Omega \cap L'$ при всяко $\varepsilon > 0$. Означаваме с $\hat{\Omega}'_1 = \hat{\Omega}_1 \setminus L$ и $\vec{V}' = \vec{V}(\Omega_1) \setminus L_0$ /$\Omega_1 = \Omega \cap T$, където T е допълнително подпространство на $W(\Omega)$, $L_0: \langle a,x\rangle = 0$/ и избираме

$$\delta = \min\left(\min_{\hat{\Omega}'_1} \frac{\alpha - \langle a,\hat{x}\rangle}{|\langle b,\hat{x}\rangle - \beta|},\ \min_{\vec{V}'} \frac{-\langle a,\bar{v}\rangle}{|\langle b,\bar{v}\rangle|}\right)$$

Очевидно $\delta > 0$ /ако $\hat{\Omega}'_1 = \emptyset$ и $\vec{V}' = \emptyset$, то $\Omega \subset L'$ и δ може да бъде произволно положително число/. Нека $0 < \varepsilon \leqq \delta$. Тогава:

1/ Ако $x \in \Omega \cap L'$, то $\langle a+\varepsilon b, x\rangle = \langle a,x\rangle + \varepsilon\langle b,x\rangle = \alpha + \varepsilon\beta = \gamma$

2/ Ако $x \in \Omega \setminus L$, то x се представя във вида

$$x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \hat{x}_i + \sum_{j=1}^{z} \beta_j \bar{v}_j + \sum_{k=1}^{l} \gamma_k w_k$$

където

$$\hat{x}_i \in \hat{\Omega}_1,\quad \bar{v}_j \in \vec{V}(\Omega_1),\quad w_k \in W(\Omega)$$

$$\alpha_i > 0,\ i=\overline{1,s},\ \sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 1,\ \beta_j > 0,\ j=\overline{1,r},\ \gamma_k \in E_1,\ k=1,\ell$$

и $\langle a+\varepsilon b, x\rangle = \langle a+\varepsilon b, \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\hat{x}_i + \sum_{j=1}^{r}\beta_j\bar{v}_j + \sum_{k=1}^{\ell}\gamma_k w_k$

$$= \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\langle a,\hat{x}_i\rangle + \varepsilon\langle b,\hat{x}_i\rangle) + \sum_{j=1}^{r}\beta_j(\langle a,\bar{v}_j\rangle + \varepsilon\langle b,\bar{v}_j\rangle)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell}\gamma_k(\langle a,w_k\rangle + \varepsilon\langle b,w_k\rangle)$$

Но ако $\hat{x}_i \in \Omega\cap L$, то $\langle a,\hat{x}_i\rangle + \varepsilon\langle b,\hat{x}_i\rangle = \gamma$. Ако $\hat{x}_i \notin \Omega\cap L$, то

$$\langle a,\hat{x}_i\rangle + \varepsilon\langle b,\hat{x}_i\rangle \leqq \langle a,\hat{x}_i\rangle + \varepsilon|\langle b,\hat{x}_i\rangle - \beta| + \varepsilon\beta$$

$$\leqq \langle a,\hat{x}_i\rangle + \frac{\alpha - \langle a,\hat{x}_i\rangle}{|\langle b,\hat{x}_i\rangle - \beta|}|\langle b,\hat{x}_i\rangle - \beta| + \varepsilon\beta = \gamma$$

Ако $\bar{v}_j \parallel L'$, то $\langle a,\bar{v}_j\rangle = 0$ и $\langle b,\bar{v}_j\rangle \leqq 0$, ако $\bar{v}_j \nparallel L'$.
Следователно

$$\langle a,\bar{v}_j\rangle + \varepsilon\langle b,\bar{v}_j\rangle \leqq \langle a,\bar{v}_j\rangle + \varepsilon|\langle b,\bar{v}_j\rangle|$$

$$\leqq \langle a,\bar{v}_j\rangle - \frac{\langle a,\bar{v}_j\rangle}{|\langle b,\bar{v}_j\rangle|}|\langle b,\bar{v}_j\rangle| = 0$$

т.е. L е опорна хиперравнина за Ω.

Теорема 37. Ако Ω е многостен, $L': \langle a,x\rangle = \alpha$ е негова опорна хиперравнина / $\langle a,x\rangle \leqq \alpha$ в Ω / и $z \perp (L\cap\Omega) - x_0$ / $x_0 \in L\cap\Omega$ /, то съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $0 < \varepsilon \leqq \delta$ хиперравнината $L: \langle a+\varepsilon z, x\rangle = \alpha + \varepsilon\langle z, x_0\rangle$ е също опорна за Ω и $L\cap\Omega = L'\cap\Omega$.

Доказателство. Ако $z \perp (\Omega\cap L) - x_0$, то $\langle z, x - x_0\rangle = 0$ за всяко $x \in \Omega\cap L$ т.е. $\langle z, x\rangle = \langle z, x_0\rangle$ за $x \in \Omega\cap L'$. Следователно хиперравнината $L'': \langle z, x\rangle = \langle z, x_0\rangle$ е опорна за $\Omega\cap L'$ и от теорема 36 следва, че съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $0 < \varepsilon \leqq \delta$ хиперравнината $L: \langle a+\varepsilon z, x\rangle = \alpha + \varepsilon\langle z, x_0\rangle$ е опорна за Ω.

Г Л А В А II

ХИПЕРБОЛИЧНО /ДРОБНО-ЛИНЕЙНО/ ОПТИМИРАНЕ

Тази глава е посветена на свойствата и методите за решаване на задачата на хиперболичното /дробно-линейното/ оптимиране

$$\sup\left\{H(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\,/\,x\in\Omega\right\},$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са афинни функции, а Ω е многостен.

Хиперболичните оптимизационни задачи /за краткост ще ги означаваме с ХЗ/ имат широко приложение и тази е причината за трайния интерес към тях от страна на математици, икономисти и инженери. Още през 1956 г. Isbell и Marlow /[28]/ стигат до ХЗ в една задача от теория на игрите, свързана с военното дело. Само за периода 1960-1976 г., както се вижда от библиографията на Stancu-Manasian /[35]/, са излезли 74 работи посветени на методите за решаване на ХЗ. Редица статии и книги свързани с тази задача бяха публикувани и в последните 5 години /[1,2,4,9,10,15,23, 33]/.

Ще се спрем накратко на методите за решаване на ХЗ. По-подробен обзор е даден в §2. Най-общо можем да ги разделим на три групи:

1/ Методи, които свеждат решаването на ХЗ до решаване на еквивалентна /в известен смисъл/ задача на линейното оптимиране /[7,13,22]/;

2/ Параметрични методи, които решават ХЗ с помощта на поредица от линейни оптимизационни задачи /[3,21,25,27,28]/;

3/ Методи, които решават ХЗ директно с помощта на симплексна процедура /[1,2,4,9,10,11,14,15,17,23,29,31,32,36]/.

Хиперболичната задача се решава сравнително просто със всеки от тези методи, когато

/1/ $Q(x)>0$ /или $Q(x)<0$ / в Ω и Ω е компактно

По тази причина повечето от алгоритмите /[1,3,9,15,21,22, 25,27,28,29,36]/ налагат тези условия или поне първото от тях /[4,10,17]/.

Методите от първата група /т.1, § 2/ линеаризират ХЗ чрез подходяща трансформация. Исторически първи Charnes и Cooper /[22]/ предлагат този метод през 1962 г./описан също в [1]/ за случая, когато са изпълнени условията /1/. По-късно Клевачев /[7]/ в 1968 г. и авторът /[13]/ в 1972 г. дават алгоритми само при изискването знаменателят $Q(x)$ да не сменя знака си в Ω. Алгоритмът предложен от Клевачев не винаги води до вярно решение на задачата, когато Ω е неограничено. В т.1 на § 2 е дадена трансформацията за линеаризиране на ХЗ и е описан накратко алгоритма на Клевачев, заедно с един числен пример илюстриращ посочения дефект. Алгоритмът на автора е описан в § 6.

В параметричните методи /т.2, § 2/ се използват два подхода: ХЗ се решава с помощта на параметрична задача на линейното оптимиране /[3,25,27]/ или чрез последователност от задачи на линейното оптимиране, в които целевата функция е различна /[21, 28]/. И в двата случая, предложените методи решават ХЗ успешно, само когато Ω е ограничено. Двата подхода са описани накратко съответно в т.2.1 и т.2.2 на § 2. В § 7 са изложени по един алгоритъм от всеки подход, които решават ХЗ и при неограничено Ω и се дискутира неефективността на алгоритмите от тази група. Тя се състои главно в това, че в хода на изчислителния процес се налага нееднократно минаване през едни и същи върхове на Ω. Този недостатък не може да бъде избегнат поради самото естество на подходите. Дори когато Ω е ограничено, той може да се прояви при втория подход.

Методите от третата група /т.3 § 2/ решават ХЗ посредством прилагане на симплексна процедура към ХЗ. Минава се по върхове на Ω чрез преходи по свързващи ги ребра, по които функцията $H(x)$ нараства, т.е. от даден връх x_0 по ребро с направление s, за което

/2/ $$\langle \nabla H(x_0), s \rangle > 0$$

Алгоритмите от този вид почти се покриват и се различават само по някои числени особености. С изключение на алгоритма на Белых и Гавурин /[2]/ и този на автора /[11,14,23]/, останалите алгоритми не винаги намират решението на ХЗ в случая, когато Ω е неограничено. Това е отбелязано и от Martos /[31,32]/ и покъсно от Mond /[33]/. В т.3 на §2 е описана структурата на алгоритмите от тази група и се дискутира посочения им недостатък. В края на т.3, §2 е дадено кратко описание на алгоритма на Белых и Гавурин, публикуван през 1981 г. /[2]/, който решава успешно ХЗ, но при условие, че $P(x)$ и $Q(x)$ не се анулират едновременно в Ω, $Q(x)$ не сменя знака си в Ω и не е тъждествено равен на нула в Ω. Този алгоритъм включва решаването на няколко линейни оптимизационни задачи, решаване на ХЗ с компактна област и решаване на ХЗ, в която областта може да бъде и неограничена. Между тези задачи няма непосредствена връзка, така че информацията от една задача /има се предвид информацията от съответните симплексни таблици/ не може да се използва от друга задача и всяка трябва да се решава с отделен алгоритъм, което силно снижава ефективността на алгоритма като цяло.

Причината поради която алгоритмите от третата група не винаги достигат до решение на ХЗ при неограничено Ω и причината, поради която алгоритма на Белых-Гавурин е така сложен в изчислителен аспект, се дължи на това, че за разлика от линейните оптимизационни задачи, при ХЗ :

1/ Не всеки връх на многостена е свързан с оптимален връх чрез монотонна верига от ребра т.е. чрез непрекъсната последователност от ребра, по които функцията расте;

2/ Не всяка монотонна редица от ребра води до оптимален връх.

Това налага избора на началния връх и на направлението s измежду решенията на /2/ да се прави по подходящ начин. Условията за това бяха изведени от автора през 1973 г. и въз основа на тях беше построен алгоритъм за решаване на ХЗ в общия случай. Алгоритмът е описан в [11] и по него е разработена програма / [14] / за решаване на ХЗ, която е основна част от "Пакет приложни програми по операционни изследвания" за компютрите от серията ЕС, предаден в края на 1975 г. на Централната програмна библиотека /ЦППБ/. Теоретичните резултати на които се гради алгоритма и самия алгоритъм, които са обект на настоящата глава, са отразени в [11] и са докладвани през 1976 г. в Будапеща на IX-тия международен симпозиум по математическо оптимиране /в библиографията на Stancu-Manasian [24] този доклад е под № 98/, но са дадени за публикуване едва през 1982 г. / [23] /.

Накратко тази глава има следната структура:

В §1 се прави кратка геометрична интерпретация на ХЗ в двумерния случай, с цел да се улесни изложението в §2 - обзор на методите за решаване на ХЗ, чиито идеи, преимущества и недостатъци са илюстрирани геометрично. В §3 са описани някои свойства на хиперболичната функция $H(x)$ върху изпъкнали множества и в частност върху многостени, въз основа на които в §4 се извеждат някои основни свойства на ХЗ и две симплексни процедури за решаването й. В §5 е описан числен метод за решаване на ХЗ, използващ тези симплексни процедури. §6 е посветен на един алгоритъм на автора /[13]/, който линеаризира ХЗ, а §7 - на два параметрични метода на автора. В §8 са разгледани две насоки на приложение на алгоритмите на хиперболичното оптимиране - използването им при стесняване на класа задачи и при задачи с по-сложна структура.

§1. ГЕОМЕТРИЧНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЗАДАЧА

Подобно на линейните оптимизационни задачи, ХЗ има удобна геометрична интерпретация, която ще дадем при предположението, че векторите p и q са неколинеарни и $Q(x) \not\equiv const$ в Ω. Тук

$$P(x) = p_0 + \langle p, x \rangle \quad , \quad Q(x) = q_0 + \langle q, x \rangle$$

Функцията $H(x)$ има хиперповърхнини на ниво

$$H_\lambda = \{ x \,/\, H(x) = \lambda \},$$

които се съдържат в хиперравнините

$$L_\lambda = \{ x \,/\, P(x) - \lambda Q(x) = 0 \}$$

или по-точно $H_\lambda = L_\lambda \setminus Q_0$, където $Q_0 = \{ x \,/\, Q(x) = 0 \}$. Можем да считаме, че хиперповърхнините на ниво на $H(x)$ съвпадат със снопа хиперравнини

$$H(\lambda): \; P(x) - \lambda Q(x) = 0 \quad , \quad \lambda \in E^1$$

Геометричните илюстрации ще правим в двумерния случай, т.е. когато $\Omega \subset E^2$ и

$$H(x) = \frac{p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2}{q_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2} = \frac{p_0 + \langle p, x \rangle}{q_0 + \langle q, x \rangle}$$

В случая имаме линии на ниво на функцията $H(x)$ и те са правите от снопа определен с

$$\ell_p: \; p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0$$

$$\ell_q: \; q_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 = 0$$

Произволна права

$$\ell(\lambda): \; (p_0 - \lambda q_0) + (p_1 - \lambda q_1) x_1 + (p_2 - \lambda q_2) x_2 = 0$$

от снопа има ъглов коефициент

$$k(\lambda) = \frac{p_1 - \lambda q_1}{\lambda q_2 - p_2}$$

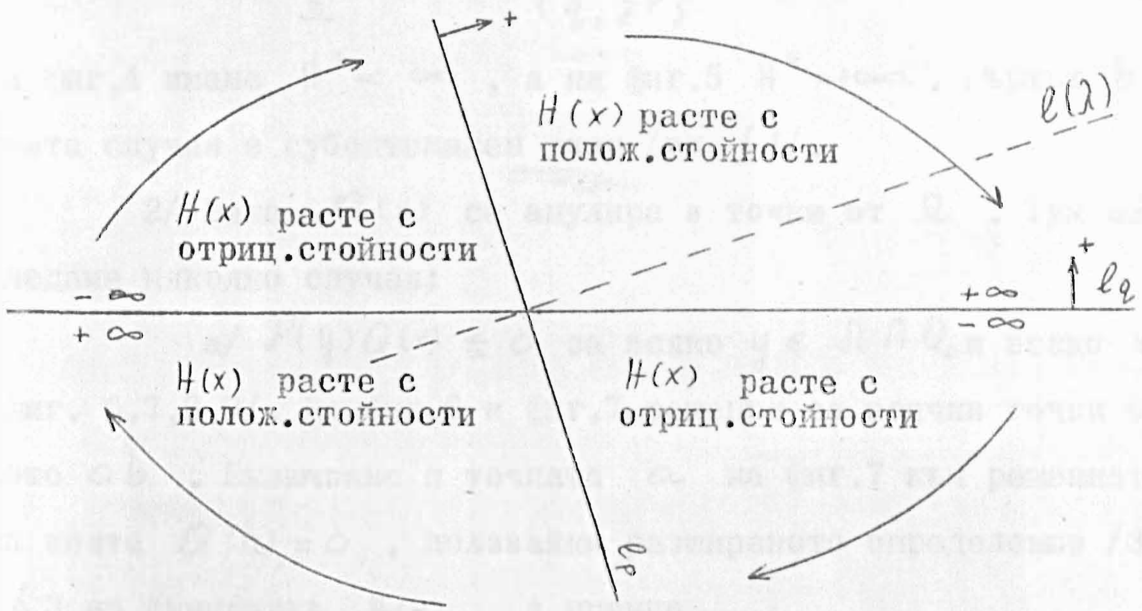
и той се изменя монотонно с растенето на λ т.е. на $H(x)$, понеже производната

$$\frac{dk(\lambda)}{d\lambda} = \frac{q_1 p_2 - p_1 q_2}{(\lambda q_2 - p_2)^2}$$

не сменя знака си. Така че при въртенето на правата $\ell(\lambda)$ в дадена посока около центъра на снопа, функцията $H(x)$ или намалява, или расте, в зависимост от $\mathrm{sign}(q_1p_2-p_1q_2)$.

На фигурите по-долу със стрелка и знак плюс са означени посоките на нормалните вектори p и q на правите ℓ_p и ℓ_q т.е. посоката, в която съответно нарастват функциите $P(x)$ и $Q(x)$. Линиите на нива са отбелязани с пунктирани линии.

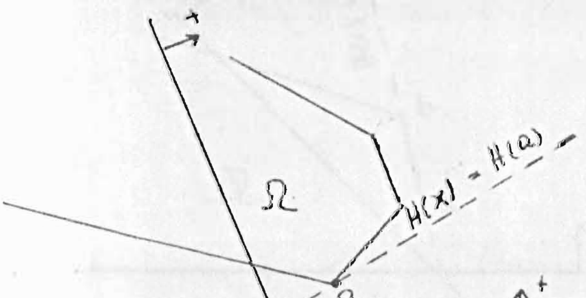
На фиг.1 е дадена посоката на растене на $H(x)$ при движение на правата $\ell(\lambda)$ около центъра на снопа в посока на часовниковата стрелка. Има симетрия спрямо центъра на снопа, затова илюстрациите по-долу в повечето случаи са дадени при $Q(x) \geqq 0$ в Ω.

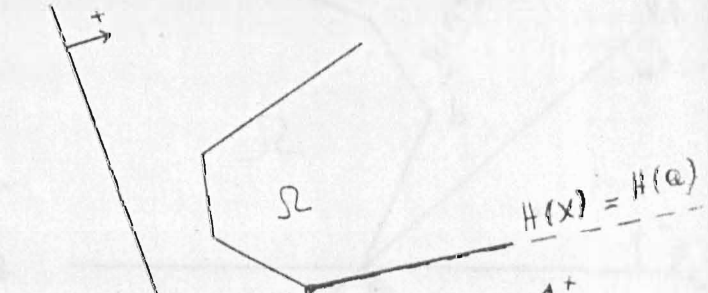


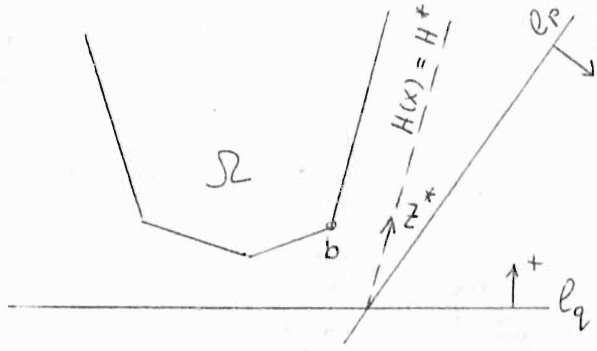
фиг. 1

Ще онагледим графично някои по-интересни случаи за ХЗ.

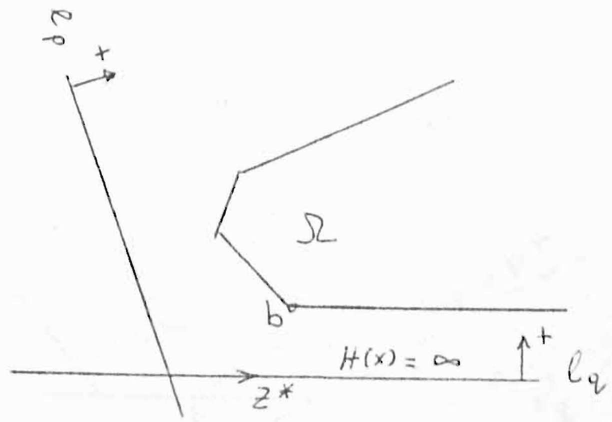
1/ Нека $Q(x) \neq 0$ в Ω /фиг. 2,3,4,5/. На фиг.2 ХЗ има единствено решение - върха a. На фиг.3 решения са всички точки от неограниченото ребро с начало точката a - в случая задачата







фиг.4



фиг.5

има и асимптотично решение. И на двете фигури $\sup\{H(x)/x\in\Omega\} = H(a)$.
На фиг. 4 и фиг.5 ХЗ има само асимптотично решение – това е направлението z^* на неограниченото ребро с начало върха b и

$$\sup_{\Omega} H(x) = \frac{\langle p, z^*\rangle}{\langle q, z^*\rangle} = H^*$$

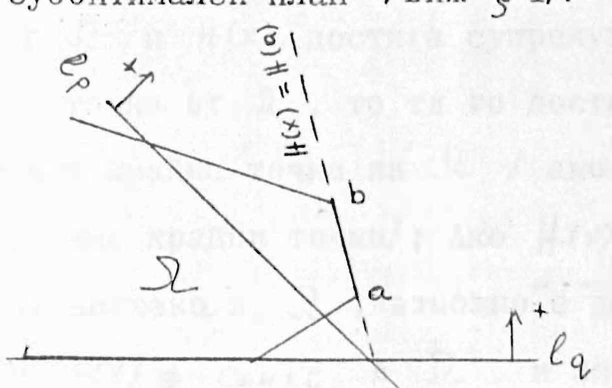
На фиг.4 имаме $H^* < \infty$, а на фиг.5 $H^* = +\infty$. Върхът b и в двата случая е субоптимален план /виж §4/.

2/ Нека $Q(x)$ се анулира в точки от Ω. Тук ще разгледаме няколко случая:

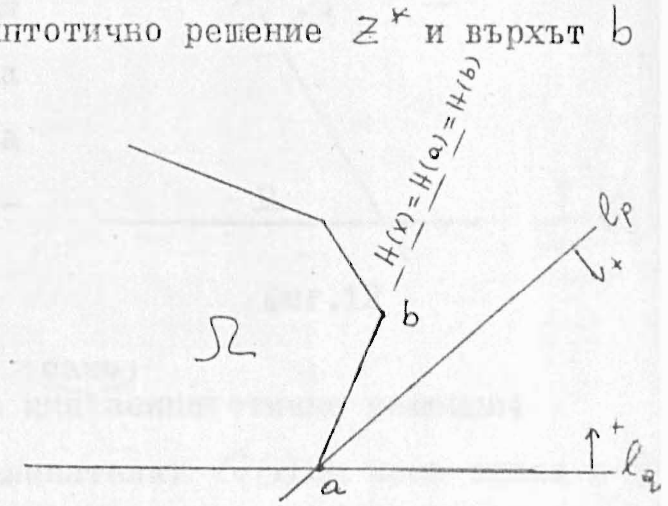
а/ $P(y)Q(x) \leqq 0$ за всяко $y\in\Omega\cap Q_0$ и всяко $x\in\Omega$ /фиг. 6,7,8,9/. На фиг.6 и фиг.7 решения са всички точки от реброто ab. Включваме и точката a на фиг.7 към решенията на ХЗ, за която $Q(a)=0$, ползвайки разширеното определение /3.1/ от §3 на функцията $H(x)$, а именно

$$H(x) = \varlimsup_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega\setminus Q_0}} H(y), \text{ ако } Q(x)=0 \text{ и } \Omega\setminus Q_0 \neq \emptyset.$$

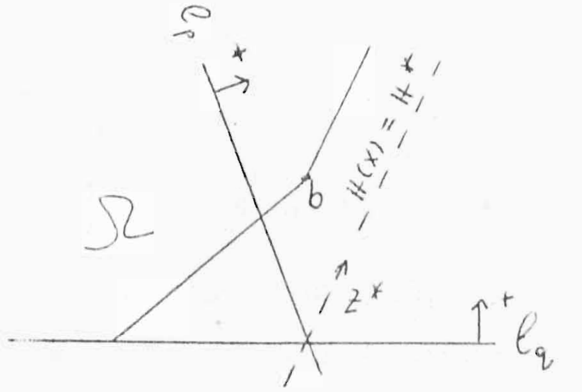
На фиг.8 и фиг.9 ХЗ има само асимптотично решение z^* и върхът b е субоптимален план /виж §4/.



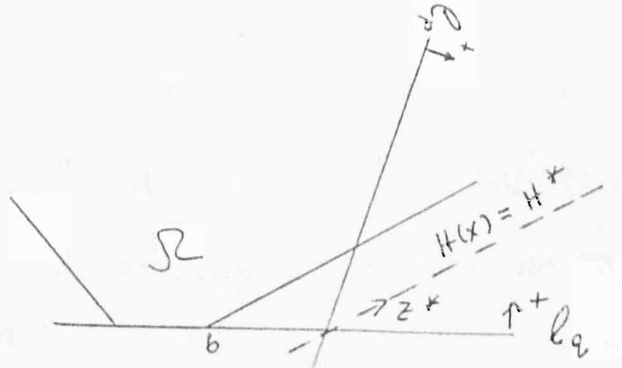
фиг. 6



фиг. 7



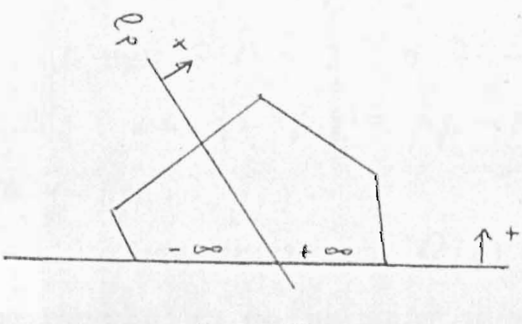
фиг.8



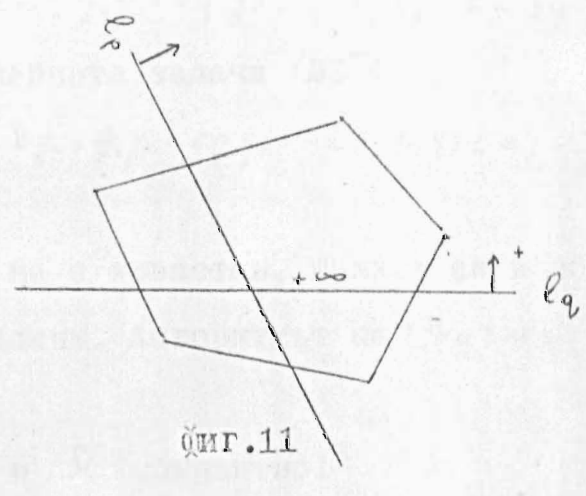
фиг.9

б/ $P(y).Q(x)>0$ за някое $y \in \Omega \cap Q_0$ и $x \in \Omega \setminus Q_0$ /фиг. 10,11/. Сега $\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = \infty$, дори ако Ω е компактно и се достига във всички точки $x \in \Omega \cap Q_0$, за които $P(x) \geqq 0$.

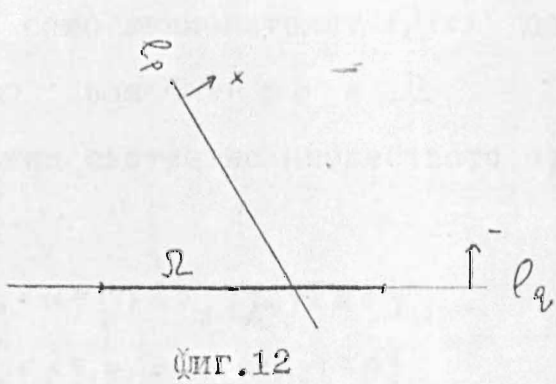
в/ $\Omega \subset Q_0$ /фиг.12/. Функцията $H(x)$ е неопределена навсякъде в Ω или, ако се възползваме от доопределянето й в /3.1/, то $H(x) = -\infty$ за всяко $x \in \Omega$.



фиг.10



фиг.11



фиг.12

В E^2 геометричните разглеждания илюстрират редица основни свойства на ХЗ, които тук са почти очевидни: Ако $Q(x)$ не сменя знака си в Ω и $H(x)$ достига супремума си в точка от Ω, то тя го достига и в крайна точка на Ω / ако Ω има крайни точки/; Ако $H(x)$ е ограничена в Ω, възможно е да има само асимптотично решение; Ако $H(x) \not\equiv const$ в Ω и знаменателят $Q(x)$ си мени знака в Ω, то $\sup\{H(x)/x\in\Omega\}=+\infty$; ХФ може да има краен супремум и в случая, когато $\Omega\cap Q_0\neq\emptyset$, но $P(y)\,Q(x)\leqq 0$ за всяко $y\in\Omega\cap Q_0$ и всяко $x\in\Omega$ /предполагаме, че $Q(x)$ не сменя знака си в Ω /.

§2. ОБЗОР НА МЕТОДИТЕ ЗА РЕШАВАНЕ НА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЗАДАЧА

В този параграф, при обзора на методите за решаване на ХЗ, ще използваме терминологията дадена в началото на §4.

1. Линеаризация на ХЗ.

Нека в ХЗ $P(x)=p_0+\langle p,x\rangle$, $Q(x)=q_0+\langle q,x\rangle$ и $\Omega=\{x\in E^n/Ax=b,\ x\geqq 0\}$. Методите, които свеждат решаването на ХЗ до решаване на линейна оптимизационна задача /[7,13,22]/, използват трансформацията

$$y_0|Q(x)|=1,\quad y_i|Q(x)|=x_i,\quad i=\overline{1,n},$$

която при $Q(x)>0$ в Ω води до линейната задача /ЛЗ$^+$/

/2.1/ $$\max\{L^+(y_0,y)=p_0y_0+\langle p,y\rangle/Ay=by_0,\ q_0y_0+\langle q,y\rangle=1,\ (y_0,y)\geqq 0\},$$

а при $Q(x)<0$ в Ω – до линейната задача /ЛЗ$^-$/

/2.2/ $$\max\{L^+(y_0,y)=-p_0y_0-\langle p,y\rangle/Ay=by_0,\ q_0y_0+\langle q,y\rangle=-1,\ (y_0,y)\geqq 0\}.$$

Тук $y=(y_1,\dots,y_n)$.

Ако знакът на $Q(x)$ в Ω не е известен, налага се в общия случай да се решават и двете задачи. Алгоритмът на Charnes и Cooper /[22]/ изисква

/2.3/ $$Q(x)>0 \text{ в } \Omega \text{ и } \Omega \text{ компактно.}$$

Алгоритмите [7,13] изискват само знаменателят $Q(x)$ да не сменя знака си в Ω т.е. $Q(x)\geqq 0$ или $Q(x)\leqq 0$ в Ω .

По-долу с Ω^+ и Ω^- ще бележим съответно множеството от точки в /2.1/ и /2.2/ :

$$\Omega^+=\{(y_0,y)\in E^{n+1}/Ay=by_0,\ q_0y_0+\langle q,y\rangle=1,\ (y_0,y)\geqq 0\}$$

$$\Omega^-=\{(y_0,y)\in E^{n+1}/Ay=by_0,\ q_0y_0+\langle q,y\rangle=-1,\ (y_0,y)\geqq 0\}$$

Алгоритмът на Клевачев /[7]/ се състои в следното:

I. Решават се задачите ЛЗ$^+$ и ЛЗ$^-$. Ако Ω^+ и Ω^- са празни или се състоят само от точки $(0,y)$, то ХЗ няма решение, защото или $Q(x)\equiv 0$ в Ω, или $\Omega=\emptyset$. В противен случай минаваме в II.

II. Пресмята се

$$L^*=\max\left(\max_{\Omega^+} L^+(y_0,y),\ \max_{\Omega^-} L^-(y_0,y)\right)$$

като приемаме $\max\limits_{\Omega^+} L^+(y_0,y)=-\infty$ $/\max\limits_{\Omega^-} L^-(y_0,y)=-\infty$ /, ако $\Omega^+=\emptyset$ / $\Omega^-=\emptyset$ / или се състои само от точки $(0,y)$. Нека за определеност $L^*=\max\limits_{\Omega^+} L^+(y_0,y)$. Възможни са случаите:

1/ $L^*=\infty$ – $H(x)$ е неограничена отгоре в Ω.

2/ $L^*<\infty$ и опорен оптимален план е $y^*=(y_0^*,y^*)$. Тогава:

а/ Ако $y_0^*>0$, то $x^*=\frac{1}{y_0^*}y^*$ е решение на ХЗ и $\sup\{H(x)/x\in\Omega\}=H(x^*)=L^*$.

б/ Ако $y_0^*=0$, то $H(x)$ е ограничена отгоре в Ω със супремум равен на L^*, но ХЗ има само асимптотично решение y^*.

Без да се спираме на някои числени пропуски /например, авторът не указва как да се установи в I условието, че Ω^+ и Ω^- не съдържат точки (y_0,y) с $y_0>0$/, ще посочим само един основен дефект в т.2б/ на II. Казаното там е вярно само в случай, че всички опорни оптимални планове на ЛЗ$^+$ имат първа компонента $y_0=0$ /теореми 17, 18/. Това налага допълване на алгоритма, иначе резултата не винаги би бил верен. Ще поясним. Когато Ω е неограничено на всеки опорен асимптотичен план на Ω съответства опорен план /или опорен асимптотичен план/ $(0,y)\in\Omega^+$ /теореми 19, 20 /. Ако $H(x)$ достига супремума си в точките на някое неограничено ребро на Ω, то на върха /оптималния опорен план/ на това ребро ще съответства в Ω^+ опорен план с $y_0>0$ /теорема 17 /, а на оптималния опорен асимптотичен план може да съответства опорен план на Ω^+ с $y_0=0$ /теорема 19 /. Така че, ако следвайки алгоритма на Клевачев попаднем в оптимален опорен план с $y_0>0$, ще заключим, че ХЗ има решение /т.2а/ на II/, а ако попаднем в оптимален опорен план с $y_0 = 0$, ще заключим, че ХЗ има само асимптотично решение /т.2б/ на II/.

На фиг.1 е илюстрирано казаното за конкретната задача

$$\sup\left\{ H(x) = \frac{x_1 + 2x_2 - 2}{2x_1 + x_2 + 1} \,/\, x \in \Omega \right\}$$

където Ω се задава с ограниченията

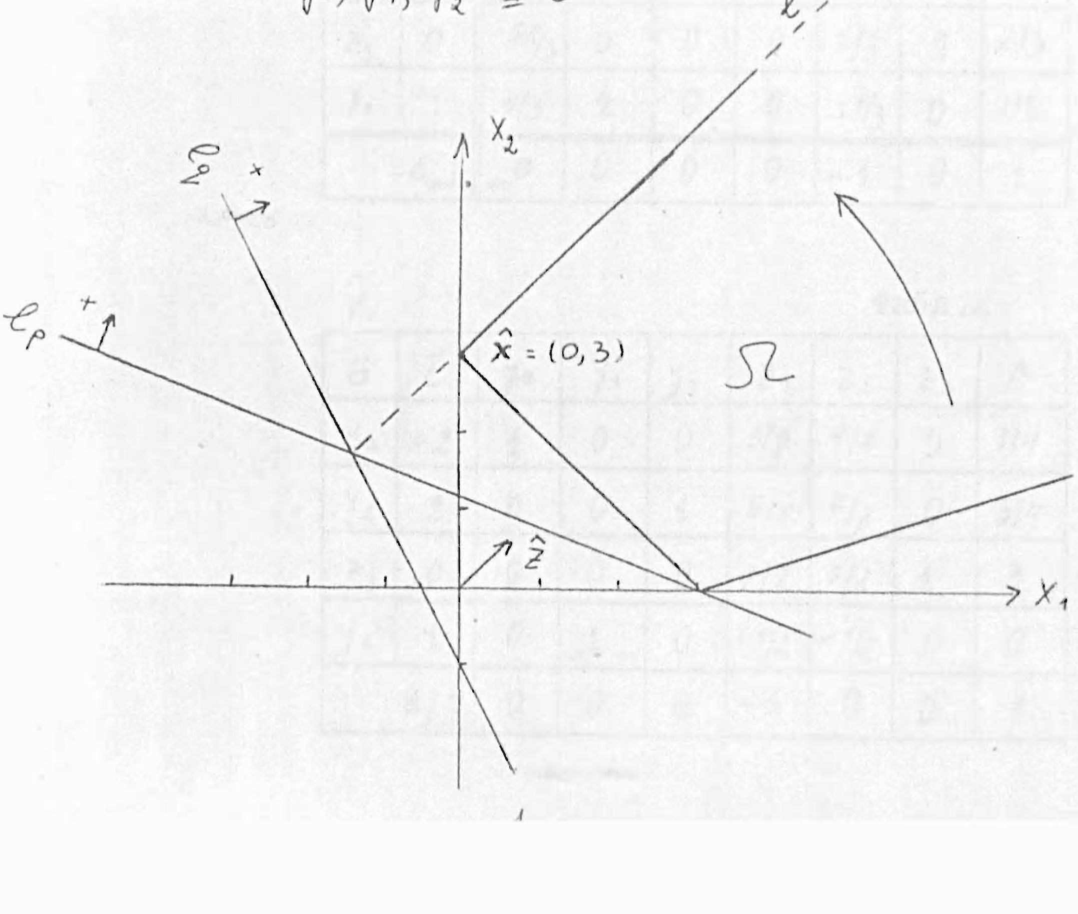
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leqq 3 \\ x_1 - 3x_2 &\leqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

За тази ХЗ $\Omega^- = \emptyset$ $/ Q(x) > 0$ в Ω /, а съответната ЛЗ$^+$ е

$$\max\left\{ L^+(y_0, y) = -2y_0 + y_1 + 2y_2 \,/\, (y_0, y) \in \Omega^+ \right\}$$

където Ω^+ се задава с условията

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geqq 3y_0 \\ -y_1 + y_2 &\leqq 3y_0 \\ y_1 - 3y_2 &\leqq 3y_0 \\ y_0 + 2y_1 + y_2 &= 1 \\ y_0, y_1, y_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$



От фиг.1 се вижда, че решения на дадената ХЗ са всички точки от неограниченото ребро с връх $\hat{x} = (0,3)$ /линия на ниво ℓ за $H(x)$ /. На оптималния план $\hat{x} \in \Omega$ съответства опорния план $\hat{Y} = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}) \in \Omega^+$ с $\hat{y}_0 = \frac{1}{4} > 0$, а на оптималния асимптотичен план $\hat{z} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - опорния план $Y' = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \Omega^+$ с $y_0' = 0$.

Табл.1 е симплексната таблица /[13]/ на оптималния за ЛЗ$^+$ план Y' /всичките му оценки Δ_j в последния ред на таблицата са неположителни/ и

$$\max \{ L^+(y_0, y) / (y_0, y) \in \Omega^+ \} = L^+(Y') = 1 .$$

Съгласно т.2б/ на II, ХЗ има само асимптотично решение $\hat{z}$ и $\sup \{ H(x) / x \in \Omega \} = 1$. Табл.2 е симплексната таблица на плана $\hat{Y}$, който също е оптимален за ЛЗ$^+$ - $L^+(\hat{Y}) = 1$. Съгласно т.2а/ на II, ХЗ има решение - точката $\hat{x}$. Така, в зависимост от хода на изчислителния процес, можем да достигнем до различни изводи за решението на ХЗ. В таблиците z_1, z_2, z_3 са допълнителни променливи.

Y' табл.1

Б	$\tilde{c}$	y_0	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3	β
z_1	0	8/3	0	0	1	1/3	0	2/3
y_2	2	-5/3	0	1	0	2/3	0	1/3
z_3	0	-28/3	0	0	0	7/3	1	2/3
y_1	1	4/3	1	0	0	-1/3	0	1/3
	Δ_j:	0	0	0	0	-1	0	1

$\hat{Y}$ табл.2

Б	$\tilde{c}$	y_0	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3	β
y_0	-2	1	0	0	3/8	1/8	0	1/4
y_2	2	0	0	1	5/8	7/8	0	3/4
z_3	0	0	0	0	7/2	7/2	1	3
y_1	1	0	1	0	-1/2	-1/2	0	0
	Δ_j:	0	0	0	-1	0	0	1

2. Параметрични методи

Втората група алгоритми /[3,21,25,27,28]/, които решават ХЗ с помощта на поредица от линейни задачи, ползват идеята, че при известни условия, супремумът на $H(x)$ в Ω е равен на минималното $\lambda \in E^1$, за което

$$\max\{P(x) - \lambda Q(x) / x \in \Omega\} = 0.$$

Подходите тук са два - решаване на параметрична линейна оптимизационна задача с целева функция

$$L(x, \lambda) = P(x) - \lambda Q(x)$$

/ λ - параметър/ или на последователност от линейни задачи със целеви функции

$$L_k(x) = P(x) - \lambda_k Q(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

И в двата случая се предполага, че множеството от планове Ω е компактно и $Q(x) \neq 0$ в него т.е., че са изпълнени условията /2.3/. Затова, след описанието на всеки от алгоритмите, ще дадем подобен алгоритъм, който не изисква такива ограничения.

2.1 В [3,27,25] се решава линейната параметрична задача

$$\max\{L(x,\lambda) = P(x) - \lambda Q(x) / x \in \Omega\}.$$

Проследява се изменението на параметъра λ от $-\infty$ да $+\infty$. Нека след краен брой итерации сме стигнали в опорен план $\hat{x}$, който е оптимален за всяко $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$. Пресмята се

$$\lambda^* = \frac{P(\hat{x})}{Q(\hat{x})}$$

и ако $\lambda^* \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, то $\hat{x}$ е решение на ХЗ и

$$\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = H(\hat{x}) = \lambda^*$$

В противен случай, се продължава параметричния анализ /[3]/. Тъй като Ω е компактно, след краен брой стъпки се стига до решение на ХЗ. В двумерния случай това може да бъде онагледено, каїто си представим права, движеща се около изпъкнал многоъгълник докато съвпадне с права от снопа определен с

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ Q(x) &= 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad P(x) - \lambda Q(x) = 0 .$$

В §7 даваме един подобен вариант на този тип алгоритми, който обаче не изисква Ω да бъде ограничено.

2.2. В [21,28] се предлага ХЗ да бъде решена с помощта на редица от линейни оптимизационни задачи

/2.4/ $\max\{L_k(x) = P(x) - \lambda_k Q(x) / x \in \Omega\}$, $k = 1, 2, \ldots$

С x_k^* ще означаваме оптимален план на текущата задача /2.4/. На първата итерация се избира

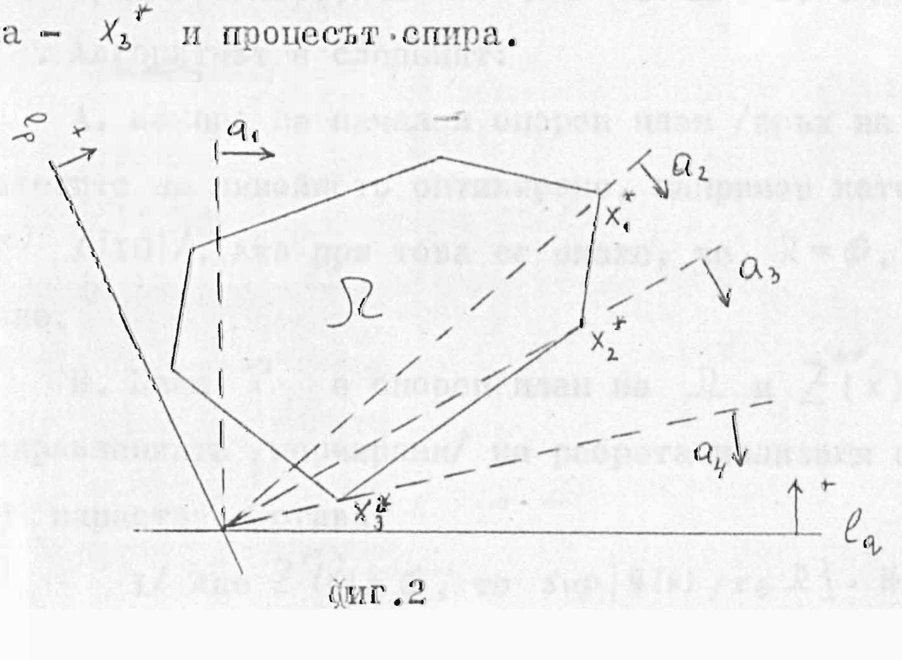
$$\lambda_1 = \frac{\langle p, q\rangle}{\langle q, q\rangle}$$

т.е. градиентите на функциите $L_1(x)$ и $Q(x)$ да бъдат перпендикулярни помежду си – целѝ се евентуално намаляване на броя на итерациите. На всяка следваща итерация се полага $\lambda_k = H(x_{k-1}^*)$, $k = 2, 3, \ldots$ т.е. решава се задачата

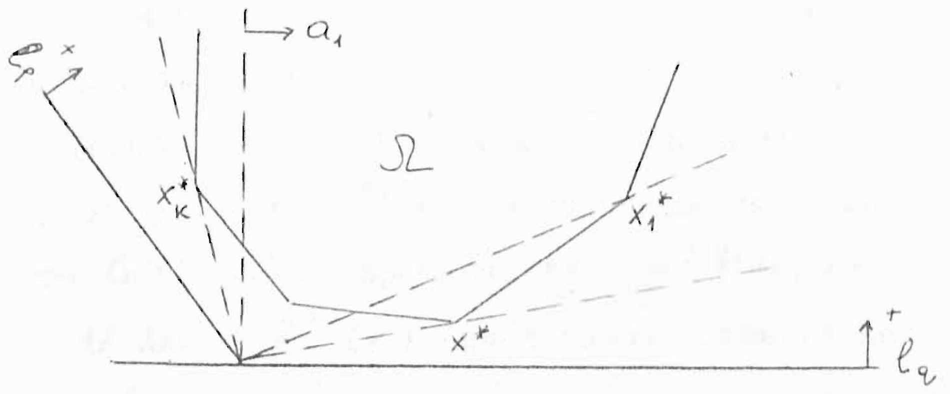
$$\max\{L_k(x) = P(x) - H(x_{k-1}^*) Q(x) / x \in \Omega\} \quad / \Omega \text{ компактно} /$$

Процесът спира, ако за някое $k > 1$ се получи $x_k^* = x_{k-1}^*$. Тогава x_k^* е решение на ХЗ.

На фиг.2 е дадена илюстрация в двумерния случай. Решението x_3^* се намира за 4 итерации. Градиентите на линейните целеви функции са съответно колинеарни с векторите a_1 $/a_1 \perp q/$, a_2, a_3, a_4. На третата и четвъртата итерации решение е една и съща точка – x_3^* и процесът спира.



фиг.2



Фиг.3

Не е трудно да се види, че този алгоритъм не върви, ако Ω е неограничено. На фиг.3 е даден случай, когато още на първата итерация се стига във върха x_1^* и се констатира, че $L_1(x) \to \infty$, а в действителност ХЗ има решение - върхът x^*. До същия резултат идваме и ако на някоя итерация попаднем във върха x_k^* и продължим по алгоритма с $\lambda_{k+1} = H(x_k^*)$. В §7 описваме един подобен вариант на този алгоритъм, който върви и при Ω неограничено.

3. Директни методи

Алгоритмите [1,2,4,9,10,11,14,15,17,23,29,31,32,36] прилагат симплексната процедура директно върху ХЗ. С изключение на [2,11,14,23], имаме по същество един и същ алгоритъм и след описанието му, ще дадем различията в отделните алгоритми, като ще покажем, че те в общия случай не решават поставената задача.

Предполага се, че $Q(x) \neq 0$ в Ω т.е. $Q(x) > 0$ /или $Q(x) < 0$/ в Ω. Алгоритмът е следният:

А. Намира се начален опорен план /връх на Ω/ по някой от методите на линейното оптимиране, например като се максимизира $P(x)$ /[10]/. Ако при това се окаже, че $\Omega = \emptyset$, то и ХЗ няма решение.

Б. Нека $\hat{x}$ е опорен план на Ω и $Z^{++}(\hat{x})$ е съвкупността от направленията /нормирани/ на ребрата излизащи от $\hat{x}$, по които $H(x)$ нараства. Тогава:

1/ Ако $Z^{++}(\hat{x}) = \emptyset$, то $\sup\{H(x) \,/\, x \in \Omega\} = H(\hat{x})$

2/ Ако $Z^{++}(\hat{x})$ се състои само от направления на ограничени ребра, то се прави преход по някое от тях до следващия връх $\hat{x}'$. Полага се $\hat{x} = \hat{x}'$ и се минава в 1/.

3/ Ако в $Z^{++}(\hat{x})$ има направление на неограничено ребро, по което $Q(x)$ не се променя, то $\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = +\infty$.

4/ Ако в $Z^{++}(\hat{x})$ няма направление на неограничено ребро, по което $Q(x)$ не се променя, то $H(x)$ е ограничена отгоре в Ω, но не достига супремума си. Авторите наричат супремума на $H(x)$ в този случай "асимптотичен максимум",

В [1,9,15,29,36] множеството Ω се предполага ограничено, така че алгоритмите обхващат само точките А и 1/,2/ от Б.

В [31,32] Martos дава отделно алгоритъм и за случая, когато Ω е неограничено. Там точките 3/ и 4/ на Б са заменени обаче със следното: ако $Z^{++}(\hat{x})$ съдържа направления на неограничени ребра, то $H(x)$ не достига супремума си. Следователно, алгоритма на Martos не различава случая, когато $H(x)$ расте неограничено в Ω, от случая когато $H(x)$ е ограничена в Ω, но не достига супремума си т.е. има само асимптотичен максимум.

В [4] за асимптотичен максимум в 4/ на Б се взема отношението

$$\bar{H} = \frac{\langle p, z^* \rangle}{\langle q, z^* \rangle} = \max\left\{\frac{\langle p, z \rangle}{\langle q, z \rangle},\ z \in Z^{++}(\hat{x}) \cap V(\Omega)\right\} \qquad /2.5/$$

/Напомняме, че $V(\Omega)$ е рецесивния конус на Ω /.

За авторите на [17,10] е ясно, че в общия случай, намерения по /2.5/ асимптотичен максимум $\bar{H} < \sup\{H(x) / x \in \Omega\} = H^*$. Но понеже те нямат аналитичен критерий кога $\bar{H} = H^*$, то се ограничават само с някои "препоръки" /по техен израз/ за търсене на асимптотичното решение:

б$_1$/ Ако $Z^{++}(\hat{x})$ съдържа направления на ограничени ребра, правим преход по някое от тях до следващия връх $\hat{x}'$ т.е. абстрахираме се от неограничените ребра и продължаваме симплекс процедурата. В [17] този преход се прави винаги – дори при $H(\hat{x}') = H(\hat{x})$ а в [10] – само ако $H(\hat{x}') > H(\hat{x})$, иначе се връщаме в $\hat{x}$.

$б_2$/ Ако условията от $б_1$/ не са изпълнени, то

$$\sup_{\Omega} H(x) = \max_{z \in Z^{++}(\hat{x})} \frac{\langle p, z \rangle}{\langle q, z \rangle} = \frac{\langle p, z^* \rangle}{\langle q, z^* \rangle}$$

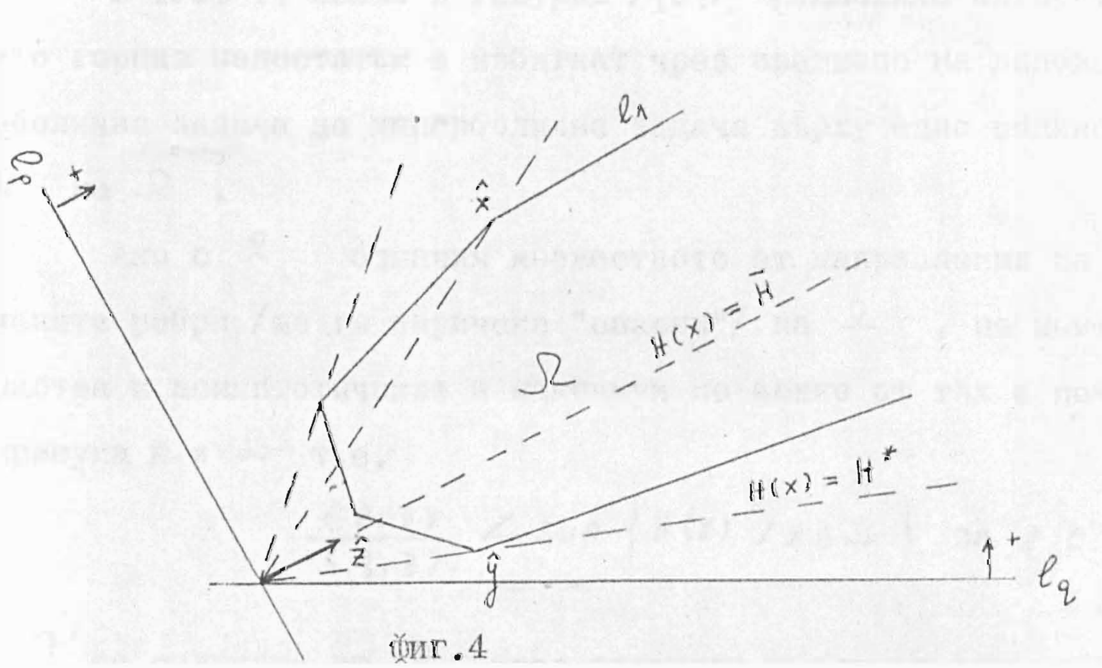
и z^* е асимптотично решение.

Без да се спираме на неефективността на тези препоръки, ще покажем само, че следвайки ги можем да достигнем до неверни изводи. На фиг.4 и фиг.5 са дадени два примера, в които от върха $\hat{x}$ излиза само едно ребро, по чието направление $\hat{z}$ $H(x)$ нараства – това е неограниченото ребро ℓ_1 т.е. $Z^{++}(\hat{x}) = \{\hat{z}\}$. Съгласно $б_2$/ ще заключим, че

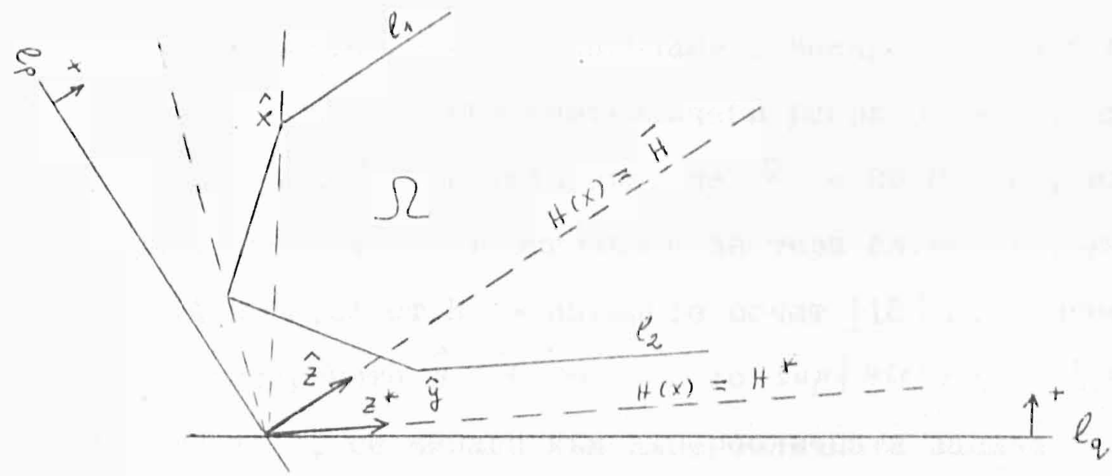
$$\sup_{\Omega} H(x) = \frac{\langle p, \hat{z} \rangle}{\langle q, \hat{z} \rangle} = \bar{H}$$

и $\hat{z}$ е асимптотично решение на ХЗ. В действителност, на фиг.4 ХЗ има за решение върха $\hat{y}$ и $H^* = H(\hat{y}) > \bar{H}$, а на фиг.5 ХЗ има субоптимален план $\hat{y}$ и асимптотично решение z^* , което е направление на неограниченото ребро ℓ_2 и

$$H^* = \frac{\langle p, z^* \rangle}{\langle q, z^* \rangle} > \bar{H} .$$



фиг.4



фиг.5

Общият недостатък на всички описани тук алгоритми се състои в това, че когато Ω е неограничено, те не винаги достигат до решението на ХЗ. Илюстрация са примерите на фиг.4 и фиг.5. Алгоритмите стават безсилни, винаги когато се попадне във връх $\hat{x}$ на Ω , от който ребрата по които $H(x)$ нараства са неограничени т.е. $Z^{++}(\hat{x})$ съдържа само неограничени ребра. Поради самата същност на симплексната процедура, излизането от такъв връх е невъзможно и критериите й водят до погрешни заключения. Този недостатък е отбелязан и от Martos в [31,32] и Mond в[33]. Последния дава и числен пример илюстриращ казаното.

В 1980 г. Белых и Гавурин /[2]/ предложиха алгоритъм, в който горния недостатък е избягнат чрез свеждане на дадената хиперболична задача до хиперболична задача върху едно подмножество Ω' на Ω .

Ако с R означим множеството от направления на неограничените ребра /ще ги наричаме "опасни"/ на Ω , по които $H(x)$ нараства и асимптотичният й максимум по всяко от тях е по-малък от супремума й в Ω т.е.

$$\frac{\langle p, z\rangle}{\langle q, z\rangle} < \sup\{H(x) / x \in \Omega\} \quad \text{за } z \in R ,$$

то Ω' се получава от Ω чрез отсичане и/или пресичане на "опасните" ребра/с помощта на хиперравнина/.

Определянето на Ω' е свързано с намирането на супремума $\hat{H}$ на $H(x)$ върху всички неограничени ребра на Ω. Ако в процеса на търсене на $\hat{H}$ се установи, че Ω е компактно, изходната ХЗ се решава чрез някой от описаните за този случай алгоритми /т.е. чрез **А** и 1/,2/ от Б - авторите сочат [15] /. В противен случай, ако намереното $\hat{H} = +\infty$, то $\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = +\infty$, а ако $\hat{H} < +\infty$, се минава към хиперболичната задача

$$\sup\{H(x) / x \in \Omega'\}.$$

В общия случай Ω' е неограничено и тази нова ХЗ се решава с помощта на цялата процедура А,Б.

За прилагането на този алгоритъм, Белых и Гавурин налагат следните изисквания:

/2.6/ $$Q(x) \geqq 0,\ Q(x) \not\equiv 0 \text{ в } \Omega$$
$$P^2(x) + Q^2(x) \neq 0 \text{ за всяко } x \in \Omega$$

Ще опишем накратко алгоритма в неговата последователност.

1/ Проверяват се условията /2.6/ чрез решаване на 2 задачи на линейното оптимиране. Ако условията са нарушени, процесът се прекратява.

2/ Определя се супремума $\hat{H}$ на $H(x)$ върху неограничените ребра на Ω. За целта се решава линейна оптимизационна задача върху множеството от рецесивните направления /нормирани/ на Ω:

а/ ако това множество е празно, то Ω е компактно и ХЗ се решава с алгоритма [15];

б/ ако целевата функция е неограничена в това множество, то $\hat{H} = +\infty$ и $\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = +\infty$;

в/ ако функцията достига максимума си във върха $\hat{z}$, то

$$\hat{H} = \frac{\langle p, \hat{z} \rangle}{\langle q, \hat{z} \rangle} < +\infty$$

и се минава в 3/ ;

3/ Решава се нова хиперболична задача $\sup\{H(x)/x \in \Omega'\}$, където

$$\Omega' = \{x / x \in \Omega,\ P(x) \geqq \hat{H}\,Q(x)\}.$$

Тогава:

а/ ако $\Omega' = \phi$, то изходната ХЗ има само асимптотично решение $\hat{z}$ и

$$\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = \hat{H} = \frac{\langle p, \hat{z}\rangle}{\langle q, \hat{z}\rangle}$$

б/ ако x^* е решение на задачата, то x^* е решение и на изходната ХЗ т.е. $\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = H(x^*)$.

Алгоритмът решава успешно хиперболичната задача. Авторите не го коментират, обаче, в изчислителен аспект и не споменават нищо за числени експерименти. Според нас, алгоритмът съдържа редица неудобства от изчислителска гледна точка, които снижават неговата ефективност. В алгоритма липсва приемственност между отделните пунктове. В 1/ се решават 2 линейни задачи, в 2/ - една линейна задача и една хиперболична задача /при Ω компактно/, в 3/ - една хиперболична задача /с Ω' , за което не е известно дали е ограничено или не/. Всяка от тези задачи се решава самостоятелно, сама за себе си. Това е така, защото те се различават силно помежду си и информацията от една от тях, не може да се използва непосредствено в друга /по-точно, няма възможност последната симплексна таблица на една задача да служи за основа на началната симплексна таблица на друга задача/. Ще отбележим също, че линейната задача в 2/ е силно изродена - всичките й ограничения, с изключение на едно, имат нулеви десни части.

Що се отнася до условията /2.6/ , те могат според нас да бъдат избегнати, но за сметка на едно разширяване /и утежняване/ на алгоритма.

§3. СВОЙСТВА НА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ФУНКЦИЯ ВЪРХУ ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА

В този параграф се доказват редица свойства на хиперболичната функция, които разкриват поведението й в изпъкнали множества. Ако

$$\mathcal{P}(x) = p_0 + \langle p, x \rangle, \quad Q(x) = q_0 + \langle q, x \rangle$$

са две афинни функции, функцията

$$H(x) = \frac{\mathcal{P}(x)}{Q(x)}$$

обикновенно се нарича хиперболична /дробно-линейна/ функция. Тя е определена и непрекъсната за всяко x, за което $Q(x) \neq 0$ и е монотонна върху всяка отсечка $[x_1, x_2]$, за която $[x_1, x_2] \cap \{x / Q(x) = 0\} = \varnothing$. Действително

$$\frac{dH[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\mathcal{P}[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]}{Q[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]}$$

$$= \frac{\langle p, x_2 - x_1 \rangle (Q(x_1) + \lambda \langle q, x_2 - x_1 \rangle) - \langle q, x_2 - x_1 \rangle (\mathcal{P}(x_1) + \lambda \langle p, x_2 - x_1 \rangle)}{Q^2[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]}$$

$$= \frac{\langle p, x_2 - x_1 \rangle Q(x_1) - \langle q, x_2 - x_1 \rangle \mathcal{P}(x_1)}{Q^2[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]}$$

т.е. знака на производната не се сменя и понеже $Q(x)$ е непрекъсната в $[x_1, x_2]$, то $H(x)$ е монотонна върху отсечката $[x_1, x_2]$.

Понататък ще разглеждаме хиперболичната функция само върху изпъкнали множества, в които обаче допускаме да има точки, за които $Q(x) = 0$. За удобство ще дефинираме хиперболичната функция и в такива точки. Ще ползваме означенията

$$\mathcal{P}_0 = \{x / \mathcal{P}(x) = 0\}, \quad Q_0 = \{x / Q(x) = 0\}.$$

Дефиниция 1. Хиперболична функция /ХФ/ в изпъкналото множество X наричаме функцията

$$/3.1/ \qquad H(x)=\begin{cases} \dfrac{P(x)}{Q(x)} & \text{при } Q(x)\neq 0 \\ \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in X\setminus Q_0}} \dfrac{P(y)}{Q(y)} & \text{при } Q(x)=0 \text{ и } X\setminus Q_0\neq\emptyset \\ -\infty & \text{при } X\setminus Q_0=\emptyset \end{cases}$$

Така дефинираната функция $H(x)$ изобразява изпъкналото множество X в разширената реална права $\bar{R}$ т.е. $H: X\Rightarrow \bar{R}$.

Ще отбележим някои очевидни свойства на ХФ:

1/ ХФ е непрекъсната в $X\setminus Q_0$ и полунепрекъсната отгоре в $X\cap Q_0$.

2/ Стойностите на ХФ в $X\cap Q_0$ зависят от конкретния вид на множеството X.

3/ ХФ е монотонна върху всяка отсечка $[x_1, x_2]\subset X$, за която $[x_1, x_2]\cap Q_0=\emptyset$.

Приемаме, че

$$/3.2/ \qquad \frac{a}{0}=\begin{cases} +\infty & \text{за } a>0 \\ -\infty & \text{за } a<0 \\ \theta & \text{за } a=0 \text{ /неопределеност/} \end{cases}$$

4/ Ако $Q(x)\geqq 0$ и $X\setminus Q_0\neq\emptyset$, то

$$H(x)=\begin{cases} \dfrac{P(x)}{Q(x)} & \text{за } x\in X\setminus(P_0\cap Q_0) \\ \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\notin X\setminus(P_0\cap Q_0)}} \dfrac{P(y)}{Q(y)} & \text{за } x\in X\cap P_0\cap Q_0 \end{cases}$$

$\in$

5/ Ако $Q(x)\geqq 0$ в X и $P(x)-\lambda Q(x)\leqq 0$ в $X\setminus Q_0$ $/\lambda\in\bar{R}/$, то $\sup\{H(x)/x\in X\}\leqq\lambda$.

6/ Ако $Q(x)\geqq 0$ в X, то ХФ е монотонна върху всяка отсечка $[x_1, x_2]\subset X$.

По-долу ще докажем някои съществени за екстремалните свойства на ХФ твърдения.

ЛЕМА 1. Ако X е изпъкнало множество, $H(x) \not\equiv const$ и $Q(x)$ сменя знака си в X, то съществува точка $y \in X \cap Q_0$, за която $P(y) \neq 0$.

Доказателство. Нека $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ са две точки, за които $Q(x_1) > 0$, $Q(x_2) < 0$ и $H(x_1) \neq H(x_2)$. Такива две точки съществуват, тъй като съществуват точки $y_1 \in X$ и $y_2 \in X$, за които $Q(y_1) > 0$ и $Q(y_2) < 0$. Ако $H(y_1) \neq H(y_2)$, то $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. Ако $H(y_1) = H(y_2)$, тогава съществува точка $y_3 \in X$ /$H(x) \not\equiv const$/, за която $H(y_3) \neq H(y_1) = H(y_2)$. Тогава $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$ при $Q(y_3) < 0$ и $x_2 = y_2$, $x_1 = y_3$ при $Q(y_3) > 0$. Понеже $Q(x_1) > 0$, а $Q(x_2) < 0$, то за някоя точка y от отсечката $[x_1, x_2]$ имаме $Q(y) = 0$. Нека $y = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$ /$0 < \lambda < 1$/. От

$$0 = Q(y) = Q(x_2) + \lambda\left[Q(x_1) - Q(x_2)\right]$$

получаваме

$$\lambda = \frac{Q(x_2)}{Q(x_2) - Q(x_1)} \qquad /Q(x_1) \neq Q(x_2)/$$

и

$$\begin{aligned}
P(y) &= P(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) = P(x_2) + \lambda\left[P(x_1) - P(x_2)\right] \\
&= P(x_2) + \frac{Q(x_2)}{Q(x_2) - Q(x_1)}\left[P(x_1) - P(x_2)\right] \\
&= \frac{Q(x_1)\,Q(x_2)}{Q(x_2) - Q(x_1)}\left(\frac{P(x_1)}{Q(x_1)} - \frac{P(x_2)}{Q(x_2)}\right) \\
&= \frac{Q(x_1)\,Q(x_2)}{Q(x_2) - Q(x_1)}\left(H(x_1) - H(x_2)\right) \neq 0
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Ако X е изпъкнало множество, $H(x) \not\equiv const$ и $Q(x)$ сменя знака си в X, то $H(x)$ е неограничена отгоре и отдолу.

Доказателство. От условието на теоремата и лема 1 следва, съществуването на три точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $y \in X \cap Q_0$, такива че $Q(x_1)\,P(y) > 0$ и $Q(x_2)\,P(y) < 0$. Но тогава

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} H(y+\lambda(x_1-y)) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{P(y+\lambda(x_1-y))}{Q(y+\lambda(x_1-y))} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} H(y+\lambda(x_2-y)) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{P(y+\lambda(x_2-y))}{Q(y+\lambda(x_2-y))} = -\infty$$

При това $\sup\{H(x) \,/\, x\in X\} = H(y) = +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Ако X е изпъкнало множество, $H(x)\not\equiv const$ и $H(x)<+\infty$ в X, то $Q(x)$ не сменя знака си в X.

ТЕОРЕМА 2. Ако X е изпъкнало множество, $X\cap Q_0\neq\emptyset$ и $H(x)<+\infty$ в X, то $Q(x)\,P(y)\leqq 0$ за всяко $x\in X$ и всяко $y\in X\cap Q_0$.

Доказателство. 1/ Нека $H(x)\equiv c$ / c -константа/ в X. Ако $c=-\infty$, то $Q(x)\equiv 0$ в X и $Q(x)\,P(y)\equiv 0$ за $(x,y)\in X\times(X\cap Q_0)$. Ако $c\neq-\infty$, от $H(x)\neq\pm\infty$ следва, че $P(x)\equiv 0$ в $X\cap Q_0$ т.е. $Q(x)\cdot P(y)=0$ за $(x,y)\in X\times(X\cap Q_0)$.

2/ Нека $H(x)\not\equiv const$ в X. Тогава съществува точка $x_1\in X$ такава, че $Q(x_1)\neq 0$. Допускаме че съществува точка $x_2\in X\cap Q_0$, за която $Q(x_1)\,P(x_2)>0$. Но точката $x(\lambda)=x_2+\lambda(x_2-x_1)\in X$, за всяко $0<\lambda<1$ и

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} H(x(\lambda)) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{P(x_2)+\lambda\,[P(x_1)-P(x_2)]}{\lambda\, Q(x_1)} = +\infty .$$

Стигаме до противаречие с ограничеността на $H(x)$ в X. Следователно $Q(x_1)\,P(y)\leqq 0$ за всяко $y\in X\cap Q_0$ т.е. $P(x)$ не сменя знака си в $X\cap Q_0$. Но $Q(x)$ също не сменя знака си в X /следствие 1/, следователно $Q(x)\,P(y)\leqq 0$ за всяко $x\in X$ и всяко $y\in X\cap Q_0$.

ТЕОРЕМА 3. Ако Ω е многостен, $\Omega\cap Q_0\neq\emptyset$, но $Q(x)P(y)\leqq 0$ за всяко $(x,y)\in\Omega\times(\Omega\cap Q_0)$, то $H(x)$ е ограничена отгоре в Ω.

Коментар. 1/ Теоремата не е вярна за произволно изпъкнало затворено множество. 2/ Съчетана с теорема 2 за случая, когато Ω

е многостен, условието $Q(x)P(y) \leqq 0$ е необходимо и достатъчно функцията $H(x)$ да бъде ограничена отгоре в Ω.

Доказателство. При $H(x) \equiv const$ в Ω, твърдението е очевидно вярно. Нека $H(x) \not\equiv const$. Тогава $Q(x)$ ще запазва постоянен знак в Ω. В противен случай, ще съществува точка $y \in \Omega \cap Q_0$, за която $P(y) \neq 0$ /лема 1/ и условието $Q(x)P(y) \leqq 0$ не може да бъде изпълнено за всяко $x \in \Omega$. Приемаме, че $Q(x) \geqq 0$ в Ω /това не намалява общността, тъй като $P(x)/Q(x) = -P(x)/(-Q(x))$/. Тогава $P(y) \leqq 0$ в $\Omega \cap Q_0$, хиперравнината $L': -Q(x) = 0$ е опорна за Ω /$-Q(x) \leqq 0$ в Ω/ и хиперравнината $L'': P(x) = 0$ е опорна за $\Omega \cap L' = \Omega \cap Q_0$. Съгласно теорема 36, гл.1, съществува $\varepsilon > 0$ такова, че хиперравнината $L: \varepsilon P(x) - Q(x) = 0$ е опорна за Ω т.е. $\varepsilon P(x) - Q(x) \leqq 0$ в Ω. Следователно $H(x) \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ в Ω т.е. $H(x)$ е ограничена отгоре в Ω.

ТЕОРЕМА 4. Ако X е изпъкнало множество от вида $X = Y + Z + S$, където Z е конус, а S е подпространство, $H(x) \leqq C < \infty$ и $H(x) \not\equiv const$ в X, то

1. $\langle p, s\rangle = \langle q, s\rangle = 0$ за всяко $s \in S$
2. $Q(x)\langle q, z\rangle \geqq 0$ за всяко $(x, z) \in X \times Z$
3. $Q(x)\langle p, z\rangle \leqq 0$ за всяко $(x, z) \in X \times \{z / z \in Z, \langle q, z\rangle = 0\}$
4. $\langle p, z\rangle / \langle q, z\rangle \leqq C$ за всяко $z \in \{z \in Z / \langle p, z\rangle^2 + \langle q, z\rangle^2 \neq 0\}$

Доказателство. Ако фиксираме по произволен начин точката $(y, z, s) \in X \times Z \times S$, то $x = y + \lambda z + \mu s \in X$ за всяко $\lambda \geqq 0$, $\mu \in E^1$ и

$$P(x) = P(y) + \lambda\langle p, z\rangle + \mu\langle p, s\rangle$$

$$Q(x) = Q(y) + \lambda\langle q, z\rangle + \mu\langle q, s\rangle$$

Но $Q(x)$ не сменя знака си в X /теорема 1, следствие 1/ и то е изпълнено само ако $\langle q, s\rangle = 0$ и $Q(y)\langle q, z\rangle \geqq 0$ за всяко $(y, z) \in X \times Z$. От тук и от ограничеността на $H(x)$ следва, че $\langle p, s\rangle = 0$ и при $\langle q, z\rangle = 0$ имаме $Q(y)\langle p, z\rangle \leqq 0$ т.е. $Q(x)\langle p, z\rangle = 0$ за всяко $z \in \{z / z \in Z, \langle q, z\rangle = 0\}$. Нека $Q(y) \neq 0$. Тогава

$$H(x) = \frac{P(y) + \lambda \langle p, z \rangle}{Q(y) + \lambda \langle q, z \rangle} \leqq c \quad \text{за всяко } \lambda > 0 .$$

Следователно

$$\frac{\langle p, z \rangle}{\langle q, z \rangle} \leqq c \qquad / \langle p, z \rangle^2 + \langle q, z \rangle^2 \neq 0 \;/$$

Ако X е изпъкнало множество и $v \in V(X)$, то всяка точка от въча $\ell :\; x + \lambda v \quad / \lambda \geqq 0 /$ принадлежи на X. Това налага да се познава поведението на функцията $H(x)$ при неограничено движение по лъча ℓ т.е.

$$H(v) = \lim_{\lambda \to \infty} H(x + \lambda v)$$

Очевидно, ако $H(y) \not\equiv const$, $y \in X$ и $v \in V(X)$, то

$$H(y, v) = \begin{cases} \dfrac{\langle p, v \rangle}{\langle q, v \rangle} & \text{при } \langle q, v \rangle \neq 0 \\ \varepsilon.(+\infty) & \text{при } \langle q, v \rangle = 0 ,\; \langle p, v \rangle \neq 0 \\ H(y) & \text{при } \langle q, v \rangle = \langle p, v \rangle = 0 \end{cases}$$

където

$$\varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sign} Q(x) \langle p, v \rangle & \text{при } Q(y) \neq 0 \\ \operatorname{sign} \langle p, v \rangle & \text{при } Q(y) = 0 ,\; Q(x) \geqq 0 \text{ в } X \\ -\operatorname{sign} \langle p, v \rangle & \text{при } Q(y) = 0 ,\; Q(x) \leqq 0 \text{ в } X \\ +1 & \text{при } Q(y) = 0 \text{ и } Q(x) \text{ сменя знака си в } X \end{cases}$$

Ще въведем още понятието асимптотична стойност $H_a(v)$ на функцията $H(x) \not\equiv const$ по направлението $v \in V(X)$, а именно

$$H_a(v) = \begin{cases} \max\limits_{x \in X} H(x, v) & \text{при } \langle p, v \rangle^2 + \langle q, v \rangle^2 \neq 0 \\ \theta & \text{при } \langle p, v \rangle = \langle q, v \rangle = 0 \end{cases}$$

/тук θ е знак за неопределеност/.

От казаното по-горе лесно се вижда, че

$$H_a(v) = \begin{cases} \dfrac{\langle p, v \rangle}{\langle q, v \rangle} & \text{при } \langle q, v \rangle \neq 0 \\ \varepsilon.(+\infty) & \text{при } \langle q, v \rangle = 0,\; \langle p, v \rangle \neq 0 \\ \theta & \text{при } \langle p, v \rangle = \langle q, v \rangle = 0 \end{cases}$$

където

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{, когато } Q(x) \text{ сменя знака си в } X \\ \operatorname{sign}\langle p, v\rangle & \text{, при } Q(x) \geqq 0 \text{ в } X \\ -\operatorname{sign}\langle p, v\rangle & \text{, при } Q(x) \leqq 0 \text{ в } X \end{cases}$$

Ако $Q(x) \geqq 0$ в X и приемем /3.2/, то

$$H_a(v) = \frac{\langle p, v\rangle}{\langle q, v\rangle} \quad \text{за всяко } v \in V(X)$$

§4. ХИПЕРБОЛИЧНА ЗАДАЧА

В този параграф ще разгледаме някои свойства на хиперболичната оптимизационна задача

/4.1/ $$\sup\{H(x) / x \in X\}$$

където X е изпъкнало затворено множество, а $H(x)$ е хиперболична функция дефинирана в X. Особено изчерпателно ще бъде разразгледан случая, когато X е многостен.

Преди да преминем към същността на въпроса, ще формулираме едно почти очевидно твърдение, което ще използваме многократно при доказателството на основни теореми. Приемаме, че

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{за } a > 0 \\ -\infty & \text{за } a \leqq 0 \end{cases}$$

ЛЕМА 2.

1/ Ако $b_i \geqq 0$, $i = \overline{1, r}$, то $\dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i}{\sum_{i=1}^{r} b_i} \leqq \max\limits_{1 \leq i \leq r} \dfrac{a_i}{b_i}$

2/ Ако $d_j < 0$, $j = \overline{1, s}$, то $\dfrac{\sum_{j=1}^{s} c_j}{\sum_{j=1}^{s} d_j} \geqq \min\limits_{1 \leq j \leq s} \dfrac{c_j}{d_j}$

3/ Ако $b_i \geqq 0$, $i = \overline{1, r}$, $d_j < 0$, $j = \overline{1, s}$, $\max\limits_{1 \leq i \leq r} \dfrac{a_i}{b_i} \leqq \min\limits_{1 \leq j \leq s} \dfrac{c_j}{d_j}$

и $$D = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=1}^{s} c_j}{\sum_{i=1}^{r} b_i + \sum_{j=1}^{s} d_j} = \frac{A}{B}$$, то

$$D \leq \max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{b_i} \quad \text{при} \quad B \geq 0$$

$$D \geq \min_{1 \leq j \leq s} \frac{c_j}{d_j} \quad \text{при} \quad B < 0$$

По-долу ще използваме следната терминология и означения:

1. Всяка точка на X ще наричаме план на задачата.

2. Точките на $\hat{X}$ ще наричаме опорни планове .

3. Точките на $V(X)$ ще наричаме асимптотични планове или кратко а-планове.

4. Точките на $\vec{V}(X)$ – опорни а-планове.

5. Точка $x^* \in X$, за която $H(x^*) = \sup\{H(x) / x \in X\}$, ще наричаме решение на задачата или оптимален план.

6. Точка $v^* \in V(X)$, за която $H_a(v^*) = \sup\{H(x) / x \in X\}$, ще наричаме а-решение или асимптотичен оптимален план.

7. Ако с X сме означили множеството от планове на задачата, съответно с X^*, $\hat{X}^*$, $V^*(X)$ и $\vec{V}^*(X)$ ще означаваме множеството от решенията, опорните решения, а-решенията и опорните а-решения.

ТЕОРЕМА 5. Ако $Q(x)$ не сменя знака си в X , $\hat{X} \neq \emptyset$ и задача /4.1/ има решение или а-решение, то тя има съответно опорно решение или опорно а-решение.

Доказателство. Ще считаме, че $Q(x) \geq 0$ в X . Ако $H(x) = const$ в X , твърдението е очевидно вярно. Нека $H(x) \not\equiv const$ в X и

$$\sup\{H(x) / x \in X\} = H^*$$

Тогава, според условията на теоремата, или съществува точка $x^* \in X$ и $H(x^*) = H^*$, или съществува точка $v^* \in V(X)$ и $H_a(v^*) = H^*$.

1/ Нека съществува $x^* \in X$ и $H(x^*) = H^*$. Но

$$x^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \hat{x}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \bar{v}_j$$

където $\hat{x}_i \in \hat{X}$, $\bar{v}_j \in \vec{V}(X)$, $\alpha_i \geqq 0$, $i=\overline{1,s}$, $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, $\beta_j > 0$, $j=\overline{1,r}$.

а/ Ако $x^* \notin P_0 \cap Q_0$, тъй като $Q(\hat{x}_i) \geqq 0$, $\langle q, \bar{v}_j\rangle \geqq 0$ и

$$\frac{P(\hat{x}_i)}{Q(\hat{x}_i)} \leqq H^*, \quad \frac{\langle p, \bar{v}_j\rangle}{\langle q, \bar{v}_j\rangle} \leqq H^*,$$

то

$$H^* = H(x^*) = \frac{P(x^*)}{Q(x^*)} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i P(\hat{x}_i) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \langle p, \bar{v}_j\rangle}{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i Q(\hat{x}_i) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \langle q, \bar{v}_j\rangle}$$

$$\leqq \max\left\{\max_{1\leqq i\leqq s} \frac{P(\hat{x}_i)}{Q(\hat{x}_i)}, \max_{1\leqq j\leqq r} \frac{\langle p, \bar{v}_j\rangle}{\langle q, \bar{v}_j\rangle}\right\} \leqq H^*$$

Следователно

$$\frac{P(\hat{x}_i)}{Q(\hat{x}_i)} = \frac{\langle p, \bar{v}_j\rangle}{\langle q, \bar{v}_j\rangle} = H^* \quad \text{за } i=\overline{1,s}, \ j=\overline{1,r}$$

б/ Не съществува $x \in X \setminus (P_0 \cap Q_0)$, за което $H(x) = H^*$. Тогава $x^* \in P_0 \cap Q_0$. Но $\widehat{X \cap P_0 \cap Q_0} \neq \emptyset$ и се съдържа в $\hat{X}$. Следователно всички точки на $\widehat{X \cap P_0 \cap Q_0}$ са опорни решения.

2/ Ако не съществува $x \in X$, за което $H(x) = H^*$, то съществува $V^* \in V(X)$ такова, че $H_a(V^*) = H^*$. Но

$$V^* = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \bar{v}_j$$

където $\beta_j > 0$, $\bar{v}_j \in \bar{V}(X)$ и

$$H^* = H_a(V^*) = \frac{\langle p, V^*\rangle}{\langle q, V^*\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \beta_j \langle p, \bar{v}_j\rangle}{\sum_{j=1}^{k} \beta_j \langle q, \bar{v}_j\rangle} \leqq H^*$$

Следователно

$$\frac{\langle p, \bar{v}_j\rangle}{\langle q, \bar{v}_j\rangle} = H^* \quad \text{за} \quad j=\overline{1,k}$$

ТЕОРЕМА 6. Ако $X = Y + S$ е изпъкнало множество, $Y \neq \emptyset$, S е подпространство и $H(x) < +\infty$ в X , то задачите

/4.2/ $$\sup\{H(x) \,/\, x \in X\}$$

и

/4.3/ $$\sup\{H(x) \,/\, x \in Y\}$$

са еквивалентни в следния смисъл:

1/ $\sup\{H(x)/x \in X\} = \sup\{H(x)/x \in Y\}$

2/ $X^* = Y^* + S$

3/ $V^*(X) = V^*(Y) + S$, ако $V^*(Y) \neq \emptyset$.

Тук X^*, Y^*, $V^*(X)$, $V^*(Y)$ са съответно множествата от решенията и а-решенията на задачи /4.2/ и /4.3/.

Доказателство. При $H(x) \equiv const$ в X твърдението е очевидно вярно. Нека $H(x) \not\equiv const$ в X. Следователно $Q(x)$ не сменя знака си в X /следствие 1/ и

/4.4/ $\langle p, s\rangle = \langle q, s\rangle = 0$ за всяко $s \in S$ /теорема 4/

Нека $x \in X$ се представя във вида $x = y + s$. Тогава

$$P(x) = P(y) + \langle p, s\rangle = P(y)$$
$$Q(x) = Q(y) + \langle q, s\rangle = Q(y)$$

Така че, за всяко $x \in X$ съществува $y \in Y$, за което

$$H(x) = H(y),$$

откъдето следва 1/. Очевидно, ако $x \in X^*$, то съответното му $y \in Y^*$ и обратно, откъдето следва 2/. Аналогично се доказва и 3/, като се вземе предвид, че

$$V(X) = V(Y) + V(S) = V(Y) + S$$ /теорема 21, гл.I /

Понататък ще разглеждаме хиперболичната оптимизационна задача, когато множеството от планове е многостен т.е.

/4.5/ $$\sup\{H(x) \,/\, x \in \Omega\},$$

където Ω е многостен /задачата означаваме кратко ХЗ /.

ТЕОРЕМА 7. Ако $\Omega \neq \emptyset$, задача /4.5/ има винаги решение или а-решение.

Доказателство. Ако $H(x) \equiv const$ в Ω, твърдението е очевидно вярно. Ако $H(x) \not\equiv const$ и $Q(x)$ сменя знака си в Ω, то

$H(x)$ расте неограничено /теорема 1/ т.е.

$$\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = +\infty$$

и този супремум се достига във всяка точка на $\Omega \cap Q_0$ /лема 1/.

Нека сега $H(x) \not\equiv const$ и $Q(x)$ не сменя знака си в Ω. Ще смятаме, че $Q(x) \geqq 0$ в Ω. Да означим

$$\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = H^*$$

и нека $\{x_k\}_1^\infty$ е оптимизираща редица от точки на Ω т.е.

$$\lim_{k\to\infty} H(x_k) = H^*$$

1/ Ако $\{x_k\}_1^\infty$ е ограничена /считаме, че е сходяща/ и

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

то $x^* \in \Omega$ и $H(x^*) = H^*$ т.е. $H(x)$ достига супремума си в x^*.

2/ Ако за всяка оптимизираща редица $\{x_k\}_1^\infty$, $\|x_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, редицата $\left\{\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\}_1^\infty$ е ограничена /считаме я сходяща/ и ако

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} = v^*,$$

то $v^* \in \bar{V}(\Omega)$. За асимптотичната стойност на $H(x)$ по направлението v^* имаме:

а/ Нека $\langle q, v^*\rangle \neq 0$. Тогава

$$H_a(v^*) = \frac{\langle p, v^*\rangle}{\langle q, v^*\rangle} = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle p, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle}{\langle q, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{p_0}{\|x_k\|} + \langle p, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle}{\frac{q_0}{\|x_k\|} + \langle q, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle} = \lim_{k\to\infty} H(x_k) = H^*$$

/понеже $\frac{Q(x_k)}{\|x_k\|} = \frac{q_0 + \langle q, x_k\rangle}{\|x_k\|} \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle q, v^*\rangle > 0$, то $Q(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ /

б/ Ако $\langle q, v^*\rangle = 0$ и $\langle p, v^*\rangle \neq 0$. Очевидно $\langle p, v^*\rangle > 0$ /в противен случай v^* не може да бъде граница на максимизираща редица/. Тогава $H_a(v^*) = +\infty$, тъй като $\langle p, v^*\rangle > 0$. Но и

$$H^* = \lim_{k\to\infty} H(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{p_0 + \langle p, x_k\rangle}{q_0 + \langle q, x_k\rangle}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{p_0}{\|x_k\|} + \langle p, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle}{\frac{q_0}{\|x_k\|} + \langle q, \frac{x_k}{\|x_k\|}\rangle} = +\infty ,$$

понеже $\langle p, v^*\rangle > 0$. Следователно $H_a(v^*) = H^*$.

в/ Нека $\langle q, v^*\rangle = 0$ и $\langle p, v^*\rangle = 0$. Ще покажем, че съществува друга оптимизираща редица $\{y_k\}_1^\infty$, за която

$$\frac{y_k}{\|y_k\|} \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{v} , \quad \langle p, \tilde{v}\rangle^2 + \langle q, \tilde{v}\rangle^2 \neq 0$$

т.е. имаме случая 2а/ или 2б/. Ако $W(\Omega) \neq \emptyset$, то $\langle q, w\rangle = 0$ за всяка $w \in W(\Omega)$. Ако съществува $w^* \in W(\Omega)$, такова че $\langle p, w^*\rangle > 0$, то $H_a(w^*) = +\infty$ т.е. $H_a(w^*) = H^*$. Ако за всяко $w \in W(\Omega)$ имаме $\langle p, w\rangle = 0$, тогава вместо многостена Ω можем да разглеждаме многостена

$$\Omega_1 = \Omega \cap T$$

където T е допълнително подпространство на $W(\Omega)$. Така че понататък, без ограничение на общността, ще считаме $\hat{\Omega} \neq \emptyset$. Да си образуваме редицата

$$y_k = x_k + t_k v^*$$

където t_k е избрано така, че точката y_k да попада върху стена с размерност $n-1$ на многостена Ω . Тъй като $\langle p, v^*\rangle = \langle q, v^*\rangle = 0$, то $H(y_k) = H(x_k)$. Следователно $\{y_k\}_1^\infty$ е също оптимизираща редица. Понеже стените на многостена са краен брой, то поне върху една стена има безбройно много точки от редицата $\{y_k\}$. Да означим една такава подредиза с $\{y_{k_i}\}_1^\infty$ и нека

$$\lim_{k_i\to\infty} \frac{y_{k_i}}{\|y_{k_i}\|} = v_1$$

Ако $\langle p, v_1\rangle^2 + \langle q, v_1\rangle^2 \neq 0$, то v_1 е а-решение. Ако $\langle p, v_1\rangle = \langle q, v_1\rangle = 0$, повтаряме същата процедура. Всяка нова редица която получаваме, се съдържа във фасада на многостена с размерност поне с едно по-малка от предидущата. Очевидно, ако на някоя стъпка $k < n$ не получим асимптотично решение v_k , то след n повторения на тази процедура ще стигнем до константна редица, което е невъзможно, понеже разглеждаме случая, когато всички оптимизиращи редици са неограничени.

Дефиниция 2. Точката $x_* \in \hat{\Omega}$ наричаме субоптимален план на задача /4.2/, ако $H(x_*) < H^* = \{\sup H(x) / x \in \Omega\}$, но има неограничено ребро излизащо от точката x_* с направление V^*, за което $H_a(V^*) = H^*$.

ТЕОРЕМА 8. Ако $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ и $Q(x)$ не сменя знака си в Ω, задача /4.5/ винаги има опорно решение или субоптимален план.

Доказателство. Задача /4.5/ има решение или а-решение /теорема 7/, следователно ще има опорно решение или опорно а-решение /теорема 5/. В първия случай твърдението е вярно. Във втория случай нека V^* е опорно а-решение. То V^* ще бъде направление на ребро излизащо от някоя крайна точка x_* на Ω. Ако $H(x_*) = H^*$, то x_* е опорно решение, а ако $H(x_*) < H^*$, x_* е субоптимален план.

По-долу ще предполагаме още, че в задача /4.5/ имаме $\hat{\Omega} \neq \emptyset$. Това условие е винати изпълнено, когато $\Omega \neq \emptyset$ и задачата е в каноничин вид. За направленията в E^n относно функцията $H(x)$ ще въведем следните оценки:

$$h(u) = \begin{cases} \dfrac{\langle p, u\rangle}{\langle q, u\rangle} & \text{за } \langle q, u\rangle \neq 0 \\ +\infty & \text{за } \langle q, u\rangle = 0 \ , \ \langle p, u\rangle > 0 \\ -\infty & \text{за } \langle q, u\rangle = 0 \ , \ \langle p, u\rangle \leqq 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Ако $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, $U(\hat{x}, \Omega)$ е конусът на възможните направления за точката $\hat{x}$, а $Z(\hat{x})$ е множеството от направленията /нормирани по някакъв начин/ на ребрата излизащи от $\hat{x}$, означаваме :

$$U^+(\hat{x}) = \{u / u \in U(\hat{x}, \Omega), \ \langle q, u\rangle \geqq 0\}$$

$$U^-(\hat{x}) = \{u / u \in U(\hat{x}, \Omega), \ \langle q, u\rangle < 0\}$$

$$Z^+(\hat{x}) = Z(\hat{x}) \cap U^+(\hat{x})$$

$$Z^-(\hat{x}) = Z(\hat{x}) \cap U^-(\hat{x})$$

$$\theta^{+}(\hat{x}) = \begin{cases} \sup\limits_{u \in U^{+}(\hat{x})} h(u) & \text{при} \quad U^{+}(\hat{x}) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{при} \quad U^{+}(\hat{x}) = \emptyset \end{cases}$$

$$\theta^{-}(\hat{x}) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in U^{-}(\hat{x})} h(u) & \text{при} \quad U^{-}(\hat{x}) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{при} \quad U^{-}(\hat{x}) = \emptyset \end{cases}$$

$$d^{+}(\hat{x}) = \begin{cases} \max\limits_{z \in Z^{+}(\hat{x})} h(z) & \text{при} \quad Z^{+}(\hat{x}) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{при} \quad Z^{+}(\hat{x}) = \emptyset \end{cases}$$

/4.7/

$$d^{-}(\hat{x}) = \begin{cases} \min\limits_{z \in Z^{-}(\hat{x})} h(z) & \text{при} \quad Z^{-}(\hat{x}) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{при} \quad Z^{-}(\hat{x}) = \emptyset \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 9. Ако $d^{+}(\hat{x}) \leqq d^{-}(\hat{x})$, то

$$\theta^{+}(\hat{x}) = d^{+}(\hat{x}), \quad \theta^{-}(\hat{x}) = d^{-}(\hat{x}).$$

Доказателство. Ако $U^{+}(\hat{x}) = \emptyset$, то и $Z^{+}(\hat{x}) = \emptyset$ и $\theta^{+}(\hat{x}) = d^{+}(\hat{x}) = -\infty$. Ако $U^{+}(\hat{x}) \neq \emptyset$, то и $Z^{+}(\hat{x}) \neq \emptyset$. Нека $u \in U^{+}(\hat{x})$. Тогава u се представя във вида

$$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i z_i^{+} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j z_j^{-}$$

където

$$\alpha_i > 0, \ z_i^{+} \in Z^{+}(\hat{x}), \ i = \overline{1,r}, \ \beta_j > 0, \ z_j^{-} \in Z^{-}(\hat{x}), \ j = \overline{1,s}$$

и

$$h(u) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \langle p, z_i^{+} \rangle + \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \langle p, z_j^{-} \rangle}{\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \langle q, z_i^{+} \rangle + \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \langle q, z_j^{-} \rangle}$$

Понеже $u \in U^{+}(\hat{x})$ т.е.

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle q, z_i^{+} \rangle + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle q, z_j^{-} \rangle \geqq 0$$

то

$$h(u) \leqq \max_{1 \leqq i \leqq r} \frac{\langle p, z_i^{+} \rangle}{\langle q, z_i^{+} \rangle} \leqq d^{+}(\hat{x})$$

Следователно $\theta^+(\hat{x}) = d^+(\hat{x})$.

Аналогично, ако $u \in U^-(\hat{x})$, то

$$h(u) \geqq \min_{1 \leqq j \leqq s} \frac{\langle p, z^-_j \rangle}{\langle q, z^-_j \rangle} \geqq d^-(\hat{x}) ,$$

тъй като

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle q, z_i^+ \rangle + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle q, z_j^- \rangle < 0 .$$

Следователно $\theta^-(\hat{x}) = d^-(\hat{x})$.

ТЕОРЕМА 10. Ако $x' \in \hat{\Omega}$, $-\infty < d^+(x') \leqq d^-(x')$, $z' \in Z^+(x') \setminus V(\Omega)$ и $h(z') = d^+(x')$, то за съседния връх $x'' = x' + \mu z'$ / $\mu > 0$ / имаме

$$d^+(x'') \leqq d^+(x') \leqq d^-(x'')$$

Доказателство. Първо ще покажем, че $d^+(x'') \leqq d^+(x')$. Ако $d^+(x') = +\infty$, твърдението е очевидно вярно. Нека $d^+(x') < +\infty$. Допускаме, че $d^+(x'') > d^+(x')$ т.е. че съществува $z'' \in Z^+(x'')$ за което

$$h(z'') = \frac{\langle p, z'' \rangle}{\langle q, z'' \rangle} > d^+(x') \qquad / \langle q, z'' \rangle \geqq 0 /$$

Но при достатъчно малко $\lambda > 0$

$$\bar{x} = x'' + \lambda z'' \in \Omega$$

$$\zeta = \bar{x} - x' = x'' - x' + \lambda z'' = \mu z' + \lambda z'' \in U^+(x')$$

и

$$h(\zeta) = \frac{\langle p, \zeta \rangle}{\langle q, \zeta \rangle} = \frac{\langle p, \mu z' + \lambda z'' \rangle}{\langle q, \mu z' + \lambda z'' \rangle}$$

$$= \frac{\mu \langle p, z' \rangle + \lambda \langle p, z'' \rangle}{\mu \langle q, z' \rangle + \lambda \langle q, z'' \rangle} > d^+(x')$$

Тъй като

$$\frac{\langle p, z' \rangle}{\langle q, z' \rangle} = d^+(x') \quad \text{и} \quad \frac{\langle p, z'' \rangle}{\langle q, z'' \rangle} > d^+(x')$$

стигаме до противоречие с това, че $\zeta \in U^+(x')$.

Аналогично се доказва неравенството $d^-(x'') \geqq d^+(x')$.

Ако $d^-(x'')=+\infty$ /т.е. $Z^-(x'')=\emptyset$ /, твърдението е очевидно вярно. Нека $d^-(x'')<+\infty$. Допускаме, че $d^-(x'')<d^+(x')$ т.е. че съществува $z''\in Z^-(x'')$, за което

$$h(z'')=\frac{\langle p,z''\rangle}{\langle q,z''\rangle}<d^+(x') \qquad /\langle q,z''\rangle<0\ /$$

При достатъчно малко $\lambda>0$ имаме

$$\bar{x}=x''+\lambda z''\in\Omega$$

$$z=\bar{x}-x'=x''+\lambda z''-x'=\mu z'+\lambda z''\in U(x',\Omega)$$

Но

$$h(z)=\frac{\langle p,z\rangle}{\langle q,z\rangle}=\frac{\langle p,\mu z'+\lambda z''\rangle}{\langle q,\mu z'+\lambda z''\rangle}=\frac{\mu\langle p,z'\rangle+\lambda\langle p,z''\rangle}{\mu\langle q,z'\rangle+\lambda\langle q,z''\rangle}$$

1/ Ако $\langle q,z'\rangle=0$, то

$$d^+(x')=h(z')=+\infty\ ,\quad z\in U^-(x')$$

а $h(z)<d^+(x')$, което противоречи на условието $d^+(x')\leqq d^-(x')$.

2/ Ако $\langle q,z'\rangle>0$, при достатъчно малко $\lambda>0$ имаме $z\in U^+(x')$. Но от

$$\frac{\langle p,z'\rangle}{\langle q,z'\rangle}=d^+(x') \quad\text{и}\quad \frac{\langle p,z''\rangle}{\langle q,z''\rangle}<d^+(x')$$

следва $h(z)>d^+(x')$ и също стигаме до противоречие.

Аналогично се доказва и следната

ТЕОРЕМА 11. Ако $x'\in\hat{\Omega}$, $d^+(x')\leqq d^-(x')<+\infty$, $z'\in Z^-(x')\setminus V(\Omega)$, и $h(z')=d^-(x')$, то за съседния връх $x''=x'+\mu z'$ / $\mu>0$ / имаме

$$d^+(x'')\leqq d^-(x')\leqq d^-(x'')$$

От теореми 10 и 11 се вижда, че при движение по ребро отговарящо на $d^+(x')$, интервалът $[d^+(x'), d^-(x')]$ се премества в ляво, а при преход по ребро отговорящо на $d^-(x')$, този интервал се премества на дясно.

При $H(x_1)=H(x_2)=-\infty$ ще считаме, че $H(x_1)<H(x_2)$, ако $P(x_1)<P(x_2)$.

ТЕОРЕМА 12. Ако $Q(x) \geqq 0$ в Ω, $x' \in \hat{\Omega}$, $-\infty < d^+(x') \leqq d^-(x')$, $z' \in Z^+(x') \setminus V(\Omega)$, $h(z') = d^+(x')$, $x'' = x' + \mu z' \in \hat{\Omega}$ $/\mu > 0/$ и $H(x') < d^+(x')$, то

$$H(x') < H(x'') \leqq d^+(x') \leqq d^-(x'')$$

Доказателство. В точката x'' имаме

$$\mathcal{P}(x'') = \mathcal{P}(x') + \mu \langle p, z' \rangle$$

$$Q(x'') = Q(x') + \mu \langle q, z' \rangle$$

1/ Ако $d^+(x') = +\infty$, то $\langle q, z' \rangle = 0$ и $\langle p, z' \rangle > 0$ т.е. $Q(x'') = Q(x')$ и $\mathcal{P}(x'') > \mathcal{P}(x')$. Следователно

$$H(x') < H(x'') \leqq d^+(x')$$

2/ Ако $d^+(x') < +\infty$, то $\langle q, z' \rangle > 0$ и

$$H(x'') = \frac{\mathcal{P}(x') + \mu \langle p, z' \rangle}{Q(x') + \mu \langle q, z' \rangle} > \frac{\mathcal{P}(x')}{Q(x')} = H(x')$$

и

$$H(x'') < \frac{\langle p, z' \rangle}{\langle q, z' \rangle} = d^+(x')$$

Теоремата е доказана.

Понеже при $Q(x) \geqq 0$ в Ω функцията $H(x)$ е монотонна по всяка отсечка в Ω, то тя няма локални екстремуми. Следователно ако за дадена точка $x^* \in \Omega$ $H(x)$ не нараства по всички възможни направления от точката x^*, то x^* е решение на ХЗ.

ТЕОРЕМА 13 /Критерий за оптималност/. При $H(x) \not\equiv -\infty$ и $Q(x) \geqq 0$ в Ω, опорният план x^* е оптимален, ако и само ако

$$d^+(x^*) \leqq H(x^*) \leqq d^-(x^*) \tag{4.8}$$

и субоптимален, ако

$$H(x^*) < d^+(x^*) \leqq d^-(x^*),$$

но съществува $z^* \in Z^+(x^*) \cap V(\Omega)$ такова, че $h(z^*) = d^+(x^*)$. При това z^* е опорен асимптотичен оптимален план т.е.

$$H_a(z^*) = \sup \{ H(x) \,/\, x \in \Omega \}.$$

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на твърдението. Нека $x^* \in \hat{\Omega}$ и удовлетворява /4.8/.

1/ Ако $H(x^*) = +\infty$, твърдението е очевидно вярно.

2/ Нека $H(x^*) = -\infty$. Тогава $Q(x^*) = 0$, $P(x^*) \leqq 0$ и $d^+(x^*) = -\infty$, откъдето $\langle q, z\rangle = 0$, $\langle p, z\rangle \leqq 0$ за всяко $z \in Z(x^*)$. Следователно $H(x^* + \lambda z) = -\infty$ за всяко $z \in Z(x^*)$ т.е. x^* е решение на задачата.

3/ Нека $-\infty < H(x^*) < +\infty$.

а/ Ако $Q(x^*) = 0$, то $P(x^*) = 0$, $Z^-(x^*) = \emptyset$ и $H(x^*) = d^+(x^*)$. Така че $H(x^* + \lambda z) \leqq d^+(x^*) = H(x^*)$ за всяко $z \in Z(x^*)$, следователно x^* е решение на ХЗ.

б/ Ако $Q(x^*) > 0$, то $H(x^*) = \dfrac{P(x^*)}{Q(x^*)}$ и при условието /4.8/ за всяко $z \in Z(x^*)$ имаме

$$H(x^* + \lambda z) = \frac{P(x^*) + \lambda \langle p, z\rangle}{Q(x^*) + \lambda \langle q, z\rangle} \leqq \frac{P(x^*)}{Q(x^*)} = H(x^*)$$

Следователно x^* е решение на ХЗ.

Необходимост на условието /4.8/. Нека x^* е решение на ХЗ.

1/ Ако $Q(x^*) = 0$, то $\langle q, z\rangle \geqq 0$ за $z \in Z(x^*)$ т.е. $Z^-(x^*) = \emptyset$ и $d^-(x^*) = +\infty$. Следователно $H(x^*) \leqq d^-(x^*)$. При $H(x^*) = +\infty$ твърдението е очевидно вярно. Ако $-\infty < H(x^*) < +\infty$, то $Q(x^*) = P(x^*) = 0$ и $H(x^*) = d^+(x^*)$.

2/ Ако $Q(x^*) > 0$, то $H(x^*) = \dfrac{P(x^*)}{Q(x^*)}$ и твърдението е очевидно вярно, тъй като от $H(x^*) \geqq H(x^* + \lambda z)$ за всяко $z \in Z(x^*)$ следва, че

$$H(x^*) \geqq h(z) \text{ за всяко } z \in Z^+(x^*)$$

$$H(x^*) \leqq h(z) \text{ за всяко } z \in Z^-(x^*)$$

т.е. $d^+(x^*) \leqq H(x^*) \leqq d^-(x^*)$.

Сега ще докажем втората част на твърдението. Нека

$$H(x^*) < d^+(x^*) \leqq d^-(x^*)$$

и $z^* \in Z^+(x^*) \cap V(\Omega)$ е такова, че $h(z^*) = d^+(x^*)$. Ще покажем най-напред, че не съществува оптимален план. Да допуснем противното. Нека $\bar{x} \in \Omega$ и $H(\bar{x}) = \sup\{H(x) / x \in \Omega\}$. Ако означим $z = \bar{x} - x^*$, то $z \in U^+(x^*)$ и

$$H(x^*) < H(\bar{x}) = H(x^* + \bar{x} - x^*) = H(x^* + z)$$

$$= \frac{P(x^*) + \langle p, z\rangle}{Q(x^*) + \langle q, z\rangle}$$

Следователно $h(z) > H(x^*)$. Но $h(z) \leqq h(z^*)$, така че

$$H(x^* + \lambda z^*) = \frac{P(x^*) + \lambda\langle p, z^*\rangle}{Q(x^*) + \lambda\langle q, z^*\rangle} > H(\bar{x})$$

при достатъчно голямо λ $/\lambda > \frac{\langle p, z\rangle}{\langle q, z\rangle}$ $/$. Стигнахме до противоречие т.е. ХЗ няма оптимален план. Тогава тя ще има асимптотичен оптимален план $v^* \in V(\Omega)$ /теорема 7/, за който $\langle q, v^*\rangle \geqq 0$ и $\langle p, v^*\rangle > 0$, следователно $H(x) < H_a(v^*)$ за всяко $x \in \Omega$ и $d^+(\hat{x}) \geqq h(v^*)$, за всяко $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ / v^* е възможно направление за всяка точка от Ω /. Но $h(z^*) = d^+(x^*) \geqq h(v^*)$ или $H_a(z^*) = H_a(v^*)$ т.е. z^* е опорен асимптотичен оптимален план, а x^* е субоптимален план.

ТЕОРЕМА 14. Ако $Q(x) \geqq 0$ в Ω и x° е опорен план, за който $H(x^\circ) < d^+(x^\circ) \leqq d^-(x^\circ)$, то със симплексна процедура от вида

$$\begin{aligned} & x_{k+1} = x_k + t_k z_k \\ /4.9/ \qquad & z_k \in Z(x_k), \quad h(z_k) = d^+(x_k) \\ & t_k = \max\{t / x_k + t z_k \in \Omega\} \end{aligned}$$

за краен брой стъпки се намира или опорен оптимален план, или субоптимален план и опорно асимптотично решение на ХЗ.

Доказателство. Ако $\hat{\Omega}'$ е множеството от опорните планове $\hat{x}$, за които $d^+(\hat{x}) \leqq d^-(\hat{x})$ и $H(\hat{x}) \leqq d^-(\hat{x})$, то за всяко k в процедурата /4.9/ $x_k \in \hat{\Omega}'$ и $H(x_k)$ расте монотонно /теореми 10,12/ При това интервалите $[d^+(x_k), d^-(x_k)]$ се изместват наляво с растенето на k. Понеже опорните планове са краен брой, то за краен брой стъпки ще стигнем до опорен план x^* удовлетворяващ условията на теорема 13. Теоремата е доказана.

Очевидно, ако при $Q(x) \geqq 0$ в Ω, ХЗ има асимптотично решение V^*, то

$$H(x) \leqq H_a(V^*) = h(V^*) = d^+(\hat{x})$$

за всяко $x \in \Omega$ и всяко $\hat{x} \in \hat{\Omega}$. Така че, ако за някое $\bar{x} \in \hat{\Omega}'$ $/ d^+(\bar{x}) \leqq d^-(\bar{x}) /$ имаме $H(\bar{x}) > d^-(\bar{x})$, то ХЗ ще има оптимален план.

ТЕОРЕМА 15. Ако $Q(x) \geqq 0$ в Ω и x_0 е опорен план, за който

$$d^+(x_0) \leqq d^-(x_0) < H(x_0), \tag{4.10}$$

то със симплексна процедура от вида

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = x_k + t_k z_k \\ &z_k \in Z(x_k), \quad h(z_k) = d^-(x_k) \\ &t_k = \max\{t / x_k + t z_k \in \Omega\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

за краен брой стъпки се стига до опорен оптимален план.

Доказателство. От условието /4.10/ следва, че оптимален план съществува. При процедурата /4.11/ интервалите $[d^+(x_k), d^-(x_k)]$ се изместват наляво с растенето на k /теорема 11/ и понеже опорните планове са краен брой, то за краен брой стъпки ще стигнем до опорен план x^* удовлетворяващ условията на теорема 13. Теоремата е доказана.

Ако $Q(x) \geqq 0$ в Ω, $x_0 \in \hat{\Omega}$ и $Q(x_0) = \min\{Q(x) / x \in \Omega\}$, то $\langle q, z \rangle \geqq 0$ за всяко $z \in Z(x_0)$. Така че $Z^-(x_0) = \emptyset$ и $d^-(x_0) = +\infty$. Следователно

$$d^+(x_0) \leqq d^-(x_0)$$

и ако $H(x_0) \geqq d^+(x_0)$, то x_0 е решение на ХЗ, а ако $H(x_0) < d^+(x_0)$, то x_0 удовлетворява условията на теорема 14 и може да се използва за начална точка на процедурата /4.9/.

Също така, ако x_0 е точка, за която $P(x_0) = \max\{P(x) / x \in \Omega\}$, то $\langle p, z \rangle \leqq 0$ за всяко $z \in Z(x_0)$. Така че, ако $\langle q, z \rangle \geqq 0$, то $h(z) \leqq 0$. Следователно

$$d^+(x_0) \leqq d^-(x_0)$$

и $$d^+(x_0) \leqq H(x_0) \leqq d^-(x_0)$$

или $$d^+(x_0) \leqq d^-(x_0) \leqq H(x_0) \ .$$

В първия случай x_0 е оптимален план на ХЗ, а във втория – x_0 удовлетворява условията на теорема 15 и може да служи за начална точка в процедурата /4.11/.

Както виждаме, намирането на опорен план $\hat{x}$, за който

$$d^+(\hat{x}) \leqq d^-(\hat{x})$$

не е проблем. Във връзка с това ще докажем още следната

ТЕОРЕМА 16. Ако $x_0 \in \hat{\Omega}$ е точка за която

/4.12/ $$P(x_0) - \lambda Q(x_0) = \max\{P(x) - \lambda Q(x) \,/\, x \in \Omega\} ,$$

то $d^+(x_0) \leqq d^-(x_0)$.

Доказателство. От условие /4.12/ имаме

$$P(x_0+\mu z) - \lambda Q(x_0+\mu z) \leqq P(x_0) - \lambda Q(x_0)$$

за всяко $z \in Z(x_0)$ и $\mu > 0$ / μ – достатъчно малко/. От тук получаваме $\langle p,z\rangle - \lambda\langle q,z\rangle \leqq 0$ за всяко $z \in Z(x_0)$, така че:

- ако $\langle q,z\rangle \geqq 0$, то $h(z) \leqq \lambda$
- ако $\langle q,z\rangle < 0$, то $h(z) > \lambda$

Следователно $d^+(x_0) \leqq d^-(x_0)$, което и трябваше да се докаже.

Очевидно, ако предварително знаем че $Q(x) \geqq 0$ в Ω и $\tilde{H}$ е една приближена стойност на $\sup\{H(x) \,/\, x \in \Omega\}$, то е рационално за начална точка x_0 да изберем точка удовлетворяваща условието /4.12/ при $\lambda = \tilde{H}$. Тогава, ако

$$H(x_0) < d^+(x_0) ,$$

продължаваме с процедурата /4.9/ и ако

$$d^+(x_0) \leqq H(x_0) \leqq d^-(x_0) ,$$

то x_0 е решение на ХЗ, а ако

$$H(x_0) > d^-(x_0) ,$$

продължаваме с процедурата /4.11/.

§ 5. АЛГОРИТЪМ ЗА РЕШАВАНЕ НА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЗАДАЧА

Резултатите от § 3 и § 4 позволяват да се построи ефективен алгоритъм за решаване на хиперболичните оптимизационни задачи, основан на симплексна процедура.

Както е известно, при симплекс процедурата се извършва минаване по върхове на многостена /зададен с ограниченията на задачата/, като направлението на реброто свързващо два съседни върха е направление, по което целевата функция нараства. С други думи, строи се монотонна редица от ребра, която води до оптимален връх, ако такъв съществува. Това означава, че при ХЗ на всяка итерация ще се извършва преход от даден връх $\hat{x}$ към съседен връх, такъв че свързващото ги ребро да има направление s, за което

/5.1/ $$\langle \nabla H(\hat{x}), s \rangle > 0$$

Очевидно, такава симплексна процедура ще се различава от тази за решаване на линейните оптимизационни задачи само по критерия за оптималност на даден връх /респективно за избора на реброто за преход към съседен връх/, който лесно се извежда от /5.1/.

В отличие от задачите на линейното оптимиране , обаче, тази симплексна процедура не решава в общия случай ХЗ, когато Ω е неограничено. Причината вече посочихме в началото на настоящата глава - при ХЗ не всяка монотонна редица от ребра води до оптимален връх /ако той съществува/. Поради това, симплекс процедурата може да доведе до връх $\hat{x}$, от който няма ограничени ребра водещи до върхове с по-голяма стойност на $H(x)$ в тях, въпреки че те съществуват. Така, попадайки във връх от вида на $\hat{x}$ /в § 2 при описанието на алгоритма на Белых-Гавурин ги нарекохме "опасни"/, симплексната процедура се прекъсва, без да е намерено решението на задачата. В т.3 на § 2 илюстрирахме този дефект и геометрично на фиг.4 и фиг.5. Именно затова, повечето от авторите използващи симплексна процедура налагат условието Ω да бъде компактно. В същия параграф показахме, че само алгоритма на Белых-Гавурин /[2]/ се справя успешно с решаването на ХЗ и при Ω неограничено, като преди прилагането на симплекс процедурата, "обезопасява" /ако можем така да се изразим/ "опасните" върхове чрез отсичането им от Ω или чрез пресичане на неограничените ребра излизащи от тях. Това прави обаче алгоритма нееднороден и снижава ефективността му. Нарушава се при него идеята заложена в симплекс процедурата - да се решава задачата от начало до края с последователни симплексни таблици /действията в които са унифицирани и има пълна приемственост на информацията в две последователни таблици/. Това прави алгоритма тежък, недостатъчно ефективен и естествено ще се отрази неблагоприятно при една програмна реализация.

Най-общо казано, за успешното прилагане на симплекс процедурата при решаване на ХЗ не е достатъчно направлението S да удовлетворява само условията /5.1/. Необходими са допълнителни условия за избора на S измежду решенията на /5.1/. От значение е също и изборът на начален опорен план. При подходящ избор на началния опорен план и на направлението S на всяка стъпка, симплексната процедура не попада в "опасни" върхове и стига до решението на ХЗ.

В §4 изведохме такива условия и посочихме две симплексни процедури /теореми 14 и 15/, които се различават помежду си само по условията, които трябва да удовлетворява началния опорен план. Всяка от тези процедури се прекратява, когато текущия опорен план удовлетворява критериите за оптималност дадени от теорема 13. на

Както показахме там, ако

/5.2/ $$Q(x) \geqq 0 \quad , \quad x \in \Omega$$

за начален опорен план в симплексната процедура /4.9/ от теорема 14 може да служи решението x_0 на линейната задача

/5.3/ $\min\{Q(x) / x \in \Omega\} = Q(x_0)$,

а в симплексната процедура /4.11/ от теорема 15 - решението x_0 на линейната задача

$$\max\{P(x) / x \in \Omega\} = P(x_0) .$$

Ще припомним също, че теорема 16 дава начин за рационално избиране на началния опорен план, в случай че е известна някоя приближена стойност на супремума на $H(x)$ в Ω .

По-долу описваме алгоритъм, който използва симплексната процедура /4.9/. По аналогичен начин може да се построи алгоритъм основан на симплексната процедура /4.11/.

Алгоритмът се състои от 2 части. В първата му част/точки 1-7 / се прави предварителен анализ на ХЗ - установяват се някои особени случаи: $H(x) \equiv const$ в Ω , $Q(x) \equiv const$ в Ω / в частност нула/, $P(x) \equiv const$ в Ω , $Q(x)$ сменя знака си в Ω . Пак там се установява знака на $Q(x)$ в Ω и се осигурява неотрицателност на знаменателя $Q(x)$ в Ω /чрез полагане $H(x) = \frac{-P(x)}{-Q(x)}$ ако $Q(x) \leqq 0$ в Ω /. Към втората част на алгоритма /точка 8/ , където се се решава ХЗ с помощта на симплексната процедура /4.9/, се минава само в случай, че е изпълнено условието /5.2/ и началния опорен план е x_0 от /5.3/.

В описанието на алгоритма ще използваме следните означения за даден опорен план $\hat{x}$, с направления $z_1, z_2, \dots, z_s$ на ребрата излизащи от него / $z_i \in Z(\hat{x})$, $i = \overline{1,s}$ / :

/5.4/
$$\delta_0 = P(\hat{x}) , \quad \delta_j = \langle p, z_j \rangle , \quad j = \overline{1,s}$$
$$\Delta_0 = Q(\hat{x}) , \quad \Delta_j = \langle q, z_j \rangle , \quad j = \overline{1,s}$$

Съгласно определението /4.6/ имаме за $\hat{x}$ оценките

/5.5/
$$h_j = \begin{cases} \dfrac{\delta_j}{\Delta_j} & \text{за } \Delta_j \neq 0 \\ +\infty & \text{за } \Delta_j = 0 \text{ и } \delta_j > 0 \\ -\infty & \text{за } \Delta_j = 0 \text{ и } \delta_j \leqq 0. \end{cases} , \quad j = \overline{1,s}$$

Напомняме, че $Q_0 = \{x / Q(x) = 0\}$.

Алгоритмът е следният:

1. Намираме опорен план на Ω, чрез решаване на задачата

/5.6/ $$\min \{ Q(x) / x \in \Omega \}$$

Задачата решаваме само до намиране на начален опорен план $\hat{x}$ и минаваме в 2. Ако се окаже, че $\Omega = \emptyset$, то и ХЗ няма решение и минаваме в 9.

2. Ако $\frac{\delta_j}{\Delta_j} = const = c$ за тези $j = \overline{0,s}$, за които $\delta_j^2 + \Delta_j^2 \neq 0$ /число върху нула е ∞ /, то:

– при $c < \infty$ имаме $H(x) \equiv const = c$ в Ω т.е. $\sup \{ H(x) / x \in \Omega \} = c$ и минаваме в 9.

– при $c = \infty$ имаме $Q(x) \equiv 0$ т.е. $H(x) \equiv -\infty$ в Ω и минаваме в 9.

3. Ако $\Delta_0 = 0$, минаваме в 4, иначе в 6.

4. Ако $sign\ \Delta_j = const = \varepsilon$ за $\Delta_j \neq 0$ $/ j = \overline{1,s} /$, полагаме

$$P(x) = \varepsilon P(x), \quad Q(x) = \varepsilon Q(x), \quad x_0 = \hat{x}$$

и минаваме в 8.

В противен случай $\sup \{ H(x) / x \in \Omega \} = +\infty$, защото $Q(x)$ сменя знака си в Ω /теорема 1/ и решения са всички точки $x \in \Omega \cap Q_0$. Минаваме в 9.

5. Ако $\Delta_j = 0$ за $j = \overline{1,s}$, то $Q(x) \equiv const = Q(\hat{x})$ в Ω. Полагаме

$$L(x) = \frac{1}{Q(\hat{x})} P(x),$$

решаваме линейната задача $\max \{ L(x) / x \in \Omega \}$ и минаваме в 9.

6. Ако $\delta_j = 0$ за $j = \overline{1,s}$, то $P(x) \equiv const = P(\hat{x})$ в Ω. Полагаме

$$L(x) = (-sign\ \delta_0)\, Q(x),$$

решаваме линейната задача $\max \{ L(x) / x \in \Omega \}$ и минаваме в 9.

В противен случай полагаме

$$P(x) = (sign\ \Delta_0)\, P(x), \quad Q(x) = (sign\ \Delta_0)\, Q(x)$$

7. Ако съществува $\bar{x} \in \Omega$, за което

/5.7/ $$Q(\bar{x}) < 0 ,$$

то $$\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = +\infty$$

защото $Q(x)$ сменя знака си в Ω $/Q(\hat{x}) > 0/$ и решения са всички точки $x \in \Omega \cap Q_0$. Минаваме в 9.

Установяването на /5.7/ става с дорешаване на задача/5.6/

$$\min\{Q(x)/x \in \Omega\} ,$$

чиито опорен план е $\hat{x}$. Задачата решаваме докато стигнем до план $\bar{x}$, за който е изпълнено /5.7/. Цялостното ѝ решаване се налага само, ако $Q(x) \geqq 0$ в Ω . Тогава, ако x^* е нейно решение т.е. $$\min\{Q(x)/x \in \Omega\} = Q(x^*) ,$$

полагаме $x_0 = x^*$ и минаваме в 8.

8. Решаваме ХЗ чрез симплексната процедура /4.9/, с начален опорен план x_0 , а именно чрез процедурата

/5.8/ $$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + t_k z_k \\ z_k &\in Z(x_k), \quad h(z_k) = d^+(x_k) \\ t_k &= \max\{t / x_k + t z_k \in \Omega\} \end{aligned}$$

Процесът на решаване прекъсваме, когато на k -тата итерация имаме един от следните два случая:

- ако $d^+(x_k) \leqq H(x_k) \leqq d^-(x_k)$, то x_k е решение на задачата и $$\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = H(x_k) ;$$

- ако $H(x_k) \leqq d^+(x_k) \leqq d^-(x_k)$, но измежду направленията z_1, $z_2, \dots, z_s$ има направление z_r на неограничено ребро, за което $h_r = d^+(x_k)$, то x_k е субоптимален план на ХЗ, z_r е нейн оптимален а-план и $$\sup\{H(x)/x \in \Omega\} = H_a(z_r) = h_r .$$

9. Край

Както видяхме в § 2, алгоритмите налагат условието $Q(x) > 0$ в Ω или $Q(x) \geqq 0$ в Ω . В описания тук алгоритъм, ако предварително знаем, че $Q(x) \geqq 0$ в Ω , то можем от т.1 да преминем направо в т.8 . Трябва само в т.1 да решим задача /5.6/ докрая т.е. да намерим нейн оптимален план x^* , да положим $x_0 = x^*$ и да минем в т.8 .

Ще се спрем на числената схема на описания алгоритъм, като най-напред ще разгледаме числената схема на т.8 от алгоритма т.е. на симплексната процедура /5.3/ за решаване на ХЗ, когато $Q(x) \geqq 0$ в Ω . Тя малко се различава от тази при линейните задачи. Нека например имаме линейна и хиперболична задачи в каноничната форма т.е. имаме линейната задача /ЛЗ/

$$\sup \left\{ L(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;/\; x \in \Omega \right\}$$

и хиперболичната задача /ХЗ/

$$\sup \left\{ H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \frac{p_0 + \langle p, x \rangle}{q_0 + \langle q, x \rangle} \;\Big/\; x \in \Omega \right\},$$

където $\Omega = \{ x \in E^n / Ax = b, \; x \geqq 0 \}$. Тук A е матрица $m \times n$, $b \in E^m$.

Вземаме тези задачи в канонична форма /множеството Ω се определя от система уравнения и условия за неотрицателност на всички променливи/, за да ползваме симплексните таблици в обичайният им вид. Връзката между една хиперболична задача и нейната канонична форма е същата както при ленийните задачи и се доказва тривиално, затова няма да се спираме на нея. За простота, ще предполагаме от тук нататък, че всички задачи за които става дума, са в канонична форма.

Нека $\hat{x}$ е опорен план на Ω и симплексната му таблица за ЛЗ е табл.1, в която $x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_m}$ /стълб "Б"/ са базисните му променливи и

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{m,n} = B^{-1} A$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T = B^{-1} b$$

$$\bar{\Delta}_0 = c_0 + \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \beta_i \ , \quad \bar{\Delta}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \alpha_{ij} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

където B е базисната му матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{1s_1} \ldots\ldots\ldots a_{1s_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ms_1} \ldots\ldots\ldots a_{ms_m} \end{pmatrix}$$

Както е известно, за компонентите на $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ имаме

$$\hat{x}_{s_i} = \beta_i \ , \quad i = \overline{1,m}$$
$$\hat{x}_j = 0 \ , \quad j = \overline{1,n} \ , \ j \neq s_1, \ldots, s_m$$

и $L(\hat{x}) = \bar{\Delta}_0$.

табл.1

№	Б	$\tilde{c}$	x_1	...	x_j	...	x_n	β
1	x_{s_1}	c_{s_1}	...	...	α_{1j}	...	α_{1n}	β_1
2	x_{s_2}	c_{s_2}	α_{21}	...	α_{2j}	...	α_{2n}	β_2
.	...	....	..	...	...	...	...	...
m	x_{s_m}	c_{s_m}	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}	β_m
$m+1$		$\bar{\Delta}$	$\bar{\Delta}_1$	...	$\bar{\Delta}_j$	...	$\bar{\Delta}_n$	Δ_0

Симплексната таблица на $\hat{x}$ за ХЗ е табл.2 .

табл.2

№	Б	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	x_1	...	x_j	...	x_z	...	x_n	β
1	x_{s_1}	p_{s_1}	q_{s_1}	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1z}	...	α_{1n}	β_1
..	..	..	..	..	...	...	...	...	...	...	...
ℓ	x_{s_ℓ}	p_{s_ℓ}	q_{s_ℓ}	$\alpha_{\ell 1}$	...	$\alpha_{\ell j}$	...	$\alpha_{\ell z}$	...	$\alpha_{\ell n}$	β_ℓ
..	..	..	..	..	...	...	...	...	...	...	...
m	x_{s_m}	p_{s_m}	q_{s_m}	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mz}	...	α_{mn}	β_m
$m+1$			Δ	Δ_1	...	Δ_j	...	Δ_z	...	Δ_n	Δ_0
$m+2$			δ	δ_1	...	δ_j	...	δ_z	...	δ_n	δ_0
$m+3$			h	h_1	...	h_j	...	h_z	...	h_n	

Разликата между двете симплексни таблици е следната:

- вместо стълба $\tilde{c}$ при ЛЗ /табл.1/, чиито елементи са коефициентите $c_{s_1}, c_{s_2}, \ldots, c_{s_m}$ от целевата функция $L(x)$ пред съответните базисни променливи, при ХЗ в табл.2 имаме два стълба $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, съдържащи съответно техните коефициенти $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_m}$ в числителя $P(x)$ и $q_{s_1}, q_{s_2}, \dots, q_{s_m}$ в знаменателя $Q(x)$ на целевата функция $H(x)$;

– вместо един индексен ред "$\bar{\Delta}$" /табл.1/, чиито елементи са $\bar{\Delta}_0$ и оценките $\bar{\Delta}_j$ / $j=\overline{1,n}$ / на променливите, в табл.2 имаме три индексни реда "Δ", "δ" и "h" , които съдържат съответно Δ_0 , δ_0 и оценките Δ_j , δ_j , h_j / $j=\overline{1,n}$ /, получени съгласно /5.4/ и /5.5/ по формулите

/5.9/ $$\Delta_0 = q_0 + \sum_{i=1}^{m} q_{s_i}\beta_i \; , \quad \Delta_j = q_j - \sum_{i=1}^{m} q_{s_i}\alpha_{ij} \; , \quad j=\overline{1,n}$$

/5.10/ $$\delta_0 = p_0 + \sum_{i=1}^{m} p_{s_i}\beta_i \; , \quad \delta_j = p_j - \sum_{i=1}^{m} p_{s_i}\alpha_{ij} \; , \quad j=\overline{1,n}$$

/5.11/ $$h_j = \begin{cases} \dfrac{\delta_j}{\Delta_j} \; , & \Delta_j \neq 0 \\ +\infty \; , & \Delta_j = 0 \; , \; \delta_j > 0 \\ -\infty \; , & \Delta_j = 0 \; , \; \delta_j \leq 0 \end{cases}$$

Ще покажем сега, как се осъществява симплексната процедура /5.8/ за решаване на ХЗ, чрез симплексни таблици от вида на табл.2.

Процедурата /5.8/ се извършва при известен начален опорен план X_0 . Нека табл.2 е неговата симплексна таблица. Тогава:

I. Полагаме $k=0$

II. Правим проверка за оптималност на текущия план X_k :

1/ Пресмятаме оценките

$$d^+(X_k) = \begin{cases} \max\{h_j \,/\, \Delta_j \geq 0, \; j=\overline{1,n}\} \\ -\infty \quad , \text{ ако } \Delta_j < 0 \text{ за } j=\overline{1,n} \end{cases}$$

$$d^-(X_k) = \begin{cases} \min\{h_j \,/\, \Delta_j < 0, \; j=\overline{1,n}\} \\ +\infty \quad , \text{ ако } \Delta_j \geq 0 \text{ за } j=\overline{1,n} \end{cases}$$

2/ Ако

$$d^+(X_k) \leq \frac{\delta_0}{\Delta_0} \leq d^-(X_k)$$

то X_k е решение на ХЗ т.е. $\sup\{H(x) \,/\, x \in \Omega\} = H(X_k) = \dfrac{\delta_0}{\Delta_0}$.

Минаваме в V.

3/ Ако
$$\frac{\delta_0}{\Delta_0} \leqq d^+(x_k) \leqq d^-(x_k)$$
и има индекс r $/ 1 \leqq r \leqq n /$, за който
$$h_r = d^+(x_k), \ \alpha_{ir} \leqq 0, \ i=\overline{1,m},$$
то X_k е субоптимален план, а направлението $Z=(z^1, z^2, \dots, z^n)$ с компоненти /от стълба "X_r"/
$$z^{s_i} = -\alpha_{ir}, \quad i=\overline{1,m}$$
$$z^r = 1, \quad z^j = 0, \quad j=\overline{1,n}, \ j \neq r, s_1, \dots, s_m$$
е оптимален а-план и $\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = H_a(Z) = h_r$. Минаваме в V.

Ако никой от тези случаи не е налице, минаваме в III.

III. Извършваме преход към нов опорен план X_{k+1} :

1/ Новата базисна променлива се избира измежду небазисните променливи x_j $/ j=\overline{1,n}, \ j \neq s_1, \dots, s_m /$ на X_k, за които $h_j = d^+(X_k)$. Нека за определеност тя е x_r т.е. $h_r = d^+(X_k)$. В приетата терминология /[13]/ стълбът "X_r" става "ключов" стълб.

2/ Променливата, която ще излезе от базиса на X_k се определя от
$$\min_{\alpha_{ir} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} = \beta_{lr}$$
и тя е X_{s_l} т.е. редът с номер l става "ключов" ред.

3/ Попълваме новата симплексна таблица - симплексната таблица на новия опорен план X_{k+1} по известните формули /елементарно преобразование с "ключов елемент" α_{lr} - заграден с кръгче в табл.2/ :
$$\alpha'_{lj} = \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lr}}, \quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{ir}\frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lr}}, \ i=\overline{1,m}, \ i \neq l, \ j=\overline{1,n}$$
$$\beta'_l = \frac{\beta_l}{\alpha_{lr}}, \quad \beta'_i = \beta_i - \alpha_{ir}\frac{\beta_l}{\alpha_{lr}}, \ i=\overline{1,m}, \ i \neq l$$
$$\Delta'_0 = \Delta_0 + \beta_l \frac{\Delta_r}{\alpha_{lr}}, \quad \Delta_j' = \Delta_j - \alpha_{lj}\frac{\Delta_r}{\alpha_{lr}}, \quad j=\overline{1,n}$$

$$\delta_0' = \delta_0 + \beta_e \frac{\delta_r}{\alpha_{er}} \ , \quad \delta_j' = \delta_j - \alpha_{ej} \frac{\delta_r}{\alpha_{er}} \ , \quad j = \overline{1,n}$$

/ С "прим" са отбелязани съответните елементи на таблицата на X_{k+1}/.

Индексния ред h се попълва допълнително по формулите:

$$h_j' = \begin{cases} \dfrac{\delta_j'}{\Delta_j'} & , \ \Delta_j' \neq 0 \\ +\infty & , \ \Delta_j' = 0 \ , \ \delta_j' > 0 \\ -\infty & , \ \Delta_j' = 0 \ , \ \delta_j' \leq 0 \end{cases}$$

IV. Полагаме $k = k+1$ и минаваме в II.

V. Край

След като описахме числената схема на симплексната процедура /5.8/ в т.8 на алгоритма, ще проследим сега числената схема на целия алгоритъм по точки:

1/ Намираме начален опорен план $\hat{x}$ на задача /5.6/. Нека табл.3 е симплексната таблица на $\hat{x}$. Допълваме я със стълба "$\widetilde{p}$" и реда "δ", като пресмятаме δ_j / $j = \overline{0,n}$ / по /5.10/ - получаваме табл.4. Минаваме в 2/.

Ако установим, че $\Omega = \emptyset$, то ХЗ няма решение и минаваме в 9/.

табл.3

№	Б	$\widetilde{q}$	x_1	...	x_j	...	x_n	β
1	x_{s_1}	q_{s_1}	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1n}	β_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_{s_m}	q_{s_m}	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}	β_m
m+1		Δ	Δ_1	...	Δ_j	...	Δ_n	Δ_0

2/ Съвпада по текст с т.2 от описанието на алгоритма.

3/ Ако $\Delta_0 = 0$ минаваме в 4/, иначе в 5/.

4/ Ако $\operatorname{sign} \Delta_j = \mathrm{const} = \varepsilon$ за $\Delta_j \neq 0$ / $j = \overline{1,n}$ /, то при $\varepsilon = -1$ сменяме знаците на числата в стълбовете "$\widetilde{p}$", "$\widetilde{q}$" и в редовете "Δ", "δ". Полагаме $x_0 = \hat{x}$ и минаваме в 8/.

табл.4

№	Б	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	x_1	...	x_j	..	x_n	β
1	x_{s_1}	p_{s_1}	q_{s_1}	α_{11}	...	α_{1j}	..	α_{1n}	β_1
..	...	...	...	...	...	...	..	...	...
m	x_{s_m}	p_{s_m}	q_{s_m}	α_{m1}	...	α_{mj}	..	α_{mn}	β_m
m+1			Δ	Δ_1	...	Δ_j	..	Δ_n	Δ_0
m+2			δ	δ_1	...	δ_j	..	δ_n	δ_0

В противен случай $\sup\{H(x)/x\in\Omega\}=\infty$ и минаваме в 9/.

5/ Ако $\Delta_j=0$, $j=\overline{1,n}$, то ХЗ е задача на линейното оптимиране. За начална симплексна таблица й служи табл.4, в която разделяме елементите на стълба "$\tilde{p}$" и реда "δ" с числото Δ_0 и зачеркваме ненужните понататък стълб "$\tilde{q}$" и ред "Δ". След решаване на задачата със симплексна процедура за линейни задачи, минаваме в 9/.

6/ Ако $\delta_j=0$, $j=\overline{1,n}$, то ХЗ е линейна задача. За начална симплексна таблица й служи табл.5, в която умножаваме елементите на стълба "$\tilde{q}$" и реда "Δ" със $(-\operatorname{sign}\delta_0)$ и зачеркваме стълба "$\tilde{p}$" и реда "δ". След решаване на задачата, минаваме в 9/.

7/ Продължаваме решаването на задача /5.6/ с начална симплексна таблица- табл.5 на $\hat{x}$, в която игнорираме стълба "$\tilde{p}$" и реда "δ". Ако в процеса на решаване получим план $\bar{x}$, за който $\Delta_0<0$, то $\sup\{H(x)/x\in\Omega\}=\infty$ и минаваме в 9/. В противен случай стигаме до оптимален план x^* с $Q(x^*)=\Delta_0\geq 0$. Полагаме $x_0=x^*$ и минаваме в 3/.

8/ Решаваме ХЗ :

а/ получаваме началната симплексна таблица на ХЗ /от вида на табл.2/ за опорния план x_0 на симплексната процедура/5.8/:

- ако сме дошли тук от 4/ / $x_0=\hat{x}$ /, за такава ни служи табл.4, която допълваме само с реда h , пресмятайки елементите му по /5.11/ ;

- ако сме дошли тук от 7/ / $x_o = x^*$ /, допълваме симплексната таблица на x^* със стълба "$\tilde{p}$" и редовете "δ" и "h", чиито елементи пресмятаме по /5.10/ и /5.11/.

б/ Изпълняваме симплексната процедура /5.8/ т.е. точки I - V, след което минаваме в 9/.

9/ Край

Накрая, ще се спрем накратко върху числената страна на описания алгоритъм:

1/ В него си служим със симплексни таблици идентични, по вид на информацията и по начин на преобразуване, с тези при линейните оптимизационни задачи. Изключение прави само реда "h", който се добавя към симплексните таблици само за симплексната процедура в т.8 /решаване на ХЗ/ и чиито елементи са оценки специфични за ХЗ.

2/ Решаването на ХЗ със симплексна процедура става в т.8, когато вече е установено от предварителния анализ /точки 1-7 /, че $Q(x) \gtreqless 0$ в Ω /както видяхме, всички алгоритми предполагат, че това условие е налице/. Предложената симплексна процедура за ХЗ се различава от симплексната процедура при линейните задачи само с пресмятането на оценките в реда "h" на текущата симплексна таблица на двете оценки $d^+(x_k)$ и $d^-(x_k)$ за текущия опорен план x_k, което се извършва елементарно по формули /5.11/ и /4.7/.

3/ Анализа на ХЗ /който никой от познатите алгоритми не прави/ се извършва в първата част на алгоритма /точки 1-7/ за да се отделят тривиалните случаи и да се установи знака на $Q(x)$ в Ω, и той е възможно най-икономичен - всяка симплексна таблица получена на някоя стъпка от алгоритма се използва изцяло в логически следващата стъпка от него т.е. няма излишни пресмятания и трупане на излишна информация. При това, този анализ се провежда в точки 1-6 на алгоритма само с помощта на симплексната таблица на началния опорен план $\hat{x}$, получен в т.1 . Същата симплексна таблица служи и за начална таблица в т.7. Така че, до решаването на ХЗ в т.8, се налага /в зависимост от конкретната задача/ или да намерим само начален опорен план $\hat{x}$ на линейната задача /5.6/ (при идване в нея от т.4) , или да решим тази линейна задача докрая (при идване от т.7) .

4/ При решаване на линейната задача /5.6/ в т.7 , може да се включи проверка за оптималност на текущия опорен план и по отношение на ХЗ. Тази проверка трябва да се прави само до попадане в опорен план, който удовлетворява критерия за оптималност на ХЗ и този план да бъде запомнен. Ако в резултат от решаването на линейната задача се установи, че $Q(x) \geqq 0$ в Ω , запомнения опорен план ще бъде решение на ХЗ и изчислителния процес ще се прекрати още в т.7 . Така,в редица случаи,ще имаме съществено съкращаване на пресмятанията.

§6. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЗАДАЧА

Тук ще разгледаме възможността за решаване на хиперболичната оптимизационна задача посредством свеждането й до еквивалентна /в известен смисъл/ линейна оптимизационна задача. Този въпрос, в различна степен на пълнота, се третира от редица автори /[7,13,22]/.

Ако

$$P(x) = p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$Q(x) = q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j x_j$$

и

$$\Omega = \{ x \,/\, a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq 0,\ i = \overline{1,m} \}$$

ще предполагаме, че $Q(x) \geqq 0$ за всяко $x \in \Omega$.

На хиперболичната оптимизационна задача /ХЗ/

/6.1/ $$\sup \{ H(x) \,/\, x \in \Omega \}$$

/тук $H(x)$ е хиперболична функция определена чрез $P(x)$ и $Q(x)$ по /3.1/ / ще съпоставим линейната оптимизационна задача /ЛЗ/

/6.2/ $$\sup \{ L(y) \,/\, y \in \Lambda \}$$

където

/6.3/ $$L(y) = \sum_{j=0}^{n} p_j y_j$$

/6.4/ $$\Lambda = \{ y \,/\, \sum_{j=0}^{n} a_{ij} y_j \leqq 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{j=0}^{n} q_j y_j = 1,\ y_0 \geqq 0 \}$$

Връзката между тези задачи ни дават следните теореми:

ТЕОРЕМА 17. Ако $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \Omega$ $/\hat{\Omega}/$ и $Q(\bar{x}) > 0$, то $\bar{y} = \frac{1}{Q(\bar{x})}(1, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \Lambda$ $/\hat{\Lambda}/$. Ако $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \Lambda$ $/\hat{\Lambda}/$

и $\bar{y}_0 > 0$, то $\bar{x} = \frac{1}{\bar{y}_0}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \Omega$ / $\hat{\Omega}$ /. При това и в двата случая $H(\bar{x}) = L(\bar{y})$.

Доказателство. Нека $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \Omega$ и $Q(\bar{x}) > 0$. Тогава

/6.5/ $$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\bar{y}_j = \frac{1}{Q(\bar{x})}\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j\right) \leqq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

/6.6/ $$\sum_{j=0}^{n} q_j\bar{y}_j = \frac{1}{Q(\bar{x})}\left(q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j\bar{x}_j\right) = 1$$

/6.7/ $$\bar{y}_0 = \frac{1}{Q(\bar{x})} > 0$$

Следователно $\bar{y} \in \Lambda$. Ако $\bar{x} \in \hat{\Omega}$, то $\bar{x}$ ще удовлетворява като равенства n линейно независими условия определящи Ω . Но тогава $\bar{y}$ ще удовлетворява като равенства съответните им условия от /6.5/, а освен това и условието /6.6/ т.е. $n+1$ линейно независими условия определящи Λ , така че $\bar{y} \in \hat{\Lambda}$. Очевидно

$$L(\bar{y}) = \frac{1}{Q(\bar{x})}\left(p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j\bar{x}_j\right) = \frac{P(\bar{x})}{Q(\bar{x})} = H(\bar{x}).$$

По аналогичен начин се доказва и втората част на твърдението.

ТЕОРЕМА 18. Ако $\bar{y} = (0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ е план /опорен план/ на ЛЗ и $\Omega \neq \emptyset$, то $\bar{v} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ е асимптотичен /опорен асимптотичен/ план на ХЗ и $H_a(\bar{v}) = L(\bar{y})$.

Доказателство. Понеже $\bar{y} \in \Lambda$ и $\bar{y}_0 = 0$, то

/6.8/ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \leqq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Следователно $\bar{v} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ е асимптотичан план на ХЗ. От $\sum_{j=1}^{n} q_j\bar{y}_j = 1$ получаваме

$$H_a(\bar{v}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j\bar{y}_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j\bar{y}_j} = L(\bar{y})$$

Ако $\bar{y} \in \hat{\Lambda}$, то $\bar{y}$ ще удовлетворява като равенства $n-1$ линейно независими условия от /6.8/ т.е. $\bar{v}$ е опорен а-план за ХЗ.

ТЕОРЕМА 19. Ако $\bar{v}=(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)$ е а-план /опорен а-план/ на ХЗ и $\langle q,\bar{v}\rangle>0$, то $\bar{y}=\frac{1}{\langle q,\bar{v}\rangle}(0,\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)$ е план/опорен план/ на ЛЗ и $L(\bar{y})=H_a(\bar{v})$.

Доказателство. Щом като $\bar{v}$ е а-план на ХЗ и $\langle q,\bar{v}\rangle>0$, то

/6.9/ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}_j \leqq 0, \quad i=\overline{1,m}$$

от където

/6.10/ $$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\bar{y}_j = \frac{1}{\langle q,\bar{v}\rangle}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}_j \leqq 0, \quad i=\overline{1,m}$$

/6.11/ $$\sum_{j=0}^{n} q_j\bar{y}_j = \frac{1}{\langle q,\bar{v}\rangle}\sum_{j=1}^{n} q_j\bar{v}_j = 1$$

При това

/6.12/ $$\bar{y}_0 = 0$$

следователно $\bar{y}$ е план на ЛЗ. и

$$L(\bar{y})=\frac{1}{\langle q,\bar{v}\rangle}\sum_{j=1}^{n} p_j\bar{v}_j = \frac{\langle p,\bar{v}\rangle}{\langle q,\bar{v}\rangle} = H_a(\bar{v}).$$

Ако $\bar{v}$ е опорен а-план на ХЗ, той ще удовлетворява като равенства $n-1$ линейно независими условия от /6.9/, а от тук $\bar{y}$ ще удовлетворява като равенства $n-1$ линейно независими условия от /6.10/ плюс условията /6.11/ и /6.12/ т.е. общо $n+1$ линейно независими условия. Следователно $\bar{y}$ е опорен план на ЛЗ.

ТЕОРЕМА 20. Ако $\bar{v}$ е а-план на ХЗ и $\langle q,\bar{v}\rangle=0$, $\langle p,\bar{v}\rangle>0$, то $\bar{z}=(0,\bar{v})$ е а-план на ЛЗ и

$$\lim_{t\to+\infty} L(y+t\bar{z})=H_a(\bar{v})=+\infty \quad / y\in\Lambda \quad /$$

Доказателство. Ако $\bar{v}$ е а-план на ХЗ, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}_j \leqq 0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

Тогава за всяко $y\in\Lambda$ и $t\geqq 0$ имаме

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(y_j+t\bar{z}_j)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij}y_j + t\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}_j \leqq 0, \quad i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} q_j(y_j + t\bar{z}_j) = \sum_{j=0}^{n} q_j y_j + t\sum_{j=1}^{n} q_j \bar{v}_j = 1$$

т.е. $\bar{z}$ е a-план на ЛЗ и

$$L(y + t\bar{z}) = P(y) + t\langle p, \bar{v}\rangle \to +\infty$$

Но

$$H_a(\bar{v}) = \frac{\langle p, \bar{v}\rangle}{\langle q, \bar{v}\rangle} = +\infty$$

Следователно $\lim\limits_{t\to+\infty}(y + t\bar{z}) = H_a(\bar{v}) = +\infty$.

ТЕОРЕМА 21. Ако $\bar{z} = (0, \bar{v})$ е a-план на ЛЗ и

$$\lim_{t\to+\infty} L(y + t\bar{z}) = +\infty \quad / y \in \Lambda / ,$$

то $\bar{v}$ е a-план на ХЗ, $\langle q, \bar{v}\rangle = 0$, $\langle p, \bar{v}\rangle > 0$ и

$$H_a(\bar{v}) = \lim_{t\to+\infty} L(y + t\bar{z}) = +\infty$$

Доказателство. Ако $\bar{z} = (0, \bar{v})$ е a-план на ЛЗ, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}_j \le 0 , \quad i = \overline{1,m}$$

т.е. $\bar{v}$ е a-план на ХЗ и

$$\langle q, \bar{v}\rangle = \sum_{j=1}^{n} q_j \bar{v}_j = 0$$

За произволно $y \in \Lambda$ имаме

$$L(y) + t\langle p, \bar{v}\rangle = L(y + t\bar{z}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

Следователно $\langle p, \bar{v}\rangle > 0$.

ТЕОРЕМА 22. Ако $\bar{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ е a-план на ЛЗ, $\bar{z}_0 > 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} L(y + t\bar{z}) = +\infty \quad / y \in \Lambda / ,$$

то $\bar{x} = \frac{1}{\bar{z}_0}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ е план на ХЗ, $Q(\bar{x}) = 0$ и $H(\bar{x}) = +\infty$.

Доказателство. Щом като $\bar{z}$ е a-план на ЛЗ, то

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\bar{z}_j \le 0 , \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} q_j \bar{z}_j = 0$$

и понеже $\bar{z}_0 > 0$, имаме

$$a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\bar{z}_j}{\bar{z}_0} = 0$$

$$q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\bar{z}_j}{\bar{z}_0} = 0$$

Следователно $\bar{x} = \frac{1}{\bar{z}_0} (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ е план на ХЗ и $Q(\bar{x}) = 0$. При това

$$L(y + t\bar{z}) = L(y) + t\bar{z} = L(y) + t\bar{z}_0 P(\bar{x}) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

т.е. $P(\bar{x}) > 0$, така че $H(\bar{x}) = +\infty$.

От горните теореми се вижда, че хиперболичната и съответната й линейна оптимизационни задачи са еквивалентни в следния смисъл: Ако $\Omega \neq \emptyset$, $Q(x) \geqq 0$ и $Q(x) \not\equiv 0$ в Ω , то

1/ $\Lambda \neq \emptyset$

2/ $\sup\{H(x) / x \in \Omega\} = \sup\{L(y) / y \in \Lambda\}$

3/ Ако x^*, y^* са съответни планове на двете задачи т.е. $x^* = \varphi(y^*)$, където $\varphi(\cdot)$ се определя с теоремите 17 - 22 и y^* е оптимален план на ЛЗ, то x^* е оптимален план на ХЗ.

Това дава възможност да решаваме хиперболичните оптимизационни задачи като използваме линейните им еквиваленти. Този подход има това преимущество, че за решаването на хиперболичните задачи могат да се използват програми за решаване на линейни оптимизационни задачи, с каквито са осигурени почти всички изчислителни центрове. Разбира се подходът има и недостатъци. Някои от тях са:

- когато ХЗ има само асимптотично решение, алгоритмите не намират субоптимален план ;

- при линеаризацията на ХЗ се прави трансформацията

$$y_j = y_0 x_j , \; j = \overline{1,n}$$

и се полага $y_0 Q(x) = const$, което води до загуба на точност при малки стойности на $Q(x)$;

- когато знакът на $Q(x)$ в Ω не е известен, се налага решаването на две линейни задачи плюс извършването на някои допълнителни изследвания.

Ще опишем алгоритъм за решаване на ХЗ с помощта на съответната й ЛЗ.

Алгоритъм:

Решаваме ЛЗ. Възможни са случаите:

1/ $\Lambda = \emptyset$. Тогава ХЗ няма решение, понеже или $\Omega = \emptyset$, или $Q(x) \equiv 0$ в Ω. /Ако предварително не знаем, че $Q(x) \geqq 0$ в Ω, то този случай можем да имаме и когато $Q(x) \leqq 0$ или $\Omega \neq \emptyset$, но $Q(x) \leqq 0$ в Ω. Ако е необходимо, можем да положим $H(x) = \frac{-P(x)}{-Q(x)}$ и да решаваме съответната линейна оптимизационна задача/ .

2/ $y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ е решение на ЛЗ :

а/ Ако $y_0^* > 0$, то $x^* = \frac{1}{y_0^*}(y_1^*, \dots, y_n^*)$ е решение на ХЗ и $H(x^*) = L(y^*)$ /теорема 17/.

б/ Ако $y_0^* = 0$, търсим решение y^{**} на ЛЗ, чиято първа компонента $y_0^{**} > 0$. За целта решаваме задачата

/6.13/ $\max\{y_0 / y \in \Lambda, L(y) = L(y^*)\}$

Имаме случаите:

б$_1$/ съществува решение y^{**} на ЛЗ /т.е. план на задача /6.13/ /, за който $y_0^{**} > 0$. Тогава $x^{**} = \frac{1}{y_0^{**}}(y_1^{**}, \dots y_n^{**})$ е решение на ХЗ и $H(x^{**}) = L(y^{**})$ /теорема 17/.

б$_2$/ не съществува решение на ЛЗ с положителна първа компонента /т.е. решението y^{**} на задача /6.13/ има $y_0^{**} = 0$ /.

Тогава:

- Ако $\Omega \neq \emptyset$, то $v^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ е а-план на ХЗ и $H_a(v^*) = L(y^*) = \langle p, v^* \rangle$ /теорема 18/. В този случай $H(x)$ е ограничена отгоре в Ω, но не достига супремума си $\langle p, v^* \rangle$.
- Ако $\Omega = \emptyset$, то ХЗ няма решение. Проверката, че $\Omega = \emptyset$ може да стане посредством решаването на задачата

$$\max\{y_0 / y \in \Lambda\}$$

Ако $\max\{y_0 / y \in \Lambda\} = 0$, то $\Omega = \emptyset$, в противен случай $\Omega \neq \emptyset$.

3/ ЛЗ има само асимптотично решение $z^* = (z_0^*, z_1^*, \dots, z_n^*)$, за което $L(y + t z^*) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

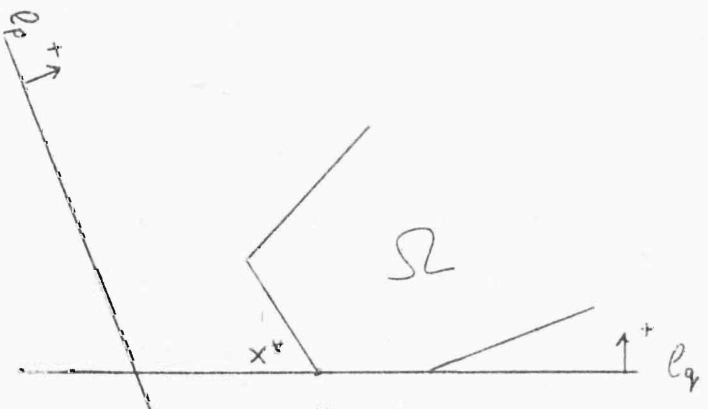
Тогава:

а/ Ако $z_0^* > 0$, то $x^* = \frac{1}{z_0^*}(z_1^*, \dots, z_n^*)$ е план на ХЗ, $Q(x^*) = 0$ и $H(x^*) = +\infty$ /теорема 22/.

б/ Ако $z_0^* = 0$, то $v^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ е а-план на ХЗ и $H_a(v^*) = +\infty$ /теорема 21/.

За геометрична илюстрация на случая 3а/ може да служи например фиг. 1, а на случая 3б/ - фиг.5 от §1 /неограниченото ребро излизащо от b е успоредно на ℓ_q т.е. има направление v^*, което е оптималния план на ХЗ /.

За илюстрация на случая 2/ може да служи фиг.1 от §2, на която е изобразен примера разглеждан във връзка с алгоритма на Клевачев. За тази ХЗ решения са всички точки от неограниченото ребро с начало върха $\hat{x} = (0,3)$ и направление $\hat{z} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, като $\hat{x}$ е опорно решение, а $\hat{z}$ е а-решение. При решаването на съответната й ЛЗ /в случая $\Lambda = \Omega^+$ и $L(y) = L^+(y)$/, ако стигнем до оптималния план $\hat{Y} = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$, който съответства на $\hat{x}$, ще имаме случая 2а/. Ако обаче стигнем до оптималния план $Y' = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, който съответства на $\hat{z}$, ще имаме случая 2б/ т.е. ще се наложи решаването на задача /6.13/.



фиг.1

Трябва да отбележим, че задача /6.13/ се решава само докато стигнем до план с положителна първа компонента /случая $2б_1$/ /. Цялостното й решаване се налага, когато имаме случая $2б_2$/ т.е. всички оптимални планове на ЛЗ имат нулева първа компонента.

За разглеждания пример от §2 задача /6.13/ има вида

/6.14/ $\quad \max\{ y_0 \,/\, y_0 \in \mathbb{R}^+,\ L^+(y) = 1 \}$ $\quad / L^+(Y') = 1 \quad /$

и още на първата итерация стигаме до оптималния план $\hat{Y} = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3})$ на Л3, който е съседен на Y'. Табл.2 в §2 е симплексната таблица на $\hat{Y}$, която е получена директно от тази на плана Y' /табл.1/, като условието $L^+(y) = 1$ в задача /6.14/ е отчетено чрез вкарване в базиса именно на променливата y_0, чиято оценка е нула.

§ 7. ПАРАМЕТРИЧНИ МЕТОДИ

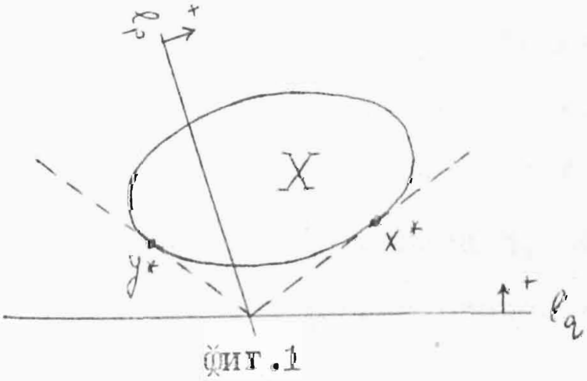
Параметричните методи са едни от най-ранните методи /първият предложен още в 1956 г. метод на Isbell и Marlow [28] е параметричен/ за решаване на хиперболичните оптимизационни задачи. Както вече отбелязахме в § 2 /т.2/, те се основават на очевидната идея, че когато

/7.1/ $\quad Q(x) > 0$ в X и X е компактно,

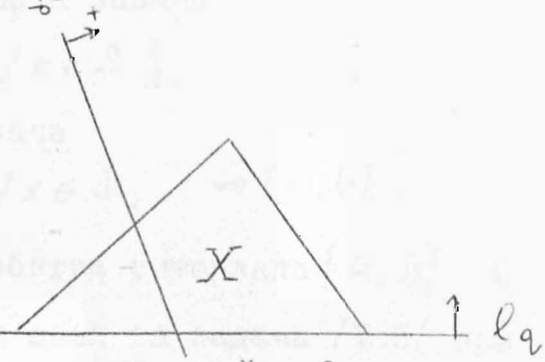
съществува реално число λ^* такова, че функцията $H(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ достига максимума /минимума/ си в тези точки на X, за които

/7.2/ $\quad \max(\min)\{ L(x, \lambda^*) = P(x) - \lambda^* Q(x) \} = 0$.

На фиг.1 това са съответно точките x^* /при максимум/ и y^* /при минимум/.

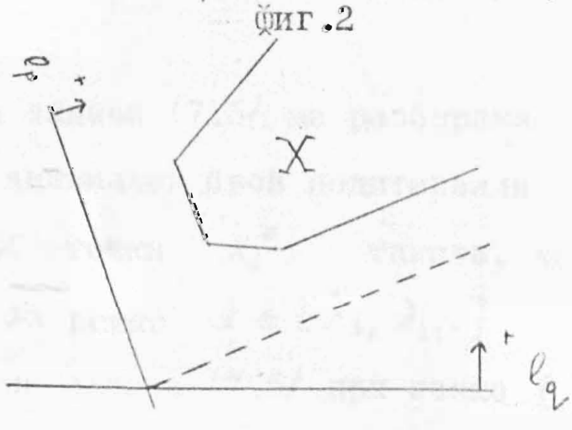


фиг.1



фиг.2

Когато X е неограничено или $Q(x)$ се анулира в точки от X, такова λ^* може и да не съществува /фиг.2,3/. Това усложнява използването на тази



идея и затова параметричните алгоритми работят успешно само при наличие на условията /7.1/.

Ще припомним, че подходите за реализирането на горната идея, когато $X = \Omega$ е многостен, са два. Първият подход анализира последователно параметричната линейна задача

$$\max \{ L(x,\lambda) = P(x) - \lambda Q(x) \,/\, x \in \Omega, \, -\infty < \lambda < +\infty \}$$

до намирането на λ^*, за което е изпълнено /7.2/, а вторият подход търси λ^* чрез решаването на редица от линейни задачи

/7.3/ $$\max \{ L_{k+1}(x) = P(x) - \lambda_k Q(x) \,/\, x \in \Omega \} , \quad k = 0, 1, \dots$$

при подходящ избор на λ_k.

По-долу ще изложим два по-прецизни параметрични алгоритми за решаване на ХЗ, основани на същата идея и използващи съответно първия и втория подходи, които обаче не изискват ограниченост на Ω. Предполага се само, че ако $\Omega \neq \emptyset$, то $Q(x) \not\equiv 0$, $Q(x) \geqq 0$ в Ω. Тези условия могат да бъдат осигурени чрез предварителен анализ на ХЗ, описан в § 5 /т.1-7 от алгоритма/. Както навсякъде досега, предполагаме че $\hat{\Omega} \neq \emptyset$, което не ограничава общността на задачата /на практика се работи с каноничната форма на ХЗ/.

При първия подход, хиперболичната задача

/7.4/ $$\sup \{ H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \,/\, x \in \Omega \}$$

свързваме с параметричната линейна задача

/7.5/ $$\sup \{ L(x,\lambda) = P(x) - \lambda Q(x) \,/\, x \in \Omega, \, \lambda \Rightarrow [a,b] \} ,$$

където $\lambda \Rightarrow [a,b]$ означава, че λ пробягва интервала $[a,b]$. С $x^*(c)$ ще означаваме опорен оптимален план на задача /7.5/ при $\lambda = c$.

Под решение на параметричната задача /7.5/ ще разбираме разбиването на интервала $[a,b]$ на минимален брой подинтервали $[\lambda_s, \lambda_{s+1}]$, $s = \overline{0,k}$ и намирането на k точки x_s^* такива, че

$$x_s^* = x^*(\lambda) \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in [\lambda_s, \lambda_{s+1}]$$

т.е. x_s^* е опорен оптимален план на задача /7.5/ при всяко λ

от интервала $[\lambda_s, \lambda_{s+1}]$.

При описването на алгоритмите ще използваме и следните означения:

$$H^* = \sup\{H(x) \,/\, x \in \Omega\} \quad /\text{може да бъде и } \infty \,/$$

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 0 \\ -\infty & \text{при } a \leqq 0 \end{cases}$$

Алгоритмът е следният:

1. Решаваме задачата

$$\sup\{L(x,0) = P(x) \,/\, x \in \Omega\}$$

а/ Ако $\Omega = \emptyset$, то ХЗ няма решение.

б/ Ако $L(x,0) \to \infty$ в Ω /фиг.4,5,6,7,8/, полагаме $\lambda_0 = 0$ и минаваме в 3.

в/ Ако x^* е оптимален план на задачата, полагаме

$$\lambda_0 = \frac{P(x^*)}{Q(x^*)} \quad , \quad x_0 = x^*$$

и ако $P(x^*) > 0$ минаваме в 4 , иначе в 2.

2. Решаваме задачата

$$\sup\{L(x,\lambda_0) = P(x) - \lambda_0 Q(x) \,/\, x \in \Omega\}$$

при начален опорен план x_0 .

а/ Ако $L(x,\lambda_0) \to \infty$ в Ω /фиг.9/, минаваме в 3.

б/ Ако x^* е оптимален план на задачата, полагаме

$$\lambda_0 = \frac{P(x^*)}{Q(x^*)} \quad , \quad x_0 = x^*$$

и минаваме в 4.

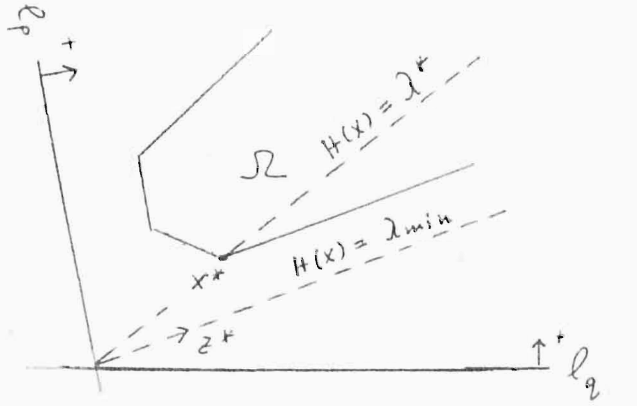
3. Намираме

$$\lambda_{min} = \min\{\lambda \,/\, \lambda \geqq \lambda_0 ,\ L(x,\lambda) < \infty \text{ в } \Omega\}$$

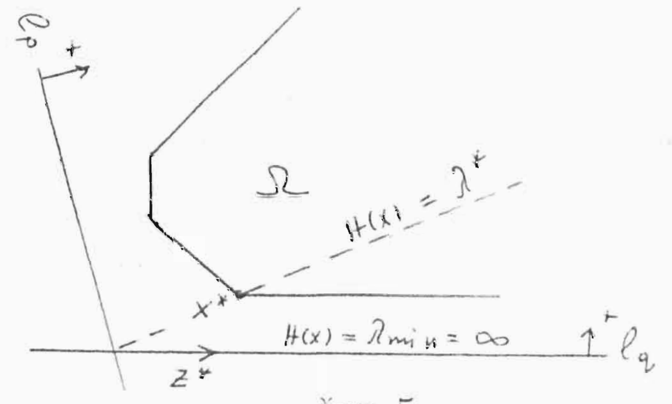
и нека $x^* = x^*(\lambda_{min})$, а $\lambda^* = \dfrac{P(x^*)}{Q(x^*)}$.

а/ Ако $\lambda^* > \lambda_{min}$, полагаме $\lambda_0 = \lambda^*$, $x_0 = x^*$ и минаваме в 4.

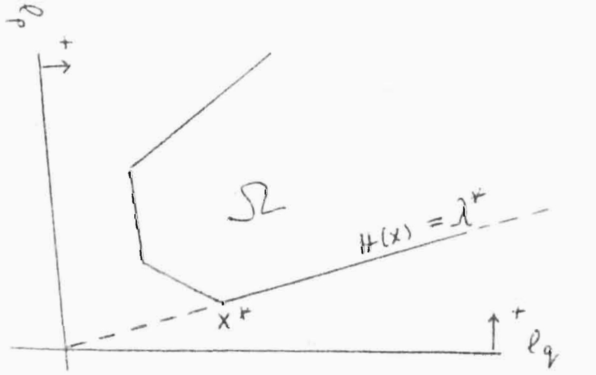
б/ Ако $\lambda^* = \lambda_{min}$, то x^* е оптимален план и за ХЗ и $H^* = \lambda_{min}$ (фиг. 6, 7) .



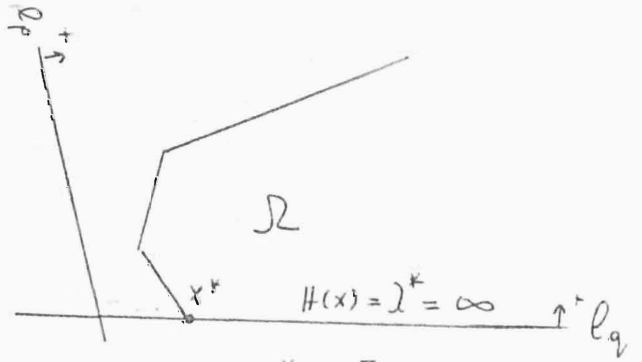
фиг.4



фиг.5



фиг.6



фиг.7

в/ Ако $\lambda^* < \lambda_{min}$ /фиг.4,5,9/, то x^* е субоптимален план НА ХЗ, а асимптотичен оптимален план е това направление $z^* \in Z(x^*) \cap \bar{V}(\Omega)$ /т.е. z^* е направление на неограничено ребро излизащо от x^*/, за което $\frac{\langle p, z^* \rangle}{\langle q, z^* \rangle} = \lambda_{min}$ и $H^* = \lambda_{min}$.

4. Решаваме параметричната линейна задача

$$\max\{ L(x,\lambda) \,/\, x \in \Omega ;\ \lambda \Rightarrow [\lambda_0, +\infty) \}$$

при начален опорен план x_0 . Последователно получаваме интервалите $[\lambda_s, \lambda_{s+1}]$, $s = 0, 1, \ldots$, съответните им оптимални планове x_s^* и оценките

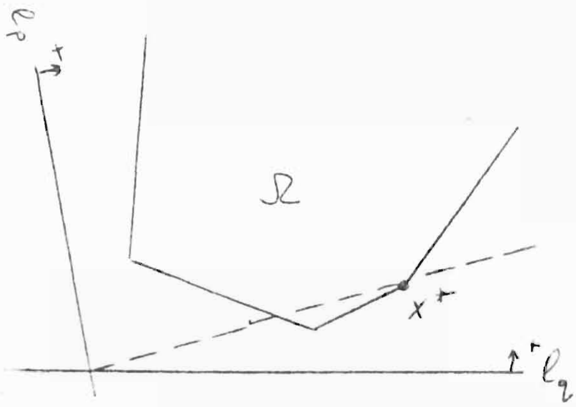
$$\lambda_s^* = \frac{P(x_s^*)}{Q(x_s^*)}$$

дотогава, докато стигнем до интервал $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, за който

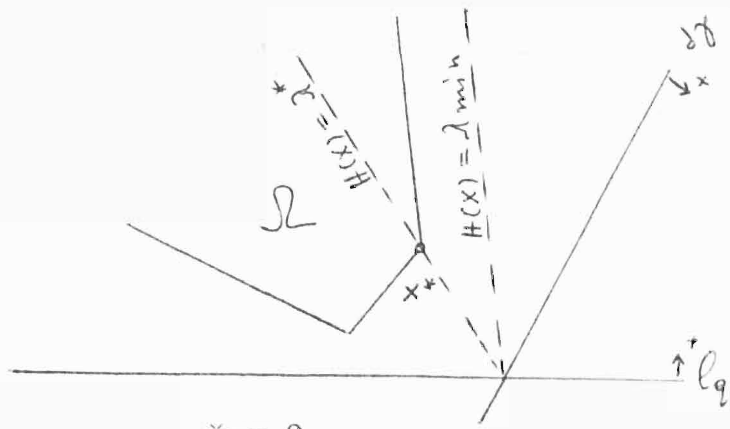
$$\lambda_i^* \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] .$$

Тогава x_i^* е оптимален план на ХЗ и $H^* = \lambda_i^*$.

Забележка. Ако предварително знаем, че Ω е ограничено, то от т.1 преминаваме направо в т.4.



фиг.8



фиг.9

При втория подход, хиперболичната задача /7.4/ свързваме с редицата от линейни задачи /7.3/. Алгоритма, който даваме подолу не се различава от описания алгоритъм в първите три точки, защото и при него започваме със задачата за максимизиране на функцията $L_1(x) = P(x)$ т.е. с $\lambda_0 = 0$.

Алгоритмът е следният:

1/ Полагаме $k = 1$, $\lambda_0 = 0$ и решаваме задачата

$$\sup\{ L_1(x) = P(x),\ x \in \Omega \}.$$

а/ Ако $\Omega = \emptyset$, то ХЗ няма решение.

б/ Ако $L_1(x) \to \infty$ в Ω /фиг.4,5,6,7,8/, минаваме в 3/.

в/ Ако x^* е оптимален план на задачата, полагаме $x_1 = x^*$ и ако $P(x^*) > 0$ минаваме в 4/, иначе в 2/.

2/ Решаваме задачата

$$\sup\left\{ L_2(x) = P(x) - \frac{P(x_1)}{Q(x_1)} Q(x) \,/\, x \in \Omega \right\}$$

при начален опорен план x_1 .

а/ Ако $L_2(x) \to \infty$ в Ω /фиг.9/, минаваме в 3/.

б/ Ако x^* е оптимален план на задачата, полагаме

$$k = k+1 \ , \ x_k = x^*$$

и минаваме в 4/.

3/ Намираме $\lambda_{min} = \{ \lambda \,/\, \lambda \geq \lambda_0 ,\ L(x) = P(x) - \lambda Q(x) < \infty$ в $\Omega \}$ и нека $x^* = x^*(\lambda_{min})$, а $\lambda^* = \dfrac{P(x^*)}{Q(x^*)}$.

а/ Ако $\lambda^* > \lambda_{min}$, полагаме $x_k = x^*$ и минаваме в 4/

б/ Ако $\lambda^* = \lambda_{min}$, то x^* е оптимален план на ХЗ и $H^* = \lambda_{min}$ /фиг.6,7/.

в/ Ако $\lambda^* < \lambda_{min}$, то x^* е субоптимален план на ХЗ а асимптотичен оптимален план е това направление $z^* \in Z(x^*) \cap V(\Omega)$, за което $\frac{\langle p, z^* \rangle}{\langle q, z^* \rangle} = \lambda_{min}$ и $H^* = \lambda_{min}$ /фиг.4,5,9/.

4/ Ако x_k е оптимален план на задачата

$$\sup \left\{ L_{k+1}(x) = P(x) + \frac{P(x_k)}{Q(x_k)} Q(x) \,/\, x \in \Omega \right\},$$

то той е оптимален план и на ХЗ и $H^* = \frac{P(x_k)}{Q(x_k)}$, иначе минаваме в 5/.

5/ Правим една симплексна итерация минавайки от опорния план x_k към опорния план x_{k+1} . Полагаме $k = k+1$ и минаваме в 4/.

И при този алгоритъм, ако предварително знаем, че Ω е ограничено, то от т.1/минаваме направо в т.4/.

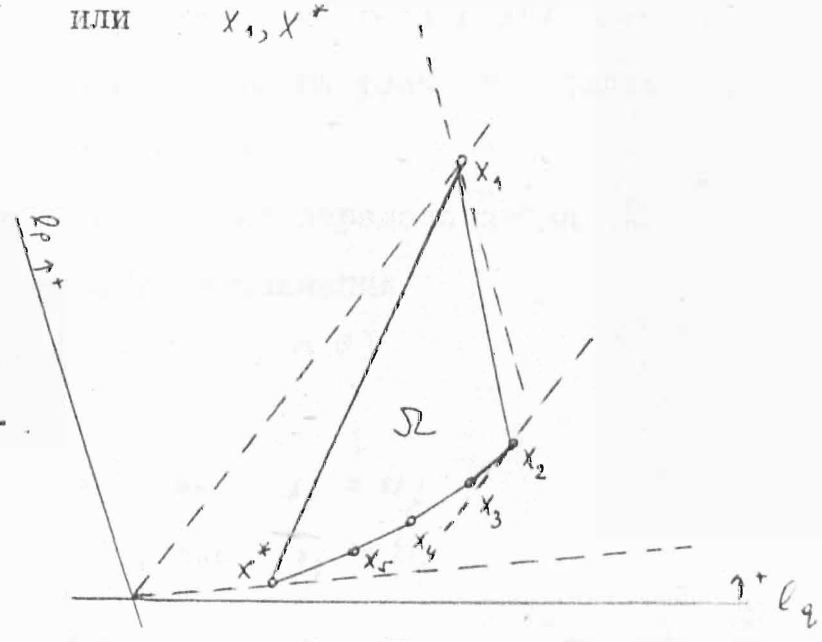
На фиг.10 е даден пример /благоприятен за втория алгоритъм/, който илюстрира разликата между двата алгоритма. Възможни преходи за стигане до оптималния план x^* на ХЗ , в зависимост от критерия за избора на ребро, за първия алгоритъм са

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x^*$ или $x_1, x^*, x_5, x_4, x_3, x_2, x_3, x_4, x_5, x^*$

а за втория алгоритъм са

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x^*$ или x_1, x^*

И при двата алгоритма, ако проверяваме,дали опорните планове през които минаваме удовлетворяват критерия за оптималност от теорема 13, в редица случаи съществено ще съкратим изчислителния процес.



Фиг.10

§8. ПРИЛОЖЕНИЯ

В този параграф искаме да очертаем две направления на приложение на алгоритмите на хиперболичното оптимиране, а именно: от една страна, възможността за значително повишаване на ефективността им при стесняване на класа задачи, и от друга, използването им като помощни процедури при решаване на оптимизационни задачи от много по-общ тип.

8.1. Ще се спрем на хиперболичната задача

/8.1/ $$\sup \{ H(x) \,/\, x \in \Omega \}$$

където

/8.2/ $$\Omega = \{ x \,/\, a \leqq x \leqq b \}$$
$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

т.е. Ω е паралелопипед. Тук

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + \langle p, x \rangle}{q_0 + \langle q, x \rangle} .$$

Въпреки твърде специалния вид на Ω , този модел се използва широко в практиката, поради простотата си или поради липсата на повече информация.

Алгоритма, който описваме по-долу се основава на теоремите от §3 и §4. Можем да считаме, че това е алгоритма от §5, съобразен със специфичните особености на този клас задачи. Ще използваме възприетите там означения.

Очевидно, ако $\hat{x}$ е връх на паралелопипеда Ω , то от него излизат точно n ребра с направления

$$z_j = (0, 0, \dots, 0, \varepsilon_j, 0, \dots 0)$$

където

$$\varepsilon_j = \begin{cases} +1 , & \text{ако } x_j = a_j \\ -1 , & \text{ако } x_j = b_j \end{cases}$$

Освен това

$$\delta_j = \langle p, z_j \rangle = \begin{cases} p_j & \text{, ако } x_j = a_j \\ -p_j & \text{, ако } x_j = b_j \end{cases}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\Delta_j = \langle q, z_j \rangle = \begin{cases} q_j & \text{, ако } x_j = a_j \\ -q_j & \text{, ако } x_j = b_j \end{cases}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$h_j = h(z_j) = \frac{\delta_j}{\Delta_j}, \quad j = \overline{1,n}$$

и

$$h_j \in \begin{cases} Z^+(\hat{x}) & \text{, ако } \Delta_j = \varepsilon_j q_j > 0 \\ Z^-(\hat{x}) & \text{, ако } \Delta_j = \varepsilon_j q_j < 0 \end{cases}$$

Очевидно h_j $/ 1 \leq j \leq n /$ са инвариантни по стойност при смяна на опорния план и променят само типа си /от $Z^+(\cdot)$ или $Z^-(\cdot)$/, когато j -тата компонента сменя мястото си от единия край на интервала $[a_j, b_j]$ в другия. Също така лесно се вижда, че ако $\check{x} = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$ и $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ са опорни планове с компоненти

/8.3/ $$\check{x}_j = \begin{cases} a_j & \text{при } q_j > 0 \\ b_j & \text{при } q_j < 0 \end{cases}, \qquad \hat{x}_j = \begin{cases} b_j & \text{при } q_j > 0 \\ a_j & \text{при } q_j < 0 \end{cases}$$

то

$$Q(\check{x}) = \min\{Q(x) \,/\, a \leq x \leq b\} = Q_{min}$$
$$Q(\hat{x}) = \max\{Q(x) \,/\, a \leq x \leq b\} = Q_{max}$$

Тъй като, ако $q_j = 0$ $/ 1 \leq j \leq n /$, то в оптималния план за компонентата му x_j имаме

$$x_j = \begin{cases} a_j & , p_j < 0 \\ b_j & , p_j > 0 \end{cases}$$

а ако $a_j = b_j$, то $x_j = a_j = b_j$, можем да считаме, че са изпълнени условията

$$q_j \neq 0 \;, \quad a_j < b_j \;, \quad j = \overline{1,n} \;.$$

При тези условия не е възможно $Q(x) \equiv const$ в Ω . Ще предполагаме също, че $H(x) \not\equiv const$ в Ω , което в случая означава, че $H(x) \not\equiv const$ в E^n т.е. че $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ не са сливащи се хиперравнини.

Алгоритмът за решаване на задача /8.1/,/8.2/ е следният:

1/ Определяме компонентите на $\check{x}$ по /8.3/ и пресмятаме $Q_{min} = Q(\check{x})$. Ако

$$Q_{min} \begin{cases} > 0, & \text{полагаме } x^* = \check{x} \text{ и минаваме в 4/.} \\ = 0, & \text{полагаме } x^* = \check{x} \text{ и минаваме в 3/.} \\ < 0, & \text{минаваме в 2/.} \end{cases}$$

2/ Определяме компонентите на $\hat{x}$ по /8.3/ и пресмятаме $Q_{max} = Q(\hat{x})$.

а/ Ако $Q_{max} > 0$, то $\sup\{H(x)/x \in \mathcal{R}\} = \infty$ и минаваме в 8/.

б/ Сменяме знаците на $P(x)$ и $Q(x)$, полагаме $x^* = \hat{x}$ и при $Q_{max} < 0$ минаваме в 4/, иначе в 3/.

3/ Пресмятаме $P(x^*)$. Ако $P(x^*) > 0$, то $\sup\{H(x)/x \in \mathcal{R}\} = \infty$ и минаваме в 8/, иначе в 4/.

4/ Подреждаме числата $h_j = \frac{p_j}{q_j} / j = \overline{1,n}$ / във възходящ ред:

$$h_{j_1} \leqq h_{j_2} \leqq \dots \leqq h_{j_k} \leqq \dots \leqq h_{j_n}$$

5/ Полагаме $k = n$

6/ Пресмятаме $h_0 = \frac{P(x^*)}{Q(x^*)}$:

а/ Ако $h_0 \geqq h_{j_k}$, то x^* е решение на задачата и $\sup\{H(x)/x \in \mathcal{R}\} = H(x^*)$. Минаваме в 8/.

б/ Ако $h_0 < h_{j_k}$, полагаме $x^*_{j_k} = a_{j_k} + b_{j_k} - x^*_{j_k}$ и минаваме в 7/.

7/ Полагаме $k = k-1$ и минаваме в 6/.

8/ Край

8.2. Ще се спрем сега накратко на възможността да използваме численните методи на хиперболичното оптимиране за решаване на оптимизационни задачи с по-сложна структура. Да разгледаме задачата

$$/8.4/ \qquad \sup\left\{ h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \,/\, x \in X \right\},$$

където

/8.5/ $$\mathfrak{X} = \{ x \in E^n \mid g_i \leqq 0 ,\ i = \overline{1,m} \}$$

Предполагаме, че $q(x) \geqq 0$ в $\mathfrak{X}$.

На задача /8.4/,/8.5/ съпоставяме следната еквивалентна задача

/8.6/ $$\sup \left\{ H(x, x_{n+1}, x_{n+2}) = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} \mid (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \tilde{\mathfrak{X}} \right\}$$

/8.7/ $$\tilde{\mathfrak{X}} = \{ (x, x_{n+1}, x_{n+2}) \in E^{n+2} \mid g_i \leqq 0,\ i = \overline{1,m},\ p(x) \geqq x_{n+1},\ q(x) \leqq x_{n+2} \}$$

Еквивалентността на тези задачи се заключава в следното:

1/ $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ точно тогава, когато $\tilde{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$.

2/ Ако x^* е решение на задача /8.4/,/8,5/, то $(x^*, p(x^*), q(x^*))$ е решение на задача /8.6/,/8.7/.

3/ Ако $(x^*, x^*_{n+1}, x^*_{n+2})$ е решение на задача /8.6/,/8.7/, то x^* е решение на задача /8.4/,/8.5/ и

$$\sup \{ h(x) \mid x \in \mathfrak{X} \} = \frac{x^*_{n+1}}{x^*_{n+2}} .$$

Когато е изпълнено условието

/8.8/ $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, $-p(x)$, $q(x)$ – изпъкнали функции

множествата $\mathfrak{X}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}$ са изпъкнали и затворени. Следователно, без ограничение на общността можем да предполагаме, че в задачата /8.4/,/8.5/,/8.8/ $p(x)$ и $q(x)$ са линейни функции.

И така, по-долу ще разглеждаме задачата

/8.9/ $$\sup \left\{ H(x) = \frac{\langle p, x \rangle}{\langle q, x \rangle} \mid g_i(x) \leqq 0 ,\ i = \overline{1,m} \right\}$$

при условието /8.8/.

За решаването на този тип задачи ще приложим метода на отсичащите равнини. Идеята на метода е проста и интуитивно ясна. Конструираме редица от хиперболични задачи $\mathcal{H}_k$, апроксимираща задача /8.9/, от вида

$$\mathcal{H}_k : \sup \{ H(x) \mid x \in \Omega_k \} , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

където Ω_k са многостени със следните свойства:

/8.10/ $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset X = \{x \,/\, g_i(x) \leqq 0\}$.

/8.11/ ако x_k^* е решение на задачата $\mathcal{H}_k$, то $x_k^* \notin \Omega_{k+1}$.

При известни условия редицата $\{x_k^*\}$ от решение на задачите $\mathcal{H}_k$ е оптимизираща редица за задача /8.9/.

За да опишем по-подробно как се построяват многостените Ω_k , въвеждаме множествата

$$J = \{1, 2, \dots m\}$$

$$J(x) = \{i \in J \,/\, g_i(x) > 0\}$$

$$\Omega(\bar{x}) = \{x \,/\, \langle \nabla g_i(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + g_i(\bar{x}) \leqq 0,\ i \in J\}$$

$$\Omega^+(\bar{x}) = \{x \,/\, \langle \nabla g_i(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + g_i(\bar{x}) \leqq 0,\ i \in J(\bar{x})\}$$

за $\bar{x} \notin X$.

Очевидно, при произволно $\bar{x} \in E^n$, $X \subset \Omega(\bar{x})$ и ако $\bar{x} \notin X$, то $\bar{x} \notin \Omega^+(\bar{x})$.

Сега ще дадем един начин за построяване на многостените Ω_k при предположението, че $g_i(x)$ са диференцируеми функции.

Вземаме произволен набор от точки на E^n $\{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^S\}$.

Тогава:

1. $\Omega_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{S} \Omega(x_0^k)$

2. Ако x_k^* е оптимален или субоптимален план на задачата $\mathcal{H}_k$, то
$$\Omega_{k+1} = \Omega_k \cap \Omega^+(x_k^*) .$$

Очевидно, така построените множества притежават свойствата /8.10/ и /8.11/

Ще отбележим още и възможността за използване на алгоритмите на хиперболичното оптимиране като помощни процедури и при решаване на целочислени хиперболични задачи.

Г Л А В А III

ИЗРОДЕНИ КВАДРАТИЧНИ ОПТИМИЗАЦИОННИ ЗАДАЧИ

Квадратичните оптимизационни задачи или задачите на квадратичното оптимиране се формулират така

$$\min \{ Q(x) = \langle Cx, x \rangle + \langle p, x \rangle + p_0 \;/\; x \in \Omega \}$$

където Ω е многостен т.е.

$$\Omega = \{ x \;/\; Ax \leq b \}$$

Квадратичните оптимизационни задачи са също основен тип задачи, след линейните и хиперболичните задачи. Те имат както голямо самостоятелно значение при моделиране на реални системи, така и спомагателно значение при решаване на по-сложни оптимизационни задачи.

Числените методи и алгоритми за решаване на квадратични задачи започват усилено да се развиват около 60-те години/ [19, 20,24,26,30,37,39]/ и това развитие продължава и до днес/ [1, 8, 16,18,34]/ .

Квадратичните оптимизационни задачи са далеч по-сложни от линейните главно поради това, че :

1. Информацията с която се определя квадратичната функция е от порядъка на n^2 /при линейната функция е n /;

2. Квадратичната функция може да достигне екстремума си във всяка точка от областта;

3. Квадратичната функция може да има и локални екстремуми в областта.

Ето защо,числените методи за решаването им са много трудоемки и почти непригодни при практически задачи с големи размери. Въпреки че почти всички числени методи известни досега, са за решаване на по-тесен клас квадратични задачи, а именно при изпъкналост или строга изпъкналост на целевата функция, трудностите си остават значителни и при големи размери непреодолими.

Тук ще разгледаме една специална класа квадратични задачи, за които известните методи са почти неприложими, но специфичните им особености дават възможност да се решават ефективно с помощта на симплексна процедура. Този клас задачи е:

/1/ $$\inf(\sup)\{F(x)\ /\ x\in\Omega\}$$

където

/2/ $$F(x)=P(x)\,Q(x)=(\langle p,x\rangle+p_0)(\langle q,x\rangle+q_0)$$

/3/ $$\Omega=\{x\ /\ Ax\leqq b\}$$

т.е. квадратични задачи, при които целевата функция е произведение на две афинни функции. Този клас задачи ще наричаме изродени квадратични оптимизационни задачи, а функцията /2/ - изродена квадратична функция.

§1. СВОЙСТВА НА ИЗРОДЕНИТЕ КВАДРАТИЧНИ ФУНКЦИИ

В този параграф ще разгледаме някои основни свойства на изродените квадратични функции, необходими за изграждането и обосноваването на числените методи за решаване на оптимизационните задачи /1/-/3/. Най-напред ще отбележим едно основно екстремално свойство на всяка квадратична функция.

ТЕОРЕМА 1. Ако квадратичната функция

$$\langle Cx,x\rangle+\langle p,x\rangle+p_0$$

е ограничена отгоре /отдолу/ в многостен*, тя достига супремума /инфимума/ си /[6]/.

Понататък ще разглеждаме квадратични функции от вида

/1.1/ $$F(x)=P(x)\,Q(x)=(\langle p,x\rangle+p_0)(\langle q,x\rangle+q_0)$$

Въвеждаме следните означения :

$$W_{++}=\{x\ /\ P(x)\geqq 0,\ Q(x)\geqq 0\}$$

---

*/ Припомняме, че "многостен" е употребено в смисъл на изпъкнало многостенно множество.

$$W_{+-} = \{x \,/\, P(x) \geqq 0,\ Q(x) \leqq 0\}$$

$$W_{-+} = \{x \,/\, P(x) \leqq 0,\ Q(x) \geqq 0\}$$

$$W_{--} = \{x \,/\, P(x) \leqq 0,\ Q(x) \leqq 0\}$$

$$\Omega_{++} = \Omega \cap W_{++}$$

$$\Omega_{+-} = \Omega \cap W_{+-}$$

$$\Omega_{-+} = \Omega \cap W_{-+}$$

$$\Omega_{--} = \Omega \cap W_{--}$$

Сега ще дефинираме някои понятия и ще докажем някои необходими твърдения.

Дефиниция 1. Функцията $f(x)$ наричаме квазиизпъкнала в изпъкналото множество X, ако за всеки две точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и всяко $\lambda \in [0,1]$ е изпълнено

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqq \max\,(f(x_1), f(x_2))$$

и квазивдлъбната, ако

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqq \min\,(f(x_1), f(x_2))$$

ТЕОРЕМА 2. Функцията /1.1/ е квазивдлъбната в W_{++} и W_{--} и квазиизпъкнала в W_{+-} и W_{-+}.

Доказателство. Ще разгледаме функцията $F(x)$ в W_{++}. Останалите три случая се получават от този, като се има предвид, че

$$F(x) = (-P(x))(-Q(x))$$

и

$$-F(x) = P(x)(-Q(x)) = (-P(x))\,Q(x).$$

И така, нека $x \in W_{++}$, $y \in W_{++}$ т.е.

$$P(x) \geqq 0,\ Q(x) \geqq 0,\ 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Тогава

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = [\langle p, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle + p_0].[\langle q, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle + q_0]$$

$$= \{\lambda[\langle p, x\rangle + p_0] + (1-\lambda)[\langle p, y\rangle + p_0]\}\{\lambda[\langle q, x\rangle + q_0] + (1-\lambda)[\langle q, y\rangle + q_0]\}$$

$$= [\lambda P(x) + (1-\lambda) P(y)] [\lambda Q(x) + (1-\lambda) Q(y)]$$

$$= \lambda^2 P(x)Q(x) + (1-\lambda)^2 P(y)Q(y) + \lambda(1-\lambda)[P(x)Q(y) + P(y)Q(x)]$$

$$\geqq \lambda^2 F(x) + (1-\lambda)^2 F(y) + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{P(x)Q(y)P(y)Q(x)}$$

$$= \lambda^2 F(x) + (1-\lambda)^2 F(y) + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{F(x)F(y)}$$

$$= [\lambda\sqrt{F(x)} + (1-\lambda)\sqrt{F(y)}]^2$$

$$\geqq [\lambda\sqrt{\min(F(x), F(y))} + (1-\lambda)\sqrt{\min(F(x), F(y))}]^2$$

$$= \min(F(x), F(y))$$

Следователно $F(x)$ е квазивдлъбната в W_{++} .

Забележка. За да имаме равенство т.е.

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \min(F(x), F(y))$$

трябва и на двете места, в които имаме неравенство да имаме равенства, а за това е необходимо и достатъчно

- за първото $P(x)Q(y) = P(y)Q(x)$
- за второто $P(x)Q(x) = P(y)Q(y)$.

Следователно равенство имаме точно тогава, когато

/1.2/ $P(x) = P(y)$ и $Q(x) = Q(y)$

По-надолу ще разгледаме някои екстремални свойства на функцията $F(x) = P(x)Q(x)$ върху многостен $\Omega = \{x / Ax \leqq b\}$. Ще предполагаме, че $\hat{\Omega} \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3. Ако $F(x)$ е ограничена отдолу /отгоре/ в Ω , тя достига инфимума /супремума/ си върху ребро на Ω .

Доказателство. От теорема 1 следва, че $F(x)$ достига инфимума /супремума/ си в Ω . Нека

$$F(x^*) = \inf (\sup) \{F(x) / x \in \Omega\}$$

и

$$Q(x^*) = Q^*, \quad P(x^*) = P^*$$

Разглеждаме задачата

$$\min(\max)\{L(x) = \mathcal{P}(x^*)Q(x) \,/\, x \in \Omega'\}$$

където $\Omega' = \{x \,/\, Ax \leq b \,,\, \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^*\}$.

Тази задача има решение в крайна точка $\bar{x} \in \hat{\Omega}'$. Очевидно

$$Q(\bar{x}) = Q^* \,,\quad \mathcal{P}(\bar{x}) = \mathcal{P}^*$$

$$F(\bar{x}) = \mathcal{P}^* Q^* = F(x^*)$$

т.е. във точката $\bar{x}$ функцията $F(x)$ достига инфимума /супремума/ си. Но точката $\bar{x}$ е крайна за Ω', следователно лежи на ребро на многостена Ω.

Има и случаи, когато може да се твърди, че екструмума се достига и във връх на многостена, а именно:

ТЕОРЕМА 4. Функцията $F(x)$ достига инфимума /супремума/ си в Ω_{++} и Ω_{--} / Ω_{+-} и Ω_{-+} / в крайна точка на тези многостени.

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато $F(x)$ достига екстремума си в Ω_{++}. Останалите случаи се разглеждат аналогично. Функцията $F(x)$ достига инфимума си в ребро на многостена Ω_{++} /теорема 3/. Ако точката на минимум x^* не е крайна точка, нека y и z са две произволни точки от това ребро, отлични от x^* и

$$x^* = \lambda y + (1-\lambda) z \quad / 0 < \lambda < 1 /$$

От една страна имаме

$$F(x^*) \leqq F(y) \text{ и } F(x^*) \leqq F(z)$$

т.е.

$$F(x^*) \leqq \min(F(y), F(z)),$$

а от друга, поради квазивдлъбнатостта на функцията $F(x)$ в Ω_{++}

$$F(x^*) \geqq \min(F(y), F(z))$$

или

$$F(x^*) = \min(F(y), F(z)).$$

Но това е възможно само ако /забележката към теорема 2/

$$F(x^*) = F(y) = F(z)$$

т.е. функцията достига инфимума си върху цялото ребро, следователно и в крайните му точки.

ТЕОРЕМА 5. Ако X е изпъкнало затворено множество и функцията $F(x)$ има максимум /минимум/ в точката $x^* \in X$, то съществуват константи α и β такива, че функцията

$$L(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x)$$

има максимум /минимум/ в същата точка.

Доказателство. Ще разгледаме случая за максимум. При минимум доказателството е аналогично. И така, нека $x^* \in X$ и $F(x^*) = \max\{F(x) / x \in X\}$. Следователно $\langle \nabla F(x^*), x - x^* \rangle \leqq 0$ за всяко $x \in X$. Разглеждаме функцията

$$L(x) = Q(x^*) P(x) + P(x^*) Q(x)$$

$$\begin{aligned} L(x^*) - L(x) &= 2 P(x^*) Q(x^*) - Q(x^*) P(x) - P(x^*) Q(x) \\ &= \big(P(x^*) - P(x)\big) Q(x^*) + \big(Q(x^*) - Q(x)\big) P(x^*) \\ &= \langle p, x^* - x \rangle Q(x^*) + \langle q, x^* - x \rangle P(x^*) \\ &= \langle p\, Q(x^*) + q\, P(x^*), x^* - x \rangle \\ &= \langle \nabla F(x^*), x^* - x \rangle \\ &= -\langle \nabla F(x^*), x - x^* \rangle \geqq 0 \quad \text{за всяко } x \in X \end{aligned}$$

Следователно

$$L(x^*) \geqq L(x) \quad \text{за всяко } x \in X$$

т.е. при $\alpha = Q(x^*)$ и $\beta = P(x^*)$ функцията

$$L(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x)$$

има максимум в точката $x^* \in X$.

ТЕОРЕМА 6. Нека изпъкналото и затворено множество $X \subset W_{++}$, $x^* \in X$, $P(x^*) + Q(x^*) \neq 0$ и $L(x) = Q(x^*) P(x) + P(x^*) Q(x)$. Ако

/1.3/ $$L(x^*) = \max\{L(x) / x \in X\}$$

то

$$F(x^*) = \max\{F(x) / x \in X\}.$$

Доказателство. При $P(x^*) = 0$ или $Q(x^*) = 0$ твърдението е очевидно вярно. Нека $P(x^*) \neq 0$ и $Q(x^*) \neq 0$. От /1.3/ имаме

$$L(x) \leqq L(x^*) \quad \text{за всяко} \quad x \in X^-$$

Но

$$2\sqrt{P(x)Q(x)P(x^*)Q(x^*)} - 2P(x^*)Q(x^*)$$

$$\leqq Q(x^*)P(x) + P(x^*)Q(x) - 2P(x^*)Q(x^*)$$

$$= L(x) - L(x^*) \leqq 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in X^- .$$

От тук за всяко $x \in X^-$

$$2\sqrt{P(x)Q(x)P(x^*)Q(x^*)} \leqq 2P(x^*)Q(x^*)$$

$$P(x)Q(x)P(x^*)Q(x^*) \leqq P^2(x^*)Q^2(x^*)$$

$$P(x)Q(x) \leqq P(x^*)Q(x^*)$$

т.е.

$$F(x) \leqq F(x^*) .$$

ТЕОРЕМА 7. Ако X^- е изпъкнало затворено множество, то функцията $F(x)$ няма локални максимуми в областите

$$X_{++} = X \cap W_{++} \quad \text{и} \quad X_{--} = X \cap W_{--}$$

и локални минимуми в областите

$$X_{+-} = X \cap W_{+-} \quad \text{и} \quad X_{-+} = X \cap W_{-+}$$

Доказателство. Ще се спрем само на случая X_{++}. Останалите случаи се доказват аналогично. Нека $x^* \in X_{++}$ е точка, за която

$$F(x^*) \geqq F(x) \quad \text{за всяко} \quad x \in O_\varepsilon(x^*) \cap X_{++}$$

Допускаме, че съществува точка $y \in X_{++}$ такава, че $F(y) > F(x^*)$. Тогава за всяко $\lambda \in (0,1)$ имаме

$$F(x^* + \lambda(y - x^*)) > \min\{F(x^*), F(y)\} = F(x^*)$$

Но при

$$0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{\|y - x^*\|}$$

$$x^* + \lambda(y - x^*) \in O_\varepsilon(x^*) \cap X_{++}$$

и

$$F(x^* + \lambda(y - x^*)) \leqq F(x^*) .$$

Стигнахме до противоречие. С това твърдението е доказано.

Дефиниция 2. При $F(x)=P(x)Q(x)$ и X - изпъкнало затворено множество, точката $\bar{x}\in X$ ще наричаме F^{+}-контурна / F^{-}-контурна/ точка за X, ако съществува афинен функционал от вида

$$L(x)=(1-t)P(x)+tQ(x)\ ,\quad t\in[0,1]$$

такъв, че

$$L(\bar{x})=\max(\min)\{L(x)/x\in X\}.$$

F^{+} и F^{-} -контурните точки на едно множество ще наричаме F - контурни, а множеството от всички такива точки - F -контур.

Очевидно, ако вътрешна точка на ребро на многостен е F - контурна, то и цялото ребро принадлежи на F - контура. Ако два съседни върха на многостен са F^{+}/ F^{-}/-контурни, то и съединяващото ги ребро е F^{+}/ F^{-}/-контурно.

От доказателството на теорема 5 непосредствено се вижда, че функцията $F(x)$ достига супремума /инфимума/ си в X_{++} само в F^{+}/ F^{-}/- контурни точки.

ТЕОРЕМА 8. Ако $F(x)\not\equiv const$ върху F^{+}-контурно ребро ℓ на многостена Ω_{++}, $\bar{x}=\mathrm{rint}\,\ell$ и

$$F(\bar{x})=\max\{F(x)/x\in\ell\},$$

то

$$F(\bar{x})=\max\{F(x)/x\in\Omega_{++}\}.$$

Доказателство. Тъй като $\bar{x}$ е F^{+}-контурна точка, то съществува функционал

$$L(x)=(1-t)P(x)+tQ(x)\ ,\quad t\in[0,1]$$

такъв, че

$$\max\{L(x)/x\in\Omega_{++}\}=L(\bar{x}).$$

Понеже $\bar{x}$ е вътрешна точка за ℓ и $F(x)\not\equiv const$ в ℓ, то $P(\bar{x})\neq 0$, $Q(\bar{x})\neq 0$ и ℓ ще лежи в хиперравнината

$$H:\ (1-t)P(x)+tQ(x)=L(\bar{x})$$

Но

$$P(\bar{x})Q(\bar{x})\geqq P(x)Q(x) \text{ за всяко } x\in\ell$$

$$(1-t)\,P(\bar{x}) = t\,Q(\bar{x})$$

или $t = \dfrac{P(\bar{x})}{P(\bar{x})+Q(\bar{x})}$, следователно

$$L(x) = \frac{1}{P(\bar{x})+Q(\bar{x})}\Big(Q(\bar{x})\,P(x) + P(\bar{x})\,Q(x)\Big)$$

и

$$L(\bar{x}) = \max\{L(x)\ /\ x \in \Omega_{++}\}.$$

От теорема 6 следва, че $F(\bar{x}) = \max\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{++}\}$.

§2. СВОЙСТВА НА ИЗРОДЕНИТЕ КВАДРАТИЧНИ ЗАДАЧИ

Сега ще се върнем към задача

/2.1/ $$\inf(\sup)\{F(x)\ /\ x \in \Omega\}$$

където

$$F(x) = P(x)\,Q(x) = (\langle p,x\rangle + p_0)(\langle q,x\rangle + q_0)$$

$$\Omega = \{x\ /\ Ax \leqq b\}.$$

Ако $\Omega \neq \emptyset$ ще предполагаме, че и $\hat{\Omega} \neq \emptyset$. Решаването на задача /2.1/ се свежда до решаването на някои от следните задачи* :

/2.2/ $\min\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{++}\}$

/2.2'/ $\max\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{++}\}$

/2.3/ $\min\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{--}\}$

/2.3'/ $\max\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{--}\}$

/2.4/ $\min\{F(\bar{x})\ /\ x \in \Omega_{+-}\}$

/2.4'/ $\max\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{+-}\}$

/2.5/ $\min\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{-+}\}$

/2.5'/ $\max\{F(x)\ /\ x \in \Omega_{-+}\}$

Лесно се вижда, че задачите /2.2/ и /2.2'/ могат да служат за базови задачи, тъй като всяка от останалите задачи се

---

*/ навсякъде понататък вместо $\inf$ и $\sup$ ще пишем $\min$ и $\max$

свежда до една от тях, чрез смяна на знаците на $\mathcal{P}(x)$ или $Q(x)$ и вида на екстремума. За основна двойка задачи могат да се вземат също така и задачите /2.2/, /2. 4/. Ние ще приемем за основни задачите /2.2/ и /2.2'/.

Ще започнем с разглеждането на задача /2.2/. Както вече показахме, ако $\Omega_{++} \neq \emptyset$, $F(x)$ достига минимума си и то във F -контурен връх на многостена. За този случай, обаче, не е изключена възможността да съществуват локални минимуми на $F(x)$. Затова, за да установим че в дадена точка $F(x)$ достига абсолютен минимум, трябва да пресметнем стойстта й в известен брой подходящо избрани точки.

Знаем, че ако $F(x)$ достига минимума си в точката x^*, то линейната функция

$$L(x) = \frac{Q(x^*)}{\mathcal{P}(x^*) + Q(x^*)}\,\mathcal{P}(x) + \frac{\mathcal{P}(x^*)}{\mathcal{P}(x^*) + Q(x^*)}\,Q(x)$$

достига минимума си в същата точка /теорема 5/. Следователно, $F(x)$ достига минимума си в някоя от точките, в които параметричната функция

$$L(x,t) = (1-t)\,\mathcal{P}(x) + t\,Q(x)$$

достига минимума си при изменение на параметъра t от 0 до 1. И така, ако сме решили параметричната задача

$$\min\{L(x,t)\ /\ x \in \Omega_{++}\ ,\ t \Rightarrow [0,1]\}$$

и сме намерили точките $x_1^*, x_2^*, \dots, x_s^*$, в които $L(x,t)$ достига минимума си при изменение на параметъра t от 0 до 1 и

$$\min_{1 \le k \le s}\{F(x_k^*)\} = F(x_{k_0}^*)\ ,$$

то решението на задача /2.2/ е $x^* = x_{k_0}^*$.

Сега да разгледаме и другата основна задача /2.2'/. Показахме, че ако функцията $F(x)$ достига максимума си, тя го достига върху F^+-контурно ребро и няма локални максимуми. Нещо повече, ако във вътрешна точка на F^+-контурно ребро, функцията $F(x)$ достига максимума си само по отношение на точките от това ребро, то тя достига в тази точка и максимума си по отношение на Ω_{++}.

И тук движението по F^+-контурни върхове и ребра си осигуряваме с успоредно разглеждане на параметричната задача

$$\max \{ L(x,t) = (1-t) P(x) + t Q(x) \ / \ x \in \Omega_{++}, \ t \Rightarrow [0,1] \} .$$

При това движение /ако $F(x)$ е ограничена отгоре/ можем да имаме случаите:

- попадаме на връх, за който $F(x)$ намалява по всички излизащи от него ребра и този връх е решение на задача /2.2'/ ;

- стигаме до ребро във вътрешна точка на което $F(x)$ достига максимума си - това лесно се установява чрез едномерна максимизация на функцията

$$\varphi(\mu) = F(x_k + \mu z_k) ,$$

където x_k е текущия връх , в който се намираме, а z_k е направление на реброто по което ще се движим.

Подробно описание на алгоритма и числена схема са дадени в следващия параграф.

§ 3. АЛГОРИТЪМ

Въз основа на резултатите от предишия параграф и очевидните равенства

$$\max_{\Omega_{++}}(\min_{\Omega_{++}}) P(x)Q(x) = \max_{\bar\Omega_{++}}(\min_{\bar\Omega_{++}}) \bar P(x)\bar Q(x) \text{ при } \bar P(x) = P(x),\ \bar Q(x) = Q(x)$$

$$\max_{\Omega_{--}}(\min_{\Omega_{--}}) P(x)Q(x) = \max_{\bar\Omega_{++}}(\min_{\bar\Omega_{++}}) \bar P(x)\bar Q(x) \text{ при } \bar P(x) = -P(x),\ \bar Q(x) = -Q(x)$$

/3.1/ $$\max_{\Omega_{+-}}(\min_{\Omega_{+-}}) P(x)Q(x) = \min_{\bar\Omega_{++}}(\max_{\bar\Omega_{++}}) \bar P(x)\bar Q(x) \text{ при } \bar P(x) = P(x),\ \bar Q(x) = -Q(x)$$

$$\max_{\Omega_{-+}}(\min_{\Omega_{-+}}) P(x)Q(x) = \min_{\bar\Omega_{++}}(\max_{\bar\Omega_{++}}) \bar P(x)\bar Q(x) \text{ при } \bar P(x) = -P(x),\ \bar Q(x) = Q(x)$$

където

$$\bar\Omega_{++} = \{ x \in \Omega \,/\, \bar P(x) \geqq 0,\ \bar Q(x) \geqq 0 \},$$

може да се построи ефективен алгоритъм за решаване на задачата

/3.2/ $$\max \{ F(x) = P(x)\,Q(x) \,/\, x \in \Omega \}$$

чрез решаване на задачите

/3.3/ $$\min \{ \bar F(x) = \bar P(x)\bar Q(x) \,/\, x \in \bar\Omega_{++} \}$$

/3.4/ $$\max \{ \bar F(x) = \bar P(x)\bar Q(x) \,/\, x \in \bar\Omega_{++} \}.$$

В описанието на алгоритма по-долу, приемаме че

$$\max(\min) \{ F(x) \,/\, \emptyset \} = -\infty\ (+\infty).$$

Редът за търсене на максимума на $F(x)$ в областите Ω_{++}, Ω_{--}, Ω_{+-}, Ω_{-+} е съобразен с очевидния факт, че

$$F(x) \geqq 0,\quad x \in \Omega_{++} \cup \Omega_{--}$$

$$F(x) \leqq 0,\quad x \in \Omega_{+-} \cup \Omega_{-+}$$

и ако $\Omega_{++} \cup \Omega_{--} \neq \emptyset$, имаме

/3.5/ $$\max_{\Omega} F(x) = \max \{ \max_{\Omega_{++}} F(x),\ \max_{\Omega_{--}} F(x) \} = \alpha$$

/Тук $\alpha < \infty$ или $\alpha = \infty$ /. Взето е предвид също, че ако $\Omega_{++} \cup \Omega_{--} = \emptyset$, то едното от останалите две подмножества Ω_{+-}, Ω_{-+} е също празно.

Алгоритмът за решаване на задача /3.2/ е следният:

I. Решаваме задачите

$$\max\{F(x)\,/\,x\in\Omega_{++}\} \text{ и } \max\{F(x)\,/\,x\in\Omega_{--}\}$$

Ако $\Omega_{++}\cup\Omega_{--}\neq\emptyset$, то е в сила /3.5/ и минаваме в III.

II. Решаваме задачите

$$\max\{F(x)/x\in\Omega_{+-}\} \text{ и } \max\{F(x)/x\in\Omega_{-+}\}$$

1/ Ако $\Omega_{+-}\neq\emptyset$ $/\Omega_{-+}\neq\emptyset/$, то

$$\max_{\Omega}F(x)=\max_{\Omega_{+-}}F(x)<\infty \quad /\max_{\Omega}F(x)=\max_{\Omega_{-+}}F(x)<\infty/$$

2/ Ако $\Omega_{+-}\cup\Omega_{-+}=\emptyset$, то $\Omega=\emptyset$.

III. Край

На табл.1 са дадени оптимизационните задачи от вида /3.3/ и /3.4/, които се решават на всеки от етапите I и II. В зависимост от конкретната задача /3.2/, броят на тези от тях които трябва да се решат, ще варира от 1 до 4.

табл.1

I	$\max\limits_{\bar\Omega_{++}}\bar P(x)\bar Q(x)$, $\bar P(x)=P(x)$, $\bar Q(x)=Q(x)$	$\max\limits_{\bar\Omega_{++}}\bar P(x)\bar Q(x)$, $\bar P(x)=-P(x)$, $\bar Q(x)=-Q(x)$
II	$\min\limits_{\bar\Omega_{++}}\bar P(x)\bar Q(x)$, $\bar P(x)=P(x)$, $\bar Q(x)=-Q(x)$.	$\min\limits_{\bar\Omega_{++}}\bar P(x)\bar Q(x)$, $\bar P(x)=-P(x)$, $\bar Q(x)=Q(x)$

Идеята за решаване на задачи /3.3/, /3.4/ дадохме в § 2. Тук ще я формализираме и ще дадем числена схема от типа на симплексни таблици. Нека

$$\bar P(x)=\sum_{j=1}^{n}\bar p_j x_j+\bar p_0 \quad , \quad \bar Q(x)=\sum_{j=1}^{n}\bar q_j x_j+\bar q_0$$

3.1. Алгоритъм за решаване на задача /3.3/.

Както видяхме в § 2, ако $x_0^*, x_1^*, \dots, x_s^*$ са опорни планове на $\bar\Omega_{++}$, в които функцията

$$L(x,t)=(1-t)\bar P(x)+t\,\bar Q(x)$$

достига последователно минимума си при изменение на параметъра t

от 0 до 1, то

$$\min_{\bar{\Omega}_{+1}} \bar{F}(x) = \min_{0 \le i \le s} \bar{F}(x_i^*)$$

Ще проследим процеса на намиране на точките $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_s^*$. Нека x_k^* $/0 \le k \le s/$ е текущата точка на минимум на функцията $L(x,t)$, когато t принадлежи на текущия подинтервал на $[0,1]$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са направленията на ребрата излизащи от x_k^*, а табл.2 е текущата симплексна таблица съответстваща на x_k^*. В нея / вж. § 5/, гл.II/

/3.6/

$$\delta_0 = \bar{P}(x_k^*) = \bar{p}_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_{s_i} \beta_i \ , \quad \delta_j = \langle \bar{p}, z_j \rangle = \bar{p}_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_{s_i} \alpha_{ij} \ , \ j = \overline{1,n}$$

$$\Delta_0 = \bar{Q}(x_k^*) = \bar{q}_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{q}_{s_i} \beta_i \ , \quad \Delta_j = \langle \bar{q}, z_j \rangle = \bar{q}_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{q}_{s_i} \alpha_{ij} \ , \ j = \overline{1,n}$$

В $(m+3)$-тия й ред /редът "t"/ са попълнени само тези

/3.7/ $$t_j = \frac{\delta_j}{\delta_j - \Delta_j}$$, за които $j \in J^- = \{ j \in \overline{1,n} \ / \ \Delta_j < 0 \}$

/ От $\Delta_j < 0$ следва $\delta_j - \Delta_j \ne 0$ поради /3.9/ /.

табл.2

№	Б	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	x_1	..	x_j	..	x_n	β
1	x_{s_1}	$\bar{p}_{s_1}$	$\bar{q}_{s_1}$	α_{11}	...	α_{1j}	..	α_{1n}	β_1
..	..	...	...	..	...	..	..	..	..
m	x_{s_m}	$\bar{p}_{s_m}$	$\bar{q}_{s_m}$	α_{m1}	...	α_{mj}	..	α_{mn}	β_m
m+1			δ	δ_1	...	δ_j	..	δ_n	δ_0
m+2			Δ	Δ_1	...	Δ_j	..	Δ_n	Δ_0
m+3			t	t_1	...	t_j	..	t_n	

Тъй като

/3.8/

$$L(x,t) = (1-t)\bar{P}(x) + t\bar{Q}(x) = [(1-t)\bar{p}_0 + t\bar{q}_0] + \langle \bar{p} - t\bar{p} + t\bar{q}, x \rangle = \ell_0 + \langle \ell, x \rangle$$

то

/3.9/ $$\langle \ell, z_j \rangle = \langle \bar{p} - t\bar{p} + t\bar{q}, z_j \rangle = \delta_j + t(\Delta_j - \delta_j) \ge 0 \ , \ j = \overline{1,n}$$

за t от разглеждания подинтервал на $[0,1]$.

В следващата точка на минимум X^*_{k+1} се предвижваме по ребро с направление Z_r , за което е изпълнено

/3.10/ $$t_r = \min\{t_j \mid j \in J^-\}$$

т.е. Z_r е направлението, по което /3.9/ се нарушават за най-малка стойност на t .

Алгоритмът за решаване на задача /3.3/ е следният:

1. Решаваме линейната оптимизационна задача

$$\min\{L(X,0) = \bar{P}(X) \mid X \in \bar{\Omega}_{++}\}$$

а/ Ако $\bar{\Omega}_{++} = \emptyset$, минаваме в 6.

б/ Нека X^*_0 е решение на задачата / $\bar{P}(x) \geqq 0$ в $\bar{\Omega}_{++}$/ и табл.2 е неговата симплексна таблица. В нея до този момент $(m+2)$ -рия и $(m+3)$-тия редове /редовете "Δ" и "t" / не са попълвани, понеже не е било необходимо. Сега ги попълваме съответно по формули /3.6/ и /3.7/, формирайки едновременно с това и множеството J^- . Полагаме

$$k=0 \;, \quad X^* = X^*_0 \;, \quad \bar{F}^* = \bar{F}(X^*_0) \,.$$

2. Имаме текущия опорен план X^*_k със симплексна таблица от вида на табл.2 и множеството от индекси J^- .

Ако $J^- = \emptyset$, то е намерена и последната точка на минимум X^*_s , за която

$$L(X^*_s, 1) = \min\{L(X,1) = \bar{Q}(X) \mid X \in \bar{\Omega}_{++}\} = \bar{Q}(X^*_s) \,.$$

и минаваме в 5.

3. Преминаваме към нов опорен план X^*_{k+1} :

а/ За ключов стълб в табл.2 избираме стълба "X_r" с оценка

$$t_r = \min\{t_j \mid j \in J^-\}.$$

Изборът на ключов ред и получаването на симплексната таблица на X^*_{k+1} /без реда "t"/ става по обичайния за симплексната процедура начин /вж. точки 2/ и 3/ на III от алгоритма в §5, гл.II/.

б/ Редът "t" в новата симплексна таблица попълваме по формули /3.7/, като използваме елементите на вече попълнените редове "δ" и "Δ" в нея. Едновременно с това формираме и новото множество J^- .

в/ Пресмятаме $\bar{F}(x_{k+1}^*)$. Ако $\bar{F}(x_{k+1}^*) < \bar{F}^*$, полагаме

$\bar{F}^* = \bar{F}(x_{k+1}^*)$, $x^* = x_{k+1}^*$

4. Полагаме $k = k+1$ и минаваме в 2.

5. Решение на задача /3.3/ е опорният план x^* и

$$\min\{\bar{F}(x) / x \in \bar{\Omega}_{++}\} = \bar{F}^*$$

6. Край

Ще отбележим, че след намирането на първата точка на минимум x_0^* в т.1, останалите точки на минимум фактически намираме чрез минимизиране на функцията $\bar{Q}(x)$, тъй като се движим по ребра за които $\Delta_j < 0$. Само че тези ребра подбираме още и по допълнителното условие /3.10/. Последната точка на минимум x_s^* е точка на минимум и за функцията $\bar{Q}(x)$.

3.2. Алгоритъм за решаване на задача /3.4/.

Както показахме в $\S$ 2, решаването на задачата

$$\max\{L(x,t) / x \in \bar{\Omega}_{++}\}$$

за стойности на параметъра t от 0 до 1, осигурява преминаването през оптимално $\bar{F}$ -контурно ребро на $\bar{\Omega}_{++}$ т.е. преминаване през опорен план $x_k^* \in \bar{\Omega}_{++}$, който или сам е решение на задачата/3.4/, или решението й е във вътрешна точка на $\bar{F}$ -контурно ребро излизащо от x_k^* . Тук $L(x,t)$ е функцията /3.8/.

Нека x_k^* е текущата точка на максимум за $L(x,t)$, когато t принадлежи на текущия подинтервал на $[0,1]$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са направленията на ребрата излизащи от x_k^* , а табл.3 е текущата симплексна таблица съответстваща на x_k^* . В нея редовете "δ" и "Δ" са попълнени по формулите /3.6/.

табл.3

№	Б	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	x_1	...	x_j	...	x_r	...	x_n	β
1	x_{s_1}	$\bar{p}_{s_1}$	$\bar{q}_{s_1}$	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1r}	...	α_{1n}	β_1
..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
ℓ	x_{s_ℓ}	$\bar{p}_{s_\ell}$	$\bar{q}_{s_\ell}$	$\alpha_{\ell 1}$	...	$\alpha_{\ell j}$	...	$\alpha_{\ell r}$	...	$\alpha_{\ell n}$	β_ℓ
..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_{s_m}	$\bar{p}_{s_m}$	$\bar{q}_{s_m}$	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mr}	...	α_{mn}	β_m
$m+1$			δ	δ_1	...	δ_j	...	δ_r	...	δ_n	δ_0
$m+2$			Δ	Δ_1	...	Δ_j	...	Δ_r	...	Δ_n	Δ_0
$m+3$			g	g_1	...	g_j	...	g_r	...	g_n	
$m+4$			t	t_1	...	t_j	...	t_r	...	t_n	
$m+5$			L	$\delta_1+\Delta_1$	...	$\delta_j+\Delta_j$	...	$\delta_r+\Delta_r$	...	$\delta_n+\Delta_n$	$\delta_0+\Delta_0$

Понеже x_k^* е точка на максимум на $L(x,t)$ в разглеждания интервал за t, то

/3.11/ $\langle \ell, z_j \rangle = \delta_j + t(\Delta_j - \delta_j) \leqq 0, \quad j = \overline{1,n}$

Ако x_k^* е решение на задача /3.4/, то очевидно

/3.12/ $g_j = \langle \nabla \bar{F}(x_k^*), z_j \rangle = \langle \bar{p}\Delta_0 + \bar{q}\delta_0, z_j \rangle = \Delta_0 \delta_j + \delta_0 \Delta_j \leqq 0, \quad j = \overline{1,n}$

Ето защо числата g_j / $j = \overline{1,n}$ / фигурират в реда "g" на табл.3 .

Ако x_k^* не е решение на задача /3.4/, ще се наложи да се предвижим към следващия опорен план x_{k+1}^* /точка на минимум на $L(x,t)$ в следващия подинтервал за t / по ребро с направление z_r, по което $\bar{F}(x)$ нараства и /3.11/ се нарушават за най-малка стойност на t т.е. за z_r трябва да имаме

$$t_r = \min\left\{ \frac{\delta_j}{\delta_j - \Delta_j} \,/\, j \in J^+ \right\}, \text{ където } J^+ = \left\{ j \in \overline{1,n} \,/\, g_j > 0 \right\}$$

/От $g_j > 0$, следва $\delta_j - \Delta_j \neq 0$ поради /3.11/,/3.12/ и $\delta_0 \geqq 0$, $\Delta_0 \geqq 0$/. Числата t_j / $j \in J^+$ / са в реда "t" на табл.3.

Но функцията

$$\varphi(\mu) = \bar{F}(x_k^* + \mu z_r)$$

достига максимума си при

$$\frac{d\varphi(\mu)}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left[\delta_0\Delta_0 + \mu(\Delta_0\delta_2 + \delta_0\Delta_2) + \mu^2\delta_2\Delta_2\right]$$
$$= \Delta_0\delta_2 + \delta_0\Delta_2 + 2\mu\delta_2\Delta_2 = 0$$

т.е. за

$$\mu = \frac{-g_2}{2\delta_2\Delta_2} = \mu_0$$

/Поради $g_2 > 0$, имаме $\delta_2\Delta_2 < 0$ /. Тогава, ако $x^*_{k+1} = x^*_k + \theta z_2$ и $\mu_0 < \theta$, то $\bar{F}(x)$ достига максимума си във вътрешната точка $x^*_k + \mu_0 z_2$ на разглежданото ребро.

С цел да се намали броя на итерациите при решаването на задача /3.4/, в алгоритма описан по-долу изменението на параметъра t почва от 1/2 вместо от 0. Така, в зависимост от конкретната задача, се налага изменение на t само в интервала $[0, \frac{1}{2}]$ или $[\frac{1}{2}, 1]$. С цел унифициране на алгоритма в тези два случая /важно при програмна реализация/, оценките t_j се пресмятат по формулите

/3.13/ $$t_j = \frac{\delta_j}{\delta_j - \Delta_j} - \frac{1}{2}$$

а изборът на направлението z_2 се прави от условието

$$t_2 = \min\{|t_j| ; j \in J^+\}$$

В $(m+5)$-тия ред на табл.3 /ред "L" / са вписани оценките $\delta_j + \Delta_j$ /$j = \overline{1,n}$ / на функцията $L(x, \frac{1}{2})$. Този ред има спомагателно значение и се попълва само в началния етап /т.1⁰/, когато се максимизира функцията $L(x, \frac{1}{2})$ т.е. до намирането на първата точка на максимум x^*_0.

Алгоритмът за решаване на задача /3.4/ е следният:

1^0. Решаваме линейната оптимизационна задача

$$\max\{L(x, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\bar{P}(x) + \bar{Q}(x)) / x \in \bar{\Omega}_{++}\}$$

а/ Ако $\bar{\Omega}_{++} = \emptyset$, минаваме в 7^0.

б/ Ако $L(x,\frac{1}{2})\to\infty$ в $\bar{\Omega}_{++}$, то и $\bar{F}(x)\to\infty$ в $\bar{\Omega}_{++}$ и минаваме в 7^0.

в/ Нека x_0^* е решение на задачата и табл.3 е неговата симплексна таблица. В нея до този момент редовете "g" и "t" не са били попълвани, защото не е било нужно. Зачеркваме реда "L" и полагаме $k=0$.

2^0. Имаме текущия опорен план x_k^* със симплексна таблица от вида на табл.3, в която не фигурира реда "L", а редовете "g" и "t" не са попълнени.

а/ Попълваме редът "g" с числата

$$g_j = \Delta_0 \delta_j + \delta_0 \Delta_j \ , \quad j=\overline{1,n} \ ,$$

като едновременно с това формираме и множеството от индекси $J^+ = \{ j\in \overline{1,n} \ / \ g_j > 0 \}$. Ако се окаже, че $J^+=\emptyset$, то x_k^* е решение и на задача /3.4/ и минаваме в 7^0.

б/ Попълваме реда "t" с числата t_j $/j\in J^+/$, пресметнати по формули /3.13/.

3^0. Извършваме подготовка за преминаване към нов опорен план x_{k+1}^* :

а/ За ключов стълб в табл.3 избираме стълба "x_r" с оценка

$$t_r = \min \{ |t_j| \ / \ j\in J^+ \}$$

б/ За ключов ред избираме реда ℓ, за който

$$\theta = \frac{\beta_\ell}{\alpha_{\ell r}} = \min_{\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}$$

4^0. Пресмятаме нарастването

$$\mu_0 = \frac{-g_r}{2\,\delta_r \Delta_r}$$

Ако $\mu_0 < \theta$, минаваме в 6^0.

5^0. Получаваме новия опорен план x_{k+1}^* чрез попълване на нова симплексна таблица /без редовете "g" и "t"/ по обичайния за симплексната процедура начин /елементарно преобразование с ключов елемент α_{er} /. Полагаме $K = K+1$ и минаваме в 2^0.

6^0. Функцията $\bar{F}(x)$ достига максимума си в точката

$$x^* = x_K^* + \mu_0 z_r$$

чиито компоненти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са

$$x_{s_i} = \beta_i - \mu_0 \alpha_{ir}, \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_r = \mu_0, \quad x_j = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad j \neq r, s_1, \ldots, s_m.$$

7^0. Край

Предложения алгоритъм /I–III/ за решаване на изродените квадратични задачи /3.2/ е реализиран програмно за компютрите от серията ЕС /[16]/.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ

И тук, както в § 8 на гл.II, ще посочим възможностите за използване на описания в § 3 алгоритъм, като помощна процедура при решаването на задачи с по-сложна структура. Ще дадем също една много проста и ефективна числена схема за един по-тесен клас изродени квадратични задачи.

4.1. Първо да разгледаме задачата

/4.1/ $$\max \{ F(x) = \langle p, x\rangle \cdot \langle q, x\rangle \;/\; x \in X \}$$

където

/4.2/ $$X = \{ x \;/\; g_i(x) \leqq 0, \; i = \overline{1,m} \}$$

$g_i(x)$ – изпъкнали функции , $i = \overline{1,m}$.

Очевидно и в този случай, с помощта на метода на отсичащите равнини можем да построим серия от изродени квадратични задачи

/4.3/ $$\mathcal{F}_k : \; \max \{ F(x) = \langle p, x\rangle \cdot \langle q, x\rangle \;/\; x \in \Omega_k \} , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

в които Ω_k са многостени с познатите вече от § 8, гл.II свойства:

$$\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \cdots \supset X$$

иако x_k^* е решение на задачата $\mathcal{F}_k$, то $x_k^* \notin \Omega_{k+1}$.

И така, при известни условия, редицата $\{x_k^*\}$ е оптимизираща редица за задачата /4.1/, /4.2/.

Да се спрем сега на задачата

/4.4/ $$\max \{ f(x) = p(x)\, q(x) \;/\; x \in X \}$$

където X е определено с /4.2/. Ще предполагаме още, че $p(x)$ и $q(x)$ са вдлъбнати функции и $p(x) \geqq 0$, $q(x) \geqq 0$ в X .
При тези условия задачата

/4.5/ $$\max \{ F(x, x_{n+1}, x_{n+2}) = x_{n+1} \cdot x_{n+2} \;/\; x \in X , \; p(x) \geqq x_{n+1} , \; q(x) \geqq x_{n+2} , \; x_{n+1} \geqq 0 , \; x_{n+2} \geqq 0 \}$$

е еквивалентна на задача /4.4/ и е от тип /4.1/, /4.2/, т.е. тя може да бъде решена с помощта на редица от изродени квадратични задачи от вида /4.3/.

Ще отбележим още и възможността за използване на алгоритма от $\S 3$ като помощна процедура при решаване на целочислени изродени квадратични задачи.

4.2. Сега да се обърнем на другата страна и да стесним класа на изродените квадратични задачи. По-точно да разгледаме задачата

/4.6/ $$\max \{ F(x) = P(x)\, Q(x) \;/\; a \leqq x \leqq b \},$$

където
$$P(x) = p_0 + \langle p, x\rangle, \quad Q(x) = q_0 + \langle q, x\rangle$$
$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

т.е. трябва да оптимизираме изродена квадратична функция върху паралелопипеда

$$\Pi_{[a,b]} = \{ x \;/\; a \leqq x \leqq b \} \qquad / a_j < b_j, \; j = \overline{1,n} \; /.$$

Предполагаме още, че $P(x) \geqq 0$, $Q(x) \geqq 0$ за всяко $x \in \Pi_{[a,b]}$. Преди да опишем алгоритъма за решаване на този частен случай, ще отбележим следните очевидни неща:

1. Два съседни опорни плана x' и x'' на задача /4.6/ се различават помежду си само по една компонента, която за x' е в единия край на съответния интервал, а за x'' е в другия край на този интервал.

2. Оценките за променливите тук са

$$\delta_j = \begin{cases} p_j & \text{при } x_j = a_j \\ -p_j & \text{при } x_j = b_j \end{cases}, \qquad \Delta_j = \begin{cases} q_j & \text{при } x_j = a_j \\ -q_j & \text{при } x_j = b_j \end{cases}, \; j = \overline{1,n}$$

и те са инвариантни по абсолютна стойност т.е. променят само знака си при изменение на съответната компонента.

3. Оценките $t_j = \dfrac{\delta_j}{\delta_j - \Delta_j}$ са инвариантни.

4. Стъпката θ при преминаване от опорен план в съседен нему опорен план, чрез промяна на променливата x_r, е $b_r - a_r$.

И така, алгоритъмът от $\S 3$ за решаване на задача /3.4/, приложен за задача /4.6/, ще има следния вид:

1/ Определяме опорния план x^* :

$$x_j^* = \begin{cases} a_j & \text{при } p_j < 0 \text{ или } p_j = 0 \text{, но } q_j < 0 \\ b_j & \text{при } p_j > 0 \text{ или } p_j = 0 \text{, но } q_j > 0 \end{cases}, \quad j = \overline{1,n}$$

2/ Определяме множеството $J = \{ j \in \overline{1,n} \,/\, p_j q_j < 0 \}$.

Ако $J = \emptyset$, минаваме в 9/.

3/ Определяме

$$\varepsilon_j = \begin{cases} +1, & \text{ако } x_j^* = a_j \\ -1, & \text{ако } x_j^* = b_j \end{cases}, \quad j \in J$$

$$\delta_j = \varepsilon_j p_j \quad , \quad \Delta_j = \varepsilon_j q_j \quad , \quad j \in J$$

4/ Пресмятаме

$$\delta_0 = P(x^*) \quad , \quad \Delta_0 = Q(x^*)$$

$$g_j = \Delta_0 \delta_j + \delta_0 \Delta_j \quad , \quad j \in J$$

5/ Определяме множеството $J^+ = \{ j \in J \,/\, g_j > 0 \}$

Ако $J^+ = \emptyset$, минаваме в 9/.

6/ Определяме индекса r, за който

$$t_r = \min \left\{ t_j = \frac{\delta_j}{\delta_j - \Delta_j} \,/\, j \in J^+ \right\}$$

7/ Пресмятаме

$$\mu = \frac{-g_r}{2\delta_r \Delta_r} \quad \text{и} \quad \theta = b_r - a_r$$

Ако $\mu < \theta$, полагаме $x_r^* = x_r^* + \varepsilon_r \mu$ и минаваме в 9/.

8/ Полагаме

$$x_r^* = a_r + b_r - x_r^* \quad , \quad J = J \setminus \{r\}$$

$$\delta_r = -\delta_r \quad , \quad \Delta_r = -\Delta_r \quad , \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_r$$

и минаваме в 4/.

9/ x^* е оптимален план на задачата.

10/ Край

ЛИТЕРАТУРА

1. Базара М.,Шетти К.,Нелинейное программирование Теория и алгоритмы,изд.Мир,Москва, 1982, гл.11
2. Белых Б.М.,Гавурин М.К., Алгоритм минимизации дробно-линейной функции, Вестник ЛГУ, 19/4/, 1980, 10-15
3. Гольштейн Е.Г.,Юдин Д.Б., Новые направления в линейном программировании, изд.Советское радио,Москва, 1966, гл.3
4. Гуревич Т.Ф.,Лущук Б.О., Сборник задач по математическому программированию,изд.Колос,Москва, 1977, раздел 8
5. Иванов Г. , Математическо оптимиране,изд.СУ,София, 1974
6. Иванов Г.Х.,Иванов Р.П., Теоремы существования экстремума для многочленов не высшей третьей степени на неограниченных множествах,Год.на СУ, Фак.по мат.и мех.,т.70, 1975/76, 207-217
7. Клевачев В.И., О решении задачи дробно-линейного программирования,Кибернетика, 4/6/, 1968, 31-36
8. Козлов М.К.,Тарасов С.П.,Хачиян Л.Г., Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования, ДАН СССР,248 , 5, 1979, 1049-1951
9. Кузнецов А.В.,Холод Н.И.,Костевич Л.С., Руководство к решению задач по математическому программированию,Минск, 1978, гл.7
10. Матряшин Н.П.,Макеева Б.К., Математическое программирование, Харьков, 1978, гл.V
11. Палавеева Т., Задача на хиперболичното оптимиране, дипломна работа,Фак.по мат.и мех.на СУ, 1974
12. Рокафеллар Р., Выпуклый анализ,изд.Мир,Москва, 1973
13. Христов Г.,Калтинска Р., Математическо оптимиране-линейно оптимиране,поредица Съвр.мат.,изд.НИ,София, 1972, гл.IV
14. Христов Г.,Кючукова Ел.,Карамитева З., Универсална система за решаване и изследване на задачите на дробно-линейното/хиперболичното/ оптимиране, Доклад на V-та пролетна конф.на БМД,Габ-

рово, 1976 /под печат/

15. Чернов Ю.П.,Ланге Э.Г., Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями/методы и приложения/, Фрунзе, 1978, с.290

16. Чилингирова П., Един специален клас квадратични оптимизационни задачи, дипломна работа, Фак.по мат. и мех.на СУ, 1978

17. Шварцман А.П., Об одном алгоритме дробно-линейного программирования, Экон.и мат.методы, 1/4/, 1965, 558-566

18. Юдин Д.Б.,Немировский А.С., Информационная сложность и еффективные методы решения выпуклых экстремальных задач, Экон.и мат. методы, 12/2/, 1976, 357-369

19. Barankin E.W and R.Dorfman, On Quadratic Programming, University of California Publications in Statistics, 2, 1958, 285-318

20. Beale E.M.L., On Quadratic Programming, Naval Res.Logist.Quart., 6, 1959, 227-244

21. Bitran G.R.,Novaes A.G., Linear Programming with a Fractional Objective Function, Operation Res., 21(1), 1973, 22-29

22. Charnes A.,Cooper W.W., Programming with Linear Fractional Functionals, Naval Res.Logist.Quart., 9(3-4), 1962, 181-186

23. Christov G., Properties and a Method for Solving Hyperbolic Optimization Problems, Доклады БАН, 3, 1983 /под печат/

24. Cottle R.W., The Principal Pivoting Method of Quadratic Programming, in Mathematics of the Decision Sciences, G.B.Dantzig and A.F.Veinott(Eds.), 1968

25. Dinkelbach W., Die Maximierung Eines Quotienten Zweier Linearer Funktionen Unter Linearen Nebenbedinungen, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Gebiete, 1, 1962, 141-145

26. Frank M. and P.Wolfe, An Algorithm for Quadratic Programming, Naval Res.Logist.Quart., 3, 1956, 95-110

27. Frankel E.,Novaes A.,Pollack E., Optimization and Integration

of Shipping Ventures(A Parametric Linear Programming Algorithm), International Shipbuilding Progress, july, 1965

28. Isbell J.R.,Marlow W.H., Attrition Games, Naval Res,Logist. Quart., 3, 1956, 71-94

29. Kört H., Ein Zerbegungsprinzip für die hiperbolische Optimierung,Wissenschaftliche Z.der Humboldt-Universität zu Berlin, Ges.Sprachw.R.XVIII (1968) 5, 827-829

30. Lemke C.E., A Method of Solution for Quadratic Programs, Mahagment Sci., 8, 1962 442-455

31. Martos B., Hyperbolic Programming,Naval Res.Logist.Quart., 11, 1964, 135-155

32. Martos B., Nonlinear Programming Theory and Methods, Academiai Kiadó,Budapest, 1975, Chapter 11

33. Mond B., On Algorithmic Equivalence in Linear Fractional Programming,Mathematics of Computation,37(155),July, 1981, 185-187

34. Panne C.van de, Methods for Linear and Quadratic Programming, North-Holland,Amsterdam, 1974

35. Stancu-Manasian I.M., Bibliography of Fractional Programming 1960-1976, Academy of Economic Studies,Department of Economic Cybernetics,Preprint Nr.3,February, 1977

36. Swarup K., Linear Fractional Functionals Programming,Operations Res., 13(6), 1965, 1029-1036

37. Theil H.and C.van de Panne, Quadratic Programming as an Extension of Conventional Quadratic Maximization,Management Sci., 7, 1961, 1-20

38. Wagner H.M.,Yuan J.S., Algorithmic Equivalence in Linear Fractional Programming,Management Sci., 14, 1968, 301-306

39. Wolfe P., The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica,27, 1959, 382-398