ДИССЕРТАЦИЯ

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ

по ИНФОРМАТИКА и ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА при ВАК

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА

ИВАН ЛЮБЕНОВ РАЙКОВ

Многозначни алгоритми, зависещи от параметър

Научна специалност 01.01.11
„Изследване на Операциите„

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР„

научен консултант:
проф. дмн Радостин Петров Иванов

Варна, 1999г.

Съдържание

Увод

0.1 Постановка на задачата

Значима част от съвременните изследвания в различни клонове на науката, като физика, химия и икономика при решаването на приложни задачи са свързани с използването на многозначни алгоритми, зависещи от параметър, като например оптимизационни алгоритми, зависещи от параметър.

С настоящата дисертация ще обърнем внимание на проблемите свързани с алгоритми за многозначни изображения, т.е. многозначни алгоритми, зависещи от параметър - условия за равномерна(относно параметъра) сходимост и скорост на сходимост. Ще направим сравнителен анализ на достатъчни условия за равномерна сходимост, ще разгледаме конкретни алгоритми и ще илюстрираме с примери.

Както знаем, съществуват многозначни изображения, породени от различни източници, като: смущения(неточни сметки), негладкост на функциите и нееинственост на решенията(може да се явят множества), а също и при параметрични методи - устойчивост относно параметъра (неточни сметки, неточно пресмятане или други(като смущения)) и управление на процеса чрез параметъра.

Разглеждаме следната оптимизационна задача:

$$f^* = \inf_{z \in D} f(z), \tag{1}$$

Ще предполагаме като правило, че D е подмножество на рефлексивно Банахово пространство E, функцията $f : D \to R$ е собствена , т.е. не приема стойности $+\infty$ или $-\infty$ върху D.

Ще разгледаме серия от алгоритми, които се генерират от многозначен оператор, зависещ от параметър и абстрактния алгоритъм за решаване на горната задача при наличие на различни видове смущения.

Класът от алгоритми, който ние разглеждаме се генерира от оператор зависещ от параметър. Ако означим този оператор с $A(z,p)$, където p е параметър. При условие, че на $k-$тата стъпка е известен параметърът p_k и съответното приближено решение z_k, то следващото приближение z_{k+1} избираме по произволен начин, удовлетворяващо включването

$$z_{k+1} \in A(z_{k+1}, p_{k+1})$$

Алгоритми, зависещи от параметър, се използуват в случаите със смущения и при параметрични алгоритми(клас алгоритми, получаващ се с вариране на параметър).

В абстрактната схема за алгоритми от първи вид(наличие на смущения или грешки при пресмятанията) се включват следните методи:

• Методи за минимизация без ограничения.

Методи използуващи само стойностите на функцията:

Методът на Хук и Джийвс ([50], [15] и [18]).

Релаксационния метод ([22], [15]).

Методът на Розенброк ([90], [15], [49] и [18]).

Методът на Пауъл, осигуряващ квадратична сходимост достатъчно близко до точката на минимума ([76], [15] и [49]).

Методът на Нелдер и Мид ([67] и [49]).

Методът на Дейвис, Свен и Кеймпи ([95] и [49]).

Методът на случайното търсене ([28], [59], [20], [91], [100], [96], [94] и [49]).

Абстрактната схема на метода на Хук и Джийвс е :

$$z_{i+1}^{k} = z_i^k - \alpha_{i_{inf}}(p)h$$

Методи използуващи първи производни:

Градиентните методи. За силно изпъкнали функции имаме скорост на геометрична сходимост(линейна сходимост) с различен множител в зависимост от допълнителни условия ([10], [18], [49] и [15]).

Методите на спрегнатите направления(Девидон - Флетчър - Пауъл, Флетчер - Рийвс и Зангвил) за силно изпъкнали функции осигуряват геометрична скорост на сходимост ([29], [37], [38], [103], [18], [49], [2], [15], [41] и [10]).

Абстрактната схема на метода на градиентното спускане е :

$$z_{i+1} = z_i - \alpha_{i_{inf}}(p) f'(z_i)$$

Методи за минимизация без ограничения използуващи освен първи и втори производни:

Методът на Нютон за силно изпъкнала функция има свръхлинейна скорост на сходимост. Ако освен това е в сила условието на Липшиц за втората производна, тогава имаме квадратична сходимост ([15], [99], [10], [49], [18], [41] и [2]).

При допълнителни условия за силно изпъкнала функция с Липшицова първа производна модифициран метод на Нютон с кубична скорост на сходимост ([2]).

Методът на Дочев, като модификация на метода на Нютон за алгебрични уравнения има същата скорост на сходимост ([11] и [4]).

Методът на Девидон е модификация на метод на Нютон и се използува, когато намирането на обратната матрица на Хесианата(матрицата от вторите производни) е практически невъзможно със запазване на същата скорост на сходимост, като метод на Нютон ([15] и [29]).

За негладки функции модификациите на метод на Нютон са разгледани в [21], [47], [51], [57], [56], [69], [70], [78], [57] и [83].

Въпросите свързани със скоростта на сходимост са разгледани в [78], [79] и [77].

Абстрактната схема на метода на Нютон е :

$$z_{i+1} = z_i - \alpha_{i_{inf}}(p)(f_i'')^{-1} f_i'.$$

Абстрактната схема на метода на Дочев за решаване на нелинейни алгебрични уравнения е :

$$z_{i+1}^k = z_i^k - \alpha_{i_{inf}}(p) f(z_i^k) / \prod_{j=1_{j \neq k}}^{n} (z_i^k - z_i^j).$$

• Методи за минимизация с ограничения:

Методът на проекцията на градиента([15]).

Методът на приведения градиент (виж [44], статията на Абади от [36], [15] и [49]).

Методът на наказателните функции ([35], [15], [49], [41] и [18]).

Методите на линейните апроксимации ([14] и [15]).

При всички тези методи съществува проблем при числените реализации поради различни източници на смущения, като неточности във входните данни и параметричните константи, съществуване на неточност при пресмятанията и други. Известни са достатъчни условия за сходимост алгоритми, моделирани с многозначни изображения. Тогава възниква въпросът относно възможността за определяне на интервалите на изменения на тези допълнителни влияния или смущения на всяка стъпка, така че да се запази вида на сходимост.

Проблемът с многозначността поради негладкост на функциите и нееднинственост на решенията съществува поради негладкостта и нееднинсвеността на решенията на моделираните процеси.

В абстрактната схема за алгоритми от втори вид(клас алгоритми, получаващ се с вариране на параметър) се включват следните методи:

• Параметричен метод на функциите на Ляпунов за решаване на системи нелинейни уравнения ([54], [52], [105], [106], [D2], [D3] и [D4]).

• Параметрични методи на Нютон за задачи с някакъв тип негладкост, като например: [21], [25], [24], [39], [47], [51], [56], [57], [58], [69], [70], [71], [72], [73], [78], [81], [82], [83], [84], [87] и [93].

Към тях спадат и:

Модифициран метод на Нютон за оптимизационни задачи ([108] и [D6]).

Параметричен метод на Нютон за оптимизационни задачи.

В глава първа се разглежда следния абстрактен алгоритъм

$$z_{k+1}(p) \in A(z_{k+1}, p).$$

Числовият параметър p, принадлежащ на интервал, се взема по случаен начин. Изследват се различни достатъчни условия за сходимостта на алгоритъма.

Разглеждаме абстрактни алгоритми със смущения в Банахово пространство. В този случай обобщаваме известните достатъчни условия за сходимост на алгоритми без смущения за алгоритми със смущения със запазване на скоростта на сходимост ([97]).

Параметърът на алгоритъма се разглежда като управление на итерационния процес (например [54], [105]) и също като грешка при приблизителните пресмятания. Отбелязано е, че абстрактните алгоритми решават оптимизационни задачи. Следователно итерационният процес търси неподвижна точка на генерираща оператор. Направено е обобщение на условията на Зангвил ([102]) за многозначен параметризиран генериращ оператор със слабокомпактни значения.

По аналогия с [97], ние сравняваме достатъчните условия за сходимост на алгоритмите със смущения. Представени са някои приложения в математическото програмиране. Необходимост от това изследване се явява в пресмятанията поради наличие на числови грешки и при модификациите на алгоритми зависещи от параметър.

Основните резултати в тази глава са публикувани в статии [104] и [107]. Докладван е [D1] и е приет доклад [D5].

Във втора глава са разгледани някои аспекти на метода на функциите на Ляпунов за решаване на система нелинейни нелинейни уравнения.

Важността и актуалността на задачата за решаване на системи ура внения е в пряка зависимост от бурното развитие на техниката и науката. Например: изчисляването на тръбопроводи с успоредно свързани тръби става с помощта на система от две уравнения с две неизвестни; изчисленията на един нит водят до система от четири уравнения с че тири неизвестни;определянето на силата на тока в различните участъци от сложна електрическа верига става също с помощта на система; при проектиране на мостове се налага да се решава система от десет уравнения с десет неизвестни от първа степен;при изучаване движенията на едно или няколко тела във физиката винаги се стига до система; в химията при определяне на необходимото количество от даден елемент за извършване на определена реакция също се натъкваме на система уравнения и т.н.

Необходимо е да се изтъкне и теоретичната необходимост от решаването на системи нелинейни уравнения. Трудно е да се посочи такава област в изчислителната математика, където в една или друга форма не би възникнала задачата за намиране на решението на система от n уравнения с n неизвестни, като особен интерес представляват именно нелинейните системи.

Решаването на оптимизационните задачи е свързано с решаването на системи нелинейни уравнения.

Методът зависи от вектор-параметър на смущенията. Като обобщение смущението се разглежда като пораждащо многозначно изображение. Поради това алгоритмът е моделиран чрез многозначно изображение, което зависи от една непрекъсната променлива. Нашата цел е намирането на достатъчни ограничения относно многозначното изображение за запазване на скоростта на сходимост на алгоритма.

В тази глава се разглежда също и система нелинейни уравнения, когато левите страни на уравненията са числови функции, дефинирани в Хилбертово пространство.

Представен е един параметризиран метод на функция на Ляпунов за решаване на системата.

Използувайки левите страни на уравненията се създава една числова функция $V_{p(\varepsilon)}(x)$ дефинирана върху Хилбертовото пространство. Тази функция зависи от многозначен вектор-параметър $p(\varepsilon)$. Конструирането на параметричния метод на функция на Ляпунов се разглежда относно избора на параметрите, за които $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е изпъкнала функция. В този случай функцията $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за устойчивостта на решения на диференциално включване в Хилбертово пространство, където дясната на включването е максимално монотонен оператор.

Разглеждаме един итерационен метод за намирането поне на едно от решенията на негладката система от уравнения в Хилбертово пространство. Този метод се базира на теорията на функциите на Ляпунов. От подходящия избор на параметрите следва линейна или свръхлинейна сходимост на итеративния метод.

Тази глава е свързана със [13] [52], [54] и [104].

Основните резултати в тази глава са публикувани в статии [105] и [106]. Докладвани са [D2] и [D4]. Приет е доклад [D3].

В глава трета разглеждаме задачата за минимизиране на функционала $V_p(x)$, където x принадлежи на Хилбертовото пространство H и p е абстрактен параметър:

$$\inf_{x\in H} V_p(x) = V_p^*.$$

Предполагаме, че съществува градиент $\nabla V_p(x)$, който е Липшицов. Отбелязваме, че ако Лебеговите множества на $V_p(x)$ са ограничени, затворени и изпъкнали и $V_p(x)$ е слабо полунепрекъсната отдолу, то съществува минимум на $V_p(x)$. Има други условия за съществуване на минимума на $V_p(x)$ като компактност на минимизиращите редици, но ние не възнамеряваме да дискутираме този проблем и предполагаме, че съществува поне една точка $x^* \in H$, за която

$$\inf_{x \in H} V_p(x) = V_p(x^*) = V_p^*. \tag{2}$$

Един клас от модификации на Метод на Нютон може да бъде описан като:

$$x_{k+1} = x_k - \Phi(V_p(x_k)) \nabla V_p(x_k),$$

където $\Phi(\cdot) : H \to H$ е подходящо избран оператор. Очевидно, ако съществува втора производна $V_p''(x)$ на $V_p(x)$ и ако $\Phi(V_p(x)) = (V_p''(x))^{-1}$ ние получаваме класическия метод на Нютон.

С модифицирания метод на Нютон решаваме минимизационната задача, избягвайки пресмятането на обратни оператори в безкрайномерни пространства. Разглеждаме параметрична оптимизационна задача в реално Хилбертово пространство, предполагайки че градиентът на целевата функция е Липшицово непрекъсната, но негладка функция. Използувайки, че вторият субдиференциал е п.н.г., съставяме диференциално включване с п.н.г. дясна част. Чрез делене с положителна п.н.д. функция, получаваме диференциално включване, всяко решение, на което може да се продължи до множеството на решенията на системата нелинейни уравнения в крайно време. Представена са две итерационни процедури. За първата са доказани условията за монотонност и супергеометрична скорост на сходимост. За втората, която се получава от първата чрез смяна на равенствата за определяне на на стойностите параметъра $\mathbf{p}$ с неравенства, са изведени условия за монотонност и геометрична сходимост.

В тази глава се разглежда и един параметричен метод на Нютон за решаване на задачата на нелинейното оптимизиране без ограничения в Хилбертово пространство.

Този метод се базира на метод на Нютон и зависи от един вектор-параметър. Подходящото избиране на параметрите осигурява линейна или свърхлинейна (супергеометрична) на итерационния метод.

Ние ще търсим минимума на скаларната функция $V_{p(\varepsilon)}(x)$ дефинирана в Хилбертовото пространство. Тази функция зависи от многозначен вектор-параметър $p(\varepsilon)$.

Ще разгледаме един итерационен метод за намиране поне на едно от решенията на негладка функция в Хилбертово пространство. Подходящия избор на параметрите осигурява свърхлинейна(супергеометрична) сходимост на итерационния метод.

Тази глава продължава някои изследвания на [52], [54], [104] и [105].

Основните резултати са представени за публикуване в статия [108]. Приет е доклад [D6].

Глава 1

Многозначни алгоритми

1.1 Основни проблеми

Ние разглеждаме абстрактни алгоритми със смущения в Банахово пространство. В този случай обобщаваме известните достатъчни условия за сходимост на алгоритми без смущения за алгоритми със смущения със запазване на скоростта на сходимост ([97]).

Смущението на алгоритма може да бъде разглеждано като управление на итерационния процес (виж например [54], [105]) и също като грешка при приблизителните пресмятания. Отбелязваме, че разглежданите абстрактни алгоритми решават оптимизационни проблеми. Следователно итерационният процес трябва да намери неподвижна точка на генерираща оператор. Това е необходимо при пресмятанията поради числовите грешки и в модификациите на алгоритмите, които зависят от параметър.

В параграф 1 са представени използуваните основни понятия и помощни твърдения.

В параграф 2 идеи на Зангвил ([102]) са обобщени за многозначен параметризиран генериращ оператор със слабокомпактни значения.

В параграф 3, по аналогия на [97], ние сравняваме достатъчните условия за сходимост на алгоритмите със смущения.

В параграф 4 са представени някои приложения в математическото програмиране.

Необходимост от това изследване се явява в пресмятанията поради наличие на числови грешки и при модификациите на алгоритми зависещи от параметър.

1.2 Основни понятия и помощни твърдения

Сега ще представим основни понятия и помощни твърдения, които ще бъдат използувани в тази глава.

Ще отбележим, че ако **X** и **Y** са множества. **Многозначно изображение** **F** от **X** в **Y** се нарича изображение, което съпоставя на всяко $x \in X$ множество $F(x) \subset Y$, наричано **образ** на точка x при изображение **F**, или **стойност** на **F** в точката x ([17]).

Ако **E** - е Банахово пространство, то с $\mathbf{E}^*$ ще означаваме съвкупността на всички **линейни непрекъснати функционали** $\mathbf{x}^*$ върху **E**. Както е известно това е линейно нормирано пространство, което се нарича (топологически) двойствено (или топологически спрегнато) на **E**. Ще разглеждаме оператор в **рефлексивни Банахови пространства**, т.е. в Банахови пространства, за които $\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}$.

Слабата топология на **E** се определя по следния начин: редицата $\{x_n\}$, $n \in N$, се схожда слабо към $\bar{x} \in E$, ако за всяко **фиксирано** $q \in E^*$

$$\langle q, x_n \rangle \longrightarrow \langle q, \bar{x} \rangle \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Нека **E** топологическо пространство. Функцията

$$U : X \longrightarrow R \bigcup \{+\infty\}$$

се нарича **полунепрекъсната отдолу** (съкратено: п.н.д.), ако за всяка точка $\bar{x} \in E$

$$\varliminf_{x \to \bar{x}} U(x) \geq U(\bar{x}).$$

Нека Ω е област в рефлексивното Банахово пространство E ([17]) и $P \subset R$ е затворен интервал, където R е реалната права.

Нека означим с $2^{\Omega} \setminus \emptyset$ множеството от непразни подмножества на Ω. Обикновено всеки алгоритъм с генериращ оператор $A(x)$ трябва да направи изображение от Ω в Ω. Някои алгоритми както и реализациите на алгоритми изобразяват Ω в подмножествата на Ω, т.е.

$A(\cdot) : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega}$.

В тази глава ние ще разглеждаме алгоритми с генериращ оператор $A(z,p)$, които зависят от скаларния параметър $p \in P$ и те изобразяват Ω в $2^{\Omega} \setminus \emptyset$.

В главата се предполага, че $A(z,p)$ е слабокомпактно множество за всяко фиксирано $z \in \Omega$ и $p \in P$ и че множеството

$$\bigcup_{z \in \Omega} A(z,p)$$

е ограничено и затворено за всяко фиксирано $p \in P$.

Нека

$$H(F,G) = \max\{\inf\{r \geq 0 \,|\, F \subset G + r\,B\}\,, \\ \inf\{r \geq 0 \,|\, G \subset F + r\,B\}\,\}$$

е Хаусдорфовото разстояние между ограничените множества F и G, където B е единичното кълбо в Банаховото пространство E. Означаваме

$$H_1(F,G) = \inf\{r \geq 0 \,|\, F \subset G + r\,B\}.$$

Операторът $A(z,p)$ е **непрекъснат** по p, когато $H(A(z,p^*), A(z,p))$ е непрекъснато по p. Операторът $A(z,p)$ е **полунепрекъснат отгоре** (п.н.г.) по z, когато $H_1(A(z^*,p), A(z,p))$ е непрекъснато по z ([17]).

Дефиниция 1 .

1. *Еднозначната функция*

$$z(\cdot) : P \longrightarrow \Omega$$

ще наричаме **неподвижна функция** *за изображение* $A(\cdot,\cdot)$, *ако за всяко* $p \in P$ *е в сила следното включване*

$$z(p) \in A(z(p), p). \tag{2}$$

2. $\Delta(p)$ *е* **множеството от неподвижните функции** *на* $A(\cdot, p)$.

Нека представим един абстрактен многозначен алгоритъм за намиране на точка на сгъстяване на оператора $A(\cdot,\cdot)$:

Алгоритъм I Нека $\varepsilon_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ е фиксирана редица от положителни числа.

Стъпка 0 : Задаваме $i = 0$. Избираме $z_0 \in \Omega$ и $p_0 \in P$.

Стъпка 1 : За дадено i, избираме някоя еднозначна непрекъсната функция $z_{i+1}(q)$ и p_{i+1}, за които

$$z_{i+1}(q) \in A(z_i, q), \quad q \in (p_i - \varepsilon_i, p_i + \varepsilon_i). \tag{3}$$

и $p_{i+1} \in (p_i - \varepsilon_i, p_i + \varepsilon_i)$. Означаваме

$$z_{i+1} = z_{i+1}(p_{i+1}).$$

Стъпка 2 : Задаваме $i = i + 1$ и преминаме към **Стъпка 1**.

Отбелязваме, че **Стъпка 1** използва само ε_i и редицата $\{\varepsilon_i\}_0^\infty$ може да бъде конструирана итерационно. Ако абстрактните итерации не зависят от параметър, но реалните изчисления са с приближения, тогава включването (3) може да се смени с

$$z_{i+1}(p_i) \in A(z_i, p_i), \quad p_i \in (p^* - \varepsilon_i, p^* + \varepsilon_i), \tag{4}$$

където p^* е фиксирано и получаваме **Алгоритъм II** .

По-нататък в разглеждането ще имаме предвид **Алгоритъм II** при положение, че изрично не е казано какъв е **Алгоритма** .

Нека скаларната функция $c(\cdot,\cdot) : \Omega \times P \longrightarrow R$ е **целевата функция на Алгоритма** .

Означаваме

$$u(z,p) = \sup_{y \in A(z,p)} c(y,p),$$

която е известна като **горната функция на Бер**.

Добре известната **Теорема на Вайерщрас** гласи:

Теорема 1 ([7]) *Ако $X \subset E \neq \emptyset$ е компактно множество в произволно топологично пространство и функцията $f : X \to R^1$ е полунепрекъснатa отдолу (отгоре) в X, тя достига инфимума (супремума№ си в X.*

От теорема 1 имаме $u(z,p) = \max_{y \in A(z,p)} c(y,p)$, ако функцията $c(\cdot,p)$ п.н.г., като една еднозначна складна функция в слабата топология на E.

Нека $\omega(p,\varepsilon)$ бъде следния модул на непрекъснатост за функцията $c(z,\cdot)$:

$$\omega(p,\varepsilon) = \sup_{|q| \leq \varepsilon} \sup_{z \in \Omega} |c(z,p+q) - c(z,p)|. \tag{5}$$

Следвното множество

$$\{(y,z,p) \in E \times E \times R \,|\, y \in A(z,p), \quad z \in \Omega, \quad p \in P\}$$

се нарича **графика на оператора** $A(\cdot,\cdot)$.

Ще казваме, че **Алгоритмът е сходящ**, ако за всяка генерирана от него редица $\{z_i\}_1^\infty$ и $\{p_i\}_1^\infty$ и $(\lim_{i\to\infty} p_i = p^*)$ $\exists$ подредица $\{z_{k_i}\}_1^\infty$, която е сходяща към елемент $z^* \in \Delta(p^*)$.

Теорема 2 *Разглеждаме* **Алгоритма** *, където Ω е една област в E и $P = [p^* - \varepsilon_0, p^* + \varepsilon_0]$. Нека*

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega(p, \varepsilon_{i+j}) = 0, \quad p \in P. \tag{6}$$

Нека генериращият оператор $A(z,p)$ на **Алгоритма** *е непрекъснат по p равномерно за всяко z, има слабо затворена графика, значенията на $A(z,p)$ са слабокомпактни и*

$$\bigcup_{z\in\Omega} A(z,p) \quad \forall p \in P \tag{7}$$

е ограничено подмножество на E. Нека съществува функция $c(z,p)$, която е слабо непрекъсната по (z,p). Ако

$$u(z,p) \leq c(z,p), \quad \forall z \in \Omega, \quad p \in P \quad \text{и} \tag{8}$$

$$u(z,p) < c(z,p), \quad \forall z \in \Omega \setminus \Delta(p), \quad p \in P,$$

тогава **Алгоритмът** *е сходящ.*

Доказателство. Нека $\{(z_i,p_i)\}_0^\infty$ е една подредица на редица генерирана с **Алгоритмa**. Предполагаме, че

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} c(z_i,p_i) = \lim_{i\to\infty} c(z_i,p_i).$$

От (6) имаме, че редицата $\{p_i\}_0^\infty$ е ограничена и без загуба на общност ние можем да предположим, че $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p^* \in P$.

Ще покажем, че съответната и подредица $\{z_{i+1}\}$ е ограничена. Имаме $z_{i+1} \in A(z_i,p_i)$. Поради равномерната непрекъснатост по p, получаваме : $\forall \delta > 0$ $\exists$ отворено кълбо $B(\delta)$ с радиус δ такова, че $\forall z \in \Omega$ и $i \geq i_0$

$$A(z,p_i) \subset A(z,p^*) + B(\delta).$$

Следователно

$$z_{i+1} \in A(z_i,p_i) \subset A(z_i,p^*) + B(\delta) \subset$$

$$\bigcup_{z\in\Omega} A(z,p^*) + B(\delta),$$

т.е. от (7) следва, че z_{i+1} принадлежат на ограничено множество. E е рефлексивно Банахово пространство и всяка ограничена редица е слаб прекомпакт. Следователно можем да изберем последователно подредици $\{z_{i_k}\}_0^\infty$ и $\{z_{i_k+1}\}_0^\infty$ слабо схождящи съответно към точки $z^* \in E$ и $z_* \in E$. От (6) имаме, че $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ и очевидно $\lim_{k\to\infty} p_{i_k+1} = p^*$. Поради условията на теоремата графиката на оператор $A(\cdot,\cdot)$ е слабо затворена и ако k клони към безкрайност в следващото включване $z_{i_k+1} \in A(z_{i_k}, p_{i_k})$, тогава получаваме $z_* \in A(z^*, p^*)$.

Имаме

$$
\begin{gathered}
c(z_{i_k}, p_{i_k}) \geq c(z_{i_k+1}, p_{i_k}) \geq \\
c(z_{i_k+1}, p_{i_k+1}) - \omega(\varepsilon_{i_k}, |p_{i_k} - p_{i_k+1}|) > \\
c(z_{i_k+2}, p_{i_k+1}) - \omega(\varepsilon_{i_k}, |p_{i_k} - p_{i_k+1}|) \geq \\
c(z_{i_k+2}, p_{i_k+2}) - \omega(\varepsilon_{i_k}, |p_{i_k} - p_{i_k+1}|) - \omega(\varepsilon_{i_k+1}, |p_{i_k+1} - p_{i_k+2}|) > \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c(z_{i_{k+1}}, p_{i_{k+1}-1}) - \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-2} \omega(\varepsilon_j, |p_j - p_{j+1}|) \geq \\
c(z_{i_{k+1}}, p_{i_{k+1}}) - \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-2} \omega(\varepsilon_j, |p_j - p_{j+1}|) - \omega(\varepsilon_{i_{k+1}-1}, |p_{i_{k+1}-1} - p_{i_{k+1}}|).
\end{gathered}
$$

Следователно

$$
\begin{gathered}
c(z_{i_k}, p_{i_k}) \geq c(z_{i_k+1}, p_{i_k}) \geq \\
c(z_{i_{k+1}}, p_{i_{k+1}}) - \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} \omega(\varepsilon_j, |p_j - p_{j+1}|).
\end{gathered}
$$

След граничен преход получаваме:

$$c(z^*, p^*) \geq c(z_*, p^*) \geq c(z^*, p^*).$$

Следователно

$$u(z^*, p^*) \geq c(z_*, p^*) \geq c(z^*, p^*).$$

От включването $z_* \in A(z^*, p^*)$ и неравенството

$u(z,p) < c(z,p), \quad z \in \Omega \setminus \Delta(p),$ слева, че $z^* \in \Delta(p^*)$.

Q.E.D.

Следствие 1 *От условията на теорема 2, за всяко $p \in P$ следва, че съществува точка на сгъстяване $z(p)$, която се получава с* **Алгоритма**.

Доказателство. Избирайки $p_0 = p$ и $\varepsilon_i = 0$ за всяко $i = 0, 1, \ldots$ ние трябва да повторим доказателството на теорема 2.

Q.E.D.

В тази глава ще разглеждаме алгоритми, които са монотонни с порядък k относно функцията $c(\cdot,\cdot)$, т.е.

$$u(z,p) \leq q^k c(z,p), \quad \forall z \in \Omega, \quad p \in P \quad \text{и} \quad 0 < q < 1.$$

По аналогия на [97] ще разгледаме една поредица от достатъчни условия за скоростта на сходимост на **Алгоритма**. Тази поредица от достатъчни условия може да бъде разглеждана като обобщение достатъчните условия, които са представени в [102]. Тогава следва

Следствие 2 *Ако са изпълнени условията на теорема 2, за всяко $p \in P$ и когато*

$$u(z,p) < q^k c(z,p), \quad \forall z \in \Omega \setminus \Delta(p) \quad \text{и} \quad p \in P,$$

тогава **Алгоритмът** *се схожда към точка на сгъстяване на оператора $A(z,p)$ с порядък k.*

Следната теорема е вариант на принципа за свиване на Банах.

Теорема 3 *Нека операторът $A(\cdot,\cdot)$ удовлетворява условието на Липшиц:*

$$H(A(z_1,p_1), A(z_2,p_2)) \leq q\,\|z_1 - z_2\| + L\,|p_1 - p_2|,$$

където $q < 1$ и L са константи.

Тогава съществува редица $\{\varepsilon_i\}_0^\infty$, за която скоростта на сходимост на **Алгоритма** *е най-малко линейна.*

Доказателство. За генерираната чрез **Алгоритма** редица $\{z_i\}_0^\infty$ трябва да докажем, че

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\|z_{i+1}-z_i\|}{\|z_i-z_{i-1}\|}=q_1<1.$$

Нека изберем

$$0\le\varepsilon_i\le\frac{1-q}{2L}\|z_i-z_{i-1}\|.$$

Получаваме

$$\|z_{i+1}-z_i\|\le H(A(z_i,p_{i+1}),A(z_{i-1},p_i))\le$$

$$q\,\|z_i-z_{i-1}\|+L\,|p_1-p_2|\le$$

$$q\,\|z_i-z_{i-1}\|+L\,\varepsilon_i$$

$$\le q\,\|z_i-z_{i-1}\|+L\,\frac{1-q}{2L}\|z_i-z_{i-1}\|=\frac{1+q}{2}\,\|z_i-z_{i-1}\|.$$

Следователно имаме

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\|z_{i+1}-z_i\|}{\|z_i-z_{i-1}\|}\le\frac{1+q}{2}=q_1<1.$$

Q.E.D.

1.3 Достатъчни условия

Ще разгледаме една поредица от достатъчни условия за сходимост на **Алгоритма**, които са подобни на условията от [97].

В повечето приложения, $c(\cdot,\cdot)$ е в добро съответствие с целевите функции в оптимизационните проблеми. Операторът $A(\cdot,\cdot)$ обикновено е конструиран с използване производните на целевата функция. Ако целевата функция не е диференцируема, но притежава някои свойства на регулярност, тогава операторът $A(\cdot,\cdot)$ може да бъде конструиран чрез обобщени градиенти ([27]).

Отбелязваме, че условието за непрекъснатост на функцията $c(\cdot,\cdot)$ в слабата топология в E е едно ограничение. За някои целеви функции като изпъкналите функции е нормално да се изисква $c(\cdot,\cdot)$ да е полунепрекъсната отдолу в слабата топология. Накрая ще изискваме $c(\cdot,\cdot)$ да е само ограничена отдолу.

В този параграф ние предполагаме, че следващите седем условия са в сила:

Условия C.

1. Ω е област в E и P е затворен интервал в R.
2. $u(z,p) \leq q^k c(z,p), \quad \forall z \in \Omega, \quad p \in P$ и $0 < q < 1$.
3. $\bigcup\limits_{z\in\Omega} A(z,p)$ е ограничено множество за всяко $p \in P$.
4. $A(z,p)$ е равномерно непрекъснат по $p \in P$ относно z.
5. $A(\cdot,\cdot)$ има слабокомпактни стойности и слабо затворена графика.
6. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$.
7. $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=i}^{\infty} \omega(p, \varepsilon_{i+j}) = 0, \quad p \in P$.

Според теорема 2 ние можем да напишем следващите условия, които са свързани с [102]:

Условия 1.

(i) Функцията $c(z,p)$ е слабо непрекъсната по z.

(ii) $u(z,p) < q^k c(z,p), \quad \forall z \in \Omega \setminus \Delta$ и $p \in P$.

Следващите условия обобщават условията в [75] , където генериращият оператор е еднозначен

Условия 2.

(i) Функцията $c(z,p)$ е слабо п.н.д. по z.

(ii) $u(z,p) < q^k c(z,p), \quad \forall z \in \Omega \setminus \Delta$ и $p \in P$.

(iii) Функцията $u(z,p)$ е слабо п.н.г. по z.

Следващите условия са свързани с условията от [97] и очевидно, те са еквивалентни на **Условия 2.**

Условия 3.

(i) Функцията $c(z,p)$ е слабо п.н.д. в z.

(ii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$ и $p \in P$, съществува $\gamma(z,p) > 0$, за която $u(z,p) \leq q^k c(z,p) - \gamma(z,p)$.

(iii) Функцията $u(z,p)$ е слабо п.н.г. по z.

Отбелязваме, че (iii) на **Условия 2, 3** означават, че функцията $c(z,p)$ е слабо непрекъсната на редиците генерирани с **Алгоритма**. Това условие може да бъде сменено с условието за максимална монотонност. То съдържа слабата полунепрекъснатост отдолу на функцията $c(z,p)$. Слдващата редица от достатъчни условия е свързана с [60], [61], [74], [97], [61] и [97].

Условия 4.

(i) Функцията $c(z,p)$ е слабо п.н.д в z.

(ii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$ и $p \in P$, съществува околност U на z, за която $u(z',p) < q^k c(z,p)$ за всяко $z' \in U$.

Условия 5.

(i) Функцията $c(z,p)$ е ограничена отдолу върху Ω.

(ii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$ и $p \in P$ съществува $\delta(z,p) > 0$, за която $u(z,p) \leq q^k c(z,p) - \delta(z,p)$.

(iii) За всяко $z \in \Omega$, ако z_i слабо схожда към z, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \delta(z_i,p_i) = 0$, тогава $\delta(z,p) = 0$.

(iv) $\{z \in \Omega \,|\, \delta(z,p) = 0\} \subset \Delta(p)$.

Дефиниция 2 ([97])

Двойката (c, A) локално равномерно монотонна от порядък k в z, ако съществуват число $\delta(z,p) > 0$ и околност $U(z)$ на z, за които

$$u(z',p) - q^k c(z,p) \leq -\delta(z,p) \quad \forall\, z' \in U(z), p \in P.$$

Условия 6.

(i) Функцията $c(z,p)$ е ограничена отдолу върху Ω.

(ii) Двойката (c, A) е локално равномерно монотонна от порядък върху $\Omega \setminus \Delta(p)$.

Условия 7.

(i) Функцията $c(z,p)$ е ограничена отдолу върху $\Omega \setminus \Delta(p)$.

(ii) За всяко $z \in \Omega$ и $p \in P$ съществува $\delta(z,p) > 0$, за която $u(z,p) \leq q^k c(z,p) - \delta(z,p)$.

(iii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$, ако $\{z_i\} \subset \Omega$, $z_i \to z$, тогава $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta(z_i) = \infty$.

Условия 8.

(i) Функцията $c(z,p)$ е ограничена отдолу върху $\Omega \setminus \Delta(p)$.

(ii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$, ако z_i слабо схожда към z, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p$, $\lim\limits_{i\to\infty} c(z_i,p_i) = c^*$ и $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} u(z_i,p_i) = c_*$, тогава $c_* < q^k c^*$.

Условия 9.

(i) Условията $c(z,p)$ е ограничена отдолу върху $\Omega \setminus \Delta(p)$.

(ii) За всяко $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$, ако z_i слабо схожда към z, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p$ и $\lim\limits_{i\to\infty} c(z_i,p_i) = c^*$, тогава съществува цяло число k_1, за което $c(z_{k_1}, p_{k_1}) < q^k c^*$.

Предполагайки, че **Условия** C са в сила, ние ще сравним горните девет достатъчни условия за сходимост на **Алгоритма**.

Лема 1 *От* **Условия 1** *следват* **Условия 2**. **Условия 2** *и* **Условия 3** *са еквивалентни.*

Доказателство. Всяка непрекъсната функция $c(\cdot,p)$ е очевидно полунепрекъсната отдолу. Поради **Условия** C функцията $u(\cdot,p)$ е полунепрекъсната отгоре. **Условия 2** и **Условия 3** са еквивалентни, защото (i) и (iii) на **Условия 2** и **Условия 3** са идентични. Тъй като $\gamma(z,p) > 0$, то $u(z,p) \leq q^k c(z,p) - \gamma(z,p) < q^k c(z,p)$. Обратно, като положим $\gamma(z,p) = q^k c(z,p) - u(z,p)$ от **Условия 2**(ii) следва **Условия 3**(ii). **Q.E.D.**

Пример 1.

Сега ние ще разгледаме един пример, когато са удовлетворени Условия 2, но не и Условия 1 . Нека разгледаме следната оптимизационна задача:

$$\min_{|z|\leq 1} c(z,p) = \min_{|z|\leq 1} p|z|^2,$$

където H е Хилбертово пространство, $0 < p < \frac{1}{2}$,
$\Delta(p) \equiv \Delta = 0 \in H$ и $\Omega = \{z \in H \,|\, |z| \leq 1\}$.

Имайки предвид параграф 2, ние дефинираме оператора $A(z,p)$ и пресмятаме функция $u(z,p)$. Ние задаваме

$$A(z,p) = z - 2pz = (1-2p)z$$

и чрез несложни изчисления получаваме:

$$u(z,p) = \sup_{y \in A(z,p)} c(y,p) = c((1-2p)z,p) =$$

$$(1-2p)^2 c(z,p) < q^k c(z,p),$$

където k е цяло и $\sqrt[k]{(1-2p)^2} < q < 1$.

Очевидно, $c(z,p)$ и $u(z,p)$ удовлетворяват Условия 2, но те не удовлетворяват Условия 1, тъй като $c(z,p) = p|z|^2$ е слабо п.н.д., но не е слабо непрекъсната. Отбелязваме, че този пример удовлетворява също Условия 3 и 4.

Лема 2 *От* **Условия 3** *следват* **Условия 4**.

Доказателство. $u(z,p)$ е слабо п.н.г. и за $0 < \varepsilon = \frac{\gamma(z,p)}{2}$ съществува околност U на z, за която

$$u(z',p) \leq u(z,p) + \varepsilon \leq q^k c(z,p) - \gamma(z,p) < c(z,p)$$

ако $z' \in U$.

Q.E.D.

Лема 3 **Условия 6** *и* **Условия 7** *са еквивалентни.*

(ii) и (iii) на **Условия 7** са еквивалентни на условието, че двойката (c, A) е локално равномерно монотонна. Този факт е доказан в [97] без зависимост от параметър p.

Отбелязваме, че от (ii) на **Условия 8** следва (ii) на **Условия 9** и ние можем да формулираме следващата лема:

Лема 4 *От* **Условия 8** *следват* **Условия 9**.

Условието, че двойката (c, A) е локално равномерно монотонна е по-силно отколкото (ii) на **Условия 8**, респективно (ii) на **Условия 9**.

Следователно имаме

Лема 5 *От* **Условия 6** *следват* **Условия 8**.

Лема 6 *От* **Условия 5** *следват* **Условия 9**.

Доказателство. Нека редицата $z_i \in \Omega \setminus \Delta(p)$ слабо схожда към $z \in \Omega \setminus \Delta(p)$. Тогава имаме $\varliminf_{i\to\infty} \delta(z_i, p) \geq \delta > 0$. Клонейки i към безкрайност в неравенството

$$u(z_i, p) \leq q^k c(z_i, p) - \delta(z_i, p)$$

получаваме

$$\varlimsup_{i\to\infty} u(z_i, p) \leq q^k c^* - \delta.$$

Следователно, същесвува k_1, за което $u(z_{k_1}, p) < q^k c^*$.

Q.E.D.

Пример 2.

Ние ще разгледаме един пример, за който Условия 5 са в сила, по-конкретно функцията $c(z, p)$ е ограничена отдолу, но не е слабо п.н.д. Очевидно, такъв пример не удовлетворява Условия 1, 2, 3, и 4.

Разглеждаме следната оптимизационна задача:

$$\min_{|z|\leq 1} c(z, p) = \min_{|z|\leq 1} p(1 - |z|),$$

където H е Хилбертово пространство, $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$, $\Delta(p) \equiv \Delta = \{z \in H \,|\, |z| = 1\}$ и $\Omega = \{z \in H \,|\, |z| \leq 1\}$.

Нека дефинираме

$$A(z,p) = z + 2c(z,p)\frac{z}{|z|} = (1 + 2\frac{c(z,p)}{|z|})z,$$

ако $|z| \neq 0$ и $A(0,p) = 2p\{y \in H \,|\, |y| = 1\}$.

За функцията $u(z,p)$ имаме:

$$u(z,p) = \sup_{y \in A(z,p)} c(y,p) = p(1 - |z|(1 + 2p\frac{1 - |z|}{|z|})) =$$

$$p - p|z| - p|z|2p\frac{1 - |z|}{|z|} =$$

$$p - p|z| - 2p^2 + 2p^2|z| = (1 - 2p)(p - p|z|) = (1 - 2p)c(z,p),$$

ако $|z| \neq 0$ и $u(0,p) = (1 - 2p)p$.

Задавайки $q = 1 - p$, $k = 1$ и $\delta(z,p) = pc(z,p)$, ние имаме $u(z,p) \leq qc(z,p) - \delta(z,p)$.

Функцията $c(z,p) = p(1 - |z|)$ е вдлъбната и едновременно ограничена отдолу и слабо полунепрекъсната отгоре, но не и слабо полунепрекъсната отдолу. За всяка редица $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, която слабо схожда към z и ако

$$\lim_{i \to \infty} \delta(z_i, p_i) = 0,$$

ние имаме $\delta(z,p) = pc(z,p) = 0$, където $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$.

Следователно, Условия 5 са удовлетворени за разгледаната оптимизационна задача.

Лема 7 *От* **Условия 4** *следват* **Условия 9**.

Доказателство. Нека **Условия 4** са в сила. Тогава съществува околност U на z, за която

$$u(z', p) < q^k c(z,p) \leq q^k \varliminf_{i \to \infty} c(z_i, p) \leq q^k c^*$$

за всяко $z' \in U$. Очевидно, за някое k_1 е в сила следващото неравенство $u(z_{k_1}, p) < q^k c^*$.

Q.E.D.

От горните леми получаваме, че ако **Условия 9** са действително достатъчни условия за сходимостта на **Алгоритма**, тогава всички девет условия осигуряват сходимостта на **Алгоритма**.

Теорема 4 *Нека* **Условия** C *и* **Условия 9** *са изпълнени. Нека редицата* $\{\varepsilon_i\}$ *е избрана според неравенството*

$c(z_{i+1}, p_{i+1}) \leq c(z_i, p_i)$*, където* $p_i \in (p_i - \varepsilon_i, p_i + \varepsilon_i)$*. Тогава* **Алгоритмът** *се схожда към точка на сгъстяване на оператора* $A(z,p)$ *с порядък* k*.*

Доказателство. Според **Условия** C, както бе доказано в теорема 1, съществуват подредици $\{z_{i_k}\}$, $\{z_{i_k+1}\}$ слабо схождащи към z^*, респективно към z_* и редица $\{p_i\}$ схождаща към p^*. Предполагаме $z^* \notin \Delta(p^*)$. Поради **Условия 9** (i) и **Условия** $C(7)$, съществува

$$c^* = \lim_{k\to\infty} c(z_{i_k}, p_{i_k}) > -\infty.$$

Според **Условия 9**(ii), съществува цяло число s, за което $c(z_{i_s}, p_{i_s}) < q^k c^*$. Така както $\{c(z_i, p_i)\}$ е монотонно намаляваща редица от порядък , ние имаме $c^* \leq c(z_i, p_i)$. Следователно, получаваме следващото противоречие: $c(z_{i_s}, p_{i_s}) < q^k c^* \leq c(z_{i_s}, p_{i_s})$.

Q.E.D.

Теорема 5 *Нека* **Условия** C *и* **Условия 8** *са удовлетворени. Тогава* **Алгоритмът** *схожда към точка на сгъстяване на оператора* $A(z,p)$ *с порядък* k*.*

Доказателство. От **Условия** C следващото неравенство

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} c(z_{i_k}, p_{i_k}) \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} c(z_{i_k+1}, p_{i_k+1}) \tag{9}$$

се доказва в теорема 2, където редиците $\{z_{i_k}\}$, $\{z_{i_k+1}\}$ слабо схождат към z^*, респективно към z_* и редицата $\{p_i\}$ схожда към p^*. Според **Условия 8**(i) и **Условия** $C(7)$, съществува

$$c^* = \lim_{k\to\infty} c(z_{i_k}, p_{i_k}) > -\infty.$$

От **Условия** C (2) и (7), имаме

$$c(z_{i_k+1}, p_{i_k+1}) \le c(z_{i_k+1}, p_{i_k}) + \omega(z_{i_k+1}, \varepsilon_{i_k}) \le$$
$$u(z_{i_k}, p_{i_k}) + \omega(z_{i_k+1}, \varepsilon_{i_k}).$$

Означаваме

$$c_* = \overline{\lim_{k\to\infty}}\ u(z_{i_k}, p_{i_k}).$$

От (9) ние имаме $c^* \le c_*$ и от **Условия 8**(ii), получаваме $z^* \in \Delta(p^*)$.

Q.E.D.

Тези достатъчни условия са в сила за всяко q_1, което е $q < q_1 < 1$. Ние можем да определим тогава допустимата грешка ε_i на параметъра p на стъпка i за запазването на скоростта на сходимост на **Алгоритма**. Например: $\varepsilon_i \le (q_1^k - q^k)c(z_i, p)$.

Представените достатъчни условия са в сила също, ако $\tilde{\Omega}$ е Хаусдорфово топологично пространство удовлетворяващо първата аксиома за изброимост.

1.4 Примери от нелинейното оптимиране

Ще разгледаме примери, които частично илюстрират горе споменатите изследвания в математическото оптимиране, където редицата p_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, би трябвало да се интепретира като грешката допускана на стъпка i. Друга интерпретация на редицата $\{p_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, е управление на итерационния процес (виж [54] и [105]). Нека разгледаме три метода за нелинейната оптимизационна задача без ограничения ([10]) :

$$\min_{x \in R^n} f(x) = f(x^*) = f^*.$$

1.4.1 Метод на най-бързото спускане

Нека $f(x)$ е два пъти непрекъснато диференцируема функция, на която матрицата от вторите производни удовлетворява следващите неравенства:

(10) $$m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, M \geq m > 0$$

за всички $x, y \in R^n$(т.е. $f(x)$ е силно изпъкнала функция). Формулата на метода на най-бързото спускане е

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_{i_i nf} f'(x_i)$$

където коефициентът $\alpha_{i_i nf}$ е получен от условието

$$\min_{\alpha \geq 0} f(x_i - \alpha f'(x_i)) = f(x_i - \alpha_i f'(x_i)).$$

Тъй като α_i се получава с известна грешка поради различни причини, тогава следващата грешка се появява на всяка стъпка

$$|f(x_i - \alpha_i f'(x_i)) - \min_{\alpha \geq 0} f(x_i - \alpha f'(x_i))| \leq p_i.$$

Тогава **Алгоритмът** за метода на най-бързото спускане ще е следния :

$$x_{i+1}(p) = x_i - \alpha_{i_i nf}(p) f'(x_i)$$

Съгласно [10] имаме

(11) $$f_{i+1} - f^* \leq \left[\frac{M-m}{M+m}\right]^2 (f_i - f^*) \leq \left[\frac{M-m}{M+m}\right]^{2(i+1)} (f_0 - f^*),$$

но понеже

$$\frac{m}{2}\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leq f_{i+1} - f^* \leq \frac{M}{2}\|x_{i+1} - x^*\|^2$$

и
$$\|x_{i+1} - x^*\| \le q\Big[\frac{M-m}{M+m}\Big]^{i+1},$$
където $q = \Big[\frac{M}{m}\Big]^{\frac{1}{2}} \|x_0 - x^*\|$.

Тогава съгласно (11) получаваме следващата оценка на $\{p_i\}$
$$f_{i+1} - f^* - p_i \le c(f_i - f^*), \text{ т.е.}$$

$$f_{i+1} - f^* \le c(f_i - f^*) + p_i \le c_1(f_i - f^*), \tag{12}$$

където
$$c = \Big[\frac{M-m}{M+m}\Big]^2 < 1, \ c \le c_1 < 1.$$
Следователно $p_i \le (f_i - f^*)(c_1 - c)$.

Означаваме $a_{i+1} = f_{i+1} - f^*$. Тъй като $p_i \le (c_1 - c)a_i$, според (12) имаме
$$a_{i+1} \le ca_i + p_i \le c(ca_{i-1} + p_{i-1}) + p_i \le c_1^2 a_{i-1}, \text{ т.е.}$$
$$a_{i+1} \le c^{i+1} a_0 + \sum_{k=0}^{i} c^k p_{i-k} \le c_1^{i+1} a_0.$$

Очевидно имаме $\lim\limits_{i\to\infty} a_{i+1} = 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} c_1^{i+1} a_0 = 0$. Запазвайки скоростта на сходимост, ние получаваме следващото условие за редицата $\{z_i\}$: $\sum\limits_{k=0}^{i} c^k p_{i-k} = 0$.

Пример.

Нека вземем функцията $f(x_1, x_2) = \Big[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\Big]$. Тя има $\mathbf{min} = 0$ за $x^*(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$, където
$$f''(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Тук $M = \frac{1}{b^2}$, $m = \frac{1}{a^2}$ и $c = \Big[\frac{M-m}{M+m}\Big]^2 = \Big[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Big]^2$ за $a > b$.

Ясно е, че ако $a^2 \gg b^2 \Longrightarrow \frac{1}{b^2} \gg \frac{1}{a^2}$ следователно сечението на този елиптичен параболоид с всяка равнина, която е успоредна на равнината Ox_1x_2, ще бъде силно удължена елипса в направление на оста Ox_1.

Следователно собствените стойности $\frac{1}{a^2} = m$ и $\frac{1}{b^2} = M$ ще бъдат много различни една от друга и следва, че матрицата $f''(x)$ ще бъде лошо обусловена. Тогава $c = \left[\frac{M-m}{M+m}\right]^2$ ще бъде близо до 1. Ясно е, че $f(x_1, x_2)$ удовлетворяв условията (11)(теорема (1.3) от [10]).

1.4.2 Метод на Нютон

Нека $f(x)$ е двукратно непрекъснато диференцируема функция, чиято матрица от вторите производни удовлетворява условията

$$m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, M \geq m > 0 \tag{10}$$

за всички $x, y \in R^n$(т.е. $f(x)$ е силно изпъкнала функция).

Формулата на метода на Нютон е

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i(f_i'')^{-1} f_i',$$

където коефициентът α_i е избран така, че

$$f(x_i - \alpha_i(f_i'')^{-1} f_i') = \min_{\alpha \geq 0} f(x_i - \alpha(f_i'')^{-1} f_i').$$

Тогава **Алгоритмът** за метода на Нютон ще е следния :

$$x_{i+1}(p) = x_i - \alpha_i(p)(f_i'')^{-1} f_i'.$$

Ние имаме от [10], че

$$\|x_{i+1} - x^*\| \leq \lambda \|x_i - x^*\|,$$

където $\lambda = \frac{1}{m}\|f_i'' - f_{kc}''\|$, $x_{kc} = x_i + \theta(x_{i+1} - x_i)$, $\theta \in (0,1)$.

Понеже

$$\|x_i - x^*\| \longrightarrow_{i\to\infty} 0,$$

тогава

$$\|f''_{kc} - f''_i\| \le \|f''_{kc} - (f^*)''\| + \|(f^*)'' - f''_i\| \to 0,$$

което следва от непрекъснатостта на функцията $f''(x)$. Тъй като $\|f''_{kc} - f''_i\| \to 0$, ще съществува N, такова че за $i = N + l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$,тогава $\lambda_{N+l} < 1$, защото $\lambda_{N+l} \to 0$ за $l \to \infty$.

Тогава от

$$\frac{m}{2}\|x - x^*\|^2 \le f(x) - f(x^*) \le \frac{M}{2}\|x - x^*\|^2$$

следва

$$\frac{m}{2}\|x_{i+1} - x^*\|^2 \le f_{i+1} - f^* \le f(\tilde{x}_{i+1}) - f^* \le$$

$$\frac{M}{2}\|\tilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 \le \frac{M}{2}\lambda_i^2\|\tilde{x}_i - x^*\|^2 \le \frac{2}{m}\frac{M}{2}\lambda_i^2(f_i - f^*).$$

Тогава $f_{i+1} - f^* \le \frac{M}{m}\lambda_i^2(f_i - f^*) + p_i \le \frac{M}{m}\lambda_i^{*2}(f_i - f^*)$.

Ако вземем $\lambda_i^* = \lambda_i + C_1\lambda_i = \lambda_i(C_1 + 1)$, където $C_1 = const$, тогава

$$p_i \le (f_i - f^*)\frac{M}{m}(\lambda_i^{*2} - \lambda_i{}^2) =$$

$$(f_i - f^*)\frac{M}{m}\lambda_i{}^2(C_1^2 + 2C_1) =$$

$$(f_i - f^*)\frac{M}{m}\lambda_i{}^2 C_1(C_1 + 2).$$

Следователно, скоростта на сходимост ще бъде от същия характер(свръхлинейна). От друга страна, ще съществува цяло число N, за което $\lambda_N < \lambda$, $\lambda^2\frac{M}{m} < 1$ и тогава

$$f_{i+1} - f^* \le \frac{M}{m}\lambda_i^2(f_i - f^*) + p_i \le \frac{M}{m}\lambda_i^{*2}(f_i - f^*)$$

$$f_i - f^* \le \frac{M}{m}\lambda_{i-1}^2(f_{i-1} - f^*) + p_{i-1} \le \frac{M}{m}\lambda_{i-1}^{*2}(f_{i-1} - f^*)$$

....

$$f_{N+1} - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_N^2(f_N - f^*) + p_N \leq \frac{M}{m}\lambda_N^{*2}(f_N - f^*),$$

където $\lambda_N < \lambda_N^* < 1$(тук $\lambda = \lambda_N^*$).

Следователно

$$f_{i+1} - f^* \leq$$

$$\frac{M}{m}\lambda_i^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_{i-1}^2\Big(\dots\Big(\frac{M}{m}\lambda_{N+2}^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_{N+1}^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_N^2(f_N - f^*)+$$

$$p_N\Big) + p_{N+1}\Big) + p_{N+2}\Big) + \dots\Big) + p_{i-1}\Big) + p_i =$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1}\lambda_N^2\lambda_{N+1}^2\lambda_{N+2}^2\dots\lambda_i^2(f_N - f^*)+$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N}\lambda_{N+1}^2\lambda_{N+2}^2\dots\lambda_i^2 p_N+$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N-1}\lambda_{N+2}^2\lambda_{N+3}^2\dots\lambda_i^2 p_{N+1} + \dots +$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^2\lambda_{i-1}^2\lambda_i^2 p_{i-2} + \frac{M}{m}\lambda_i^2 p_{i-1} + p_i =$$

$$(f_N - f^*)\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1}\prod_{k=N}^{i}\lambda_k^2+$$

$$\sum_{k=N}^{i-1} p_k\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-k}\prod_{j=k+1}^{i}\lambda_j^2 + p_i \leq$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1}\lambda^{2(i-N+1)}(f_N - f^*).$$

Тогава следва, че е осигурена геометричната сходимост. Ако $a_N = f_N - f^*$, $c_i = \prod_{k=N}^{i}\frac{M}{m}\lambda_k^2$ и

$q_i = \sum_{k=N}^{i-1} p_k \Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-k} \prod_{j=k+1}^{i} \lambda_j^2 + p_i$, т.е.

$$\frac{m}{2}\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leq a_N c_i + q_i \leq \Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1} \lambda^{2(i-N+1)} a_N,$$

като се има предвид, че

$$f_{i+1} - f^* \leq a_N c_i + q_i \leq \Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1} \lambda^{2(i-N+1)} a_N$$

и

$$\lim_{i\to\infty} \Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1} \lambda^{2(i-N+1)} a_N = 0.$$

Понеже $a_N c_i \xrightarrow[i\to\infty]{uniform} 0$(със свръхлинейна скорост на сходимост) и следователно е необходимо също

$$\lim_{i\to\infty} q_i = 0, \quad q_i \leq \Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1} \lambda^{2(i-N+1)} a_N - a_N c_i$$

и тогава равномерната геометрична сходимост(независимо от $\{p_i\}$) на

$$f_{i+1} - f^* \xrightarrow[i\to\infty]{uniform} 0$$

ще бъде осигурена.

1.4.3 Модифициран метод на Нютон

Разглеждаме модифицирания метод на Нютон

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i B_i^{-1} f_i', \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

където α_k и матрицата B_i са дефинирани както следва:

$$f(x_i - \alpha_i B_i^{-1} f_i') = \min_{\alpha\geq 0} f(x_i - \alpha B_i^{-1} f_i'),$$

$$B_i(x_{i-k} - x_{i-k-1}) = f'(x_{i-k}) - f'(x_{i-k-1}), \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

И тук предполагаме, че $f(x)$ е двукратно непрекъснато диференцируема функция, чиято матрица от вторите производни удовлетворява условията

$$m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, M \geq m > 0 \tag{10}$$

за всички $x, y \in R^n$(т.е. $f(x)$ е силно изпъкнала функция). Тогава **Алгоритмът** за модифицирания метод на Нютон ще е следния :

$$x_{i+1}(p) = x_i - \alpha_i(p)B_i^{-1}(p)f_i', \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

Понеже функцията $f(x)$ удовлетворява условие (10), тогава модифицираният метод на Нютон схожда към минимума със свърхлинейна скорост. Едно обобщение на (10) и съответната сходимост са разгледани в [53]. Съгласно [10] имаме

$$\frac{m}{2}\|x_{i+1} - x^*\| \leq f_{i+1} - f^* =$$

$$f(x_{i+1}) - f^* \leq \frac{M}{2}\|x_{i+1} - x^*\|$$

и

$$\|x_{i+1} - x^*\| \leq \lambda_i\|x_i - x^*\|, \quad \lambda_i < 1.$$

Като предполагаме, че f_i се пресмята приблизително, ние може напишем:

$$f_{i+1} - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_i^2(f_i - f^*) + p_i.$$

И тук, както при метода на Нютон, ще имаме:

$f_{i+1} - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_i^2(f_i - f^*) + p_i \leq \frac{M}{m}\lambda_i^{*2}(f_i - f^*)$.

Ако вземем $\lambda_i^* = \lambda_i + C_1\lambda_i = \lambda_i(C_1 + 1)$, където $C_1 = const$, тогава

$$p_i \leq (f_i - f^*)\frac{M}{m}(\lambda_i^{*2} - \lambda_i^2) =$$

$$(f_i - f^*)\frac{M}{m}\lambda_i^2(C_1^2 + 2C_1) =$$

$$(f_i - f^*)\frac{M}{m}\lambda_i{}^2 C_1(C_1+2).$$

Следователно, скоростта на сходимост ще бъде от същия характер(свръхлинейна). От друга страна, ще съществува цяло число N, за което $\lambda_N < \lambda$, $\lambda^2\frac{M}{m} < 1$ и тогава

$$f_{i+1} - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_i^2(f_i - f^*) + p_i \leq \frac{M}{m}\lambda_i^{*2}(f_i - f^*)$$

$$f_i - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_{i-1}^2(f_{i-1} - f^*) + p_{i-1} \leq \frac{M}{m}\lambda_{i-1}^{*2}(f_{i-1} - f^*)$$

....

$$f_{N+1} - f^* \leq \frac{M}{m}\lambda_N^2(f_N - f^*) + p_N \leq \frac{M}{m}\lambda_N^{*2}(f_N - f^*),$$

където $\lambda_N < \lambda_N^* < 1$(тук $\lambda = \lambda_N^*$). Следователно

$$f_{i+1} - f^* \leq$$

$$\frac{M}{m}\lambda_i^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_{i-1}^2\Big(\ldots\Big(\frac{M}{m}\lambda_{N+2}^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_{N+1}^2\Big(\frac{M}{m}\lambda_N^2(f_N - f^*)+$$

$$p_N\Big) + p_{N+1}\Big) + p_{N+2}\Big) + \ldots\Big) + p_{i-1}\Big) + p_i =$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N+1}\lambda_N^2\lambda_{N+1}^2\lambda_{N+2}^2\ldots\lambda_i^2(f_N - f^*)+$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N}\lambda_{N+1}^2\lambda_{N+2}^2\ldots\lambda_i^2 p_N+$$

$$\Big(\frac{M}{m}\Big)^{i-N-1}\lambda_{N+2}^2\lambda_{N+3}^2\ldots\lambda_i^2 p_{N+1} + \ldots +$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 \lambda_{i-1}^2\lambda_i^2 p_{i-2} + \frac{M}{m}\lambda_i^2 p_{i-1} + p_i =$$

$$(f_N - f^*)\left(\frac{M}{m}\right)^{i-N+1} \prod_{k=N}^{i} \lambda_k^2 +$$

$$\sum_{k=N}^{i-1} p_k \left(\frac{M}{m}\right)^{i-k} \prod_{j=k+1}^{i} \lambda_j^2 + p_i \leq$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^{i-N+1} \lambda^{2(i-N+1)}(f_N - f^*).$$

Ако бихме желали да запазим свърхлинейната скорост на сходимост, тогава редицата $\{p_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ трябва да удовлетворява следващото условие:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=N}^{i-1} \left[p_k \left[\frac{M}{m}\right]^{i-k} \prod_{j=k+1}^{i} \lambda_j^2\right] = 0,$$

където $\lim_{i\to\infty} \prod_{j=k+1}^{i} \lambda_j^2 = 0.$

1.5 Примери от оптималното управление

Проблемът с чувствителността е съществен не само при оптимизационните алгоритми, но и в оптималното управление и е разгледан много обстойно от А. Дончев в [32].

Допускаме, че управлението на непрекъснатия процес е оптимално, но ние можем да го решим само чрез апроксимация с крайни разлики. Нека дискретното оптимално управление, получено от крайномерния модел, се получи стъпаловидна функция със скокове във възлите на мрежата. При прилагане към непрекъснатия процес на дискретното управление се получават колебания относно оптималното значение, които се изследват с функцията за оценка на чувствителността $S(h)$.

Разглеждаме задачата:

$$I(x(.), u(.)) = \int_0^1 f(x(t), u(t), t)dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = A(t) + B(t)u, \; x(0) = x^0,$$

$$\Psi(u(t), t) \leq 0.$$

Означаваме с $\hat{u}^N(.)$ дискретното оптимално управление, явяващо се решение на съответната апроксимираща задача:

$$I_N(x, u) = \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_i, u_i, t_i) \to \inf,$$

$$x_{i+1} = (I + hA_i)x_i + hB_i u_i, \quad x_0 = x^0,$$

$$\Psi(u_i, t_i) \leq 0, \; i = 0, \ldots, N-1, \; h = 1/N.$$

Нека $\tilde{x}^N(.)$ е траектория на непрекъснатата система, съответстваща на управлението $\hat{u}^N(.)$. Тогава оценката на чувствителността има вида:

$$S(h) = I(\tilde{x}^N(.), u^N(.)) - I(\hat{x}(.), \hat{u}(.)),$$

където $(\hat{x}(.), \hat{u}(.))$ е решението на непрекъснатата задача.

Означаваме с $H(u, t)$ Хамилтониана, т.е. полагаме

$$H(u, t) = -f(\hat{x}(t), u, t) + p^T(t)B(t)u,$$

където $p(.)$ е оптималната спрегната променлива.

Формулирана е следната теорема:

Теорема 6 *Съществува константа c, такава, че при достатъчно големи N е всила оценката:*

$$(I) \qquad 0 \leq \langle \partial H(\hat{u}/\partial u, \hat{u} - \hat{u}^N \rangle \leq S(h) \leq c(h^2 + h\|\partial H(\hat{u})/\partial u\|).$$

Ясно е, че тъй като разстоянието между $\hat{u}^N(.)$ и $\hat{u}(.)$ е равно точно на $O(h)$, очакваната скорост на сходимост на оценката на чувствителността $S(h)$ за задачи с ограничения ще бъде равна на $O(h)$. При отсъствие на ограничения скоростта на сходимост нараства двойно.

Да разгледаме два примера от оптималното управление ([32]), показващи, че малко изменение на задачата може съществено да измени скоростта на сходимост на оценката на чувствителността.

Пример 1.

$$\int_0^1 (u(t) - t)^2 dt \to \inf,$$
$$u(t) \le 1/2.$$

Оптималното управление има следния вид:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ 1/2 & \text{при} \quad 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

На интервала $[1/2, 1]$, където ограниченията са активни, имаме $\hat{u}^N(t) = \hat{u}(t)$. Поради това, съгласно оценката (I), получаваме $S(h) = O(h^2)$.

Пример 2.

$$\int_0^1 (u(t) - 1/2)^2 dt \to \inf,$$
$$u(t) \le t.$$

Решението на задачата е същото, както в пример 1, но $\|\hat{u}^N - \hat{u}\| = O(h)$ при $\partial H(\hat{u}(t), t)/\partial u < 0$ и следователно $S(h) = O(h)$.

Глава 2

Метод на функциите на Ляпунов

2.1 Увод

Важността и актуалността на задачата за решаване на системи уравнения е в пряка зависимост от бурното развитие на техниката и науката. Например: изчисляването на тръбопроводи с успоредно свързани тръби става с помощта на система от две уравнения с две неизвестни; изчисленията на един нит водят до система от четири уравнения с четири неизвестни; определянето на силата на тока в различните участъци от сложна електрическа верига става също с помощта на система; при проектиране на мостове се налага да се решава система от десет уравнения с десет неизвестни от първа степен; при изучаване движенията на едно или няколко тела във физиката винаги се стига до система; в химията при определяне на необходимото количество от даден елемент за извършване на определена реакция също се натъкваме на система уравнения и т.н.

Необходимо е да се изтъкне и теоретичната необходимост от решаването на системи нелинейни уравнения. Трудно е да се посочи такава област в изчислителната математика, където в една или друга форма не би възникнала задачата за намиране на решението на система от n уравнения с n неизвестни, като особен интерес представляват именно нелинейните системи. Дори в произволна оптимизационна задача като правило началните ограничения се задават чрез система уравнения.

Решаването на оптимизационните задачи е свързано с решаването на системи нелинейни уравнения.

С оглед важността и необходимостта от развитието на теорията за системи уравнения могат да се посочат редица автори на теоретични разработки. Широко известна е монографията на А.Островски „Решение уравнений и систем уравнений„, която в основата си се занимава предимно със случая на едно уравнение. Теоретични резултати на същата тема дава и монографията на Трауб(1964 г.). Трябва да се посочи и Ю.Г.Евтушенко с книгата си „Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизаций„ ([5]).

Книгата на Джеимс Ортега и Вернер Рейнболт ([68]) съдържа много важен фактически материал и представлява значителен интерес за всички, които работят в областта на изчислителната математика. Тя е посветена на един от най-традиционните раздели на числения анализ - изследване на най-важните класове от методи за решаване на нелинейни системи - итерационните методи. Построяването на обща теория за такиваа методи е свързано с последователното прилагане на теоретико-функционалните идеи и на първо време с използването на принципа за свиващите изображения. Наред с итерационните методи се обръща голямо внимание на методите за минимизация. Естествено е всяка задача за решаване на система уравнения да се сведе до задача за минимизиране на подходящ функционал. Списъкът от автори със значителни заслуги в теория та за решаването на уравнения и системи може да бъде продължен с Нютон, Канторович, Фадеев, Адамар, Жидков, Белман, Воеводин; от българските математици - Обрешков, Дочев, Бърнев, Петков и др. За по-подробна библиография вижте [12], [1], [3] и [9].

В общия случай решаването на системи нелинейни уравнения е достатъчно трудно. Почти всички методи за такива уравнения са итерационни, т.е. последователно се намират приближения на решението. Но при решаване на нелинейни уравнения чрез такива методи следва да се отбележи, че те са ефективни, ако началните приближения са в достатъчно малка околност на корените. По този начин при приближеното решаване на нелинейни уравнения възникват по същество две задачи отделяне на корените и уточняване на корените.

Първата задача - отделянето на корените в общия случай представлява сложна аналитична задача. В случая, когато уравнението е алгебрично, са разработени много методи за отделяне на корените. Тези методи се базират на някои алгебрични теореми - например на Нютон, Бюдан-Фурие, Декарт, Щурм.

Ще обърнем по-голямо внимание на втората задача - уточняване на корените. Нека се направи една забележка. Повечето методи, които са известни за приближено намиране на корените на система нелинейни уравнения са известни твърде отдавна и се основават по същество на това, че на ръка не могат да се извършват голям брой аритметични операции. Използуването на съвременни компютри открива нови възможности за намирането и прилагането на различни методи за решаване на системи нелинейни уравения. Намирането на такива машинно ориентирани методи е една важна задача, която стои пред изчислителната математика.

Пресмятанията обаче в общия случай са свързани с много време. За това се налага да се намерят методи, които при известни предположения да дават по-бърза сходимост.

Най-често използваните итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения са: метода на хордите и неговата модификация - метода на секущите. От същия тип са: методът на Нютон или така нареченият метод на допирателните; комбиниран метод, при който ни е известна оценка за точността на всяка стъпка; методът на Дочев, който е модификация на метода на Нютон и много други негови модификации. Използват се:интерполационни методи за решаване на нелинейни уравнения, в часност-метод на параболите; методи на обратната интерполация; метод на Чебишев; метод на Ейткин-Стефансън; на Лобачевски-Грефе и др.

Систематизрани с математически език методите биват за: алгебрични уравнения; системи и нелинейни уравнения. Най-богата е методиката на алгебричните уравнения, след нея е тази на системите и най-слабо развита е за нелинейни уравнения. Целта в методите от теоретична гледна точка се заключава в търсене на неподвижна точка.

Анализирайки методите за решаване на системи нелинейни уравнения, имаме основно два типа методи:

1. Метод на Нютон - използващ локалните свойства на функциите;

2. Метод на функциите на Ляпунов - използващ глобалните свойства на функциите.

Методът на Нютон е класическата схема на метода на допирателните. Разгледан сам по себе си за този метод може да се отбележи: квадратична сходимост; неустойчива сходимост/ особено при многократни корени - създадени са модифицирани методи/; необходимост от намиране на обратен оператор на всяка стъпка и изисквания за рамерност на този оператор; локалност на метода. Въпреки, че от така изброените характерни черти на този метод в конкретни случаи някои от тях се явяват като недостатъци, методът на Нютоне е от основно значение при решаването на уравнения и системи.

Методът на функциите на Ляпунов може да се схематизира по следния начин: от дадена система нелинейни уравнения правим преход към система диференциални уравнения, която е устойчива по Ляпунов /известна е функцията на Ляпунов/; така достигаме до метод за решаване на система диференциални уравнения /например метод на Ойлер/ като за решението и $x(t)$ знаем, че за неограничен период от време достига множеството от решения на изходната система.

В настоящата глава предложеният метод е същия с тази разлика, че решението $x(t)$ достига множеството от решения на системата нелинейни уравнения за краен период от време.

За метода на функциите на Ляпунов могат да се отнесат следните характеристики: свръхлинейна /т.е.бавна/ сходимост; от експерименталните изследвания: глобалност и устойчивост на метода; лошо поведение близо до корена; прескачане на плитки екстремуми при екстремални задачи. За разлика от метода на Нютон тук оператора не е задължително да е квадратна матрица-можем да имаме m уравнения с n неизвестни, където m не е нужно да съвпада с n.

В тази глава ние ще разгледаме някои аспекти на метода на функциите на Ляпунов за решаване на система нелинейни уравнения. Методът зависи от вектор-параметър на смущенията. Като обобщение смущението може да се разглежда като пораждащо многозначно изображение. Поради тази причина алгоритмът е моделиран чрез многозначно изображение, което зависи от една непрекъсната променлива. Нашата цел е да намерим достатъчни ограничения относно многозначното изображение за запазване на скоростта на сходимост на алгоритма. Основните резултати в тази глава са публикувани в статии [105] и [106]. Тези резултати са в пряка връзка със статии [52] и [54] , където са дадени някои основни резултати на параметричния метод на функциите на Ляпунов. Също така са свързани с книга [13] и книга [68], където общи достатъчни условия са доказани за сходимостта на алгоритмите, моделирани чрез многозначни изображения.

Ще разгледаме крайномерният случай и задачата в Хилбертово пространство.

За крайномерната задача ще представим итерационна процедура, за която ще покажем условията за сходимост и допълнителните условия за супергеометрична скорост насходимост. Ще бъдат представени сравнения на програмни пресмятания с други методи.

С метода на функциите на Ляпунов за задачата в Хилбертово пространство се решава система нелинейни уравнения, където левите страни на уравненията са числови функции, дефинирани в Хилбертово пространство. Това е един параметричен метод за решаване на системата.

Използувайки левите страни на уравненията ще конструираме една фамилия от числови изпъкнали функции. От изпъкналостта ще следва, че тези функции са функции на Ляпунов за диференциалното включване, на което дясната страна е отрицателната стойност на един максимално монотонен оператор. Ще покажем, че всяко решение на диференциалното включване решава системата нелинейни уравнения в краен момент от време.

Ще разгледаме един итерационен метод за намирането поне на едно от решенията на негладката система от уравнения в Хилбертово пространство. Този метод се базира на теорията на функция на Ляпунов и зависи от вектор-параметър. От подходящия избор на параметрите ще следва линейна или свръхлинейна(супергеометричнна) скорост на сходимост на итеративния метод.

2.2 Основни дефиниции и теореми

Дефиниция 3 *Функцията $V(x)$ (при $V(0) = 0$) се нарича* **положително(отрицателно) дефинитна** *в X, ако $V(x) > 0(< 0)$ за $x \in X, x \neq 0$.*

Дефиниция 4 *Функцията $V(x)$ (при $V(0) = 0$) се нарича* **положително(отрицателно) полудефинитна** *в X, ако $V(x) \geq 0(\leq 0)$ за $x \in X, x \neq 0$.*

Разглеждаме уравнението:

$$(*) \qquad \dot{x} = f(t, x), \quad t \geq t_0, \quad x \in X \subset R^n, \quad f(t, 0) = 0.$$

Дефиниция 5 ([98])**Орбиталната производна** L_t *на функцията* $V(t,x)$ *по посока на векторното поле* x, *където* x *е решение на уравнението* $(*)$, *е*

$$L_tV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}f_1(t,x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}f_n(t,x),$$

където $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Теорема 7 ([98])*Разглеждаме уравнението* $(*)$. *Ако може да бъде намерена функция* $V(t,x)$, *дефинирана в околност на* $x = 0$ *и положително дефинитна за* $t \geq t_0$ *с орбитална производна отрицателно полудефинитна, решението* $x = 0$ *е устойчиво в смисъл на Ляпунов.*

$V(t,x)$ *се нарича* **функция на Ляпунов**.

Теорема 8 ([98])*Разглеждаме уравнението* $(*)$. *Ако може да бъде намерена функция* $V(t,x)$, *дефинирана в околност на* $x = 0$, *която за* $t \geq t_0$ *е положително дефинитна в тази околност с отрицателно дефинитна орбитална производна, решението* $x = 0$ *е асимптотически устойчиво.*

2.3 Метод на функциите на Ляпунов за крайномерна задача

2.3.1 Представяне на метода на функциите на Ляпунов за крайномерна задача

Нека $f_i(x), i = 1, 2, \ldots, m$ са m гладки числови функции, които са дефинирани в Евклидовото пространство R^n и нека разгледаме следната система от уравнения

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Във връзка с тази система ще въведем следната функция:

$$V_{p(\epsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^{1+p_i(\epsilon)}, \tag{2}$$

където $p(\epsilon) = (p_1(\epsilon), p_2(\epsilon), \ldots, p_m(\epsilon))$ е вектор-параметър, за който $p_i(\epsilon) \in (p_i - \epsilon, p_i + \epsilon)$ и $p_i - \epsilon > -1, \epsilon > 0$. $i = 1, 2, \ldots, m$. Функцията (2) е функция на Ляпунов ([13]) за следната система от диференциални уравнения:

$$\dot{x} = -\nabla V_{p(\epsilon)}(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

където

$$\nabla V_{p(\epsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \|f_i(x)\|^{p_i(\epsilon)}(\mathrm{sign} f_i(x))\nabla f_i(x)(1 + p_i(\epsilon)), \tag{4}$$

$\nabla V_{p(\epsilon)}(x)$ е градиента на $V_{p(\epsilon)}(x)$ и $\nabla f_i(x)$ е градиента на $f_i(x)$, за всяко $i = 1, 2, \ldots, m$.

Разглеждаме следната система от диференциални уравнения:

$$\dot{x} = -\frac{\nabla V_{p(\epsilon)}(\lambda, x)}{\|\nabla V_{p(\epsilon)}(\lambda, x)\|^2}, \quad x_\lambda(0) = x_0. \tag{5}$$

Съгласно с [13] е всила следната теорема:

Теорема 9 *Нека непрекъснатата функция $\rho(x) > 0$ в област G.*

Тогава в тази област системите диференциални уравнения

$$\dot{x} = F(x), \tag{6}$$

$$\dot{x} = \rho(x)F(x) \tag{7}$$

имат едни и същи траектории.

Доказателство. Нека $x(t)$ е решение на системата диференциални уравнения (7), т.е. функцията $x(t)$ е абсолютно непрекъсната и

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = y(t) = \rho(x(t))F(x(t))$$

за почти всяко t. За интервала $a \leq t \leq b$ полагаме

$$\tau(t) = \int_{t_0}^{t} \rho(x(s)) d\, s.$$

Производната $\tau'(t) = \rho(x(t)) \geq c > 0$ е непрекъсната. Съществува обратната функция $t(\tau)$. Функцията $x^*(\tau) = x(t(\tau))$ е абсолютно непрекъсната ([8]) и

$$\frac{d\, x^*(\tau)}{d\, t} = \frac{d\, x}{d\, t} t'(\tau) = \frac{v(t(\tau))}{\rho(x^*(\tau))} = F(x^*(\tau))$$

почти навсякъде(тъй като функциите $\tau'(t)$ и $t'(\tau)$ са непрекъснати, то условията „за почти всяко t„ и „за почти всяко τ„ са равносилни; [8]), т.е. $x^*(\tau)$ е решение на системата диференциални уравнения (6).

И така, траекторията на всяко решение на системата диференциални уранения (7) се явява също някое решение на системата диференциални уравнения (6). Вярно е и обратното, тъй като функцията $\frac{1}{\rho(x)} > 0$ също е непрекъсната.

Q.E.D.

От тази теорема следва, че системите (3) и (5) имат същите траектории като криви във фазовото пространство. Следователно, едната от тези системи може да бъде получена от другата чрез трансформация на координатата на времето.

Нека разгледаме следната функция на Ляпунов

$$V_p(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^{1+p}, \tag{2'}$$

и нека в 7 вземем за дясна страна $\rho(x)F(x) = \phi_p(x)F_p(x)$, където

$$F_p(x) = -\sum_{i=1}^{m} \|f_i(x)\|^p (\mathrm{sign} f_i(x)) \nabla f_i(x)$$

и $\rho(x) = \phi_p(x) = 1/|F_p(x)|^2$.

Тогава получаваме следната система диференциални уравнения:

$$\dot{x} = F_p(x)/|F_p(x)|^2, \quad x(0) = x_0 \tag{7'}$$

Следната теорема, която вземаме от ([52]), може да бъде разглеждана като едно развитие на теоремата на Красовски-Барбошин ([5]) за система (6).

Теорема 10 *Нека за системата* (1) *и*

$$p(\epsilon) = (p_1(\epsilon), p_2(\epsilon), \dots p_m(\epsilon)), \quad p_i > -1 + \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

са в сила

1. $f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m$ *са гладки функции в* R^n.

2. Функцията $V_{p(\epsilon)}(x)$, *която е дефинирана чрез* (2) *схожда равномерно, когато* $|x| \to \infty$ *(това означава, че за всяка константа* N, *съществува константа* M, *така че следното неравенство* $V_{p(\epsilon)}(x) \geq N$ *е в сила за всяко* $x \in R^n$, $|x| > M$*).*

3. Множеството X *от решенията на система* (1) *съвпада с множеството от седлови точки на системата* (5) *т.е.*

$$X = \{x \in H| \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\} \in \{x \in R^n|$$

$$\nabla V_{p(\epsilon)}(x) \ni 0\} \neq \emptyset.$$

Тогава за всяко $x \in H$ *и всяко решение* $x(t)$ *на система* (5) *съществува краен момент* $T \leq V_{p(\epsilon)}(x_0)$, *който удовлетворява следното включване* $x(T) \in X$.

Доказателство.

Имаме m гладки числови функции, $f_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, които са дефинирани в Евклидовото пространство R^n и разглеждаме следната система от уравнения

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1}$$

Във връзка с тази система въвеждаме следната функция:

$$V_{p(\epsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^{1+p_i(\epsilon)}, \tag{2}$$

където $p(\epsilon) = (p_1(\epsilon), p_2(\epsilon), \ldots, p_m(\epsilon))$ е вектор-параметър, за който $p_i(\epsilon) \in (p_i - \epsilon, p_i + \epsilon)$ и $p_i - \epsilon > -1, \epsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$.

Нека $x_0 \in R^n$, $x_0 \notin X$ е произволно избрано. Тогава от условия 1 и 3 на теоремата, дясната страна на система

$$\dot{x} = F_p(x)/|F_p(x)|^2 \tag{7'}$$

е функция на Пеано и следователно съществува локално решение $x(t)$. За производна на функция $v_p(x(t))$ от $(2')$ получаваме

$$\dot{V}_p(x(t)) = (1+p) \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^p \mathrm{sign} f_i(x(t)) (\nabla f_i(x(t)), \dot{x}(t)),$$

където $(.,.)$ е скаларно произведение. Замествайки $\dot{x}(t)$ с дясната страна на система $(7')$, ние получаваме

$$\dot{V}_p(x(t)) = -(1+p)|F_p(x)|^2/|F_p(x)|^2 = -(1+p). \tag{7''}$$

Ние припомняме, че за дадена константа M и за достатъчно малко $\delta > 0$ функцията $F_p(x)/|F_p(x)|^2$ е непрекъсната върху компактното множество

$$D_\delta = \{x \in R^n | \quad |x| < M, \quad x \notin X_\delta\}$$

и следователно е ограничена. Така всяко решение на система $(7')$ може да бъде продължено до границата на множеството D_δ ([13]). Ако M е избрано за да е в сила неравенството $V_p(x_0) > N$, траекториите не могат да достигнат точките, които удовлетворяват $|x| = M$, защото производната $\dot{V}_p(x(t))$ е строго отрицателна за тях. Интегрирайки равенството $(7'')$ върху интервала $[0, T]$, получаваме

$$V_p(x(t)) = -(1+p)t + V_p(x_0).$$

Освен това, в момента $T = V_p(x_0)/(1+p)$ някоя траектория $x(t)$ достига множеството X_δ. Окончателно, според независимостта на момента T от произволно избраното $\delta > 0$, ние имаме $x(T) \in X$.

Q.E.D.

Забележка 1. Теорема 10 може да бъде обобщена, ако p е един вектор-параметър, т.е.

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad p_i > -1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \text{където}$$

$$F_p(x) = -\sum_{i=1}^{m}(1 + p_i)\|f_i(x)\|^p(\text{sign} f_i(x(t)))\nabla f_i(x(t)).$$

Също ще отбележим, че ако условията на теоремата са всила за някое p^*, тогава те са всила за всяко $p > -1$ в едномерния случай, т.е. в случая $m = 1$.

Забележка 2. Според условия 1 и 2 на теорема 10 всяко решение $x(t)$ достига локален минимум на функцията $V_p(x)$ в краен момент T, ако решение на система (1) не съществува, т.е. $X = \emptyset$

Сега ще разгледаме следната итерационна процедура, която се основава на диференциалната система (5) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k))\|^2}, \tag{8}$$

където

$$p^k(\epsilon^k) = (p_1^k(\epsilon^k), p_2^k(\epsilon^k), \dots, p_m^k(\epsilon^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Нека означим метричната проекция на точката x върху множеството от решенията X на система (1) с $Pr_X x$, т.е.

$$Pr_X x = \{y \in X| \quad \|x - y\| = \min_{z \in X}\|x - z\|\},$$

и множеството $X_\delta = \{x \in H| \quad \|x - Pr_X x\| < \delta, \quad \delta > 0\}$, т.е. X_δ е δ-околност на множеството X.

Следната теорема показва, че процедурата (8) ще е монотонна, ако вектор-параметърът p^k , $k = 1, 2, \dots$, е подходящо избран. В нея се обобщават някои резултати на статия [54].

Теорема 11 *Нека условията на Теорема 10 са удовлетворени. Нека съществува* δ *- околност* X_δ *на множеството* X*, за която*

$$(9) \qquad (\nabla f_i(x), x - Pr_X x) \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in X_\delta \setminus X.$$

Ако $p^k(\epsilon^k)$ *е решение на следното неравенство:*

$$(10) \qquad V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k) - (\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k), x_k - Pr_X x_k) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|f_i(x_k)\|^{1+p_i^k(\epsilon^k)} -$$

$$\sum_{i=1}^{m} (1 + p_i^k(\epsilon^k)) \|f_i(x_k)\|^{p_i^k(\epsilon^k)}$$

$$(\mathrm{sign} f_i(x_k))(\nabla f_i(x_k), x_k - Pr_X x_k) < \epsilon^k,$$

където $\epsilon^k < V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)/2$*, тогава :*

$$(11) \qquad \|x_{k+1} - Pr_X x_{k+1}\| \leq \|x_k - Pr_X x_k\|$$

е в сила за всяко $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказателство. За всяко $y_k = Pr_X x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ получаваме

$$0 \leq A_k = \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} \leq \frac{\|x_{k+1} - y_k\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} =$$

$$\frac{1}{\|x_k - y_k\|^2} \|y_k - x_k + \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2}\|^2 =$$

$$\frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1$$

$$+2 \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \langle \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k), y_k - x_k \rangle}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2 \|x_k - y_k\|^2}.$$

От неравенството $\varepsilon^k \leq \frac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)$ и (10), ние завършваме доказателството:

$$A_k \leq \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1 +$$

$$2\frac{(\varepsilon^k - V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\,V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2\|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2|x_k - y_k\|^2} + 2\frac{\varepsilon^k(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2\|x_k - y_k\|^2} \leq$$

$$1 - (1-q)\,\frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2\|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - (1-q)(B_k)^2 < 1,$$

където $B_k = \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - y_k\|}$. Следователно, за всяко $x_k \in X_\delta \setminus X$, $k = 1, 2, \ldots$ получаваме

$$0 \leq A_k < 1 - (1-q)(B_k)^2 < 1.$$

Q.E.D.

2.3.2 Свръхлинейна сходимост

В този параграф ще направим оценка на скоростта на сходимост на итерационната процедура

$$x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k))\|^2}, \tag{8}$$

Ще покажем, че условие

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(y_k)\| \neq 0, \tag{12}$$

осигурява свръхлинейна скорост на сходимост.

Теорема 12 *Нека условията на теорема 11 са в сила и нека началното условие x_0 принадлежи на δ-околността X_δ. Нека $p^k(\epsilon^k)$, дефинирано чрез* (10), *удовлетворява допълнително условие* (12), *където $y_k \in X_\delta \setminus X$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y \notin X$. Тогава итерационната процедура* (8) *има супергеометрична сходимост.*

Доказателство. Съгласно с [54] трябва да докажем, че

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - Pr_X x_{k+1}\|^2}{\|x_k - Pr_X x_k\|^2} = 0. \tag{13}$$

Разглеждаме

$$A_k = \frac{V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - Pr_X x_k\|} <$$

$$1 + \frac{\epsilon^k}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - Pr_X x_k\|}.$$

Според теорема 11 имаме, че $x_k \in X_\delta$, ако $x_0 \in X_\delta$. От теорема 10 получаваме съществуването на $T_k \leq V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k) < \infty$, за който решението $x(t)$ на уравнението (5) с начално условие x_k удовлетворява следното включване $x(T_k) \in X$.Сега, имайки предвид (5), можем да напишем

$$A_k = \frac{V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - Pr_X x_k\|} \geq$$

$$\frac{-\int_0^{T_k} (\dot{V}_{p^k(\epsilon^k)}(x(t)))\,dt}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - x_k(T_k)\|} =$$

$$\frac{-\int_0^{T_k} (\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x(t))), \dot{x}(t))\,dt}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|\int_0^{T_k} \dot{x}(t)\,dt\|} \geq$$

$$\frac{T_k}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\| \int_0^{T_k} \frac{1}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x(t))\|}\,dt}.$$

Тъй като $f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m$ са гладки функции в R^n, функцията $\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x)$ е непрекъсната. Ако

$$\epsilon^k < \frac{V_{p(\epsilon^k)}(x_k)}{2q^{k-1}}, \qquad |q| < 1,$$

тогава от теоремата за средните стойности и от (10) и (12) получаваме следната поредица от неравенства:

$$\lim_{k\to\infty} A_k < \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{\epsilon^k}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k - Pr_X x_k\|}) <$$

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)}{2^k\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|\|x_k-Pr_X x_k\|})=1.$$

Следователно:

$$1>\lim_{k\to\infty}A_k\geq\lim_{k\to\infty}\frac{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x(t_k))\|}{\|\nabla V_{p^k(\epsilon^k)}(x_k)\|}=1.$$

Тогава, ако $q=\frac{1}{2}$, то

$$1>\lim_{k\to\infty}A_k(1-\frac{1}{2^{k-1}})=1,$$

което е еквивалентно на (13).

Q.E.D.

Доказателството на последната теорема осигури достатъчните условия за супергеометрична сходимост на итерационната процедура (8).

2.3.3 Числени експерименти

Ще разгледаме числови примери и ще сравним резултатите, получени от програмната реализация на метод на функция на Ляпунов с тези на методите на Хук и Джийвс, Розенброк, Нелдер-Мийд, най-бързото спускане и на спрегнатия градиент (с точност 0.0001). Числените реализации са на PC 486 с честота 66 MgHz на Turbo Pascal 5.0.

Разглежданите минимизационни задачи се свеждат до решаване на системи нелинейни уравнения.

Да разгледаме следните примери:

1) Да се намери минимума на функцията:

$$f(x,y)=4x^2+4y^2-4xy-12y,$$

с начална точка $(5,5)$, т.е. да се реши системата уравнения:

$$\left|\begin{array}{lcl} 8x - 4y & = & 0 \\ 8y - 4x - 12 & = & 0 \end{array}\right.$$

2) Да се намери минимума на функцията:

$$f(x, y) = (x - 30)^2(x - 1.5y)^2$$

с начална точка $(0, 5)$, т.е. да се реши системата уравнения:

$$\left| \begin{array}{lcl} \text{x - 1.5y} & = & 0 \\ \text{2x - 1.5y - 30} & = & 0 \end{array} \right.$$

3) Да се намери минимума на функцията:

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 - (x + y)$$

с начална точка $(7, 5)$, т.е. да се реши системата уравнения:

$$\left| \begin{array}{lcl} 4x^3 + 4xy + 2y^2 - 42x - 15 & = & 0 \\ 4y^3 + 2x^2 + 4xy - 26y - 23 & = & 0 \end{array} \right.$$

4) Да се намери минимума на функцията на Розенброк:

$$f(x, y) = 100(x - y^2)^2 + (1 - y)^2$$

с начална точка $(5, -2)$, т.е. да се реши системата уравнения:

$$\left| \begin{array}{lcl} x - y^2 & = & 0 \\ 1 - y & = & 0 \end{array} \right.$$

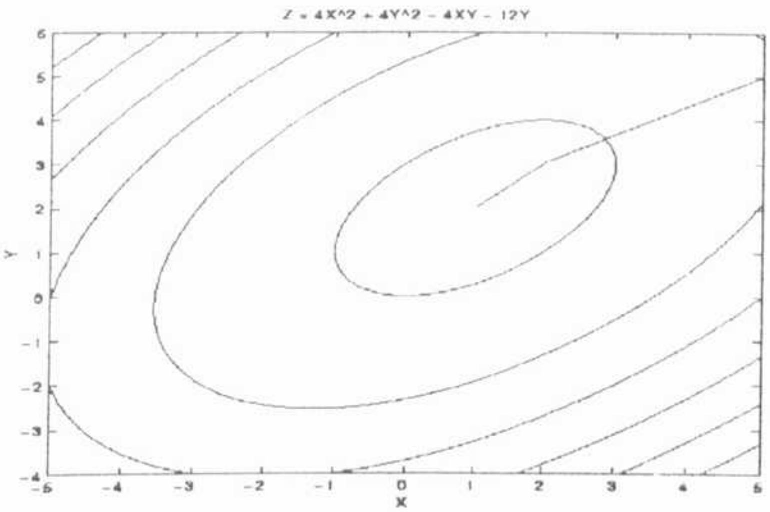
За първи пример методът на функция на Ляпунов дава решение $(1.0000, 2.0000)$ за 2 итерации, методът на Хук и Джийвс - $(1.0000, 2.0000)$ за 17 итерации, на Розенброк - $(1.0001, 2.0001)$ за 87 итерации, на Нелдер-Мийд - $(0.9975, 1.9983)$ за 26 итерации, на Бокс - $(1.0012, 2.0056)$ за 89 итерации, по метода на най-бързото спускане - $(1.0000, 2.0001)$ за 11 итерации и по метода на спрегнатия градиент - $(1.0000, 2.0001)$ за 2 итерации.

За втори пример методът на функция на Ляпунов дава решение $(29.9999, 19.9999)$ за 37ит., методът на Хук и Джийвс - $(3.0, 2.0)$ за 16ит., на Розенброк - $(6.7861, 4.524)$ за 56ит., на Нелдер-Мийд - $(2.5613, 1.7078)$ за 25ит., на Бокс - $(2.4196, 1.6128)$ за 250ит., на най-бързото спускане - $(2.676, 1.784)$ за 2ит. и на спрегнатия градиент - $(2.676, 1.784)$ за 1ит.

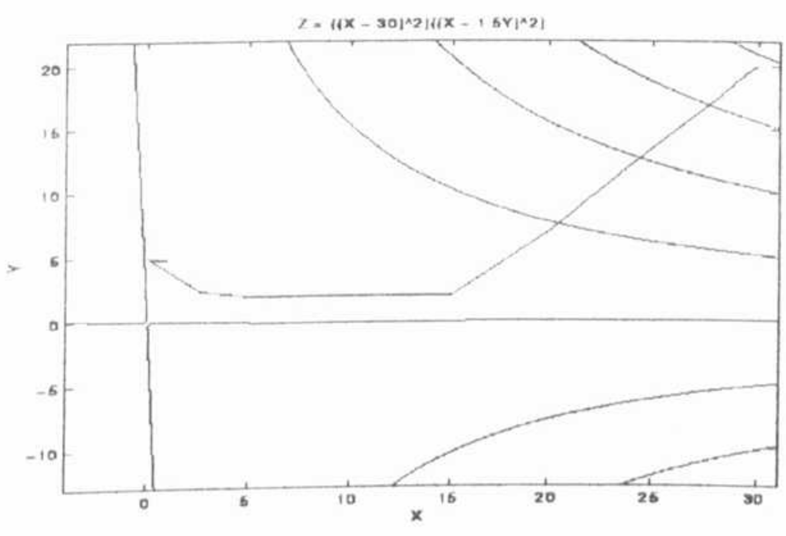
За трети пример тези стойности са съответно - $(3.0067, 2.025)$ за 34ит., $(3.0067, 2.025)$ за 25ит., $(3.0067, 2.025)$ за 93ит., $(3.0066, 2.041)$ за 30ит., $(3.0084, 2.0223)$ за 102ит., $(3.0067, 2.025)$ за 8ит. и $(3.0067, 2.00922)$ за 8ит.

И за четвърти пример тези стойности и необходимото време за решение са съответно - $(0.99851, 0.9995)$ за 96ит. и по-малко от 0.5 секунди, $(0.1587, -0.3892)$ за 100ит. и по-малко от 1.5 секунди, $(3.8096, -1.9487)$ за 250ит. и по-малко от 3.5 секунди, $(0.991, 0.9952)$ за 94ит. и по-малко от 1 секунда, $(0.9781, -1.0175)$ за 250ит. и по-малко от 1 секунда, $(0.1507, -0.3926)$ за 250ит. и по-малко от 1.5 секунди, и $(0.9987, 0.9994)$ за 23ит. и по-малко от 0.5 секунди.

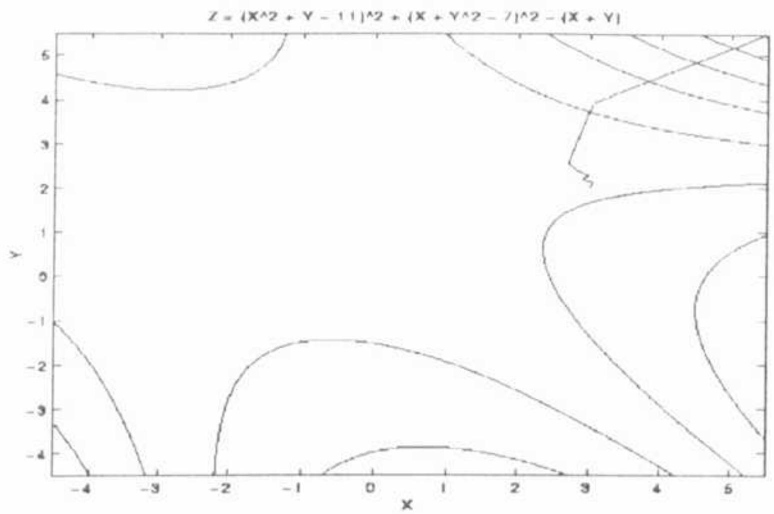
За четвърти пример с метода на функция на Ляпунов при точност 0.000000001 се получават следните резултати: броят на итерациите е по-малък от 250 и необходимото време по-малко от 1.5 секунди, когато началните точки са в интервала $(-20, 20)$ и за двете независими променливи x и y. Параметърът p се управлява с прибавяне на 0.01 или умножаване на 0.99. „Лоши„ точки са: $-0.6, 0.8$, от която решението се получава за 318 итерации и $-1.0, 1.2$, от която решението се получава за 300 итерации.



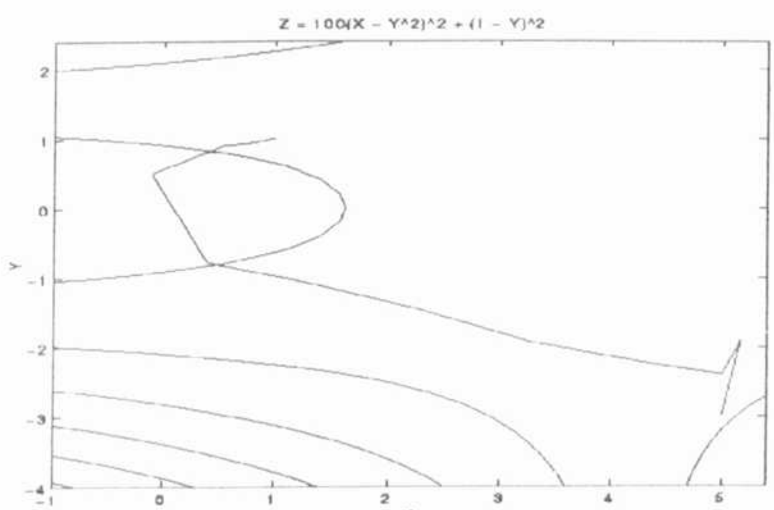
Фигура на пример 1.



Фигура на пример 2.



Фигура на пример 3.



Фигура на пример 4.

2.4 Параметричен метод на функциите на Ляпунов за решаване на системи нелинейни уравнения в Хилбертови пространства

2.4.1 Увод

В този параграф разглеждаме система нелинейни уравнения, чиито леви страни на уравненията са числови функции, дефинирани в Хилбертово пространство **H**. Представяме един параметризиран метод на функция на Ляпунов за решаване на системата.

Използувайки левите страни на уравненията се създава една числова функция $V_{p(\varepsilon)}(x)$ дефинирана върху Хилбертовото пространство. Тази функция зависи от многозначен вектор-параметър $p(\varepsilon)$. Конструирането на параметричния метод на функция на Ляпунов се разглежда относно избора на параметрите, за които $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е изпъкнала функция. В този случай функцията $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за устойчивостта на решения на диференциално включване в Хилбертово пространство, където дясната на включването е максимално монотонен оператор.

Разглеждаме един итерационен метод за намирането поне на едно от решенията на негладката система от уравнения в Хилбертово пространство. Този метод се базира на теорията на функция на Ляпунов. От подходящия избор на параметрите следва линейна или свръхлинейна сходимост на итеративния метод.

Този параграф обобщава идеите на [52], [54], [104] и [105].

2.4.2 Метод на функциите на Ляпунов за решаване на системи нелинейни в Хилбертови пространства

Нека $f_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ са негладки числови функции, които са дефинирани върху Хилбертовото пространство **H**. Разглеждаме следната система от уравнения

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1}$$

Ние конструираме една зависеща от $p(\varepsilon)$ фамилия от функции:

$$V_{p(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |f_i(x)|^{1+p_i(\varepsilon)} \geq 0, \tag{2}$$

където $\alpha_i > 0$ и $p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon))$ е вектор-параметър, за който $p_i(\varepsilon) \in (p_i - \varepsilon, p_i + \varepsilon)$, $p_i - \varepsilon > -1$ за $\varepsilon > 0$ и всяко $i = 1, 2, \ldots, m$.

Съгласно [27] **обобщената производна по направление** е

$$f^0(x; v) = \overline{\lim_{y \to x,\, \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}$$

и **обобщения градиент или субдиференциал на Кларк** се дефинира чрез:

$$\partial f(x) = \{\zeta \in \ | f^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \, \forall \, v \in \}.$$

Дефиниция 6 ([27]).

Ще наричаме функцията f **регулярна** *в x, ако*

(i) За всяко v, обикновената едностранна производна по направление $f'(x; v)$ съществува.

(ii) За всяко v $f'(x; v) = f^0(x; v)$.

В този параграф предполагаме, че функциите $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ са регулярни.

Предполагаме също, че $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е изпъкнала функция. Отбелязваме, че изпъкналата функция е регулярна. За по детайлна информация относно изпъкнали функции сме използували [88].

Ще отбележим, че едно монотонно многозначно изображение F се нарича **максимално**, ако не съществува друго монотонно многозначно изображение $\tilde{F}$, графиката на което строго да съдържа графиката на F ([17]).

Напомняме, че **метричната проекция** на точката x върху множеството X с $Pr_X x$, т.е.

$$Pr_X x = \{y \in X | \quad \|x - y\| = \min_{z \in X} \|x - z\|\}. \tag{3}$$

Метричната проекция върху едно изпъкнало и затворено множество съдържа поне една точка. Означаваме с $m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x))$ метричната проекция на началото върху множеството $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$.

Нека $0 \notin \partial V_{p(\varepsilon)}(x_0)$. Разглеждаме следното диференциално включване:

$$\dot{x} \in -\frac{\partial V_{p(\varepsilon)}(x)}{\| m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x)) \|^2}, \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

Тъй като $f_i(x)$ са регулярни функции, съгласно [27] имаме

$$\partial V_{p(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|f_i(x)\|^{p_i(\varepsilon)}(f_i(x))\partial f_i(x)(1+p_i(\varepsilon)). \tag{5}$$

Диференциалното включване (4) е разширението на Филипов на следното диференциално уравнение с възможно прекъсната дясна част (виж [17] и [13]) :

$$\dot{x} = -\frac{m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x))}{\| m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x)) \|^2}, \quad x(0) = x_0 \tag{6}$$

Тъй като $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е изпъкнала функция, субдиференциалът $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$ е максимално монотонен оператор и диференциалното включване

$$\dot{x} \in -\partial V_{p(\varepsilon)}(x), \quad x(0) = x_0 \tag{7}$$

има единствено решение ([17]). Ще формулираме теоремата за съществуване:

Теорема 13 ([17]). *Нека $F(x)$ е максимално монотонно изображение от $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}$. Разглеждаме следното диференциално включване:*

$$\dot{x} \in -F(x), \quad x(0) = x_0,$$

където $x_0 \in DomF$ ($DomF$ е ефективната област, където F е дефинирано). Тогава горе споменатото диференциално включване има *единствено решение* $x(\cdot)$ *дефинирано въъ рху* $[0, \infty)$. *Това решение е едно бавно решение, т.е. то удовлетворява за почти всяко* t *следното диференциално уравнение:*

$$\dot{x}(t) = -m(F(x(t))), \quad x(0) = x_0$$

и функцията $t \longrightarrow \| \dot{x}(t) \|$ *не е растяща.*

Нека $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ *са решения с начални стойности* x_0 *и* y_0 *съответно. Тогава за всяко* $t \geq 0$ *следващото неравенство*

$$\| x(t) - y(t) \| \leq \| x_0 - y_0 \|$$

е в сила, освен това

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \longrightarrow +0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

и $\dot{x}(t)$ *е непрекъсната отдясно.*

Съгласно [13] решенията на автономните диференциални включвания, за които дясната страна на едно е получена от дясната страна от друго умножена с положителна и непрекъсната функция, описват траектории, които съвпадат във фазовото пространство.

По аналогия, ще докажем лемата в случая, в който фазовото пространство е Хилбертово и положителният множител е измерим в абсолютно непрекъснати функции:

Лема 8 *В областта* $G \subset \mathbf{H}$ *разглеждаме следващите две диференциални включвания:*

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(0) = x_0 \in int\, G, \quad t \in [0, 1], \tag{8}$$

$$\dot{x} \in \varphi(x)\, F(x), \quad x(0) = x_0 \in int\, G, \quad t \in [0, 1], \tag{9}$$

където $\operatorname{int} G$ *е вътрешност на* G, $F(x)$ *полунепрекъснато отгоре изображение от* $\mathbf{H}$ *в слабо компактни, изпъкнали и непразни подмножества на* $\mathbf{H}$ *и* $\varphi(x) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{R}$ *удовлетворява в* G *следващите* *неравенства:*

$$(10) \qquad 0 < \delta \le \varphi(x) \le M < \infty, \quad x \in G.$$

***Нека функцията** $\varphi(x(t))$ **е измерима за всяка абсолютно непрекъсната функция** $x(t) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{H}$. **Означаваме** $\tau(t) = \int_0^t \varphi(x(s))\, ds$ **и** $t(\tau)$ **- обратната функция на** $\tau(t)$.*

Тогава всяко решение $x(t)$ на (8) функцията $x(\tau(t))$ почти навсякъде удовлетворява (9) и за всяко решение $x^*(\tau)$ на (9) функцията $x^*(t(\tau))$ почти навсякъде удовлетворява (8), т.е. множествата на траекториите на (8) и (9), като криви на фазовото пространство $\mathbf{H}$, съвпадат.

Доказателство. Нека $x(t)$ е решение на (9). Функцията $\tau(t) = \int_0^t \varphi(x(s))\, ds$ е абсолютно непрекъсната и поради (10) тя удовлетворява условието на Липшиц с константа M. Почти навсякъде в t, за нейната производна ние имаме

$$\dot{\tau}(t) = \varphi(x(t)) \ge \delta > 0.$$

Следователно, функцията $\tau(t)$ има обратна функция $t(\tau)$, за която

$$0 < \frac{1}{M} \le \dot{t}(\tau) = \frac{1}{\varphi(x(t))} \le \frac{1}{\delta} < \infty.$$

Очевидно, $t(\tau)$ е абсолютно непрекъсната функция. За почти всяко t можем да напишем

$$\frac{d\, x(\tau(t))}{d\, t} \in \varphi(x(\tau(t)))\, F(x(\tau(t))),$$

$$\frac{d\, x^*(t(\tau))}{d\, \tau} \in \frac{1}{\varphi(x^*(t(\tau)))}\, \varphi(x^*(t(\tau)))\, F(x^*(t(\tau))) = F(x^*(t(\tau))).$$

Следователно, положителният множител $\varphi(x)$ само трансформира времето.

Q.E.D.

Според теорема 13 и лема 8, диферециалните включвания (4) и (7) имат единствени решения, които съвпадат като криви в $\mathbf{H}$ до момента T, когато или $V_{p(\varepsilon)}(x(T)) = 0$ или $0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(T))$.

Ще покажем, че функцията $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за диференциалното включване (4). От верижното правило ([27]) и регулярността на функциите f_i, за обобщения градиент на $V_{p(\varepsilon)}(x(t))$ почти навсякъде в t получаваме:

$$\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(t)) = \{\langle \xi, \dot{x}(t)\rangle \,|\, \xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(y),\, y = x(t)\}.$$

За всяко $x(t)$, което удовлетворява (6) и поради свойствата на метричната проекция $m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x))$ имаме

$$\max_{\xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))} \langle \xi, \dot{x}(t)\rangle =$$

$$\max_{\xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))} \langle \xi, -\frac{m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x(t)))}{\| m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))) \|^2}\rangle = -1.$$

Следователно, $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за диференциалното включване (4).

Получаваме, че $V_{p(\varepsilon)}(x(.))$ е монотонно намаляваща функция, ако $x(.)$ решени на диференциалното включване (4). Освен това, еднозначната функция $\max\{\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(.))\}$ е измерима по t. За всяко решение $x(.)$ на (4) можем да напишем

$$V_{p(\varepsilon)}(x(T)) - V_{p(\varepsilon)}(x_0) \leq \int_0^T \max\{\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(t))\}\, dt = -T. \tag{11}$$

И така, на времевия интервал $[0, V_{p(\varepsilon)}(x_0)]$, трябва да получим или $V_{p(\varepsilon)}(x(T)) = 0$ или $0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(T))$. Нека

$$X = \{x \in \mathbf{H} \,|\quad f_i(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

е множеството от решения на системата (1) и нека

$$X_1 = \{x \in \mathbf{H} \,|\quad 0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x)\}$$

е множеството от стационарните точки на диференциалното включване (7). Очевидно, следващата теорема е в сила :

Теорема 14 *Разглеждаме системата (1), където $f_i(x)$ са регулярни функции, дефинирани върху Хилбертовото пространство* $\mathbf{H}$ *и нека фамилията от функции $V_{p(\varepsilon)}(x)$, въведена в (2) е изпъкнала за редицата от параметри*

$$\alpha_i > 0, \quad p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon)),$$

$$p_i > -1 + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Нека множеството от решенията X е непразно.

Тогава:

1. Множеството от решенията X на (1) съвпада с множеството, за което началото принадлежи на субдиференциала $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$, т.е. $X = X_1$.

2. За всяка начална стойност $x_0 \in H$ и всяко решение $x(t)$ на диференциалното включване (4) съществува краен момент $T \leq V_{p(\varepsilon)}(x_0)$, за който $x(T)$ е решение на системата (1).

Доказателство.

Разглеждаме системата

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

където $f_i(x)$ са регулярни функции, дефинирани върху Хилбертовото пространство . Конструирана е фамилията от функции

$$V_{p(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |f_i(x)|^{1+p_i(\varepsilon)} \geq 0, \tag{2}$$

изпъкнала за редицата от параметри

$$\alpha_i > 0, \quad p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon)),$$

$$p_i > -1 + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

От теорема 13 и лема 8 следва, че диференциалните включвания

$$\dot{x} \in -\frac{\partial V_{p(\varepsilon)}(x)}{\| m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x)) \|^2}, \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

и

$$\dot{x} \in -\partial V_{p(\varepsilon)}(x), \quad x(0) = x_0 \tag{7}$$

имат единствени решения, които съвпадат като криви в $\mathbf{H}$ до момента T, когато или $V_{p(\varepsilon)}(x(T)) = 0$ или $0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(T))$.

Функцията $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за диференциалното включване (4). От верижното правило ([27]) и регулярността на функциите f_i, за обобщения градиент на $V_{p(\varepsilon)}(x(t))$ почти навсякъде относно t получаваме:

$$\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(t)) = \{\langle \xi, \dot{x}(t) \rangle \mid \xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(y),\, y = x(t)\}.$$

За всяко $x(t)$, което удовлетворява (6) и поради свойствата на метричната проекция $m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x))$ имаме следната поредица от равенства

$$\max_{\xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))} \langle \xi, \dot{x}(t) \rangle =$$

$$\max_{\xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))} \langle \xi, -\frac{m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x(t)))}{\| m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x(t))) \|^2} \rangle = -1.$$

Следователно, $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е функция на Ляпунов за диференциалното включване (4).

Получаваме, че $V_{p(\varepsilon)}(x(t))$ е монотонно намаляваща функция по t в решенията на диференциалното включване (4). Освен това, еднозначната функция $\max\{\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(t))\}$ е измерима функция в t. За всяко решение $x(t)$ на (4) можем да напишем

$$V_{p(\varepsilon)}(x(T)) - V_{p(\varepsilon)}(x_0) \le \int_0^T \max\{\partial_t V_{p(\varepsilon)}(x(t))\}\, dt = -T. \tag{11}$$

И така, на времевия интервал $[0, V_{p(\varepsilon)}(x_0)]$, трябва да получим или $V_{p(\varepsilon)}(x(T)) = 0$ или $0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x(T))$. Нека

$$X = \{x \in \mid \quad f_i(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

е множеството от решения на системата (1) и нека

$$X_1 = \{x \in \mid \quad 0 \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x)\}$$

е множеството от стационарните точки на диференциалното включване (7).

Следователно:

1. Множеството от решенията X на (1) съвпада с множеството, за което началото принадлежи на субдиференциала $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$, т.е. $X = X_1$.

2. За всяка начална стойност $x_0 \in H$ и всички решения $x(t)$ на диференциалното включване (4) съществува краен момент $T \leq V_{p(\varepsilon)}(x_0)$ (T е възможно да зависи от решението), за който $x(T)$ е решение на системата (1).

Q.E.D.

2.4.3 Итерационна процедура

Ще разгледаме следната итерационна процедура, която се базира на диференциалното включване (4):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\, m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

и нека множесвото X_δ е δ-околност на X, т.е.

$$X_\delta = \{x \in \mid \quad \min_{y \in X} \| x - y \| < \delta > 0\}.$$

Следната теорема доказва, че итерационният процес (12) е монотонен.

Теорема 15 *Разглеждаме системата* (1), *където* $f_i(x)$ *са регулярни функции, дефинирани върху Хилбертовото пространство* $\mathbf{H}$. *Нека съществува* δ*-околност* X_δ *на множеството* X, *за която*

$$\langle \xi, x-y\rangle \neq 0, \quad \xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x), \quad y \in Pr_X x, \quad x \in X_\delta \setminus X,$$

където $V_{p(\varepsilon)}(x)$ *е дефинирана чрез (2).*

Нека $p^k(\varepsilon^k)$ *са решения на следното неравенство:*

$$V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) + \langle m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)), y_k - x_k\rangle < \varepsilon^k, \tag{13}$$

където $y_k \in Pr_X x_k$ *са произволно избрани. Ако началната точка* $x_0 \in X_\delta$ *и ако* $\varepsilon^k \leq \dfrac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)$, $0 < q < 1$, *тогава следващото неравенство:*

$$\|x_{k+1} - y_{k+1}\| \leq \|x_k - y_k\| \tag{14}$$

е в сила за всяко $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ако $V_{p(\varepsilon)}(x)$ е изпъкнала функция, тогава неравенството (13) е изпълнено за всяко $\varepsilon^k > 0$.

Доказателство. Тъй като в системата

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

функциите $f_i(x)$ са регулярни, обобщеният градиент $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$ е слабо компактно и изпъкнало множество ([27]). Следователно, $m(\partial V_{p(\varepsilon)}(x))$ е добре дефинирана. От (3) и (14), за всяко $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаваме

$$0 \leq A_k = \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} \leq \frac{\|x_{k+1} - y_k\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} =$$

като заместим x_{k+1} от (12), т.е.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\, m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2}. \tag{12}$$

Следователно

$$\frac{1}{\|x_k - y_k\|^2}\|y_k - x_k + \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2}\|^2 =$$

$$\frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1$$

$$+2\frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\langle m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)), y_k - x_k\rangle}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2}.$$

От неравенството $\varepsilon^k \leq \frac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)$ и (13), имаме:

$$A_k \leq \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1 +$$

$$2\frac{(\varepsilon^k - V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\, V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 |x_k - y_k\|^2} + 2\frac{\varepsilon^k (V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} \leq$$

като използуваме неравенството $\varepsilon^k \leq \frac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)$

$$1 - (1-q)\frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - (1-q)(B_k)^2 < 1,$$

където

$$B_k = \frac{(V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - y_k\|}.$$

Следователно, за всяко $x_k \in X_\delta \setminus X$, $k = 1, 2, \ldots$ получаваме

$$0 \leq A_k < 1 - (1-q)(B_k)^2 < 1. \tag{15}$$

Q.E.D.

2.4.4 Оценка на скоростта на сходимост

В този параграф ще направим оценка на скоростта на сходимост на итерационната процедура

$$(12) \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\, m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тази оценка ще извършим при условие за **регулярност** на функциите $\mathbf{f_i(x)}$.

Показваме при какви условия се осигурява геометрична(линейна) скорост на сходимост.

Поставяйки допълнителните условия, за непрекъснатост на $m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x))$ и за по-силно ограничаване на ε^k, осигуряваме за итерационната процедура (12) супергеометрична(свръхлинейна) скорост на сходимост.

Теорема 16 *Разглеждаме система* (1), *където* $f_i(x)$ *са регулярни функции, дефинирани върху Хилбертовото пространство . Въвеждаме от* (2) *фамилията функции* $V_{p(\varepsilon)}(x)$, *където*

$$\alpha_i > 0, \quad p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon)), \quad p_i > -1 + \varepsilon,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Нека точка 2 в твърдението на теорема 14 е удовлетворена. Нека множеството от решения $X \neq \emptyset$ *на* (1) *съвпада с множеството, за което началото принадлежи на на субдиференциала* $\partial V_{p(\varepsilon)}(x)$, *т.е.* $X = X_1$.

Нека съществува δ*-околност* X_δ *на множеството* X, *за която* $x_0 \in X_\delta \setminus X$ *и*

$$\langle \xi, x - y \rangle \neq 0, \quad \xi \in \partial V_{p(\varepsilon)}(x), \quad y \in Pr_X x, \quad x \in X_\delta \setminus X$$

и също

$$\lim_{k\to\infty} \|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(y_k))\| \neq 0, \tag{16}$$

където inf *е взет за всички редици* $y_k \in X_\delta \setminus X$, $k = 1, 2, \ldots$. *Разглеждаме итерационния процес* (12), *където* ε^k *и* $p^k(\varepsilon^k)$ *са избрани според* (13) *следващото неравенство:*

$$\varepsilon^k < \frac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \quad \text{и} \quad .$$

Тогава итерационната процедура (12) *има геометрична (линейна) скорост на сходимост.*

Доказателство.

Разглеждаме отново система

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

където $f_i(x)$ са регулярни функции, дефинирани върху Хилбертовото пространство . Означаваме

$$V_{p(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |f_i(x)|^{1+p_i(\varepsilon)} \geq 0, \tag{2}$$

където

$$\alpha_i > 0, \quad p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon)), \quad p_i > -1 + \varepsilon,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Според [68] скоростта на сходимост на итерационният процес:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\, m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

ще е геометрична, ако за всички $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, имаме

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} \leq const. < 1.$$

Ако за някое k $x_k \in X$, твърдението на теоремата е тривиално. Нека $x_k \notin X$, $k = 0, 1, \ldots$. Тъй като $x_0 \in X_\delta$, според теорема 15 (виж (14)) получаваме, че за всяко $k = 0, 1, \ldots$ $x_k \in X_\delta \setminus X$. Според условията на теоремата (вижте теорема 14) за всяка начална точка $x_k(0) = x_k$ съществува краен момент $T_k \leq V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) < \infty$, за който съответното решение $x_k(\cdot)$ на (4) удовлетворява следното включване: $x_k(T_k) \in X$.

Имайки предвид, че ε^k и $p^k(\varepsilon^k)$ удовлетворяват неравенствата:

$$\varepsilon^k < \frac{q}{2} V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \quad \text{и}$$

$$V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) + \langle m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)), y_k - x_k \rangle < \varepsilon^k, \tag{13}$$

можем да напишем за всяко $k = 0, 1, \ldots$ следната редица от неравенства:

$$B_k = \frac{V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \, \|x_k - y_k\|} \geq$$

$$\frac{-\int_0^{T_k} \langle m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t))), \dot{x}_k(t) \rangle}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - x_k(T_k)\|} =$$

$$\frac{-\int_0^{T_k} \langle m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t))), \dot{x}_k(t) \rangle \, dt}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \| \int_0^{T_k} \dot{x}_k(t) \, dt \|} \geq$$

$$\frac{T_k}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \int_0^{T_k} \frac{1}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t)))\|} \, dt}.$$

За всяко $\xi \in \partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(y))$ имаме

$$\|\xi\| \geq \|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(y))\|.$$

От теоремата за средните стойности ($t_k \in (0, T_k)$) и (16) получаваме

$$\varliminf_{k \to \infty} B_k \geq \varliminf_{k \to \infty} \frac{T_k}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \int_0^{T_k} \frac{1}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t)))\|} \, dt} =$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \frac{T_k}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| T_k \frac{1}{\|\xi(t_k)\|}} \geq$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t_k)))\|}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} = \sqrt{r} \neq 0.$$

Според (15) имаме $B_k \leq 1$ и от (16) получаваме

$$(17) \qquad 0 \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \leq 1-(1-q) \underline{\lim_{k\to\infty}} (B_k)^2 < 1-(1-q)r < 1.$$

Следователно, итерационният процес (12) има поне геометрична скорост на сходимост с параметър не по-голям от $\sqrt{1-r+rq}$.

Q.E.D.

Следствие 3 *Нека условията на теорема 16 са в сила. Нека $m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x))$ е непрекъсната функция в множеството на решенията X и*

$$\varepsilon^k < \frac{q^k}{2} V_{p(\varepsilon^k)}(x_k), \qquad 0 < q < 1.$$

Тогава итерационната процедура (12) има супергеометрична (свръхлинейна) скорост на сходимост.

Доказателство. Съгласно [68] скоростта на сходимост е супергеометрична, ако за всяко $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, \ldots,$ имаме

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} = 0.$$

Според непрекъснатостта на $m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x))$ и (13) ние получаваме

$$\lim_{k\to\infty} B_k \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k(t_k)))\|}{\|m(\partial V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} = \sqrt{r} = 1.$$

От (17) се получава:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_k &\leq 1 - \lim_{k\to\infty} (B_k)^2 (1-q^k) \\ &= 1 - r \lim_{k\to\infty} (1-q^k) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Следователно, показахме при какви условия се осигурява геометрична(линейна) скорост на сходимост и кои допълнителни условия осигуряват по-бърза, супергеометрична(свръхлинейна) сходимост на итерационната процедура (12).

Глава 3

Модифициран метод на Нютон и параметричен метод на Нютон за оптимизационни задачи в Хилбертово пространство

3.1 Модифициран метод на Нютон за оптимизационни задачи в Хилбертово пространство

3.1.1 Увод

Основната ни цел сега е да модифицираме метод на Нютон за решаване на минимизационната задача, избягвайки пресмятането на обратни оператори в безкрайномерни пространства. Разглеждаме параметрична оптимизационна задача в реално Хилбертово пространство, предполагайки че градиентът на целевата функция е Липшицово непрекъсната, но негладка функция. Супергеометрична скорост на сходимост, също както и монотонност, на получената минимизираща редица се доказват.

Както е добре известно методът на Нютон има квадратична сходимост за диференцируеми функции с локално Липшицови обратими градиенти ([31], [68] и [85]).

Много автори представят напоследък интересни модификации на метод на Нютон, а също и параметрични методи на Нютон за решаване на различни задачи с някакъв тип негладкост, като например: [21], [25], [39], [47], [51], [56], [57], [58], [69], [70], [71], [72], [73], [78], [81], [82], [83], [84], [87] и [93]. Също така методи на изглаждане и други варианти са представени за осигуряване на сходимост ([46], [45] и [86]). Те решават системата нелинейни негладки уравнения или разглеждат негладката минимизационна задача в крайномерно пространство.

В статията на Ксяоджун Чен, Зухаир Нашед и Ликун Ки ([25]) се решава система нелинейни уравнения в Банахово пространство, използувайки адаптивна външна инверсия ([19], [33], [63], [64], [65], [66]), като за непрекъснати функции е постигната квадратична сходимост и свърхлинейна скорост на сходимост за локално Липшицови функции. Квадратична скорост на сходимост е доказана за гладки нелинейни уравнения, използувайки обобщени инверсии. Дефиницията и свойствата на обобщените инверсии в Банахово пространство са дадени в [64] и [65], а операторните екстремални свойства на различни обобщени инверсии са изследвани от Енгл и Нашед [34].

В статията на Дефенг Сун и Джийе Хан ([93]) се разглежда също крайномерният случай за локално Липшицова полугладка целева функция и се постига също свърхлинейна скорост на сходимост.

Ликун Ки и Ксияоджун Чен ([82]) решават крайномерна система нелинейни негладки уравнения и осигуряват линейна скорост на сходимост.

В статията на Стивън Робинсън ([87]) се решава система нелинейни функции, които допускат точково-базирана апроксимация. Когато тази система е от диференцируеми функции имащи точково-базирана апроксимация, тогава е постигната квадратична сходимост. Разгледан е и клас негладки функции, допускащи точково-базирана апроксимация за решаване на важния клас нормални изображения в Хилбертово пространство.

Минимизационната задача разглеждат Роберт Мифлин, Дефенг Сун и Ликун Ки ([62]), като целевата функция е възможно да е недиференцируема, но изпъкнала и постигат свръхлинейна(супергеометрична) скорост на сходимост, както и ние. Но да припомним нашите предположения са, че съществува поне една точка, за която се достига решението и че градиентът на целевата функция е негладка Липшицово непрекъсната функция.

Приложение при решаването на оптимизационната задача е дадено от Дефенг Сун и Джийе Хан ([93]), както и от Ликун Ки и Ксияоджун Чен ([82]). Л. Ки и К. Чен ([82]), а също и статиите [79] и [80] решават LC^1 оптимизационна задача(т.е. при локално липшицов градиент на целевата функция).

Въпреки изключително интересните резултати на тези и много други автори, досега не бе поставен проблемът както за решаване на минимизационната задача като цяло в Хилбертово пространство с някаква модификация на метод на Нютон зависещ от параметър, така и за необходимите условия на сходимост и за условията осигуряващи свръхлинейна скорост на сходимост.

Използувайки идеите на Кларк ([27]), са дефинирани производни по направление от втори ред ([6] и [43]) и втори субдиференциали ([6] и [89]) в Банахови пространства. Следователно, втори субдиференциал може да се дефинира за нашата цел да модифицираме метод на Нютон за решаване на минимизационната задача, избягвайки пресмятането на обратен оператор в безкрайномерното пространство. Повече информация относно производните по направление от втори ред и вторите субдиференциали може да се намери в [42] и [17].

3.1.2 Представяне на модифицирания метод на Нютон

Разглеждаме задачата за минимизиране на функционала $V_p(x)$, където x принадлежи на Хилбертовото пространство H и p е абстрактен параметър:

$$\inf_{x\in H} V_p(x) = V_p^*.$$

Предполагаме, че съществува градиент $\nabla V_p(x)$, който има Липшицова непрекъснатост. Отбелязваме, че ако Лебеговите множества на $V(x)$ са ограничени, затворени, изпъкнали и $V(x)$ е слабо полунепрекъсната отдолу, тогава съществува минимум на $V(x)$. Има други условия за съществуване на минимума на $V(x)$ като компактност на минимизиращите редици, но ние не възнамеряваме да дискутираме този проблем и предполагаме, че съществува поне една точка $x^* \in H$, за която

$$\inf_{x\in H} V_p(x) = V_p(x^*) = V_p^*. \tag{1}$$

Един клас от модификации на метод на Нютон може да бъде описан като:

$$x_{k+1} = x_k - \Phi(V_p(x_k))\nabla V_p(x_k),$$

където $\Phi(\cdot) : H \to H$ е подходящо избран оператор. Очевидно, ако съществува втора производна $V_p''(x)$ на $V_p(x)$ и ако $\Phi(V_p(x)) = (V_p''(x))^{-1}$ ние получаваме класическия Метод на Нютон.

Настоящата глава продължава някои изследвания на [52], [54], [104] и [105].

На основата на идеите на Кларк ([27]), съществуват дефиниции за производни по направление от втори ред ([6] и [43]) и втори субдиференциали ([6] и [89]) в Банахови пространства. Следователно, поради Липшицовата непрекъснатост на $\nabla V_p(x)$ може да се конструира втори субдиференциал, $\partial^2 V_p(x) : H \to H$ за който $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$ е образ на H в ограничените затворени и изпъкнали подмножества на H. Тук $(\partial^2 V_p(x))^*$ е спрегнатото изображение, т.е.

$$\langle \partial^2 V_p(x)x, y\rangle \equiv \langle x, (\partial^2 V_p(x))^* y\rangle,$$

където $\langle\cdot,\cdot\rangle$ е скаларното произведение в H. От свойствата ([27], [43] и [89]) на $\partial^2 V_p(x)$ и непрекъснатостта на $\nabla V_p(x)$, многозначното изображение $(\partial^2 V_p(x))^*\nabla V_p(x)$ е полунепрекъснато отгоре. Следователно, втори субдиференциал може да се дефинира за нашата цел да модифицираме метод на Нютон за решаване на минимизационната задача, избягвайки пресмятането на обратен оператор в безкрайномерното пространство.

Ние се нуждаем от следните означения ($A \in H$ е ограничено затворено и изпъкнало):

$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ нормата в H, така както $|\cdot|$ означава модулът на числата,

$X = \{x \in H \,|\, V_p(x) = V_p^*\}$ е множеството от решенията на (1), които не зависят от параметъра p,

$Pr_A(x) = \{y \in H \,|\, |x-y| = \min\limits_{z\in A}|x-z|\}$ е метричната проекция на x в A,

$m(A) = Pr_A(0)$ е метричната проекция на нулата в A,

$M(A) = \{y \in H \,|\, |y| = \max\limits_{z\in A}|z|\}$ е метричната анти–проекция на нулата в A,

$m(V_p(x))$ е метричната проекция на нулата в стойностите на п.н.г. многозначна функция $(\partial^2 V_p(x))^*\nabla V_p(x)$.

$X_\delta = \{x \in H \,|\, \min\limits_{y\in X}|x-y| < \delta\}$ е δ–околност на X.

$D(x, A) = \max\limits_{y\in A}|x-y|$ е максималното разстояние между точката x и множеството A.

Ще се нуждаем също от някои технически резултати и насочваме към [30] за подробности относно диференциалните включвания в безкрайно-мерни пространства както и [16] за връзките между дискретните и непрекъснатите версии на методите на Нютон.

Лема 9 *Разглеждаме следното диференциално включване:*

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

където $F(x) : H \to 2^H \setminus \emptyset$ *е полунепрекъсната отгоре многозначна функция с ограничени, затворени и изпъкнали стойности и* $|F(x)| = \sup\limits_{y \in F(x)} |y| \leq 1 + |x|$.

Нека $\varphi(x) \,|\, H \to R_+$ *е строго положителна и ограничена функция* ($0 < \delta \leq \varphi(x) \leq M < \infty$)*, за която* $\varphi(x(t))$ *е измерима за всяка абсолютно непрекъсната функция* $x(t) \,|\, R \to H$. *Означаваме* $\tau(t) = \int_0^t \varphi(x(s))\, ds$ *и* – $t(\tau)$ *нейната обратна функция. Разглеждаме следното диференциално включване:*

$$\dot{y} \in \varphi(y) F(y), \quad y(0) = x_0, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Ако $x(t)$ *е решение на (2), тогава функцията* $y(t) = x(\tau(t))$ *почти навсякъде удовлетворява (3), т.е. множествата от траекториите на (2) и (3) съвпадат, като криви във фазовото пространство* H.

Доказателство. Отбелязваме, че съгласно [30], съществува решение на (2), ако $F(x)$ изобразява ограничени множества в ограничени и удовлетворява някои допълнителни условия за компактност. $\tau(t)$ е абсолютно непрекъсната функция за която, при $0 < \delta \leq \varphi(x(t))$, съществува обратна функция $t(\tau)$. Проверяваме директно, че $x(\tau(t))$ удовлетворява диференциалното включване (3) и лемата е доказана.

Q.E.D.

Следствие 4 *Разглеждаме диференциалното включване:*

$$\dot{x} \in -(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x), \quad x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

където дясната страна е п.н.г. многозначна функция с ограничени, затворени и изпъкнали стойности, $x_k \notin X_\delta$ *и* $\delta > 0$ *е произволно избрано.*

Нека $|m(V_p(x))| \geq \eta > 0$, $x \notin X_\delta$ *и*

$$X = \{x \in H \mid V_p(x) = V_p^*\} \equiv \{y \in H \mid \nabla V_p(y) = 0\}.$$

Ако диференциалното включване (4) притежава решение и множеството на тези решения е ограничено за $t \geq 0$, *тогава всяко решение на*

$$(5) \qquad \dot{x} \in -\frac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|m(V_p(x))|^2}, \quad x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

може да се продължи до множеството X *в крайно време* $T_k \leq \frac{1}{2}|\nabla V_p(x_k)|^2$.

Доказателство. Функцията $|m(V_p(x)|^2 \geq \eta^2 > 0$ е строго положителна и полунепрекъсната отдолу като функция с реални стойности. Следователно, за всяко абсолютно непрекъснато $x(t)$ функцията $|m(V_p(x(t))|$ е п.н.д., тъй като е интегруема. Според Лема 9 множествата от траекториите на (4) и (5) съвпадат като криви в H. Нека $x(t)$ е решение на (5). Разглеждаме $|\nabla V_p(x(t))|^2$, която е абсолютно непрекъсната, т.е. диференцируема почти навсякъде. Може да се напише

$$|\nabla V_p(x(0))|^2 - |\nabla V_p(x(t))|^2 = \int_t^0 (|\nabla V_p(x(s))|^2)'_s \, ds \in$$

$$2\int_t^0 \langle \nabla V_p(x(s)), \partial^2 V_p(x(s))\dot{x}(s)\rangle \, ds \subset$$

$$2\int_0^t \langle (\partial^2 V_p(x(s)))^* \nabla V_p(x(s)), \frac{(\partial^2 V_p(x(s)))^* \nabla V_p(x(s))}{|m(V_p(x(s))|^2}\rangle \, ds \subset$$

$$2t\Big[1, \frac{|M(V_p(x(t))|^2}{|m(V_p(x(t))|^2}\Big].$$

За всяко t, $x(s) \notin X_\delta$, $s \in [0, t]$, имаме $0 < |\nabla V_p(x(t))|^2 \leq |\nabla V_p(x(0))|^2 - 2t$. По такъв начин, за време $T_k \leq \frac{1}{2}|\nabla V_p(x_k)|^2$ решението $x(t)$, $x(0) = x_k$, трябва да достигне множеството X_δ поради ограничеността на множеството от решенията на (4). Тъй като $\delta > 0$ е произволно избрано, решението $x(t)$ може да се продължи до множеството X за време $T_k \leq \frac{1}{2}|\nabla V_p(x_k)|^2$.

Q.E.D.

Ще разгледаме следната итерационна процедура:

$$(6) \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{|\nabla V_p(x_k)|^2 m(V_p(x_k))}{|m(V_p(x_k))|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

където x_0 е известно. Това е един модифициран метод на Нютон, където пресмятането на обратния оператор е сменено пресмятането на метричната проекция.

3.1.3 Сходимост на метода

В този параграф ще покажем какви условия осигуряват монотонност и линейна скорост на сходимост на итерационната процедура.

Теорема 17 (Монотонност). *Разглеждаме минимизационната задача*

$$\inf_{x \in H} V_p(x) = V_p^*$$

и итерационната процедура

$$(7) \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{|\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

където $x \in H$, $\nabla V_p(x)$ е Липшицово непрекъсната, $m(V_p(x))$ е метричната проекция на нулата в стойностите на п.н.г. многозначна функция $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$.

Нека множеството от решенията

$$X = \{x \in H \,|\, V_p(x) = V_p^*\} \equiv \{y \in H \,|\, \nabla V_p(y) = 0\}$$

е инвариантно относно p, $x_k \notin X$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $|m(V_p(x)| > 0$, $x \notin X$.

Ако p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ са избрани посредством следните равенства:

$$(8) \qquad |\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 = \langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - Pr_X(x_k) \rangle$$

тогава $|x_{k+1} - Pr_X(x_{k+1})| \leq |x_k - Pr_X(x_k)|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказателство. Разглеждаме $0 < A_k = \dfrac{|x_{k+1} - y_{k+1}|^2}{|x_k - y_k|^2}$, където $y_k = Pr_X(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Използувайки (7) и (8) може да напишем

$$A_k = \frac{|x_{k+1} - y_{k+1}|^2}{|x_k - y_k|^2} \le \frac{|x_{k+1} - y_k|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$\frac{\left|x_k - \frac{|V_{p_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2} - y_k\right|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$\frac{\left|x_k - y_k - \frac{|V_{p_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2}\right|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$1 - \frac{|\nabla V_{p_k}(x_k)|^4}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2\,|x_k - y_k|^2} =$$

имайки предвид (8)

$$1 + \frac{|\nabla V_{p_k}(x_k)|^2}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2\,|x_k - y_k|^2}(|\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 - 2\langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle) =$$

$$1 - \frac{(\langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle)^2}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2\,|x_k - y_k|^2} < 1.$$

Следователно получихме, че

$$A_k < 1.$$

Q.E.D.

Нуждаем от следната техническа лема:

Лема 10 *Нека условията на следствие 4 са в сила и нека $x(t)$ е решение на (5) с начално условие $x(0) = x_k$, за което $x(T_k) = x^* \equiv X \equiv \{y \in H \mid \nabla V_p(y) = 0\}$ е единствената минимална точка на задача (1).*

Предполагаме, че P е компактно множество,
$\dfrac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|\nabla V_p(x)|}$ е равномерно непрекъсната във всяка точка (p, x^*), $p \in P$ и следната граница

$$\lim_{p \to p^*, x \to x^*} \frac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|\nabla V_p(x)|} = u(p^*) \neq 0 \tag{9}$$

е еднозначна.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ и всички достатъчно големи k следните неравенства са в сила:

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}, x_k - x^*\rangle\Big| \geq$$

$$\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} - \varepsilon^2 - \varepsilon|u(p^*)|\Big).$$

$$\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}|x_k - x^*| \leq$$

$$\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} + \varepsilon^2 + \varepsilon|u(p^*)|\Big).$$

Доказателство. Тъй като P е компактно множество и $\dfrac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|\nabla V_p(x)|}$ е равномерно непрекъсната за всяка точка (p, x^*), $p \in P$, без загуба на общност, ние предполагаме, че $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p^*$. Напомняме, че

$$\dot{x}(s) = -f_k(s) \in -\frac{(\partial^2 V_{p_k}(x(s)))^* \nabla V_{p_k}(x(s))}{|m(V_{p_k}(x(s)))|^2},$$

$$x(0) = x_k, \quad x(T_k) = x^*,$$

ние имаме

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}, x_k - x^*\rangle\Big| = \Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}, \int_0^{T_k} f_k(s)\,ds\rangle\Big|.$$

Според (9), избирайки произволно $\varepsilon > 0$, за всички достатъчно големи k можем да напишем

$$\Big|\frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*)\Big| \leq \varepsilon$$

и

$$\Big|\frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2} - f_k(x(s))\Big| \leq$$

$$D\Big(\frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2},$$

$$\frac{(\partial^2 V_{p_k}(x(s)))^*\nabla V_{p_k}(x(s))|\nabla V_{p_k}(x(s))|^2}{|m(V_{p_k}(x(s)))|^2|\nabla V_{p_k}(x(s))|^2}\Big) <$$

$$\frac{\varepsilon}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}.$$

Прилагайки горните неравенства получаваме

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}, x_k - x^*\rangle\Big| = \Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}, \int_0^{T_k} f_k(s)\,ds\rangle\Big| \geq$$

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*) + u(p^*)\,,\, \int_0^{T_k} \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| -$$

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*) + u(p^*)\,,\, \int_0^{T_k} f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| \geq$$

$$\Big|\langle u(p^*)\,,\, \int_0^{T_k} \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| -$$

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*)\,,\, \int_0^{T_k} \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| -$$

$$\Big|\langle \frac{m(V_{p_k}(x_k))}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*),\, \int_0^{T_k} f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| -$$

$$\Big|\langle u(p^*)\,,\, \int_0^{T_k} f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds\rangle\Big| \geq$$

$$\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} - \varepsilon^2 - \varepsilon|u(p^*)|\Big).$$

По аналогия се получава

$$\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}|x_k - x^*| = \frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|}\Big|\int_0^{T_k} f_k(s)\,ds\Big| \leq$$

$$\Big|\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*) + u(p^*)\Big| \int_0^{T_k} \frac{|u(p^*)|}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds +$$

$$\Big|\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*) + u(p^*)\Big| \int_0^{T_k}\Big| f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\Big|\,ds \leq$$

$$|u(p^*)| \int_0^{T_k} \frac{|u(p^*)|}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds +$$

$$\left|\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*)\right| \int_0^{T_k} \frac{|u(p^*)|}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\,ds +$$

$$\left|\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} - u(p^*)\right| \int_0^{T_k} \left| f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\right| ds +$$

$$|u(p^*)| \int_0^{T_k} \left| f_k(s) - \frac{u(p^*)}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|\,|u(p^*)|^2}\right| ds \le$$

$$\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|} \left(1 + \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} + \varepsilon^2 + \varepsilon |u(p^*)|\right).$$

Следователно, получихме

$$\frac{|m(V_{p_k}(x_k))|}{|\nabla V_{p_k}(x_k)|} |x_k - x^*| \le$$

$$\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|} \left(1 + \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} + \varepsilon^2 + \varepsilon |u(p^*)|\right).$$

Q.E.D.

Теорема 18 (Сходимост).

Разглеждаме минимизационната задача (1) и итерационната процедура (7), където $x \in H$, $\nabla V_p(x)$ е Липшицово непрекъсната функция, $m(V_p(x))$ е метричната проекция на нулата в стойностите на п.н.г. многозначна функция $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$, $x^* \equiv X \equiv \{y \in H \mid \nabla V_p(y) = 0\}$ е единствената минимална точка, p_k са избрани според условие (8) и принадлежат на едно компактно множество P, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Нека за всяко $\delta > 0$ съществува $\eta(\delta) > 0$, за което $|m(V_{p_k}(x))| \ge \eta(\delta)$, $|x - x^*| \ge \delta$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Нека $\dfrac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|\nabla V_p(x)|}$ е равномерно непрекъсната във всяка точка (p, x^*), $p \in P$ и границата (9) е еднозначна.

Ако съществува решение на (5) за всяко p_k, тогава итерационната процедура (7) има свърхлинейна скорост на сходимост.

Доказателство.

Да припомним минимизационната задача

$$(1)\qquad \inf_{x\in H} V_p(x) = V_p(x^*) = V_p^*$$

и итерационната процедура

$$(7)\qquad x_{k+1} = x_k - \frac{|\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

където $x \in H$, $\nabla V_p(x)$ Липшицово непрекъсната функция, $m(V_p(x))$ е метричната проекция на нулата в стойностите на п.н.г. многозначна функция $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$, $x^* \equiv X \equiv \{y \in H \mid \nabla V_p(y) = 0\}$ е единствената минимална точка, p_k са избрани според

$$(8)\qquad |\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 = \langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - x^*\rangle$$

и принадлежат на едно компактно множество P, $k = 0,1,2,\ldots$.

Съгласно [68], итерационната процедура (7) има свръхлинейна скорост на сходимост, ако

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = 0.$$

Имаме (виж доказателството на теорема 16)

$$0 \le A_k = \frac{|x_{k+1} - x^*|^2}{|x_k - x^*|^2} \le$$

$$1 - \frac{\left(\langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - x^*\rangle\right)^2}{|m(V_{p_k}(x_k))|^2\,|x_k - x^*|^2} = 1 - (B_k)^2.$$

Следователно $B_k \le 1$ и според условията на теоремата твърдим, че границата на B_k е равна на 1, т.е.

$$(10)\qquad \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} \frac{|\langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - x^*\rangle|}{|m(V_{p_k}(x_k))|\,|x_k - x^*|} = 1.$$

Според лема 10 за всяко $\varepsilon > 0$ и всички достатъчно големи k, имайки предвид

$$(9)\qquad \lim_{p\to p^*, x\to x^*} \frac{(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)}{|\nabla V_p(x)|} = u(p^*) \neq 0$$

получаваме

$$B_k \geq \frac{\displaystyle\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} - \varepsilon^2 - \varepsilon|u(p^*)|\right)}{\displaystyle\int_0^{T_k} \frac{ds}{|\nabla V_{p_k}(x(s))|}\left(1 + \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} + \varepsilon^2 + \varepsilon|u(p^*)|\right)}.$$

Следователно, можем да напишем

$$\lim_{k\to\infty} B_k \geq \frac{(1 - \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} - \varepsilon^2 - \varepsilon|u(p^*)|)}{(1 + \frac{\varepsilon}{|u(p^*)|} + \varepsilon^2 + \varepsilon|u(p^*)|)}.$$

Тъй като $\varepsilon > 0$ е произволно избрано, доказателството е завършено.

Q.E.D.

Означаваме с $\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x)$ и $m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x))$ приблизителните стойности на $\nabla V_{p_k}(x)$ и $m(V_{p_k}(x))$ съответно.

Теорема 19 *Нека условията на теорема 17 са в сила* освен *(8). Разглеждаме следната итерационна процедура:*

$$(11) \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ако p_k са избрани според следните неравенства

$$(12) \qquad |\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 \leq (1+q)\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - x^*\rangle,$$
$$0 < q < 1,$$

тогава итерационната процедура (11) е монотонна.

Доказателство. Както беше направено в доказателството на теорема 17, според (11) и (12) имаме

$$A_k = \frac{|x_{k+1} - y_{k+1}|^2}{|x_k - y_k|^2} \leq \frac{|x_{k+1} - y_k|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$\frac{\left|x_k - \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2} - y_k\right|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$\frac{\left|x_k - y_k - \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2}\right|^2}{|x_k - y_k|^2} =$$

$$1 - \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^4}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\, |x_k - y_k|^2}.$$

Но имайки предвид

$$\text{(8)} \qquad |\nabla V_{p_k}(x_k)|^2 = \langle m(V_{p_k}(x_k)), x_k - x^* \rangle$$

получаваме, че

$$A_k \leq$$

$$1 + \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\, |x_k - y_k|^2}(|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 - 2\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle) \leq$$

съгласно (12)

$$1 + \frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\, |x_k - y_k|^2}(1 + q - 2)\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle.$$

Следователно, имаме

$$\text{(13)} \quad A_k \leq 1 - (1-q)\frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\, |x_k - y_k|^2}\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle < 1.$$

Q.E.D.

Теорема 20 *Нека условията на теорема 18 и теорема 19 са удовлетворени. Ако p_k са избрани според следните допълнителни неравенства*

$$\text{(14)} \qquad |\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2 \geq q\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - x^* \rangle, \quad 0 < q < 1$$

тогава итерационната процедура (11) има асимптотично линейна скорост на сходимост с константа $\sqrt{1 - q(1-q)}$.

Доказателство. Според (13) и (14) имаме

$$A_k \le 1 - (1-q)\frac{|\nabla V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)|^2}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\,|x_k-y_k|^2}\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle \le$$

$$1 - q(1-q)\frac{\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - y_k\rangle^2}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|^2\,|x_k-y_k|^2} =$$

$$1 - q(1-q)B_k^2.$$

Съгласно лема 10 имаме

$$\lim_{k\to\infty} B_k \le \lim_{k\to\infty}\frac{\langle m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k)), x_k - x^*\rangle}{|m(V_{p_k}^{\varepsilon_k}(x_k))|\,|x_k-y_k|} = 1.$$

Следователно,

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{A_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-y_{k+1}|}{|x_k-y_k|} \le \sqrt{1-q(1-q)}.$$

Q.E.D.

Следователно, така получихме класификация на условията осигуряващи монтонност и линейна скорост на сходимост.

3.1.4 Числови експерименти

Ще представим две числови реализации с точност $\varepsilon = 0.0000001$ на PC 486 с честота 66 MgHz на FORTRAN - 77.

Разглеждаме една гладка изпъкнала непараметрична задача и една гладка неизпъкнала непараметрична задача

Да разгледаме следната гладка изпъкнала непараметрична задача за намиране на минимума на функцията:

$$V(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 12y,$$

с начална точка $(5,5)$.

Тук $|\nabla V(x,y)|^2 = (8x-4y)^2 + (8y-4x-12)^2$,

$$(\partial^2 V(x,y))^* \nabla V(x,y) = \begin{bmatrix} 80x - 64y + 48 \\ 80y - 64x - 96 \end{bmatrix}.$$

и

$$|m(V(x,y))|^2 = (80x - 64y + 48)^2 + (80y - 64x - 96)^2.$$

Ще проверим дали монотонноста и линейната сходимост се осигуряват съответно от условия (12) и (14).

Например, за началната точка $(x_0, y_0) = (5,5)$, разстоянието Δ до решението $(x^*, y^*) = (1,2)$ е $\Delta_0 = 5$ и

$$|\nabla V(x_0, y_0)|^2 = \langle m(V(x_0, y_0)), (x_0, y_0) - (x^*, y^*)\rangle = 464.$$

Следователно за всяко $0 < q < 1$ ще имаме геометрична сходимост.

На първа итерация, получаваме
$(x_1, y_1) = (1.43, 5.44615)$, $\Delta_1 = 3.4728733$, $|\nabla V(x_1, y_1)|^2 = 775.18774$ и $\langle m(V(x_1, y_1)), (x_1, y_1) - (x^*, y^*)\rangle = 775.19189$, следователно процедурата ще е монотонна за всяко $0 < q < 1$, но за да имаме геометрична сходимост $0 < q \leq 0.9999946$.

На втора итерация, получаваме $(x_2, y_2) = (2.9293789, 3.4472422)$, $\Delta_2 = 2.4118484$, $|\nabla V(x_2, y_2)|^2 = 107.95264$ и $\langle m(V(x_2, y_2)), (x_2, y_2) - (x^*, y^*)\rangle = 107.93805$, следователно процедурата ще е монотонна, ако $0.0001351 \geq q < 1$, за който интервал ще е с геометрична сходимост.

На трета итерация, получаваме $(x_3, y_3) = (1.2073059, 3.6620833)$, $\Delta_3 = 1.6749616$, $|\nabla V(x_3, y_3)|^2 = 180.33623$ и $\langle m(V(x_3, y_3)), (x_3, y_3) - (x^*, y^*)\rangle = 180.33694$, следователно аналогично на първа итерация, процедурата ще е монотонна за всяко $0 < q < 1$, но за да имаме геометрична сходимост $0 < q \leq 0.999996$.

На четвъртата итерация, получаваме $(x_4, y_4) = (1.9304958, 2.6979854)$, $\Delta_4 = 1.1631878$, $|\nabla V(x_4, y_4)|^2 = 25.108007$ и $\langle m(V(x_4, y_4)), (x_4, y_4) - (x^*, y^*)\rangle = 25.108002$, следователно отново, подобно на втора итерация, процедурата ще е монотонна, ако $0.0000001 \geq q < 1$, за който интервал ще е с геометрична сходимост.

Ако продължим ще видим, че се запазва тази тенденция на стойността на отношението

$$\frac{|\nabla V(x_k, y_k)|^2}{\langle m(V(x_k, y_k)), (x_k, y_k) - (x^*, y^*)\rangle}$$

алтернативно на една итерация да е по-голяма от 1, а на следващата да е по-малка от 1 и т.н.

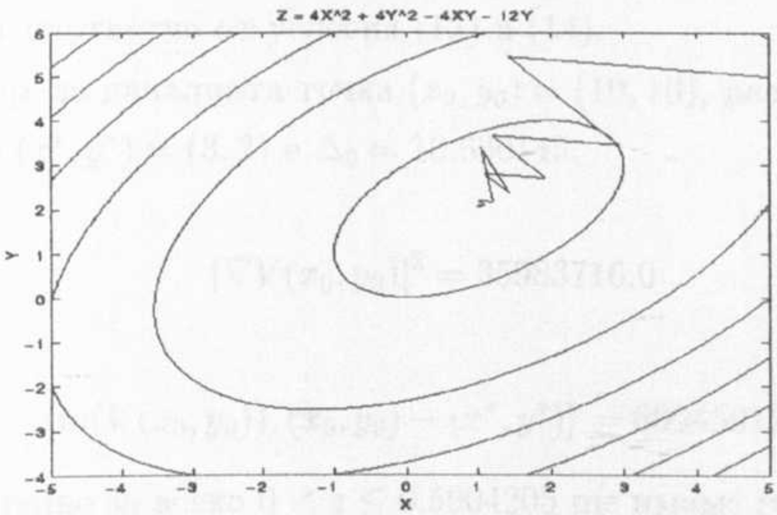
Ако разгледаме съотношенията:

$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 0.6945746$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 0.6944821$, $\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0.6944721$, $\frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.6944563$ и $\frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 0.6944560$.

Забелязваме, че скоростта сходимост нараства и е със стойности, по-добри от максимално възможната според израза $\sqrt{1 - q(1-q)}$, която е $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660254$. Разликата между $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660254$ и на най-големия коефициент $\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 0.6945746$ се получава понеже разглеждаме изпъкнала гладка непараметрична задача.

Имайки предвид коефициента на сходимост(определен от най-високата стойност $\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 0.6945746$), можем да определим броя на итерациите, осигуряващи желана точност.

Решението $1.0000000, 2.0000000$ се получава за 47 итерации и 0.25 секунди.



Фигура на пример 1.

Да разгледаме и следната гладка неизпъкнала непараметрична задача за намиране на минимума на функцията:

$$V(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2,$$

с начална точка $(10, 10)$.

Тук

$$|\nabla V(x,y)|^2 = [4x(x^2+y-11)+2(x+y^2-7)-1]^2+[2(x^2+y-11)+4y(x+y^2-7)-1]^2,$$

$$(\partial^2 V(x,y))^* \nabla V(x,y) =$$

$$\begin{bmatrix} 4(x^2+y+2x-10.5)[4x^3+4xy-42x+2y^2-15]+4(x+y)[2x^2-23+4xy+4y^3-26y] \\ 4(x+y)[4x^3+4xy-42x+2y^2-15]+4(x+3y^2-6.5)[2x^2-23+4xy+4y^3-26y] \end{bmatrix}$$

и

$$|m(V(x,y))|^2 =$$

$$\{4(x^2+y+2x-10.5)[4x^3+4xy-42x+2y^2-15]+4(x+y)[2x^2-23+4xy+4y^3-26y]\}^2+$$

$\{4(x+y)[4x^3+4xy-42x+2y^2-15]+4(x+3y^2-6.5)[2x^2-23+4xy+4y^3-26y]\}^2$.

Ще проверим също дали монотонноста и линейната сходимост се осигуряват съответно от условия (12) и (14).

Например, за началната точка $(x_0, y_0) = (10, 10)$, разстоянието Δ до решението $(x^*, y^*) = (3, 2)$ е $\Delta_0 = 10.630145$,

$$|\nabla V(x_0, y_0)|^2 = 35983716.0$$

и

$$\langle m(V(x_0, y_0)), (x_0, y_0) - (x^*, y^*)\rangle = 60945912.0.$$

Следователно за всяко $0 < q \leq 0.5904205$ ще имаме геометрична сходимост.

На първа итерация, получаваме $(x_1, y_1) = (7.6985726, 4.5089984)$, $\Delta_1 = 5.3265052$,
$|\nabla V(x_1, y_1)|^2 = 3010628.3$ и от $\langle m(V(x_1, y_1)), (x_1, y_1) - (x^*, y^*)\rangle = 2767801$. следва, че процедурата ще е монотонна за всяко $0.0877329 \geq q < 1$ с линейна скорост на сходимост.

На втора итерация, получаваме $(x_2, y_2) = (2.3784447, 2.2793772)$, $\Delta_2 = 0.68145627$, $|\nabla V(x_2, y_2)|^2 = 844.50671$ и $\langle m(V(x_2, y_2)), (x_2, y_2) - (x^*, y^*)\rangle = 4.852359$, откъдето следва, че условието за монотонност (12) е нарушено.

На трета итерация: $(x_3, y_3) = (2.8910990, 3.3891883)$, $\Delta_3 = 1.3934503 > \Delta_2 = 0.68145627$, следователно монотонността както предположихме (условие (12) не е изпълнено) е нарушена. $|\nabla V(x_3, y_3)|^2 = 10604.664$ и $\langle m(V(x_3, y_3)), (x_3, y_3) - (x^*, y^*)\rangle = 17669.195$, следователно процедурата ще е с геометрична скорост на сходимост за $0 < q \leq 0.6001781$.

Нека разгледаме още няколко итерации.

Четвърта итерация: $(x_4, y_4) = (2.7032249, 2.6170435)$, $\Delta_4 = 0.68470293$, $|\nabla V(x_4, y_4)|^2 = 611.94922$ и $\langle m(V(x_4, y_4)), (x_4, y_4) - (x^*, y^*)\rangle = 769.73682$. Следователно отново процедурата ще е с геометрична скорост на сходимост за $0 < q \leq 0.7950109$.

Пета итерация: $(x_5, y_5) = (2.6013811, 2.2112653)$, $\Delta_5 = 0.45114309$, $|\nabla V(x_5, y_5)|^2 = 443.72443$ и $\langle m(V(x_5, y_5)), (x_5, y_5) - (x^*, y^*)\rangle = 36.951889$, откъдето следва, че условието за монотонност (12) е нарушено отново.

Шеста итерация: $(x_6, y_6) = (3.0892105, 2.8679302)$ и $\Delta_6 = 0.87250286$. Монотонността е нарушена отново, както очаквахме.

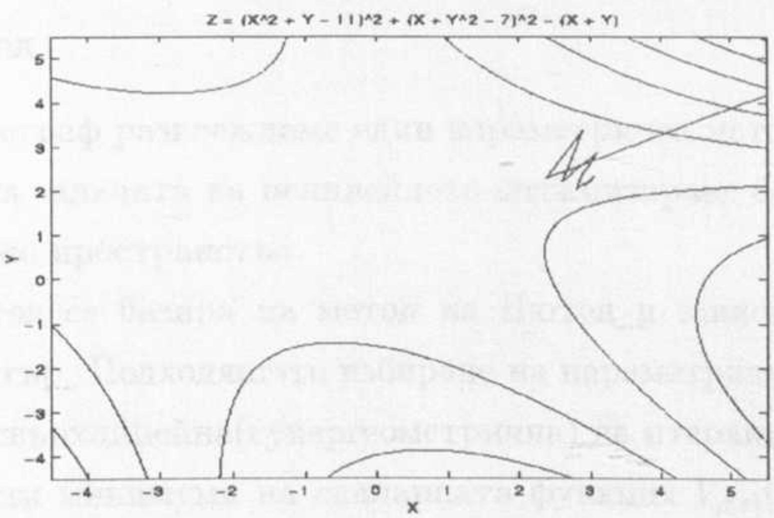
Седма итерация: $(x_7, y_7) = (2.8585472, 2.3051839)$ и $\Delta_7 = 0.33637196$.

Да разгледаме отношенията:

$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 0.5010799$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 0.1279368$, $\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 2.0448127$, където монотонността е нарушена, $\frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.4913723$, $\frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 0.6588888$, $\frac{\Delta_6}{\Delta_5} = 1.9339825$, с нарушена монотонност отново и $\frac{\Delta_7}{\Delta_6} = 0.3855254$.

Следователно при тази задача не можем да намерим предварително броя итерации осигуряващ дадена точност, понеже условието за мотонност не е удовлетворено навсякъде, но там където е монотонна можем да осигурим геометрична сходимост удовлетворявайки ограниченията за q.

За начална точка $(10, 10)$ се получава решение $3.0067086, 2.0249999$ за 76 итерации и за време < 0.5 секунда, а за начална точка $(7, 5)$ се получава решение $3.0067086, 2.0249999$ за 64 итерации и за по-малко време от предната начална точка.



Фигура на пример 2.

И така, видяхме, че този метод се реализира и в крайномерно пространство без да търсим обратната матрица на Хесианата, нито нейна апроксимация.

3.2 Параметричен метод на Нютон за оптимизационни задачи в Хилбертово пространство

3.2.1 Увод

Този параграф разглеждаме един параметричен метод на Нютон за решаване на задачата на нелинейното оптимизиране без ограничения в Хилбертово пространство.

Този метод се базира на метод на Нютон и зависи от един вектор-параметър. Подходящото избиране на параметрите осигурява линейна или свърхлинейна(супергеометрична) на итерационния метод.

Ще търсим минимума на скаларната функция $V_{p(\varepsilon)}(x)$ дефинирана в Хилбертовото пространство. Тази функция зависи от многозначен вектор-параметър $p(\varepsilon)$.

Ще разгледаме един итерационен метод за намиране поне на едно от решенията на негладка функция в Хилбертово пространство. Подходящия избор на параметрите осигурява свърхлинейна(супергеометрична) сходимост на итерационния метод. Този параграф е свързан с [52], [54], [104] и [105].

3.2.2 Представяне на параметричния метод на Нютон

Разглеждаме следващата задача:

$$(1) \qquad \min_{x \in H} V_{p(\varepsilon)}(x) = V_{p^*(0)}(x^*) = V_*^*,$$

където $V(x) \in C^{1,1}(H)$, **H** е Хилбертово пространство $p \in R^1$, $\nabla V(x)$ е негладка Липшицово-непрекъсната функция.

$p(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \ldots, p_m(\varepsilon))$ е вектор-параметър, за който $p_i(\varepsilon) \in (p_i - \varepsilon, p_i + \varepsilon)$ и $\varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Със символа $C^{1,1}(H)$ означаваме класа от всички функции

$$f : H \longrightarrow R,$$

които са диференцируеми по Гато в точките на **H** и първите им производни по Гато са локално Липшицови изображения от **H** в **H**.

Припомняме, че метричната проекция върху едно изпъкнало и затворено множество съдържа поне една точка.

Нека
$$X = \{x \in |V_{p^*(0)}(x) = V_{p^*(0)}(x^*) = V_*^*\}$$
е множеството от решенията на задача (1).

3.2.3 Итерационна процедура

Нека разгледаме следната оптимизационна задача :

$$\text{(1)} \qquad \min_{x \in H} V_{p(\varepsilon)}(x) = V_{p^*(0)}(x^*) = V_*^*,$$

където $V(x) \in C^{1,1}(H)$, **H** е Хилбертово пространство, $p \in R^1$, $\nabla V(x)$ е негладко Липшицово-непрекъснато изображение.

Поради Липшицовата непрекъснатост на $\nabla V_p(x)$ можем да използваме за всеки $x \in G \subset H$ и $h_1, h_2 \in H$ дефиницията за **обобщена втора производна по направление** ([6])

$$V_p^{00}(x; h_1, h_2) = \overline{\lim_{y \to x_{t \downarrow 0}}} \frac{\langle \nabla V_p(y + th_1), h_2 \rangle - \langle \nabla V_p(y), h_2 \rangle}{t}$$

в точката x по направленията $[h_1, h_2]$ и за **субдиференциала от втори ред**

$$\emptyset \neq \partial^2 V_p(x) = \{L \in L(H \times H) : L[h_1, h_2] \leq V_p^{00}(x; h_1, h_2), \forall (h_1, h_2) \in E \times E\},$$

или да въведем дефиницията за **субдиференциала от втори ред**

$$\emptyset \neq \partial^2 V_p(x_0) = \{U = \lim_{x \to x_0} \frac{\nabla V_p(x) - \nabla V_p(x_0)}{\|x - x_0\|}\},$$

за който $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$ е образ на H в ограничените затворени и изпъкнали подмножества на H. Тук $(\partial^2 V_p(x))^*$ е спрегнатото изображение, т.е.

$$\langle \partial^2 V_p(x)x, y\rangle \equiv \langle x, (\partial^2 V_p(x))^* y\rangle,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е скаларното произведение в H. Поради свойствата ([6] и [27]) на $\partial^2 V_p(x)$ и непрекъснатостта на $\nabla V_p(x)$, многозначното изображение $(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$ е полунепрекъснато отгоре и

$$\|m(\partial^2 V_{p(\varepsilon)}(x))\| = \min_{x \in H} \|(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)\|. \tag{2}$$

Ще разгледаме итерационната процедура :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{3}$$

и нека множеството X_δ е δ-околността на X, т.е.

$$X_\delta = \{x \in \mid \quad \min_{y \in X} \| x - y \| < \delta > 0\}.$$

Следната теорема доказва, че итерационната процедура (3) е монотонна.

Теорема 21 *Разглеждаме задача* (1), *където* $V(x) \in C^{1,1}(H)$, **H** *е Хилбертово пространство,* $p \in R^1$ *и* $\nabla V(x)$ *е негладка Липшицово-непрекъсната функция. Нека съществува* δ*-околност* X_δ *на множеството* X, *за която*

$$\langle \xi, x - y \rangle \neq 0, \quad \xi \in \nabla V_{p(\varepsilon)}(x), \quad y \in Pr_X x,$$

$$x \in X_\delta \setminus X.$$

Ако $x_0 \in X_\delta$ *и* $p^k(\varepsilon^k)$ *е решение на следното неравенство:*

$$\frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} + \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\| \langle \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k), y_k - x_k \rangle < \varepsilon^k, \tag{4}$$

където $y \in Pr_X x_k$, $\varepsilon^k < \dfrac{q}{2} \dfrac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}$ *и*

$\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \neq 0$, *тогава следното неравенство:*

$$\max \|x_{k+1} - Pr_X x_{k+1}\| \leq \min \|x_k - Pr_X x_k\| \tag{5}$$

е в сила за $x_0 \in X_\delta \setminus X$ *за всяко* $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказателство.

Разглеждаме задачата

$$\min_{x \in H} V_{p(\varepsilon)}(x) = V_{p^*(0)}(x^*) = V_*^*, \tag{1}$$

където $V(x) \in C(H)$, е Хилбертово пространство, $p \in R^1$ и $\nabla V(x)$ е негладка Липшицово-непрекъсната функция.

От (5), за всяко $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаваме

$$0 \leq A_k = \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} \leq \frac{\|x_{k+1} - y_k\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} =$$

$$\frac{1}{\|x_k - y_k\|^2} \|y_k - x_k + \frac{\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}\|^2 =$$

$$\frac{(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2 \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1$$

$$+2 \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\| \langle \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k), y_k - x_k \rangle}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - yx_k\|^2}.$$

Основавайки се на неравенството $\varepsilon^k < \frac{q}{2} \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}$ и (4), завършваме доказателството:

$$A_k \leq \frac{(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} + 1 -$$

$$2 \frac{\left(\frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} - \varepsilon^k \right)}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - \frac{(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2 \|x_k - y_k\|^2} +$$

$$2\frac{\varepsilon^k}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|\|x_k - y_k\|^2} <$$

$$1 - (1-q)\frac{(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^2\|x_k - y_k\|^2} =$$

$$1 - (1-q)(B_k)^2 < 1,$$

където $B_k = \frac{(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))^2}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|\|x_k - y_k\|}$.

Така, за всяко $x_k \in X_\delta \setminus X$, $k = 1, 2, \dots$ получаваме

$$0 \le A_k < 1 - (1-q)(B_k)^2 < 1. \tag{6}$$

Q.E.D.

Следователно, намерихме условия, осигуряващи монотонност на итерационната процедура (3).

3.2.4 Оценка на скоростта на сходимост

Сега ще се спрем на въпроса за скоростта на сходимост на итерационната процедура (3). Кои условия осигуряват геометрична(линейна) скорост на сходимост и кои условия, свръхлинейна скорост на сходимост.

Теорема 22 *Разглеждаме задача* (1), *където* $V(x) \in C^{1,1}(H)$, **H** *е Хилбертово пространство,* $p \in R^1$ *и* $\nabla V(x)$ *е негладко и Липшицово-непрекъснато изображение от* **H** *в* **H**, *многозначното изображение*

$(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)$ *е полунепрекъснато отгоре и*

$$\|m(\partial^2 V_{p(\varepsilon)}(x))\| = \min_{x\in H} \|(\partial^2 V_p(x))^* \nabla V_p(x)\| \le$$

$$\min_{x\in H} \|(\partial^2 V_p(x))^*\|\|\nabla V_p(x)\|.$$

Нека множеството от решенията на (1) $X \ne \emptyset$.

Нека съществуват константа N и δ-околност X_δ на множеството X, за които $x_0 \in X_\delta \setminus X$ и

$$\langle \xi, x - y \rangle \neq 0, \quad \xi \in \nabla V_{p(\varepsilon)}(x), \quad y \in Pr_X x,$$

$$x \in X_\delta \setminus X$$

(7)
$$\inf \lim_{k\to\infty} \frac{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(y_k))\|}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(y_k)\|} \neq 0 \quad \text{и}$$

$$\sup \lim_{k\to\infty} \frac{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(y_k))\|}{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(y_k)\|} \leq N,$$

където inf *и* sup *са взети за всички редици $y_k \in X_\delta \setminus X$, $k = 1, 2, \ldots$. Разглеждаме итерационната процедура* (3). *Нека ε^k и $p^k(\varepsilon^k)$ удовлетворяват* (4) *и следното неравенство :*

$$\varepsilon^k < \frac{q}{2} \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}.n$$

Тогава итерационната процедура (3) *има геометрична (линейна) скорост на сходимост.*

Доказателство. Припомняме задача

(1)
$$\min_{x\in H} V_{p(\varepsilon)}(x) = V_{p^*(0)}(x^*) = V_*^*,$$

където $V(x) \in C(H)$, е Хилбертово пространство, $p \in R^1$ и $\nabla V(x)$ е негладка Липшицово-непрекъсната функция.

Според [4] скоростта на сходимост на итерационния процес

(3)
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

е геометрична, ако за всички $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, е удовлетворено

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} \leq const. < 1.$$

Ако за някое k имаме $x_k \in X$, доказателството на теоремата е тривиално. Нека $x_k \notin X$, $k = 0, 1, \ldots$. Тъй като $x_0 \in X_\delta$, от теорема 21 получаваме, че за всички $k = 0, 1, \ldots$ имаме $x_k \in X_\delta \setminus X$.

От (7) следва, че ще съществуват константи K и M такива, че за $k > K$

$$\|x_k - x_0\| \leq M \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k) - \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_0)\|.$$

Сега, тъй като знаем, че за всички $k = 0, 1, \ldots$, $(\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_0)) = 0$,

$$\varepsilon^k < \frac{q}{2} \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} \quad \text{и}$$

$$(4) \qquad \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} + \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\| \langle \nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k), y_k - x_k \rangle < \varepsilon^k,$$

ние можем да напишем следната поредица от неравенства:

$$B_k = \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|^2}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - y_k\|} =$$

$$\frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\| \|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k)\|}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\| \|x_k - y_k\|} \geq \frac{1}{NM}$$

Окончателно получаваме

$$\varliminf_{k \to \infty} B_k \geq r = \frac{1}{NM} \neq 0.$$

Според (6) имаме $B_k \leq 1$ и от (7) получаваме

$$(8) \qquad 0 \leq \varlimsup_{k \to \infty} A_k > 1 - (1 - q) \varliminf_{k \to \infty} (B_k)^2 <$$

$$1 - (1 - q) r^2 < 1.$$

Следователно, итерационният процес (3) има поне геометрична скорост на сходимост с параметър не по-голям от $\sqrt{1 - r^2 + r^2 q}$.

Q.E.D.

Следствие 5 *Нека условията на теорема 22 са удовлетворени. Нека $m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x))$ е непрекъсната функция и $NM \leq 1$ в множеството от решения X, и*

$$\varepsilon^k < \frac{q^k}{2} \frac{\|\nabla V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|^4}{\|m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x_k))\|} \quad \text{където} \quad 0 < q < 1.$$

Тогава итерационната процедура (3) има свръхлинейна скорост на сходимост.

Доказателство. Скоростта на сходимост е свръхлинейна, ако за всички $y_k \in Pr_X x_k$, $k = 0, 1, \ldots$, е изпълнено

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2}{\|x_k - y_k\|^2} = 0.$$

От (7) и непрекъснатостта на $m(\partial^2 V_{p^k(\varepsilon^k)}(x))$ получаваме

$$\lim_{k\to\infty} B_k \geq r = \frac{1}{NM} \geq 1.$$

Но $B_k \leq 1$, следователно $\lim_{k\to\infty} B_k = 1$.

От (8) получаваме:

$$\lim_{k\to\infty} A_k \leq 1 - \lim_{k\to\infty} (B_k)^2 (1 - q^k) =$$

$$1 - r^2 \lim_{k\to\infty} (1 - q^k) = 0.$$

Q.E.D.

Показвайки условията, осигуряващи съответно линейна и свръхлинейна скорост на сходимост, приключихме разглеждането на параметричния метод на Нютон.

Глава 4

Заключения

Основните приноси в настоящата дисертация са групирани около резултатите, получени в трите глави, от които се състои.

В Глава 1 са разгледани абстрактни алгоритми със смущения в Банахово пространство. В този случай са обобщени известните достатъчни условия за сходимост на алгоритми без смущения за алгоритми със смущения със запазване на скоростта на сходимост. Смущението на алгоритма се разглежда като управление на итерационния процес и също като грешка при приблизителните пресмятания. Обобщени са идеите на Зангвил за многозначен параметризиран генериращ оператор със слабокомпактни значения. Направен е сравнителен анализ на достатъчните условия за сходимост на алгоритмите със смущения, като са дадени и числови примери. Представени са приложения в математическото оптимиране и оптималното управление.

В Глава 2 е разгледан метод на функциите на Ляпунов за крайномерният случай и за задачата в Хилбертово пространство.

За крайномерната задача са намерени достатъчни ограничения за запазване на скоростта на сходимост на алгоритма. Представена итерационна процедура, за която са показани условията за монотонност и допълнителните условия за супергеометрична сходимост. Направен е числов анализ на резултати за конкретни примери и сравнения на програмни пресмятания с други методи.

С метода на функциите на Ляпунов за задачата в Хилбертово пространство се решава система нелинейни уравнения, където левите страни на уравненията са числови функции, дефинирани в Хилбертово пространство. Използувайки левите страни на уравненията се създава числова изпъкнала функция. Тя е функция на Ляпунов за диференциалното включване, на което дясната страна е отрицателната стойност на се субдиференциала тази функция, явяващ се един максимално монотонен оператор. Показано е, че всяко решение на диференциалното включване решава системата нелинейни уравнения в краен момент от време. Представен е един итерационен метод за намирането поне на едно от решенията на негладката система от уравнения в Хилбертово пространство. Показани са условията за монотонност. Посочени с условията за избор на параметрите за линейна или свръхлинейна(супергеометричнна) скорост на сходимост на итеративния метод.

В Глава 3 са разгледани модифициран метод на Нютон и параметричен метод на Нютон за оптимизационни задачи в Хилбертово пространство.

С модифицирания метод на Нютон решаваме минимизационната задача, избягвайки пресмятането на обратни оператори в безкрайномерни пространства. Разглеждаме параметрична оптимизационна задача в реално Хилбертово пространство, предполагайки че градиентът на целевата функция е Липшицово непрекъсната, но негладка функция. Използувайки, че вторият субдиференциал е п.н.г., съставяме диференциално включване с п.н.г. дясна част. Чрез делене с положителна п.н.д. функция, получаваме диференциално включване, всяко решение, на което може да се продължи до множеството на решенията на системата нелинейни уравнения в крайно време. Представена са две итерационни процедури. За първата са доказани условията за монотонност и супергеометрична скорост на сходимост. За втората, която се получава от първата чрез смяна на равенствата за определяне на стойностите на параметъра **p** с неравенства, са изведени условия за монотонност и геометрична сходимост.

Параметричният метод за решаване на задачата на нелинейното оптимизиране без ограничения в Хилбертово пространство се базира пак на метод на Нютон, но за разлика от модифицирания метод, зависи от един вектор-параметър. Подходящото избиране на параметрите осигурява съответно монотонност, линейна и свърхлинейна(супергеометрична) сходимост на итерационния метод.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ДИСЕРТАЦИЯТА

Изложените в дисертацията резултати са отразени в публикациите [104], [105], [106], [107] и представената за печат статия [106].

БЕЛЕЖКИ

В по-голямата си част резултатите, изложени в тази работа са докладвани на различни семинари. Това са доклади изнесени на работни семинари в България и чужбина, като семинар на кат. „Математика„ на ТУ - Варна с ръководител доц. Генев; семинара на секция Изследване на операциите с ръководител ст.н.с. Р. Калтинска, ИМИ към БАН; семинара на ръководител проф. Уайт, кат. „Математика„ на Университета на Ливърпул, Англия; семинара на проф. Бромило, Отворен Университет, Милтон Кийнс, Англия; семинара на проф. Дебара, Кралски Холуей Колеж, Университета на Лондон, Англия. Авторът е докладвал на международни конференции: Пролетната конфереция на СМБ 1992г. в София, MMSC-93 - Созопол и Конференцията по Изчислителна Математика, чествуваща 60-тата гадишнина М. Пауъл, юли 1996г., Университета на Кембридж, Англия.

БЛАГОДАРНОСТИ

В заключение бих искал да изразя признателността си към научния си ръководител проф. дмн Радостин Иванов за проявения от него интерес към моята работа, за неоценимите му помощ, приятелство и морална подкрепа. Благодарен съм и на проф. дмн Асен Дончев за начално задаване на проблема, а също и на всички колеги от катедра „Математика„ ТУ - Варна и секция Изследване на операциите на ИМИ - БАН, които проявяваха разбиране и ми оказваха съдействие в работата.

Библиография

Литература на кирилица

[1] Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений*, Наука, Москва, 1966.

[2] Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1980.

[3] Воеводин В.В. *Численные методы алгебры*, Наука, Москва, 1966.

[4] Дочев К. Видоизменен метод на Нютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на дадено алгебрично уравнение, Физ.-мат. сп., 5 (1962), : 2. 136-139.

[5] Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* Москва, Наука, 1982.

[6] Златева Н.П. *Субдиференциално смятане и вариационни методи в негладкия анализ*, Докторска дисертация, Софийски Университет„Св. Климент Охридски„, Факултет по Математика и Информатика, София, 1999.

[7] П. Кендеров, Г. Христов, А. Дончев *Математическо оптимиране*, Университетско издателство „Климент Охридски„, София, 1989.

[8] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* - М.: Гостехиздат, 1957. РЖМат, 1958, 9700 К.

[9] Петков М. *Числени методи на алгебрата*, Наука и изкуство, София, 1974.

[10] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. *Численные методы в экстремальных задачах*, Наука, Москва, 1975.

[11] Б. Сендов, В. Попов *Числени методи(Първа част)*, Наука и Изкуство, София, 1976.

[12] Фадеев Д.К., Фадеева В.И. *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, Москва, 1963.

[13] Филлипов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, Москва, 1985.

Литература на латиница

[14] Abadie J. (ed.), *Nonlinear Programming*, Amsterdam, 1967.

[15] Aoki M. *Introduction to Optimization Techniques*, MacMillan, New York, 1971.

[16] Aubin J.–P., Cellina A. *Differential Inclusions.* Springer, Berlin, 1984.

[17] Aubin J.–P., Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, New-York, 1984.

[18] Bazaraa M.S., Shetty C.M. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* John Wiley and Sons, New-York, 1979.

[19] Ben-Israel A. *A Newton-Raphson method for the solution of equations,* J. Math. Anal. Appl., 15 (1966), pp. 243-253.

[20] Brooks S.H., *A discussion of random methods for seeking maxima.* J. Oper. Res., 6 (1958), 244-251.

[21] Burdakov O.P. *On some properties of Newton's method for solving smooth and nonsmooth equations.* Preprint, Universität Dresden, Germany, July 1991.

[22] Cea J. *Approximation variationelle des problems aux limites.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14 (1964), 345-444.

[23] Chen X. *On the convergence of Broiden-like methods for nonlinear equations with nondifferentiable terms,* Ann. Inst. Statist. Math., 42 (1990), pp. 387-401.

[24] Chen X. and Qi L. *Parametrized Newton method and Broyden-like method for solving nonsooth equations.* Comput. Optim. Appl. 3 (1994), pp. 157-179.

[25] Chen X., Nashed Z. and Qi L. *Convergence of Newton's Method for Singular Smooth and Nonsmooth Equations Using Adaptive Outer Inverses,* SIAM J. Optim., Vol. 7, No. 2, pp. 445-462, May 1997.

[26] Chen X. and Yamamoto T. *On the convergence of some quasi-Newton methods for nonlinear equations with nondifferentiable operators,* Computing, 48 (1992), pp. 87-94.

[27] Clarke F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis,* John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1983.

[28] Cooper L., *Heuristic methods for location-allocation problems.* SIAM Review, 6 (1964), No. I.

[29] Davidon, W.C., Variable Metric Method for Minimization, *AEC Research Development Report,* ANL-5990, 1959.

[30] Deimling K. *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, 1992.

[31] Dennis J.E. Jr. and Schnabel R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[32] Dontchev A.L. *Perturbations, Approximations and Sensitivity Analysis of Optimal Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 52, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[33] Deuflhard P. and Heindl G. *Affine invariant convergence theorems for Newton's method and extensions to related methods,* SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), pp. 1-10.

[34] Engl H. W. and Nashed M. Z. *New extremal characterizations of generalized inverses of linear operators,* J. Math. Anal. Appl., 82 (1981), pp. 566-586.

[35] Fiacco A. V., McCormick G. P., A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques.* New York, 1968.

[36] Fletcher R. (ed), *Optimization.* London - New York, 1969.

[37] Fletcher R. and M.J.D. Powell, A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer Journal*, 6, pp. 163-168, 1963.

[38] Fletcher R. and Reeves C. Function Minimization by Conjugate Gradients, *Computer Journal*, 7, pp. 149-154, 1964.

[39] Gabriel S.A. and Pang J.S. *A trust region method for constrained nonsmooth equations, in Large Scale Optimization:* State of the Art, W.

W. Hager, D. W. Hearn, and P. M. Pardalos, eds., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994, pp. 159-186.

[40] Gill P.E. and Murray W.(editors) Numerical Methods for Constrained Optimization, *National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex*, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1974.

[41] Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*, Academic Press, London, New York, 1981.

[42] Ginchev I. *Higher Order Optimality Coditions in Nonsmooth Optimization,* Submitted to Optimization, (Technische Universitët Ilmenau, Institute für Mathematik, Preprint No. M 18/97, Ilmenau 1997.

[43] Ginchev I. and Guerraggio A. *Second Order Optimality Coditions in Nonsmooth Uncostrained Optimization,* Pliska Studia Mathematica Bulgarica 12 (1998), pp. 39-50.

[44] Goldfarb D., *Extention of Davidon's variable metric method to maximization under linear inequality and equality constraints.* SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), 739-764.

[45] Han S.P. and Pang J.-S.: A damped-Newton method for the linear complementarity problem, in E. Allgower and K. Georg (eds.), *Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations*, AMS Lectures on Applied Mathematics 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, pp. 265-284.

[46] Han S.P., Pang J.-S. and Rangaraj N.: Globally convergent Newton methods for nonsmooth equations. *Math. Operations Res.* **17** (1992), 586-607.

[47] Harker P.T. and Xiao B. *Newton's method for the nonlinear complementarity problem: A B-differentiable equation approach.* Math. Programming 48 (1990), 339-357.

[48] Heinkenschloss M., Kelley C.T. and Tran H.T. *Fast algorithms for nonsmooth compact fixed point problems*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 1769-1792.

[49] Himmelblau D.M. *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1972.

[50] Hooke R. and T. A. Jeeves, Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems, *J. Association Computer Machinery*, 8, pp. 212-229, 1961.

[51] Ip C.M. and Kyparisis J. *Local convergence of quasi-Newton methods for B-differentiable equations.* Math. Programming 56 (1992), 71-89.

[52] Ivanov R.P., Kjurkchiev N.V. On Lyapunov Function Method for Solving Nonlinear Systems of Equations, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, vol.44, No 7, pp. 17–20, 1991.

[53] R.P. Ivanov, Ts.H. Nedeva , Convergence of Conjugate Gradients Method, Serdica, v. 3, pp. 3-10, 1977.

[54] Ivanov R.P., Prodanova I.Y. One Iterative Method with Parameter for Solving Nonlinear Systems of Equations, *Proceedings of Twenty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sofia, April 3-6, 1992*, pp. 74–77, 1992.

[55] Kelly R.J., Wheeling R.F., A Digital Computer Program for Optimizing Nonlinear Functions, Mobil Oil Corp., Research Dept., Central Research Div., Princeton, N. J., July 1962.

[56] Kojima M. and Shindo S. *Extension of Newton and quasi-Newton methods to systems of PC^1 equations.* J. Oper. Res. Soc. of Japan 29 (1986), 352-374.

[57] Kummer B. *Newton's method for non-differentiable functions,* in Advances in Mathematical Programming, J. Guddat, B. Bank, H. Hollatz, P. Kall, D. Klatte, B. Kummer, K. Lommatzsch, L. Tammer, M. Vlach and K. Zimmerman, eds., Mathematische Forschung Band 45, Akademie-Verlag Berlin, 1988, pp. 114-125.

[58] Kummer B. *Newton's method based on generalized derivatives for nonsmooth functions: Convergence analysis,* in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 382: Advaces in Optimization, W. Oettli and D. Pallaschke, eds., Springer, Berlin, 1992, pp. 171-194.

[59] Lin S., *Computer solution of travelling salesmen problem.* Bell S. T. J., 44 (1965), 2245-2269.

[60] Meyer G.G.L. Convergence Conditions for a Type of Algorithm Model, *Tech. Rept. 75-14, The Johns Hopkins University*, Baltimore, MD, 1975.

[61] Meyer R.R. A Comparison of the Forcing Functions and Point-to-Set Mapping Approaches to Convergence Analysis, *SIAM Journal on Control*, v. 15, No 4, pp. 699–715, 1977.

[62] Mifflin R., Sun D. and Qi L. *Quasi-Newton Bundle-Type Methods for Nondifferentiable Convex Optimization,* SIAM J. Optim., Vol. 8, No. 2, pp. 583-603, May 1998.

[63] Nashed M. Z., ed. *Generalized Inverses and Applications,* Academic Press, New York, 1976.

[64] Nashed M. Z., ed., *Generalized inverse mapping theorems and related applications of generalized inverses,* in Nonlinear Equations in Abstract Spaces, V. Lakshmikantham, ed., Academic Press, New York, 1978, pp. 217-252.

[65] Nashed M. Z. *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces,* Numer. Funct. Anal. Optim., 9 (1987), pp. 261-325.

[66] Nashed M. Z. and Chen X. *Convergence of Newton-like methods for singular operator equations using outer inverses,* Numer. Math., 66 (1993), pp. 235-257.

[67] Nelder, J. A. and R. Mead, " A Simplex Method for Function Minimization ", *Computer Journal* , 7, pp. 308-313, 1964.

[68] Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, New York and London, 1970.

[69] Pang J.-S. *Newton's method for B-differentiable equations.* Math. Oper. Res. 15 (1990), 311-341.

[70] Pang J.-S. *A B-differentiable equation-based, globally and locally quadratically convergent algorithm for nonlinear programs, complementarity and variational inequality problems.* Math. Programming 51 (1991), 101-131.

[71] Pang J.-S. *Solution differentiability and continuation of Newton's method for variational inequality problems over polyhedral sets.* J. Optim. Theory Appl. **66** (1990)

[72] Pang J.-S. and Gabriel S.A. *NE/SQP: A robust algorithm for the nonlinear complementarity problem.* Math. Programming, 60 (1993), pp. 295-337.

[73] Pang J.-S. and Qi L. *Nonsmooth equations: motivation and algorithms.* SIAM J. Optim., 3 (1993), pp. 443-465.

[74] Polak E. On the Convergence of Optimization Algorithms, *Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle*, 16(R1), pp. 17–34, 1969.

[75] Polyak B.T. Gradient Methods for the Minimization of Functionals, *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, No 3, pp. 864–978, 1963.

[76] Powell M. J. D., An iterative method of finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Comp. J., 7 (1964), 155-162.

[77] Pták V. *The rate of convergence of Newton's process.* Numer. Math. 25 (1976), 279-285.

[78] Qi L. *Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations.* Math. Oper. Res., 18 (1993), pp. 227-244.

[79] Qi L. *Superlinear convergent approximate Newton methods for LC^1 optimization problems.* Math. Programming, 64 (1994), pp. 277-294.

[80] Qi L. *LC^1 functions and LC^1 optimization problems.* Appl. Math. Preprint, AM 91/21, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 1991.

[81] Qi L. *Trust region algorirhms for solving nonsmooth equations,* SAIM J. Optim., 5 (1995), pp. 218-229.

[82] Qi L. and Chen X. *A Globally convergent successive approximation method for severely nonsmooth equations,* SIAM J. Control Optim., Vol. 33, pp. 402-418, March 1995.

[83] Qi L. and Sun J. *A nonsmooth version of Newton's method.* Math. Programming, 58 (1993), pp 353-368.

[84] Qi L. and Sun J. *A Nonsmooth Version of Newton's Method and an Interior Point Algorithm for Convex Programming.* Applied Mathematics Preprint 89/33, School of Mathematics, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 1991.

[85] Rall L.B. *A note on the convergence of Newton's method.* SIAM J. Numer. Anal., 1 (1974), pp. 34-36.

[86] Ralph D. *Global convergence of damped Newton's method for nonsmooth equations, via the path search.* Math. Oper. Res., 19 (1994), pp. 352-389.

[87] Robinson S.M. *Newton's Method for a class of Nonsmooth Functions.* Set-Valued Analysis, 2 (1994), pp. 291-305.

[88] Rockafellar R.T. *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey, 1970.

[89] Rockafellar R.T. *Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions*, Ann. Ist. H. Poincaré Anal. Non Linéare, 2 (1985), pp. 167-186.

[90] Rosenbrock, H.H., An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function, *Computer Journal*, 3, pp. 175-184, 1960.

[91] Stetter H.J. *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[92] Spang H. A., III, *A review of minimization techniques for nonlinear equations.* SIAM Review, 4 (1962), 345-362.

[93] Sun D. and Han J. *Newton and Quasi-Newton Methods for a Class of Nonsmooth Equations and Related Problems,* SIAM J. Optim., Vol. 7, No. 2, pp. 463-480, May 1997.

[94] Schumer M. A., Steiglitz K., *Adaptive step-size random search.* IEEE Trans. Autom. Control, AC-13 (1968), 270-276.

[95] Swann W.H., Report on the Development of a New Direct Search Method of Optimization, Imperial Chem. Industries, Ltd. Central Instr. Lab. Res. Note 6413, 1964.

[96] Tsuda T., Kiono T., *Application of the Monte Carlo method to systems of nonlinear algebraic equations.* Num. Math., 6 (1964), 59-67.

[97] S. Tishyadhigama, E. Polak and R. Klessig, A Comparative Study of Several General Convergence Conditions for Algorithms Modeled by Point-to-Set Maps, *Mathematical Programming Study*, 10, North-Holland Publishing Company, pp. 172–190, 1979.

[98] Verhulst F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[99] Wilde D.J., *Globally Optimal Design*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[100] Wilde D., *Optimum seeking methods.* Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[101] Yamashita N. and Fukushima M. *Modified Newton methods for solving semismooth reformulations of monotone comlpementarity problems,* Math. Programming, to appear.

[102] W. I. Zangwill, *Nonlinear Programming: a unified approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[103] W. I. Zangwill, Minimizing a Function without Calculating Derivatives, *Computer Journal*, 10, pp. 344-358, 1967b.

Публикации по дисертацията

[104] Raykov I. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence for Algorithms Modeled by Point-to-Set Maps with Respect to an Independent Parameter, *Proceedings of Twenty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sofia, April 3-6, 1992*, pp. 127-135, 1992.

[105] Raykov I.L., Ivanov R.P. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of Parametric Lyapunov Function Method for Solving Nonlinear Systems of Equations, *Scientific Computation and Mathematical Modelling, Proceedings of the Conference "Mathematical Modeling and Scientific Computation (MMSC-93)" - Sozopol, Bulgaria, September 1993*, pp. 149-153, 1993.

[106] Ivanov R.P., Raykov I.L. Parametric Lyapunov Function Method for Solving Nonlinear Systems in Hilbert Spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 17, pp. 893-901, 1996, New York, USA.*

[107] Raykov I. Uniform Convergence for Multi-Valued Algorithms. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 28(11): 1491-1504, 1997, New Delhi, India.

[108] Ivanov R.P., Raykov I.L. Parametric Newton Method for Optimization problem in Hilbert Space, *Submitted in NFAO*, New York, USA.

Доклади по дисертацията

Научни семинари

[A1] Научен семинар на кат. „Математика„ при ТУ - Варна с рък. доц. д-р Д. Генев, 1991, 1992

[A2] Научен семинар на сект. „Изследване на операциите„ с рък. проф. дмн Р. Иванов, ИМИ към БАН, София, 1993.

[A3] Seminar of Dept. of Mathematics, head Prof. A. White, University of Liverpool, UK, May 1996.

[A4] Seminar of Faculty of Mathematics and Computing, head Prof. Mick Bromilow, The Open University, Walton Hall, Milton Keynes, UK, May 1996.

[A5] Seminar of Dept. of Mathematics, head Prof. H. Debarra, Royal Holloway College, University of London, Egham, Surrey, UK, June 1996.

[A6] Научен семинар на сект. „Изследване на операциите„ с рък. ст.н.с. д-р Р. Калтинска, ИМИ към БАН, София, 15 юни 1999.

Научни конференции - докладвани и приети доклади

[D1] Raykov I. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence for Algorithms Modeled by Point-to-Set Maps with Respect to an Independent Parameter, *Twenty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sofia, April 3-6, 1992.*(докладван)

[D2] Raykov I.L., Ivanov R.P. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of Parametric Lyapunov Function Method for Solving Nonlinear Systems of Equations, *Conference "Mathematical Modeling*

and Scientific Computation (MMSC-93)" - Sozopol, Bulgaria, September 1993.(докладван)

[D3] Raykov I.L., Ivanov R.P. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of a Parametric Lyapunov Function Method, *7TH STOCKHOLM OPTIMIZATION DAYS, June 24-25, 1996, Stockholm, Sweden.* (приет доклад)

[D4] Ivanov R. and Raykov I. On a Lyapunov Function Method in Hilbert Spaces, *Conference on Numerical Mathematics Celebrating the 60th Birthday of M.J.D. Powell, 27-30 July 1996, University of Cambridge, England.* (докладван)

[D5] Raykov I. A Comparative Study of the Sufficient Conditions for Algorithms. *SYMPOSIUM ON OPERATIONS RESEARCH 1996 TU BRAUNSCHWEIG, September 4-6, 1996*, Braunschweig, Germany. (приет доклад)

[D6] Ivanov R. and Raykov I. A Parametric Newton Method for Solving Unconstrained Nonlinear Optimizations Problem in Hilbert Space, *Stieltjes Workshop on High Performance Optimization Techniques, September 19-20, 1996, The Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.*(приет доклад)