ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"

Вежди Исмаилов Хасанов

РЕШЕНИЯ И ПЕРТУРБАЦИОННА ТЕОРИЯ НА НЕЛИНЕЙНИ МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научната и образователна степен
"доктор"

Научен ръководител:
доц. д-р Иван Иванов

Рецензенти:
1.
2.

2003

Съдържание

Списък на таблиците

Списък на фигурите

Резюме

Разгледани са нелинейните матрични уравнения

$$X \pm A^* X^{-n} A = Q\,,$$

$$X \pm A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q\,,$$

където Q е $m \times m$ положително определена матрица, A е произволна $m \times m$ матрица, а n е естесвено число.

Разгледаните уравнения, изследваме за съществуване и числено пресмятане на положително определени решения. Получени са необходими условия и достатъчни условия за съществуване на тези решения. Изказани са достатъчни условия за съществуване на две различни решения на уравненията $X + A^* X^{-n} A = Q$ и $X + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$ със специални свойства, а за уравненията $X - A^* X^{-n} A = Q$ и $X - A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$ достатъчни условия за единственост на положително определените им решения.

Уравненията са изследвани за съществуване на специални (минимални и максимални) положително определени решения. Получени са горни и долни граници на тези решения. Предложени са итерационни методи за пресмятане на специалните положително определени решения. Изследвана е скоростта на сходимост на разгледаните методи и за всеки тип уравнение е показано как да се избере началното приближение с цел ускоряване на сходимостта. Направени са числени експерименти, които демонстрират свойствата на итерационните методи.

Необходимите и достатъчни условия за уравнението $X + A^* X^{-n} A = I$ при $n = 1$, получени от други автори са обобщени за произволно n.

Направен е пертурбационен анализ на уравненията $X \pm A^* X^{-n} A = Q$, при който се изследват границите на отклоненията от истинските положително определени решения при "малки" смущения в коефициентите на уравненията. Изведени са пертурбационни граници за промяна на специални решения. Получени са граници на изчислителната грешка при приближаване на решението (например с итерационен метод). При $n = 1$ – уравнението $X - A^* X^{-1} A = Q$ е еквивалентно на дискретното уравнение на Рикати при определени условия за коефициентите. Направени са числени експерименти, при които са сравнени получените оценки с тези на други автори.

Благодарности

Бих искал да благодаря на всички, които ми помагаха по време на подготовката на тази дисертация.

Изразявам дълбоката си признателност и благодарност към моя научен ръководител доц. д-р Иван Ганчев Иванов, който насочи интересите ми към изследване на нелинейни матрични уравнения, за всестранната помощ, интерес и внимание към моята работа. Благодаря на доц. д-р Христо Вълчев за моралната подкрепа оказана от негова страна. Благодаря на колегите, участници в семинара проведен в Ценралната лаборатория за паралелна обработка на информацията към БАН, за проявеното им внимание към моята работа. Искам сърдечно да благодаря на моето семейство и родители за обичта и подкрепата им.

Накрая, но не и по значение, искам да благодаря на Шуменския университет, за одобрените научни проекти, с които бе частично финансирана научната ми работа – проект №17/9.05.2001 с договор №3/4.06.2001, проект №16/9.05.2001 с договор №17/4.06.2001, проект №13/14.03.2002 с договор №24/9.05.2002, проект №14/14.03.2002 с договор №27/9.05.2002, проект №33 с договор №24/16.06.2003 и проект №34 с договор №15/10.06.2003.

Въведение

Нека разгледаме един пример от теория на управлението. Да се намери функция на управление $u(.)$ за следната дискретна система

$$x(k+1) = Dx(k) + Bu(k)\,,$$
$$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0\,,$$

където $x(.) \in \mathbb{R}^m$, $u(.) \in \mathbb{R}^m$, $x(0) = x$ и $D, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, която минимизира функционала

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^T(k)\,P\,x(k) + u^T(k)\,R\,u(k)\right)$$

с реални симетрични матрици P и R.

Изследването на тази задача е свързано с намирането на реално решение K за алгебричното уравнение на Рикати

$$K = D^T\left(K - KB\left(R + B^TKB\right)^{-1}B^TK\right)D + P\,, \tag{1}$$

така че матрицата $R + B^TKB$ е положително определена и

$$\rho\left(D - B\left(R + B^TKB\right)^{-1}B^TKD\right) < 1\,.$$

Дефинираната задача е разгледана от Engwerda ([8], 1993) и е доказано: *уравнението (1) има реално симетрично решение K, тогава и само тогава, когато уравнение*

$$X + M^TX^{-1}M = N$$

има положително определено решение, където

$$M = RB^{-1}DB \quad \text{и} \quad N = B^TD^TB^{-T}RB^{-1}DB + R + B^TPB\,.$$

Връзката между решенията е $X = R + B^T K B$.

Ferrante и Levy ([11], 1996) изследват нелинейното матрично уравнение

$$X = Q + N X^{-1} N^*,$$

което може да се представи като алгебрично уравнение на Рикати от вида

$$X = Q + F X F^* - F X (X + R)^{-1} X F^*,$$

където $F = N N^{-*}$, $R = N^* Q^{-1} N$. Последното уравнение моделира процесите в теорията на филтрацията на Kalman [11].

По-късно авторите El-Sayed и Ran ([7], 2001) разглеждат общото уравнение

$$X + A^* \mathcal{F}(X) A = Q, \tag{2}$$

където Q е положително определена матрица и $\mathcal{F}$ е изображение (линейно или нелинейно), дефинирано в множеството на $m \times m$ положително определените матрици. При специални случаи на изображението $\mathcal{F}$ (монотонно растящо или монотонно намаляващо) са доказани теореми за съществуване на решения и за свойства на тези решения. Освен монотонността на $\mathcal{F}$ авторите на [7] искат за елементите на уравнението (2) да е изпълнено $A^* \mathcal{F}(Q) A < Q$. В следващата работа на Ran с Reurings ([30], 2002) върху уравнението (2) са получени по-общи твърдения за съществуване на решения за произволно изображение $\mathcal{F}$.

В своята дисертация Reurings ([31], 2003) подробно разглежда матрични уравнения от вида (2) за специалните случаи:

- $\mathcal{F}(X) = X^q$ за $q \in (0, 1)$.
- $\mathcal{F}(X) = -X^{-q}$ за $q \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Настоящата дисертация разглежда нелинейни матрични уравнения от вида

$$X \pm A^* X^{-q} A = Q, \tag{3}$$

където Q е $m \times m$ положително определена матрица, A е произволна $m \times m$ матрица и $q = n$ или $q = \frac{1}{n}$, където n е естествено число. С A^* сме означили спрегнатата на A матрица. Уравненията (3) добиват съответно вида:

$$X + A^* X^{-n} A = Q\,; \tag{4}$$

$$X - A^* X^{-n} A = Q\,; \tag{5}$$

$$X + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q \tag{6}$$

и

$$X - A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q\,. \tag{7}$$

Тези уравнения изследваме за:

- съществуване, свойства и брой на положително определени решения;
- необходими и достатъчни условия за съществуване и единственост на положително определени решения;
- итерационни методи за намиране на положително определени решения;
- пертурбационен анализ и пертурбационни оценки на положително определените решения на уравненията (4) и (5).

Уравненията (4) и (5) при $n = 1$ съответно:

$$X + A^* X^{-1} A = Q \tag{8}$$

и

$$X - A^* X^{-1} A = Q\,, \tag{9}$$

са изучени от различни автори [2, 8, 11, 35, 36] с многобройни приложения в: теория на управлението; динамичното оптимиране; статистиката и други (виж библиографиите на [2, 35, 36]). Изследвани са и са получени редица свойства, необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определените решения на уравнението (8) [2, 8, 9, 14, 27, 36], както и на уравнението (9)

[11, 14, 27]. Освен връзките им със съответните уравнения на Рикати, уравненията (8) и (9) имат връзка и с квадратното матрично уравнение

$$AX^2 + BX + C = 0\,, \tag{10}$$

което се среща, например при изучаване на стохастични процеси моделирани с вериги на Марков. Изследвания в това направление на уравнението (10) правят авторите: Bini, Latouche и Meini [3]; Bini и Meini [4]; Favati и Meini [10] и други. Naoumov [28], Naoumov, Krieger и Wagner [29] изучават стохастични процеси в телекомуникациите и отново решават същото матрично уравнение. Редица автори предлагат ефективни итерационни методи (LR-logarithmic reduction [25] и CR-cyclic reduction [4]) за намиране на специално решение на (10). На основата на CR-алгоритъма за (10), Meini [27] предлага метод за решаване на матричните уравнения (8) и (9).

Уравнението

$$X + A^*X^{-2}A = I \tag{11}$$

е разгледано в дисертацията на El-Sayed [1] и последвалите статии [19, 22]. El-Sayed [1], El-Sayed и Иванов [19] доказват необходимо условие за съществуване на положително определени решения. Освен това, El-Sayed в дисертацията си предлага итерационен метод за пресмятане на положително определено решение и получава достатъчно условие за сходимост на предложения метод. Той и Иванов [19] предлагат втори итерационен метод за пресмятане на друго положително определено решение, сходимостта, на която доказват само в случай на нормална матрица A. По-късно ние (Хасанов, Иванов и Минчев) [22] доказваме сходимост на втория метод без ограничение за нормалност на A, използвайки теоремата на Банах за неподвижната точка. В [22] заедно с уравнението (11) разглеждаме и уравнение

$$X - A^*X^{-2}A = I\,.$$

Последните известни ни работи, посветени на матрични уравнения от вида на разгледаните от нас са: на Liu и Gao ([26], 2003) за уравненията

$X^s \pm A^T X^{-t} A = I$, където s и t са естествени числа; на Du и Hou ([5], 2003), които разглеждат операторното уравнение $X^m + A^* X^{-n} A = I$ и на Zhang ([37], 2003) за уравнението $X + A^* X^{-2} A = I$.

Матричните уравнения (6) и (7) в частен случай на $n = 2$ и $Q = I$ са изследвани в дисертацията на El-Sayed ([1], София, 1996). Той, за уравнението (6) получава необходимо условие за съществуване на положително определени решения, предлага итерационен метод за пресмятане на едно такова решение и дава условие за сходимост на предложения метод, което е едно достатъчно условие за съществуване на положително определено решение. За уравнението (7) също предлага итерационен метод. Дава достатъчно условие за съществуване на положително определено решение, което представлява условие за сходимост на предложения метод. Освен това, предложеното условие е достатъчно условие за съществуване на единствено положително определено решение. Изследвания в този случай сме направили и ние (Хасанов) [15] и (Хасанов, Иванов и Минчев) [20].

Важен момент при численото решаване на всяка математическа задача и в частност решаването на нелинейните матрични уравнения е изследване на влиянието на промените в коефициентите на тези уравнения върху техните решения. Това налага пертурбационен анализ на разглежданите матрични уравнения, получаване на оценки за границите на промяна на решението при промяна на коефициентите. Получаването на пертурбационни граници за уравненията (8) и (9) е възможно чрез два подхода. Тъй като тези уравнения са еквивалентни на съответни уравнения на Рикати, а за уравненията на Рикати има добре развита пертурбационна теория [23, 33], то като следствие могат да се получат пертурбационни оценки за решенията на уравненията (8) и (9), които представляват разглежданите уравнения (4) и (5) при $n = 1$. Има статии [30] и [34], посветени съответно на пертурбационния анализ специално на уравненията (2) и (8) .

Ще въведем някои означения и дефиниции, които се срещат в тази дисертация и подпомагат изложението на темата.

Множеството на всички $m \times m$ реални (комплексни) матрици бележим с $\mathbb{R}^{m\times m}$ ($\mathbb{C}^{m\times m}$). Диагонална $m \times m$ матрица с единици по диагонала бележим с I или I_m. В случай на пропуснат индекс, размерността е по подразбиране. Матрици A, за които $A = A^*$ наричаме ермитови, където A^* е спрегнатата матрица на A. Множеството на всички $m\times m$ ермитови матрици бележим с $\mathcal{H}(m)$. Ако $A \in \mathcal{H}(m)$ и $x^T Ax > 0\,(x^T Ax \geq 0)$ е изпълнено за всеки ненулев вектор $x \in \mathbb{C}^m$, тогава A наричаме положително определена (полуопределена) и означаваме $A > 0\,(A \geq 0)$. Множеството на всички положително полуопределени $m \times m$ матрици бележим с $\mathcal{P}(m)$. За $A,\, B \in \mathcal{H}(m)$ записваме $A > B\,(A \geq B)$, когато $A - B > 0\,(A - B \geq 0)$. Ако за $A, B \in \mathcal{H}(m)$ можем да напишем $A \geq B$ или $A \leq B$, тогава казваме, че матриците A и B са сравними. Отбелязваме, че не всеки две ермитови матрици са сравними. Следователно по отношение на релацията $\geq$, множеството $\mathcal{H}(m)$ е частично наредено. Във връзка с тази частична наредба дефинираме множествата $[A,\, B] = \{C\,|\,A \leq C \leq B\}$ и разновидности с нестроги неравенства, например $(A,\, B] = \{C\,|\,A < C \leq B\}$.

Нека $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A), \ldots, \lambda_m(A)$ са собствените стойности на m мерна квадратна комплексна матрица A. Ако $A \in \mathcal{H}(m)$, то собствените ѝ стойности са реални и могат да се подредят в намаляващ ред $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_m(A)$. Множеството на всички собствени стойности бележим с $\lambda(A)$. Спектралния радиус $\rho(A)$ на матрицата A се получава $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

За матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, числата $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, наричаме сингулярни стойности. Понеже A^*A е ермитова положително полуопределена матрица, то $\sigma_i(A)$ са реални неотрицателни числа и могат да се подредят в намаляващ ред $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_m(A) \geq 0$. Най-често използваната тук матрична норма е спектралната норма - $\|A\| = \sigma_1(A)$. Други използвани норми са: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ – норма на Фробениус; $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ и $\|.\|_U$ –произволна унитарно инвариантна норма. Използваната векторна норма е $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$, където $x \in \mathbb{C}^m$. Тази норма е векторната норма, на която е подчинена спектралната матрична норма.

Тензорно (Кронекерово) произведение на матриците A и B бележим с $A \otimes B$, а с $\mathrm{vec}(A)$ бележим вектора $(a_1^T, a_2^T, \ldots, a_n^T)^T$, където a_i е i-ти стълб на матрицата A.

Дефиниция 1. *Матричната функция $F : U \to V$, където $U, V \subset \mathcal{H}(m)$ се нарича монотонно растяща (намаляваща), ако от $A \le B$ следва $F(A) \le F(B)$ $(F(A) \ge F(B))$.*

Например функцията $\sqrt[n]{A}$, $(A \in \mathcal{P}(m))$ е монотонно растяща, а A^{-1}, $(A > 0)$ е монотонно намаляваща, т.е., ако $A \ge B > 0$, тогава $A^{-1} \le B^{-1}$ и $\sqrt[n]{A} \ge \sqrt[n]{B}$.

Следващите известни теореми за неподвижна точка се използват за доказване сходимост на разгледаните итерационни методи.

Теорема 1. (Shauder) *Ако $\mathcal{K}$ е компактно изпъкнало множество в Банахово пространство $\mathcal{X}$ и $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ е непрекъснато изображение, тогава съществува $\bar{x} \in \mathcal{K}$ така, че $F(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Като компактни изпъкнали множества разглеждаме множествата от вида $[A,\, B]$, където $A, B \in \mathcal{H}(m)$. Понеже теорема 1 (теорема на Шаудер за неподвижна точка) не дава единственост на неподвижната точка, ще изкажем втора теорема (теорема на Банах), от условието, на която следва единственост.

Теорема 2. (Banach) *Ако $\mathcal{X}$ е пълно метрично пространство и $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ е непрекъснато изображение, тогава съществува единствена точка $\bar{x} \in \mathcal{X}$ така, че $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Освен това, редицата $\{x_s\}_{s=0}^{\infty}$, $x_{s+1} = F(x_s)$ е сходяща към $\bar{x}$ за всяко $x_0 \in \mathcal{X}$.*

Ще изкажем и теорема, която дава интегрално представяне на решението на едно линейно матрично уравнение.

Теорема 3. *(Теорема 8.5.2 [24]) Ако собствените стойности на матриците $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ имат отрицателни реални части, тогава единственото решение X на уравнението $AX + XB = C$ се получава по формулата*

$$X = -\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt.$$

Дисертацията се състои от въведение и три глави, разделени на параграфи.

Първа глава е посветена на матричните уравнения (4) и (5). Главата е разделена на два параграфа, в които са разгледани съответно двете уравнения. И двата параграфа са разделени на секции, като в първата секция са изследвани уравненията в общия случай на произволно естествено число n и положително определена матрица Q, а в следващите са получени резултати при единична матрица Q ($Q = I$) и са изказани предварително известни резултати на други автори. В последната секция са дадени резултати от направените числени експерименти с предложените итерационни методи при $n = 2$ и $Q = I$.

В първи параграф на главата е изследвано уравнението (4). Получени са необходими условия за съществуване на положително определени решения. Изведени са достатъчни условия за сходимост на разгледаните два итерационни метода. Локализирани са съответно решенията получени по единия и другия метод. Показано е, че ако уравнението (4) има положително определено решение, то има и минимално такова. Единият от предложените методи при специален избор на началното приближение е сходящ към минималното положително определено решение, а другият към друго специално решение X_l (X_l^{-1} е с минимална спектрална норма). За уравнението при $Q = I$ са получени необходими и достатъчни условия за съществуване на положително определени решения. По-голяма част от резултатите са публикувани съответно в [22, 16, 17] и приети за публикуване [18].

В параграф 1.2 е проучено уравнението (5). Показано е, че разгледаното уравнение винаги има положително определени решения. Изведени са достатъчни условия за сходимост на предложения итерационен метод с различни начални приближения. Получени са множества, в които има единствени решения. Дадено е и достатъчно условие за съществуване на единствено положително определено решение. Получените резултати за $n = 2$ и $Q = I$ [22] са обобщени за произволно n и $Q > 0$ [18].

Втора глава е посветена на матричните уравнения (6) и (7). Структурата ѝ е идентична на глава първа. Разделена е на два параграфа, в които са разгледани съответно двете уравнения.

В параграф 2.1 са получени необходими условия за съществуване на положително определени решения на уравнение (6). Предложени са два итерационни метода за пресмятане на тези решения. Единият, от които е обобщение на метода предложен от El-Sayed [1] в случай на $n = 2$ и $Q = I$. Дадени са достатъчни условия за сходимост на разгледаните методи, които са сходящи към две различни положително определени решения. Полученото от нас достатъчно условие за обобщения метод е по-слабо, т.е., той е сходящ за по-широк клас матрици-коефициенти на уравнение (6). Локализирани са съответните решения. Показано е, че при наличие на положително определено решение, уравнението има и максимално такова. Някои от резултатите получени от нас за $n = 2$ и $Q = I$ са публикувани в [15].

В параграф 2.2 са изказани теореми за съществуване на положително определени решения на уравнение (7) и са получени множества от вида $[A, B]$, в които са решенията. Обобщен е предложения от El-Sayed [1] итерационен метод, който изследва уравнението при $n = 2$ и $Q = I$. В този частен случай изследвания сме направили съвместно с Иванов и Минчев [20], където сме разширили множеството на матриците A, за които метода е сходящ. Дадено е условие, при което (7) има единствено положително определено решение.

В третата, последна глава на дисертацията е направен пертурбационен анализ на уравненията изучени в първа глава. Главата е разделена на два параграфа.

В параграф 3.1 е разгледано уравнението (4). Дадени са пертурбационни оценки на положително определените му решения. Получени са оценки за специалното решение X_l, при малки колебания на коефициентите. Получени са и граници на грешката, която се допуска при числено пресмятане на точното решение (например с итерационните методи). Направени са експерименти с примери за $n = 1$ и са сравнени с оценките на Xu [34], за $n > 1$ с оценките на Ran и Reurings [30]. Част от получените резултати са включени в [21], а други приети за публикуване [18].

В параграф 3.2 е разгледано уравнението (5). Получени са пертурбационни оценки на положително определените му решения. Изведени са оценки за единственото положително определено решение, когато има такова. Дадени са и граници на грешката, която се допуска при числено пресмятане на точното решение. Например, с итерационните методи. Показана е връзката на разгледаното уравнение при $n = 1$ с дискретното уравнение на Рикати. Направени са експерименти с примери за $n = 1$ и са сравнени резултатите с оценките за съответното рикатиево уравнение. При $n > 1$ оценките са сравнени с тези на Ran и Reurings [30]. Получените резултати са приети за публикуване [18].

Глава 1

Положително определени решения на матричните уравнения $X \pm A^*X^{-n}A = Q$

Тази глава е посветена на нелинейните матрични уравнения

$$X \pm A^*X^{-n}A = Q\,. \tag{1.0.1}$$

Поради широкото практическо приложение на уравненията (1.0.1) при $n = 1$, то към тях има и по-голям интерес. Първата работа, посветена на уравнението

$$X + A^*X^{-1}A = Q \tag{1.0.2}$$

е на Anderson, Morley и Trapp [2]. Там е разгледан въпроса за съществуване на положително определени решения. По-късно през 1993 година излизат и работите на Engwerda, Ran и Rijkeboer [9] и самостоятелна на Engwerda [8]. Други автори работили върху уравнението (1.0.2) са: Zhan [35]; Zhan и Xie [36].

Интересът към другото уравнение

$$X - A^*X^{-1}A = Q \tag{1.0.3}$$

се заражда по-късно. Първата работа е на Ferrante и Levy [11] през 1996 година. Същата година, El-Sayed защитава дисертация [1], в която разглежда и уравненията (1.0.2) и (1.0.3). Впоследствие, двете уравнения са изследвани от: Guo и Lancaster [14] и Meini [27].

Други случаи на уравненията (1.0.1) са при $n = 2$ и $Q = I$. El-Sayed ги разглежда в [1] и по-късно Иванов и El-Sayed [19] изследват $X + A^*X^{-2}A = I$. Впоследствие ние (Хасанов, Иванов и Минчев) [22] подобряваме някои достатъчни условия, а други прецизираме. През 2003 година излиза и работата на Zhang [37] посветена на уравнението $X + A^*X^{-2}A = I$.

El-Sayed и El-Alem [6] изследват уравнението (1.0.1) в случая на $n = 2^k$ и $Q = I$.

Ние (Хасанов и Иванов) имаме резултати за уравнението (1.0.1) за произволно n и $Q = I$ [16] и в най-общия случай на (1.0.1) за произволно n и $Q > 0$ [17, 18, 21].

Други работи посветени на уравнения от вида на (1.0.1) са: на Liu и Gao ([26], 2003) за уравненията $X^s \pm A^TX^{-t}A = I$, където s и t са естествени числа; на Du и Hou ([5], 2003), които разглеждат операторното уравнение $X^m + A^*X^{-n}A = I$.

Съдържанието на тази глава е базирана главно на получените от нас резултати [16, 17, 18, 21, 22].

През 2001 г. и 2002 г. съответно излизат работите на El-Sayed с Ran [7] и на Ran с Reurings [30] за матричното уравнение

$$X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q\,. \tag{1.0.4}$$

В първата публикация матричната функция $\mathcal{F}$ е монотонно растяща или монотонно намаляваща, докато във втората няма такива ограничения.

Ще изкажем две теореми отнасящи се до уравнението (1.0.4) в зависимост от вида на матричната функция $\mathcal{F}$, които са доказани от Ran и Reurings в [30].

Теорема 1.0.1. *(Лема 2.1 [30]) Нека $\mathcal{F} : \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(m)$ е непрекъсната в* $[0, Q]$.

(*i*) *Ако (1.0.4) има положително полуопределено решение* $\bar{X}$, *тогава* $\bar{X} \leq Q$ *и* $A^*\mathcal{F}(\bar{X})A \leq Q$.

(*ii*) *Ако* $A^*\mathcal{F}(X)A \leq Q$ *за всяко* $X \in [0,\, Q]$, *тогава (1.0.4) има решение в* $[0,\, Q]$.

Теорема 1.0.2. *(Lemma 2.2 [30]) Нека* $\mathcal{F} : \mathcal{P}(m) \to -\mathcal{P}(m)$ *е непрекъсната в* $\{X \in \mathcal{P}(m) \,|\, X \geq Q\}$.

(*i*) *Ако (1.0.4) има положително полуопределено решение* $\bar{X}$, *тогава* $\bar{X} \geq Q$.

(*ii*) *Ако съществува* $B \geq Q$ *така, че*

$$Q - B \leq A^*\mathcal{F}(X)A \leq 0 \tag{1.0.5}$$

за всяко $X \in [Q,\, B]$, *тогава (1.0.4) има решение в* $[Q,\, B]$. *Освен това, ако (1.0.5) е изпълнено за всяко* $X \geq Q$, *тогава всички решения на (1.0.4) са в* $[Q,\, B]$.

1.1 Теореми за съществуване и методи за намиране решенията на $X + A^*X^{-n}A = Q$

В този параграф разглеждаме класа от уравнения

$$X + A^*X^{-n}A = Q\,, \tag{1.1.6}$$

където $A,\, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$, Q е положително определена матрица, X е неизвестната матрица и n е положително цяло число. Първо ще се спрем на уравнението при произволно n и $Q > 0$, а във втора секция при произволно n и $Q = I$ и накрая ще разгледаме случая $n = 2$ и $Q = I$.

Първи резултати за уравнението (1.1.6) за $n > 1$ са получени при $n = 2$ и $Q = I$ [1, 19]. По-късно ние получаваме по-общи резултати [22]. Например, Иванов и El-Sayed [19] имат доказани твърдения в случай на нормална матрица A. Тези твърдения са обобщени и доказани от нас за произволна матрица A. На базата на получените резултати, впоследствие с Иванов обобщаваме резултатите за произволно n и $Q = I$ [16], а по-късно и за произволно $Q > 0$ [17, 18].

1.1.1 Изследване на уравнението $X + A^*X^{-n}A = Q$

Изследваме уравнението (1.1.6) за съществуване на положително определени решения и техните свойства. По-голяма част от резултатите са описани в [17, 18]. Получено е достатъчно условие за съществуване на две различни решения на (1.1.6) със специални свойства.

По подобие на теорема 1.0.1 (Lemma 2.1 [30]) за уравнението (1.0.4), ще изкажем твърдение за разгледаното от нас уравнение (1.1.6).

Теорема 1.1.1. *[17]*

(*i*) *Ако (1.1.6) има положително определено решение X, тогава $\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} < Q$ и $X \in \left(\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}, Q\right]$.*

(*ii*) *Ако A е неособена матрица, $\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} < Q$ и $A^*X^{-n}A \leq Q - \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}$ за всяко $X \in \left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}, Q\right]$, тогава (1.1.6) има положително определено решение.*

Доказателство. Предполагаме, че $X = W^*W > 0$ е положително определено решение на (1.1.6). Тогава $0 \leq A^*(W^*W)^{-n}A < Q$. От първото неравенство имаме

$$X = Q - A^*X^{-n}A \leq Q$$

и от $A^*(W^*W)^{-n}A < Q$, получаваме

$$\sqrt{Q^{-1}}A^*(W^*W)^{-n}A\sqrt{Q^{-1}} < I\,. \tag{1.1.7}$$

Нека

$$Z = \begin{cases} W^{-*}(W^{-1}W^{-*})^k, & n = 2k+1, \\ (W^{-1}W^{-*})^k, & n = 2k. \end{cases}$$

и $Y = Z\,A\sqrt{Q^{-1}}$. Тогава от (1.1.7) след направените означения получаваме

$$\begin{aligned} Y^*Y &< I, \\ YY^* &< I, \\ ZAQ^{-1}A^*Z^* &< I. \end{aligned}$$

От тук $AQ^{-1}A^* < Z^{-1}Z^{-*} = X^n$. Следователно $\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} < X$.

С това доказахме твърдение (i).

Нека $A^*X^{-n}A \leq Q - \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}$ за всяко $X \in \left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$ и A е неособена матрица. Тогава за изображението

$$\mathcal{G}(X) \equiv Q - A^*X^{-n}A$$

имаме $\mathcal{G}(X) \in \left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$ за всяко $X \in \left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$. Така $\mathcal{G}$ изобразява $\left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$ в себе си. Освен това $\mathcal{G}$ е непрекъснато в $\left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$, защото $X > 0$. Следователно $\mathcal{G}$ има неподвижна точка в $\left[\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*},\, Q\right]$, съгласно теоремата на Шаудер за такава. Тази точка е решение на (1.1.6). □

В следващата теорема се предлага по-добра горна граница за положително определените решения на (1.1.6).

Теорема 1.1.2. *[17] Ако уравнението (1.1.6) има положително определено решение X, тогава*

$$\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} \;<\; X \;\leq\; Q - \frac{1}{(\|Q\|\;\|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^*Q^{-n}A.$$

Доказателство. Първото неравенство $\sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} < X$ имаме от предната теорема 1.1.1. Освен това и $X \leq Q$. От тук получаваме $X^n \leq (M_Q/m_Q)^{n-1}\,Q^n$, където $m_Q\,I \leq Q \leq M_Q\,I$ [12]. За $m_Q = \|Q^{-1}\|^{-1}$ и $M_Q = \|Q\|$, получаваме

$$X \;=\; Q - A^*X^{-n}A \;\leq\; Q - \frac{1}{(\|Q\|\;\|Q^{-1}\|)^{n-1}}\,A^*Q^{-n}A.$$

С това теоремата е доказана. □

Следствие 1.1.3. *[17] Ако уравнението (1.1.6) има положително определено решение, тогава*

$$Q - \frac{1}{(\|Q\| \, \|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^* Q^{-n} A - \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} \; > \; 0 \, .$$

Върху едно специално решение X_l

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = \eta \, I, \quad X_{s+1} = Q - A^* X_s^{-n} A \, , \quad s = 0, 1, 2, \dots \, , \tag{1.1.8}$$

където $\eta \in \left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}, \; \frac{1}{\|Q^{-1}\|} \right]$.

Теорема 1.1.4. *Ако $\|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, тогава итерационния метод (1.1.8) е сходящ към положително определена матрица X_l, която е решение на уравнението (1.1.6) и удовлетворява неравенствата*

$$\frac{n}{(n+1)\,\|Q^{-1}\|} I \; < \; X_l \; \leq \; Q - \frac{1}{(\|Q\| \, \|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^* Q^{-n} A \, . \tag{1.1.9}$$

Освен това, решението X_l е единствено с тези свойства.

Доказателство. Разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$ дефинирана с рекурентната формула (1.1.8).

Ще покажем, че всеки елемент X_s на така дефинираната матрична редица принадлежи на множеството $\left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I, \; Q \right]$.

Понеже $\|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, то

$$A^* A < \frac{n^n}{[(n+1)\,\|Q^{-1}\|]^{n+1}} \, I \, .$$

Разглеждаме функцията $\varphi(\alpha) = \alpha^n \left(\frac{1}{\|Q^{-1}\|} - \alpha \right)$. За нея имаме

$$\max_{\alpha > 0} \varphi(\alpha) = \varphi \left(\frac{n}{(n+1)\,\|Q^{-1}\|} \right) = \frac{n^n}{[(n+1)\,\|Q^{-1}\|]^{n+1}} \, .$$

Функцията φ в интервала $\left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}, \frac{1}{\|Q^{-1}\|}\right]$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Следователно за всяко число $\eta \in \left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}, \frac{1}{\|Q^{-1}\|}\right]$ съществува $\alpha_0 \in \left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}, \eta\right]$, така че

$$A^*A \leq \alpha_0^n \left(\frac{1}{\|Q^{-1}\|} - \alpha_0\right) I \,.$$

За $X_0 = \eta I$ имаме $X_0 = \eta I \geq \alpha_0 I$. Допускаме, че $X_k \geq \alpha_0 I$. Тогава получаваме $X_k^{-n} \leq \frac{1}{\alpha_0^n} I$. За X_{k+1} пресмятаме

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= Q - A^* X_k^{-n} A \geq \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \frac{A^*A}{\alpha_0^n} \\ &\geq \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \frac{\alpha_0^n \left(1 - \alpha_0 \|Q^{-1}\|\right)}{\alpha_0^n \|Q^{-1}\|} I = \alpha_0 I \,. \end{aligned}$$

Следователно за всяко $s = 1, 2, \ldots$ имаме $X_s \geq \alpha_0 I$. Очевидно $X_s \leq Q$. Получаваме

$$\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I < \alpha_0 I \leq X_s \leq Q \,, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ще докажем, че $\{X_s\}$ е редица на Коши. Разглеждаме

$$\begin{aligned} X_{k+p} - X_k &= A^* X_{k+p-1}^{-n} \left(X_{k+p-1}^n - X_{k-1}^n\right) X_{k-1}^{-n} A \\ &= A^* \sum_{i=1}^{n} X_{k+p-1}^{-i} \left(X_{k+p-1} - X_{k-1}\right) X_{k-1}^{i-(n+1)} A \,, \end{aligned}$$

където k и p са цели положителни числа. От тук получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{k+p} - X_k\| &\leq \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|X_{k+p-1}^{-i}\right\| \left\|X_{k-1}^{i-(n+1)}\right\| \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \\ &\leq \frac{n \|A\|^2}{\alpha_0^{n+1}} \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \leq \ldots \\ &\leq \left[\frac{n \|A\|^2}{\alpha_0^{n+1}}\right]^k \|X_p - X_0\| = q^k \|X_p - X_0\| \,, \end{aligned}$$

където $q = \frac{n\|A\|^2}{\alpha_0^{n+1}} < 1$, тъй като $\alpha_0 > \frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}$ и $\|A\|^2 < \frac{n^n}{[(n+1)\|Q^{-1}\|]^{n+1}}$.

Освен това, имаме

$$\begin{aligned}\|X_p - X_0\| &\le \sum_{i=0}^{p-1} \|X_{i+1} - X_i\| \\ &\le \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{p-1}\right) \|X_1 - X_0\| \\ &= \frac{1-q^p}{1-q} \|X_1 - X_0\| \le \frac{1}{1-q} \|X_1 - X_0\| ,\end{aligned}$$

откъдето

$$\|X_{k+p} - X_k\| \le q^k \frac{1}{1-q} \|X_1 - X_0\| .$$

Следователно, матричната редица $\{X_s\}$ е редица на Коши в Банаховото пространство $[\alpha_0 I, \; Q]$. Като такава тя е сходяща и границата ѝ $X_l \in [\alpha_0 I, \; Q] \subset \left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I, \; Q\right]$ е решение на уравнение (1.1.6).

Допускаме, че съществуват две решения X' и X'' на уравнение (1.1.6), които са в $\left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I, \; Q\right]$. Тогава получаваме

$$\begin{aligned}\|X' - X''\| &\le \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|(X')^{-i}\right\| \left\|(X'')^{i-(n+1)}\right\| \|X' - X''\| \\ &\le n \|A\|^2 \left[\frac{n+1}{n} \left\|Q^{-1}\right\|\right]^{n+1} \|X' - X''\| < \|X' - X''\| .\end{aligned}$$

Следователно $X' \equiv X''$, т.е., решението X_l е единствено в $\left(\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I, \; Q\right]$.

От теорема 1.1.2 имаме $X_l \le Q - \frac{1}{(\|Q\| \, \|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^* Q^{-n} A$. □

Следствие 1.1.5. *Ако* $\|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, *тогава решението* X_l *на (1.1.6) удовлетворява неравенствата:*

(*i*) $\left\|X_l^{-1}\right\| < \frac{n+1}{n} \|Q^{-1}\|$;

(*ii*) $\frac{n}{n+1} \|Q\| < \|X_l\|$.

Доказателство. От теорема 1.1.4 имаме $\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I < X_l$, откъдето получаваме $X_l^{-1} < \frac{n+1}{n} \|Q^{-1}\| \, I$ и $\left\|X_l^{-1}\right\| < \frac{n+1}{n} \|Q^{-1}\|$. С това доказахме твърдение (*i*). От получения резултат следва

$$\|X_l\| = \left\|Q - A^* X_l^{-n} A\right\| \ge \|Q\| - \|A\|^2 \left\|X_l^{-n}\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&> \|Q\| - \|A\|^2 \left(\frac{n+1}{n}\|Q^{-1}\|\right)^n \\
&> \|Q\| - \frac{n^n}{[(n+1)\|Q^{-1}\|]^{n+1}} \left(\frac{n+1}{n}\|Q^{-1}\|\right)^n \\
&= \|Q\| - \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|} \geq \|Q\| - \frac{1}{n+1}\|Q\| \\
&= \frac{n}{n+1}\|Q\|.
\end{aligned}
$$

С това доказахме и твърдение (*ii*). □

Строгите неравенства в теорема 1.1.4 можем да заменим с нестроги, но тогава нямаме гаранция за единственост на решението. Ето и съответното твърдение

Теорема 1.1.6. *Ако* $\|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, *тогава уравнението (1.1.6) има положително определено решение* X, *което удовлетворява неравенствата*

$$
\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I \leq X \leq Q - \frac{1}{(\|Q\|\,\|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^* Q^{-n} A. \tag{1.1.10}
$$

Доказателство. Разглеждаме изображението

$$
\mathcal{G}(X) \equiv Q - A^* X^{-n} A
$$

в $\left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I,\ Q\right]$.

Ще покажем, че $\mathcal{G}(X) \in \left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I,\ Q\right]$ за всяко $X \in \left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I,\ Q\right]$. Нека $X \in \left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I,\ Q\right]$. Тогава

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(X) &= Q - A^* X^{-n} A \geq \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \left(\frac{n+1}{n}\|Q^{-1}\|\right)^n A^* A \\
&\geq \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \left(\frac{n+1}{n}\|Q^{-1}\|\right)^n \frac{n^n}{[(n+1)\|Q^{-1}\|]^{n+1}} I \\
&= \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I = \frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I.
\end{aligned}
$$

Понеже $X > 0$, то $\mathcal{G}(X) \leq Q$.

Следователно $\mathcal{G}$ изобразява $\left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\,,\; Q\right]$ в себе си. Освен това $\mathcal{G}$ е непрекъснато в $\left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\,,\; Q\right]$. Следователно, съгласно теоремата на Шаудер, $\mathcal{G}$ има неподвижна точка в $\left[\frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\,,\; Q\right]$. Тази точка е решение на (1.1.6). От друга страна, за всяко положително определено решение на (1.1.6) имаме

$$X \;\leq\; Q - \frac{1}{(\|Q\|\;\|Q^{-1}\|)^{n-1}} A^* Q^{-n} A\,.$$

□

Забележка 1.1.1. *Ако уравнението (1.1.6) има максимално положително определено решение X_L, то $X_L \equiv X_l$.*

Върху минималното решение X_S

Теорема 1.1.7. *[17] Ако матричното уравнение (1.1.6) е с неособена матрица A и има положително определено решение, тогава то има минимално положително определено решение X_S. Освен това, итерационния метод*

$$X_0 = \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}\,, \quad X_{k+1} = \sqrt[n]{A\,(Q - X_k)^{-1}\,A^*}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1.11}$$

е сходящ към X_S.

Доказателство. Ще докажем, че редицата $\{X_k\}$ дефинирана с (1.1.11) е монотонно растяща и ограничена от горе от кое да е положително определено решение X на уравнението (1.1.6).

Нека X е произволно положително определено решение. Съгласно теорема 1.1.1 за $X_0 = \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*}$ имаме

$$0 < X - X_0 \leq Q - X_0 \leq Q\,.$$

Допускаме, че $X_k \leq X$ за фиксирано k. Тогава, понеже $X < Q$ при неособена матрица A имаме

$$\begin{aligned} (Q - X_k)^{-1} &\;\leq\; (Q - X)^{-1}\,, \\ X_{k+1} = \sqrt[n]{A\,(Q - X_k)^{-1}\,A^*} &\;\leq\; \sqrt[n]{A\,(Q - X)^{-1}\,A^*} = X\,. \end{aligned}$$

Следователно $X_k \le X$ за всяко $k = 0, 1, 2, \dots$ и всяко положително определено решение X на (1.1.6).

Освен това, от $0 < Q - X_0 \le Q$ имаме $(Q - X_0)^{-1} \ge Q^{-1}$, откъдето получаваме

$$X_1 = \sqrt[n]{A\left(Q - X_0\right)^{-1} A^*} \ge \sqrt[n]{AQ^{-1}A^*} = X_0 \,.$$

Допускаме, че $X_k \ge X_{k-1}$ за фиксирано k. Тогава последователно получаваме

$$\begin{aligned}
0 < Q - X_k &\le Q - X_{k-1}\,,\\
\left(Q - X_k\right)^{-1} &\ge \left(Q - X_{k-1}\right)^{-1}\,,\\
A\left(Q - X_k\right)^{-1} A^* &\ge A\left(Q - X_{k-1}\right)^{-1} A^*\,,\\
X_{k+1} = \sqrt[n]{A\left(Q - X_k\right)^{-1} A^*} &\ge \sqrt[n]{A\left(Q - X_{k-1}\right)^{-1} A^*} = X_k \,.
\end{aligned}$$

Следователно $X_{k+1} \ge X_k$ за всяко $k = 0, 1, 2, \dots$. Получихме, че редицата $\{X_k\}$ е монотонно растяща и ограничена. Следователно тя е сходяща и границата ѝ $\bar{X}$ е положително определено решение на (1.1.6). За нея имаме също $\bar{X} \le X$, където X е произволно положително определено решение. Следователно $\bar{X}$ е минимално решение, т.е. $\bar{X} = X_S$. $\square$

Теорема 1.1.8. *Ако матрицата A е неособена и $\|A\|\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} \le \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, тогава решението X_S удовлетворява*

$$X_S \le \frac{n}{(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|} I \,.$$

Доказателство. Съгласно теореми 1.1.4 и 1.1.7, съществува решението X_S. Разглеждаме итерационния метод (1.1.11) с $X_0 = \frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I$. Ще покажем, че $X_1 \le X_0$. За целта имаме

$$\begin{aligned}
Q - X_0 &\ge \frac{1}{\|Q^{-1}\|} I - \frac{n}{(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|} I\,,\\
\left(Q - X_0\right)^{-1} &\le (n+1)\left\|Q^{-1}\right\| I\,,\\
A\left(Q - X_0\right)^{-1} A^* &\le (n+1)\left\|Q^{-1}\right\| AA^* \le \left(\frac{n}{(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|}\right)^n I\,,\\
X_1 = \sqrt[n]{A\left(Q - X_0\right)^{-1} A^*} &\le \frac{n}{(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|} I = X_0 \,.
\end{aligned}$$

По индукция се доказва, че за всяко $k = 0, 1, 2, \ldots$ е изпълнено $X_{k+1} \leq X_k$, т.е., редицата $\{X_k\}$ е монотонно намаляваща. Освен това, всеки член на редицата е положително определена матрица. Следователно $\{X_k\}$ е сходяща и границата ѝ $\tilde{X}$ е решение на (1.1.6) със свойствата $X_S \leq \tilde{X} \leq \frac{n}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I$. □

1.1.2 Изследване на уравнението $X + A^*X^{-n}A = I$

По-нататък ще разглеждаме уравнение (1.1.6) за $Q = I$, т.е.,

$$X + A^*X^{-n}A = I \tag{1.1.12}$$

и ще докажем твърдения отнасящи се към (1.1.12). Разгледаните от нас твърдения [16] са обобщения на твърденията на Zhan и Xie [36] за уравнение

$$X + A^TX^{-1}A = I\,. \tag{1.1.13}$$

Теорема 1.1.9. *[36] Матричното уравнение (1.1.13) има решение $X > 0$, тогава и само тогава, когато матрицата A допуска следното разлагане*

$$A = W^TZ\,,$$

където W е неособена матрица и стълбовете на $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$ са ортонормирани. В този случай $X = W^TW$ е решение и всичките положително определени решения могат да бъдат формирани по този начин. Освен това, може да изискваме W да бъде триъгълна.

Ще изкажем и докажем съответната теорема за уравнението (1.1.12).

Теорема 1.1.10. *Матричното уравнение (1.1.12) има положително определено решение X, тогава и само тогава, когато матрицата A се разлага съответно*

$$A = \begin{cases} VW^*Z\,, & n = 2k+1\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,, \\ VZ\,, & n = 2k\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

където $V = (W^*W)^k$, W *е неособена матрица и стълбовете на* $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$ *са ортонормирани. В този случай* $X = W^*W$ *е решение и всичките положително определени решения могат да бъдат получени по този начин. Освен това, може да изискваме* W *да бъде триъгълна.*

Доказателство. Нека уравнението (1.1.12) има положително определено решение X, тогава можем да запишем $X = W^*W$, където W е неособена матрица. Записваме уравнението (1.1.12)

$$\begin{aligned} W^*W + A^*(W^*W)^{-n}A &= I\,, \\ W^*W + Z^*Z &= I\,, \end{aligned}$$

където

$$Z = \begin{cases} W^{-*}(W^{-1}W^{-*})^kA\,, & n = 2k+1\,, \quad k = 0,1,\dots\,, \\ (W^{-1}W^{-*})^kA\,, & n = 2k\,, \quad k = 1,2,\dots\,. \end{cases}$$

Следователно

$$A = \begin{cases} VW^*Z\,, & n = 2k+1\,, \quad k = 0,1,\dots\,, \\ VZ\,, & n = 2k\,, \quad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

и стълбовете на $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$ са ортонормирани.

Обратно, нека A има разлагането (1.1.14) и $X = W^*W$. Тогава

$$\begin{aligned} X + A^*X^{-n}A &= \begin{cases} W^*W + Z^*WV^*(W^*W)^{-n}VW^*Z\,, & n = 2k+1\,, \\ W^*W + Z^*V^*(W^*W)^{-n}VZ\,, & n = 2k\,, \end{cases} \\ &= W^*W + Z^*Z = I\,, \end{aligned}$$

тъй като $V = (W^*W)^k$.

Следователно $X = W^*W$ е решение на (1.1.12). $\square$

Теорема 1.1.11. *[36] Матричното уравнение (1.1.13) има положително определено решение, тогава и само тогава, когато съществуват ортогонални* *матрици P и Q и диагонални матрици $\Gamma > 0$ и $\Sigma \geq 0$, такива, че $\Gamma^2 + \Sigma^2 = I$ и $A = P^T \Gamma Q \Sigma P$. В този случай $X = P^T \Gamma^2 P$ е решение.*

Теорема 1.1.12. *Матричното уравнение (1.1.12) има положително определено решение, тогава и само тогава, когато съществуват унитарни матрици P и M и диагонални матрици $\Theta > 0$ и $\Sigma \geq 0$, такива, че $\Theta^2 + \Sigma^2 = I$ и $A = P^* \Theta^n M \Sigma P$. Освен това $X = P^* \Theta^2 P$ е решение.*

Доказателство. Нека уравнението (1.1.12) има положително определено решение X. От теорема 1.1.10 следва, че матрицата A се разлага съответно

$$A = \begin{cases} VW^*Z\,, & n = 2k+1\,, \quad k = 0, 1, \dots\,, \\ VZ\,, & n = 2k\,, \quad k = 1, 2, \dots\,, \end{cases}$$

където $V = (W^*W)^k$, W е неособена матрица и стълбовете на $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$ са ортонормирани. Освен това положително определеното решение $X = W^*W$. Допълваме матрицата $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$ до унитарна матрица $\Xi = \begin{pmatrix} W & U \\ Z & H \end{pmatrix}$. Получената матрица Ξ има CS-разлагане [13, 32]

$$\begin{pmatrix} W & U \\ Z & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & -\Sigma \\ \Sigma & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix},$$

където U_1, U_2, P и H_2 са унитарни матрици, Θ и Σ са диагонални матрици с неотрицателни елементи и $\Theta^2 + \Sigma^2 = I$. Освен това, $W = U_1 \Theta P$ и $Z = U_2 \Sigma P$. Понеже W е неособена, то $\Theta > 0$. За V имаме

$$V = (W^*W)^k = (P^* \Theta U_1^* U_1 \Theta P)^k = P^* \Theta^{2k} P\,.$$

Тогава за A съответно при нечетно и четно n, получаваме

$$A = \begin{cases} VW^*Z = P^* \Theta^{2k} P P^* \Theta U_1^* U_2 \Sigma P = P^* \Theta^{2k+1} U_1^* U_2 \Sigma P\,, \\ VZ = P^* \Theta^{2k} P U_2 \Sigma P\,. \end{cases}$$

Нека

$$M = \begin{cases} U_1^* U_2\,, & n = 2k+1\,, \quad k = 0, 1, \dots\,, \\ PU_2\,, & n = 2k\,, \quad k = 1, 2, \dots\,, \end{cases}$$

тогава $A = P^*\Theta^n M\Sigma P$ със съответна матрица M.

Обратно, нека $A = P^*\Theta^n M\Sigma P$, където P и M са унитарни матрици, Θ и Σ са диагонални матрици и $\Theta > 0,\ \Sigma \geq 0,\ \Theta^2 + \Sigma^2 = I$.

Заместваме в уравнението (1.1.12) $X = P^*\Theta^2 P$, така получаваме

$$P^*\Theta^2 P + (P^*\Sigma M^*\Theta^n P)\left(P^*\Theta^{-2n}P\right)(P^*\Theta^n M\Sigma P) = P^*\Theta^2 P + P^*\Sigma^2 P = I\,.$$

Понеже $\Theta > 0$, то $X = P^*\Theta^2 P$ е положително определено решение на уравнението (1.1.12). $\square$

Теорема 1.1.13. *[16] Ако уравнението (1.1.12) има положително определено решение, тогава* $\|A\| < 1$.

Доказателство. Нека (1.1.12) има положително определено решение. От теорема 1.1.12 имаме, че $A = P^*\Theta^n M\Sigma P$, където P и M са унитарни матрици, Θ, Σ са диагонални матрици, такива, че $\Theta > 0,\ \Sigma \geq 0$ и $\Theta^2 + \Sigma^2 = I$.

Пресмятаме

$$\|A\| = \|P^*\Theta^n M\Sigma P\| \leq \|P^*\|\,\|\Theta^n\|\,\|M\|\,\|\Sigma\|\,\|P\| = \|\Theta^n\|\,\|\Sigma\|\,.$$

Понеже Θ и Σ са диагонални матрици със свойствата: $\Theta^2 + \Sigma^2 = I$; $\Theta > 0$; $\Sigma \geq 0$, то имаме $\|\Theta^n\| = \|\Theta\|^n$, $\|\Sigma\| < 1$ и $\|\Theta\| \leq 1$.

Следователно $\|A\| \leq \|\Theta^n\|\,\|\Sigma\| = \|\Theta\|^n\,\|\Sigma\| < 1$. $\square$

Ще изкажем последната теорема от [36], която сме обобщили за произволно n.

Теорема 1.1.14. *[36] Ако уравнението (1.1.13) има положително определено решение X, тогава са изпълнени*

(*i*) $I \geq X > AA^T$,

(*ii*) $I - A^TA - AA^T > 0$,

(*iii*) $\rho(A) \leq \frac{1}{2}$,

$(iv)\quad \rho(A + A^T) \leq 1\,,$

$(v)\quad \rho(A - A^T) \leq 1\,.$

Преди да изкажем обобщението на теоремата за уравнение (1.1.12) отбелязваме, че първите две твърдения (i) и (ii) сме ги обобщили за уравнението (1.1.6) при произволна матрица $Q > 0$ съответно в теорема 1.1.1 и следствие 1.1.3.

Теорема 1.1.15. *Ако уравнението (1.1.12) има положително определено решение X, тогава са изпълнени*

$(i)\quad I \geq X > \sqrt[n]{AA^*}\,,$

$(ii)\quad I - A^*A - \sqrt[n]{AA^*} > 0\,,$

$(iii)\quad \rho(A) \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}\,,$

$(iv)\quad \rho(A + A^*) \leq 1\,,$

$(v)\quad \rho(A - A^*) \leq 1\,.$

Доказателство. Твърденията (i) и (ii) са директни следствия от теорема 1.1.1 и следствие 1.1.3 съответно.

(iii) Използвайки разлагането на матрицата A в теорема 1.1.12, за коя да е собствена стойност $\lambda_i(A)$ на A имаме

$$\lambda_i(A) = \lambda_i\left(P^*\Theta^n M\Sigma P\right) = \lambda_i\left(\Theta^n M\Sigma\right) = \lambda_i\left(M\Sigma\Theta^n\right)\,.$$

Освен това

$$\rho(A) = \max_i \left|\lambda_i\left(M\Sigma\Theta^n\right)\right| \leq \|M\Sigma\Theta^n\| = \|\Sigma\Theta^n\|\,.$$

Нека $\Sigma = diag\,\{\sigma_i\}\,,\ \Theta = diag\,\{\theta_i\}$. Тогава $\sigma_i \geq 0,\ \theta_i > 0$ и $\sigma_i^2 + \theta_i^2 = 1$.

Следователно

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leq \|\Sigma\Theta^n\| = \max_i |\sigma_i\theta_i^n| = \max_i \sigma_i\sqrt{(1-\sigma_i^2)^n} \\ &\leq \max_{x\in[0,1)} x\sqrt{(1-x^2)^n} = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}\,. \end{aligned}$$

(iv) Разглеждаме матриците $I \pm (A^* + A)$ съответно при $n = 2k + 1$ и $n = 2k$. Понеже $\lambda(WW^*) = \lambda(W^*W)$ и $I - W^*W = Z^*Z \geq 0$ следва, че $WW^* \leq I$. От тук получаваме

за $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} I \pm (A^* + A) &= Z^*Z + W^*W \pm Z^*W\,(W^*W)^k \pm (W^*W)^k\,W^*Z \\ &\geq Z^*\,(WW^*)^{2k}\,Z + W^*W \pm Z^*W\,(W^*W)^k \pm (W^*W)^k\,W^*Z \\ &= \left(W \pm W\,(W^*W)^{k-1}\,W^*Z\right)^* \left(W \pm W\,(W^*W)^{k-1}\,W^*Z\right) \geq 0\,, \end{aligned}$$

и за $n = 2k$

$$\begin{aligned} I \pm (A^* + A) &= Z^*Z + W^*W \pm Z^*\,(W^*W)^k \pm (W^*W)^k\,Z \\ &\geq Z^*\,(W^*W)^{2k-1}\,Z + W^*W \pm Z^*\,(W^*W)^k \pm (W^*W)^k\,Z \\ &= \left(W \pm W\,(W^*W)^{k-1}\,Z\right)^* \left(W \pm W\,(W^*W)^{k-1}\,Z\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Следователно $\rho\,(A^* + A) \leq 1$.

(v) За произволни реални матрици P и Q (с еднаква размерност) [8], имаме

$$\rho\left(P^TQ - Q^TP\right) \leq \rho\left(P^TP + Q^TQ\right)\,.$$

Комплексния аналог на твърдението е $\rho\,(P^*Q - Q^*P) \leq \rho\,(P^*P + Q^*Q)$.

Разглеждаме $\rho(A - A^*)$ при $n = 2k+1$ и $n = 2k$, за които съответно имаме

$$\begin{aligned} \rho\,(A - A^*) &= \rho\left((W^*W)^k\,W^*Z - Z^*W\,(W^*W)^k\right) \\ &\leq \rho\left((W^*W)^{2k+1} + Z^*Z\right) \leq \rho\,(W^*W + Z^*Z) = 1\,, \\ \rho\,(A - A^*) &= \rho\left((W^*W)^k\,Z - Z^*\,(W^*W)^k\right) \\ &\leq \rho\left((W^*W)^{2k} + Z^*Z\right) \leq \rho\,(W^*W + Z^*Z) = 1\,. \end{aligned}$$

Следователно $\rho(A - A^*) \leq 1$. □

Забележка 1.1.2. *Уравнението (1.1.12) е изследвано в [16]. В тази работа теореми 1.1.10, 1.1.12 и 1.1.15 са доказани в случай на реална матрица A.*

Следващите твърдения са свързани с итерационните методи за пресмятане на положително определени решения. Те дават достатъчни условия за сходимост на разгледаните методи, от там и за съществуване на решения. Итерационната формула (1.1.8) при $Q = I$ добива вида

$$X_0 = \eta I \quad X_{s+1} = I - A^* X_s^{-n} A, \quad s = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1.15}$$

където $\eta \in \left(\frac{n}{n+1}, 1\right]$.

Теорема 1.1.16. *[16] Ако съществуват числа α и β, за които са изпълнени неравенствата:*

(i) $\frac{n}{n+1} < \alpha \leq \beta \leq 1$;

(ii) $\beta^n(1-\beta)I \leq A^*A \leq \alpha^n(1-\alpha)I$,

тогава итерационния метод (1.1.15), за $\eta \in [\alpha, \beta]$ е сходящ към положително определено решение X на (1.1.12) с поне линейна скорост на сходимост с частно $q = \frac{n}{\alpha^{n+1}} \|A\|^2$ и $X \in [\alpha I, \beta I]$.

Доказателство. Нека α и β удовлетворяват (i) и (ii). За матричната редица $\{X_s\}$ дефинирана с (1.1.15), където $\eta \in [\alpha, \beta]$ ще докажем, че е редица на Коши. За нея имаме $\alpha I \leq X_0 \leq \beta I$, $X_1 = I - \frac{1}{\eta^n} A^* A$,

$$\alpha I \leq I - \frac{\alpha^n}{\eta^n}(1-\alpha)\, I \leq I - \frac{1}{\eta^n} A^* A \leq I - \frac{\beta^n}{\eta^n}(1-\beta)\, I \leq \beta I .$$

Следователно $\alpha I \leq X_1 \leq \beta I$. Допускаме, че $\alpha I \leq X_k \leq \beta I$. Тогава

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^n} I \;\leq\; & \quad X_k^{-n} & \leq\; \frac{1}{\alpha^n} I\,, \\ I - \beta I \;\leq\; \frac{1}{\beta^n} A^* A \;\leq\; & \; A^* X_k^{-n} A & \leq\; \frac{1}{\alpha^n} A^* A \;\leq\; I - \alpha I\,, \\ \alpha I \;\leq\; & \quad X_{k+1} & \leq\; \beta I\,. \end{aligned}$$

Следователно $\alpha I \leq X_s \leq \beta I$ за всяко $s = 0, 1, 2 \dots$.

Разглеждаме

$$\begin{aligned} X_{k+p} - X_k &= A^* X_{k+p-1}^{-n} \left(X_{k+p-1}^n - X_{k-1}^n\right) X_{k-1}^{-n} A \\ &= A^* \sum_{i=1}^{n} X_{k+p-1}^{-i} \left(X_{k+p-1} - X_{k-1}\right) X_{k-1}^{i-(n+1)} A\,, \end{aligned}$$

където k и p са цели положителни числа. От тук получаваме

$$
\begin{aligned}
\|X_{k+p} - X_k\| &\le \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|X_{k+p-1}^{-i}\right\| \left\|X_{k-1}^{i-(n+1)}\right\| \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \\
&\le \frac{n\,\|A\|^2}{\alpha^{n+1}} \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \le \dots \\
&\le \left[\frac{n\,\|A\|^2}{\alpha^{n+1}}\right]^k \|X_p - X_0\| = q^k \|X_p - X_0\| ,
\end{aligned}
$$

където $q = \frac{n}{\alpha^{n+1}} \|A\|^2 < 1$, тъй като $\|A\|^2 \le \alpha^n (1-\alpha)$ и $\alpha > \frac{n}{n+1}$. Освен това, имаме

$$
\begin{aligned}
\|X_p - X_0\| &\le \sum_{i=0}^{p-1} \|X_{i+1} - X_i\| \\
&\le \left(1 + q + q^2 + \dots + q^{p-1}\right) \|X_1 - X_0\| \\
&= \frac{1-q^p}{1-q} \|X_1 - X_0\| \le \frac{1}{1-q} \|X_1 - X_0\| .
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
\|X_{k+p} - X_k\| \le q^k \frac{1}{1-q} \|X_1 - X_0\| .
$$

Получихме, че редицата $\{X_s\}$ е редица на Коши в Банаховото пространство $[\alpha I,\ \beta I]$. Като такава тя е сходяща и границата ѝ $X \in [\alpha I,\ \beta I]$ е решение на уравнението (1.1.12).

За $\|X_s - X\|$ имаме

$$
\begin{aligned}
\|X_s - X\| &\le \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|X_{s-1}^{-i}\right\| \left\|X^{i-(n+1)}\right\| \|X_{s-1} - X\| \\
&\le \frac{n\,\|A\|^2}{\alpha^{n+1}} \|X_{s-1} - X\| \le \dots \\
&\le \left[\frac{n\,\|A\|^2}{\alpha^{n+1}}\right]^s \|X_0 - X\| = q^s \|X_0 - X\| ,
\end{aligned}
$$

Следователно сходимостта е поне линейна с частно $q = \frac{n\|A\|^2}{\alpha^{n+1}}$. □

Забележка 1.1.3. *В предходната теорема числата α и β с условията (i) и (ii) съществуват, когато $\sigma_1(A) < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$ ($\sigma_1(A)$ - максимална сингулярна стойност на A). Освен това, решението $X \in [\alpha I,\ \beta I]$ е единствено в $\left(\frac{n}{n+1} I,\ I\right]$ (виж теорема 1.1.4).*

Разглеждаме втори итерационен метод

$$X_0 = \gamma I\,, \quad X_{s+1} = \sqrt[n]{A\,(I - X_s)^{-1}\,A^*}\,, \qquad s = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1.1.16}$$

където $\gamma \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$.

Теорема 1.1.17. *Нека* $\sigma_m(A) > 0$, $\sigma_1(A) \le \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$ *и числата* $\tilde\alpha$ *и* $\tilde\beta$ *са съответно решения на уравненията*

$$\tilde\alpha^n(1 - \tilde\alpha) = \sigma_m^2(A) \quad \textit{и} \quad \tilde\beta^n(1 - \tilde\beta) = \sigma_1^2(A)$$

в интервала $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, *където* $\sigma_m(A)$ *и* $\sigma_1(A)$ *са минималната и максималната сингулярни стойности на матрицата* A. *Разглеждаме матричната редица* $\{X_s\}$ *дефинирана с (1.1.16). Тогава*

(*i*) *Ако* $\gamma \in [0, \tilde\alpha]$, *тогава* $\{X_s\}$ *е монотонно растяща и сходяща към положително определено решение* $X_{\tilde\alpha}$,

(*ii*) *Ако* $\gamma \in \left[\tilde\beta, \frac{n}{n+1}\right]$, *тогава* $\{X_s\}$ *е монотонно намаляваща и сходяща към положително определено решение* $X_{\tilde\beta}$.

Доказателство. Понеже функцията $\varphi(x) = x^n(1 - x)$ е монотонно растяща в $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, тогава за $0 < \alpha \le \tilde\alpha \le \tilde\beta \le \beta \le \frac{n}{n+1}$ са изпълнени неравенствата

$$\alpha^n(1 - \alpha)\,I \le AA^* \le \beta^n(1 - \beta)\,I\,.$$

(*i*) Нека $\gamma \in [0, \tilde\alpha]$. Тогава $X_0 = \gamma I \le \tilde\beta I$. За редицата $\{X_s\}$ имаме

$$X_1 = \sqrt[n]{A(I - \gamma I)^{-1}A^*} \ge \sqrt[n]{\frac{\tilde\alpha^n\,(1 - \tilde\alpha)}{1 - \gamma}}\,I \ge X_0\,,$$

$$X_1 = \sqrt[n]{A(I - \gamma I)^{-1}A^*} \le \sqrt[n]{\frac{\tilde\beta^n(1 - \tilde\beta)}{1 - \gamma}}\,I \le \tilde\beta I\,.$$

Следователно $X_0 \le X_1 \le \tilde\beta I$. Предполагаме, че $X_{k-1} \le X_k \le \tilde\beta I$. За X_{k+1} получаваме

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \sqrt[n]{A\,(I - X_k)^{-1}\,A^*} \ge \sqrt[n]{A\,(I - X_{k-1})^{-1}\,A^*} = X_k\,, \\ X_{k+1} &= \sqrt[n]{A\,(I - X_k)^{-1}\,A^*} \le \sqrt{A(I - \tilde\beta I)^{-1}A^*} \le \sqrt[n]{\frac{\tilde\beta^n(1 - \tilde\beta)}{1 - \tilde\beta}}\,I = \tilde\beta I\,. \end{aligned}$$

Получихме, че матричната редица $\{X_s\}$ е монотонно растяща и ограничена от горе. Следователно е сходяща и границата ѝ $X_{\tilde{\alpha}}$ е положително определено решение на уравнение (1.1.12).

(ii) Нека $\gamma \in \left[\tilde{\beta}, \frac{n}{n+1}\right]$. Аналогично на доказателството на (i), показваме, че редицата $\{X_s\}$ с начално приближение $X_0 = \gamma I$, $\gamma \in \left[\tilde{\beta}, \frac{n}{n+1}\right]$ е монотонно намаляваща и ограничена от долу от матрицата $\tilde{\alpha} I$. Следователно $\{X_s\}$ е сходяща и границата ѝ $X_{\tilde{\beta}}$ е положително определено решение на (1.1.12). $\square$

Забележка 1.1.4. *При $\gamma = 0$ получаваме минималното положително определено решение X_S.*

1.1.3 Изследване на уравнението $X + A^*X^{-2}A = I$

В тази секция разглеждаме уравнението

$$X + A^*X^{-2}A = I\,. \tag{1.1.17}$$

Както казахме и по-рано за първи път изследвания за уравнението (1.1.17) се срещат в дисертацията на El-Sayed [1]. По-късно в работата на Иванов и El-Sayed [19]. Ние с Иванов и Минчев [22] сме прецизирали някои от известните твърдения, други сме подобрили и обобщили за уравнението (1.1.6) за произволно n и $Q > 0$ в предходните секции.

Някои от твърденията, които ще изкажем са частни случаи на твърденията доказани в предходните секции, т.е., теоремите в предходните секции са обобщения на тези за уравнението (1.1.17). Ще дадем доказателство на твърденията, които са валидни само за уравнението (1.1.17).

El-Sayed [1], а по-късно Иванов и El-Sayed [19] доказват следното необходимо условие за съществуване на положително определени решения на (1.1.17).

Теорема 1.1.18. *[1, 19] Ако уравнението (1.1.17) с неособена матрица A има положително определено решение, тогава*

$$A^*A + \sqrt{AA^*} < I\,. \tag{1.1.18}$$

При доказателството на тази теорема, Иванов и El-Sayed използват неособеността на A. Същото неравенство (1.1.18) е вярно и за особена матрица A. Освен това, ние [16] сме изказали и доказали съответни твърдения (теорема 1.1.15, (ii)) за (1.1.12), а по-късно [17] и за уравнението (1.1.6) (следствие 1.1.3), които допускат и особени матрици A.

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = \gamma I, \quad X_{s+1} = \sqrt{A(I - X_s)^{-1}A^*}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.1.19}$$

За този метод El-Sayed [1] и по-късно Иванов и El-Sayed [19] доказват

Теорема 1.1.19. *[1, 19] Ако съществуват числа α, β : $0 < \alpha < \beta < 1$, за които са изпълнени неравенствата*

$$\alpha^2(1 - \alpha)\, I < AA^* < \beta^2(1 - \beta)\, I\,,$$

тогава уравнението (1.1.17) има положително определено решение.

Ще изкажем теоремата по-прецизно, като изследваме скаларната функция $\varphi(x) = x^2(1 - x)$, която е монотонно растяща в интервала $\left[0,\, \frac{2}{3}\right]$ и монотонно намаляваща в $\left[\frac{2}{3},\, 1\right]$ и

$$\max_{[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}\,.$$

Тогава след направените уточнения изказваме

Теорема 1.1.20. *[22] Ако съществуват числа α, β : $0 < \alpha \le \beta \le \frac{2}{3}$, за които са изпълнени неравенствата*

$$\alpha^2(1 - \alpha)\, I \le AA^* \le \beta^2(1 - \beta)\, I\,,$$

тогава уравнението (1.1.17) има положително определено решение X' така, че $\alpha I \le X' \le \beta I$.

Забележка 1.1.5. *Ако $\sigma_m(A) > 0$, т.е., A е неособена и $\sigma_1^2(A) \le \frac{4}{27}$, тогава числата α и β от теорема 1.1.20 съществуват. Условието за неособеност на матрицата A в теореми 1.1.19 и 1.1.20 е съществено.*

Теорема 1.1.21. *[22] Нека $\sigma_m(A) > 0$, $\sigma_1^2(A) \le \frac{4}{27}$ и числата α_1 и β_1 са съответно решения на уравненията*

$$\alpha^2(1-\alpha) = \sigma_m^2(A) \quad и \quad \beta^2(1-\beta) = \sigma_1^2(A)$$

в интервала $\left(0, \frac{2}{3}\right]$. Разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$ дефинирана с (1.1.19). Тогава:

(*i*) *Ако $\gamma \in [0, \alpha_1]$, тогава $\{X_s\}$ е монотонно растяща и сходяща към положително определено решение X_{α_1};*

(*ii*) *Ако $\gamma \in \left[\beta_1, \frac{2}{3}\right]$, тогава $\{X_s\}$ е монотонно намаляваща и сходяща към положително определено решение X_{β_1};*

(*iii*) *Ако $\gamma \in (\alpha_1, \beta_1)$ и $\frac{{\beta_1}^2}{2\alpha_1(1-\beta_1)} < 1$, тогава $\{X_s\}$ е сходяща към положително определено решение X_γ.*

Доказателство. Пълното доказателство на теоремата е направено в [22], но и тук, твърдения (*i*) и (*ii*) са частни случаи на съответните в теорема 1.1.17. Новото за $n = 2$ е твърдение (*iii*).

Нека $\gamma \in (\alpha_1, \beta_1)$. Тогава $\alpha_1 I < X_0 = \gamma I < \beta_1 I$. Ще докажем, че $\{X_s\}$ е редица на Коши. Предполагаме, че $\alpha_1 I < X_k < \beta_1 I$. За X_{k+1} получаваме

$$X_{k+1} = \sqrt{A\,(I - X_k)^{-1}\,A^*} < \sqrt{\frac{AA^*}{1-\beta_1}} \le \sqrt{\frac{{\beta_1}^2(1-\beta_1)}{1-\beta_1}}\,I = \beta_1 I\,,$$

$$X_{k+1} = \sqrt{A\,(I - X_k)^{-1}\,A^*} > \sqrt{\frac{AA^*}{1-\alpha_1}} \ge \sqrt{\frac{{\alpha_1}^2\,(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1}}\,I = \alpha_1 I\,.$$

Следователно $\alpha_1 I < X_s < \beta_1 I$ за $s = 0, 1, \ldots$.

Разглеждаме $\|X_{k+p} - X_k\|$ за произволни цели положителни числа k и p. Имаме

$$\|X_{k+p} - X_k\| = \left\| \sqrt{A(I - X_{k+p-1})^{-1}A^*} - \sqrt{A(I - X_{k-1})^{-1}A^*} \right\|.$$

Използваме следните означения

$$P = A\,(I - X_{k+p-1})^{-1}\,A^* \quad \text{и} \quad Q = A\,(I - X_{k-1})^{-1}\,A^*$$

и тъждеството

$$\sqrt{P}\left(\sqrt{P}-\sqrt{Q}\right)+\left(\sqrt{P}-\sqrt{Q}\right)\sqrt{Q}=P-Q\,.$$

Очевидно, $Y=\sqrt{P}-\sqrt{Q}$ е решение на линейното матрично уравнение

$$\sqrt{P}\,Y+Y\sqrt{Q}=P-Q\,.$$

От теорема 3 (теорема 8.5.2 [24]) получаваме

$$Y=\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}\,t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\,dt\,.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\|X_{k+p}-X_k\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}\,t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\,dt\right\| \\ &\le \int_0^\infty \|P-Q\|\,\left\|e^{-\sqrt{P}\,t}\right\|\,\left\|e^{-\sqrt{Q}\,t}\right\|dt\,.\end{aligned}$$

Тъй като $\alpha_1 I < X_s$ за $s=0,1,\ldots$, $\sqrt{P}=X_{k+p}$, $\sqrt{Q}=X_k$, тогава $\sqrt{P}>\alpha_1 I$ и $\sqrt{Q}>\alpha_1 I$. Получаваме

$$\begin{aligned}\|X_{k+p}-X_k\| &\le \|P-Q\|\int_0^\infty e^{-2\alpha_1 t}\,dt \\ &= \frac{1}{2\alpha_1}\,\left\|A\left[(I-X_{k+p-1})^{-1}-(I-X_{k-1})^{-1}\right]A^*\right\| \\ &= \frac{1}{2\alpha_1}\,\left\|A\,(I-X_{k-1})^{-1}\,(X_{k+p-1}-X_{k-1})\,(I-X_{k+p-1})^{-1}\,A^*\right\| \\ &\le \frac{1}{2\alpha_1}\,\|A\|^2\left\|(I-X_{k-1})^{-1}\right\|\,\left\|(I-X_{k+p-1})^{-1}\right\|\,\|X_{k+p-1}-X_{k-1}\| \\ &\le \frac{{\beta_1}^2}{2\alpha_1\,(1-\beta_1)}\,\|X_{k+p-1}-X_{k-1}\|=q\,\|X_{k+p-1}-X_{k-1}\|\,, \\ &\le q^k\,\|X_p-X_0\|\,,\end{aligned}$$

където $q=\frac{{\beta_1}^2}{2\alpha_1(1-\beta_1)}<1$. Освен това, имаме

$$\begin{aligned}\|X_p-X_0\| &\le \sum_{i=0}^{p-1}\|X_{i+1}-X_i\| \\ &\le \left(1+q+q^2+\cdots+q^{p-1}\right)\|X_1-X_0\| \\ &= \frac{1-q^p}{1-q}\,\|X_1-X_0\| \;\le\; \frac{1}{1-q}\,\|X_1-X_0\|\,.\end{aligned}$$

Следователно

$$\|X_{k+p} - X_k\| \leq q^k \frac{1}{1-q} \|X_1 - X_0\| .$$

Понеже $q < 1$, то $\{X_s\}$ е редица на Коши в Банаховото пространство $[\alpha_1 I, \beta_1 I]$ и като такава тя е сходяща към положително определена матрица X_γ, която е решение на (1.1.17). □

Теорема 1.1.22. *Нека $\sigma_m(A) > 0$, $\sigma_1^2(A) \leq \frac{4}{27}$ и числата β_1 и β_2 са решения на уравнението $\beta^2(1-\beta) = \sigma_1^2(A)$, съответно в интервалите $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$. Тогава, за $\gamma \in [\beta_1, \beta_2]$ редицата $\{X_s\}$ дефинирана с (1.1.19) е монотонно намаляваща и сходяща към положително определено решение X_{β_1};*

Доказателство. Тази теорема е следствие от теоремата на El-Sayed (теорема 1.1.19). В условието на теорема 1.1.19, β съществува тогава и само тогава, когато $\sigma_1^2(A) \leq \frac{4}{27}$. Освен това, за всяко число $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ е изпълнено неравенството $AA^* \leq \beta^2(1-\beta)$. От друга страна, при доказателството на теорема 1.1.19 е показано, че редицата $\{X_s\}$ с $\gamma = \beta$ е сходяща монотонно намалявайки. □

Теорема 1.1.23. *Нека матрицата A и реалните числа $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ удовлетворяват неравенствата:*

(*i*) $0 < \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq 1$;

(*ii*) $\tilde{\alpha}^2 (1 - \tilde{\alpha}) I \leq AA^* \leq \tilde{\beta}^2 \left(1 - \tilde{\beta}\right) I$;

(*iii*) $\frac{\tilde{\beta}^2}{2\tilde{\alpha}\left(1-\tilde{\beta}\right)} < 1$.

Тогава, за всеки две числа $\gamma_1, \gamma_2 \in \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]$ итерационният метод (1.1.19) дефинира две матрични редици $\{X'_s\}$ и $\{X''_s\}$ с начални точки $X'_0 = \gamma_1 I$ и $X''_0 = \gamma_2 I$. Тези редици са сходящи към една и съща матрица X_γ, която е положително определено решение на уравнение (1.1.17).

Доказателство. За елементите на двете матрични редици имаме

$$X'_s \in \left[\tilde{\alpha} I, \tilde{\beta} I\right] \quad \text{и} \quad X''_s \in \left[\tilde{\alpha} I, \tilde{\beta} I\right] .$$

Нека означим с $P = A(I - X'_{s-1})^{-1}A^*$ и $Q = A(I - X''_{s-1})^{-1}A^*$, тогава за $\|X'_s - X''_s\|$ получаваме

$$\begin{aligned}
\|X'_s - X''_s\| &= \left\| \sqrt{A\left(I - X'_{s-1}\right)^{-1} A^*} - \sqrt{A\left(I - X''_{s-1}\right)^{-1} A^*} \right\| \\
&= \left\| \sqrt{P} - \sqrt{Q} \right\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\sqrt{P}\,t}(P - Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\, dt \right\| \\
&\le \left\| A\left[\left(I - X'_{s-1}\right)^{-1} - \left(I - X''_{s-1}\right)^{-1}\right] A^* \right\| \int_0^\infty e^{-\tilde{\alpha}\,t}\, dt \\
&\le \frac{1}{2\,\tilde{\alpha}} \|A\|^2 \left\| \left(I - X'_{s-1}\right)^{-1} \right\| \left\| \left(I - X''_{s-1}\right)^{-1} \right\| \left\| X'_{s-1} - X''_{s-1} \right\| \\
&\le \frac{\tilde{\beta}^2}{2\,\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\beta})} \left\| X'_{s-1} - X''_{s-1} \right\| .
\end{aligned}$$

Следователно

$$\|X'_s - X''_s\| \le \frac{\tilde{\beta}^2}{2\,\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\beta})} \left\| X'_{s-1} - X''_{s-1} \right\| .$$

Понеже

$$\frac{\tilde{\beta}^2}{2\,\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\beta})} < 1 ,$$

то редиците $\{X'_s\}$ и $\{X''_s\}$ имат една и съща граница. □

Разглеждаме втори итерационен метод за (1.1.17)

$$X_0 = \eta\, I \quad X_{s+1} = I - A^* X_s^{-2} A , \qquad s = 0, 1, 2, \dots , \tag{1.1.20}$$

където $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Методът (1.1.20) е предложен от Иванов и El-Sayed за $\eta = 1$ [19]. Освен това, те доказват сходимостта му, само когато матрицата A е нормална. По-късно ние [22] предлагаме (1.1.20) в този вид и доказваме сходимост в общия случай. Получените резултати са обобщени за произволно n [16], които са дадени в предходните секции.

В случай на нормална матрица A, Иванов и El-Sayed доказват следните твърдения.

Теорема 1.1.24. *(Lemma 5. [19]) Ако матрицата A е нормална ($A^*A = AA^*$), тогава*

$$AX_s = X_s A\,, \quad s = 0, 1, 2, \dots\,,$$

където X_s са матрици от (1.1.20) с $\eta = 1$.

Теорема 1.1.25. *(Lemma 6. [19]) Ако матрицата A е нормална, тогава*

$$X_{s+1}X_s = X_s X_{s+1}\,, \quad s = 0, 1, 2, \dots\,,$$

където X_s са матрици от (1.1.20) с $\eta = 1$.

Теорема 1.1.26. *(Theorem 7. [19]) Ако матрицата A е нормална и съществува число θ, $\theta > 1$, за което*

$$A^*A < \frac{\theta - 1}{\theta^3} I\,,$$

тогава уравнението (1.1.17) има положително определено решение.

В доказателството на теорема 1.1.26 (Theorem 7. [19]) Иванов и El-Sayed показват, че матричната редица $\{X_s\}$ от (1.1.20) с $X_0 = I$ е монотонно намаляваща и ограничена. Така тя е сходяща и границата ѝ е решение на (1.1.17). От тази монотонност следва следващото твърдение.

Следствие 1.1.27. *Ако матрицата A е нормална и $\|A\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, тогава уравнението (1.1.17) има максимално положително определено решение.*

Доказателство. От $\|A\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ следва съществуването на положително определени решения (виж теорема 1.1.6). От друга страна, имаме монотонно намаляваща матрична редица $\{X_s\}$ от (1.1.20) с $X_0 = I$. Освен това, за всяко положително определено решение X на (1.1.17) имаме $X \leq I = X_0$. Не е трудно по индукция да се покаже, че за всяка матрица X_s и произволно положително определено решение X е изпълнено $X \leq X_s$. Тогава за границата X_L на $\{X_s\}$ имаме $X \leq X_L$. Следователно границата X_L на $\{X_s\}$ е максимално положително определено решение. □

Теорема 1.1.28. *(Theorem 8. [19]) Ако матрицата A е нормална и съществува число θ, $\theta > 1$, за което*

(*i*) $A^*A < \frac{\theta-1}{\theta^3} I$,

(*ii*) $q = 2\,\|A\|^2\,\theta^4 < 1$,

тогава уравнението (1.1.17) има положително определено решение X, за което

$$\|X_s - X\| < q^s \frac{\theta - 1}{\theta}.$$

Ще напишем теорема 1.1.16 за $n = 2$.

Теорема 1.1.29. *[22] Ако съществуват числа α и β такива, че са изпълнени неравенствата:*

(*i*) $\frac{2}{3} < \beta \le \alpha \le 1$;

(*ii*) $\alpha^2(1-\alpha)\, I \le A^*A \le \beta^2(1-\beta)\, I$,

тогава итерационния метод (1.1.20), за $\eta \in [\beta, \alpha]$ е сходящ към положително определено решение X на (1.1.17) с поне линейна скорост на сходимост с частно $q = \frac{2}{\beta^3}\,\|A\|^2$ и $X \in [\beta\, I, \alpha\, I]$.

В теорема 1.1.29 е очевидно, че α винаги съществува. Двете условия $A^*A < \frac{\theta-1}{\theta^3} I$ в теорема 1.1.26 (теорема 1.1.28) и $A^*A \le \beta^2(1-\beta)\, I$ в теорема 1.1.29 не са съществено различни. Нека в $\frac{\theta-1}{\theta^3}$ положим $\theta = \frac{1}{\beta}$, тогава получаваме $\beta^2(1-\beta)$.

Изказаната от Иванов и El-Sayed теорема 1.1.26 не дава отговор за скоростта на сходимост на разгледания метод, макар че съществуването на положително определено решение е обвързано със сходимостта на споменатия метод. Този отговор дава следващата им теорема 1.1.28. Отбелязваме, че второто условие (*ii*) е допълнително ограничение за матрицата A, което не е необходимо.

1.1.4 Числени експерименти

В тази секция, ще опишем резултати от някои числени експерименти, направени за уравнението (1.1.17) с различни матрици A и размерност m. Твърденията, които цитираме от предходните секции, отнасящи се до разгледаното уравнение за произволно Q и n, ще имаме впредвид при $Q = I$ и $n = 2$, съответно.

За пресмятане на положително определените решения са използвани съответно итерационните методи (1.1.19) и (1.1.20). Тук елементите на (1.1.19) ще ги бележим с Y_s за разлика от елементите на (1.1.20), които са X_s.

Програмите, с които се реализират итерационните методи са писани на MATLAB. И за двата метода за стоп критерий използваме съответно

$$\|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty \le tol \quad \text{и} \quad \|X_{s+1} - X_s\|_\infty \le tol\,,$$

където tol е желаната точност. С $iter$ означаваме най-малкия брой итерации, за които се достига съответния стоп критерий. Нека $\varepsilon(Z) = \|Z + A^*Z^{-2}A - I\|_\infty$. Отбелязваме, че за (1.1.19) с елементи Y_s имаме

$$\begin{aligned} Y_{s+1} - Y_s &= Y_{s+1} + I - Y_s - I = Y_{s+1} + \left((I - Y_s)^{-1}\right)^{-1} - I \\ &= Y_{s+1} + A^*\left(A\,(I - Y_s)^{-1}A^*\right)^{-1} A - I \\ &= Y_{s+1} + A^*\,Y_{s+1}^{-2}\,A - I\,. \end{aligned}$$

Следователно $\varepsilon(Y_{s+1}) = \|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty$. За втория метод имаме

$$X_{s+1} - X_s = -\left(X_s + A^*X_s^{-2}A - I\right)\,.$$

Следователно $\varepsilon(X_s) = \|X_{s+1} - X_s\|_\infty$. За краткост в таблиците с резултати от експериментите $\varepsilon(Y_{iter})$ и $\varepsilon(X_{iter-1})$ ще означим с ε.

Както казахме и по-рано метод (1.1.19) е разгледан от El-Sayed [1]. По-късно Иванов и El-Sayed [19] предлагат и втори метод ((1.1.20 при $\eta = 1$), но доказват сходимостта му само за нормални матрици A.

Ще сравним разгледаните методи с различни начални приближения, т.е., с различни стойности на γ и η.

Нека $0 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \frac{2}{3} \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \leq 1$, където α_i, β_i, $i = 1, 2$ са съответно решения на уравненията

$$\alpha^2(1-\alpha) = \sigma_m^2 \quad \text{и} \quad \beta^2(1-\beta) = \sigma_1^2\,,$$

а σ_m и σ_1 са минималната и максималната сингулярни стойности на A. Очевидно е, че α_2, β_1 и β_2 съществуват, когато $\sigma_1^2 = \|A\|^2 \leq \frac{4}{27}$, а за α_1 допълнително е необходимо A да е неособена.

За удовлетворяване условията на теорема 1.1.21 е необходимо $\sigma_m > 0$ и $\sigma_1^2 \leq \frac{4}{27}$. От друга страна, ако $\sigma_1^2 < \frac{4}{27}$, тогава теорема 1.1.29 се удовлетворява за всяко $\alpha \in [\alpha_2,\, 1]$ и всяко $\beta \in \left(\frac{2}{3},\, \beta_2\right]$.

В случай на $\sigma_m > 0$ и $\sigma_1^2 < \frac{4}{27}$, уравнението $X + A^*X^{-2}A = I$ има точно по едно решение в $\left(0,\, \frac{2}{3}I\right)$ и $\left(\frac{2}{3}I,\, I\right]$ съответно.

Ще направим експерименти с метод (1.1.19) при $\gamma = 0$, $\gamma = \alpha_1$, $\gamma = \beta_1$ и $\gamma = \frac{2}{3}$, и с метод (1.1.20) при $\eta = \frac{5}{6}$, $\eta = \beta_2$, $\eta = \alpha_2$ и $\eta = \frac{2}{3}$.

Пример 1.1.1. *Разглеждаме уравнение (1.1.17) с матрица*

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2.5 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 2.4 & 1.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 & 2.5 & 0.3 \\ 1.2 & 0.1 & 0.2 & 2.4 \end{pmatrix}$$

Минималната σ_m и максималната σ_1 сингулярни стойности на A са пресметнати с функция **svd** на Matlab.

Таблица 1.1: Резултати за пример 1.1.1 с $tol = 10^{-7}$.

	Метод (1.1.19)			Метод (1.1.20)		
$m = 5$	γ	$iter$	ε	η	$iter$	ε
	0	37	$7.15e{-8}$	5/6	33	$9.65e{-8}$
$\sigma_m^2 = 0.0209$	$\alpha_1 = 0.1574$	36	$9.49e{-8}$	$\alpha_2 = 0.9782$	35	$7.43e{-8}$
$\sigma_1^2 = 0.1418$	$\beta_1 = 0.5834$	28	$7.28e{-8}$	$\beta_2 = 0.7435$	26	$8.13e{-8}$
	2/3	37	$9.44e{-8}$	2/3	36	$8.67e{-8}$
	$\beta_2 = 0.7435$	49	$7.25e{-8}$			

В таблица 1.1 са дадени резултатите от направените експерименти за пример 1.1.1 с $tol = 10^{-7}$. Изборът на $\gamma \in [0, \alpha_1]$ в началното приближение $X_0 = \gamma I$ на метод (1.1.19) не е съществен, понеже разликата в броя на итерации при различни γ е най-много единица. Направен е експеримент и с $tol = 10^{-6}$ и $tol = 10^{-8}$, тогава са направени по равен брой итерации за различните $\gamma (\gamma = 1, \gamma = \alpha_1)$ съответно 30 за $tol = 10^{-6}$ и 43 за $tol = 10^{-8}$. Друго е положението за $\gamma \in \left[\beta_1, \frac{2}{3}\right]$. При $\gamma = \beta_1$ правим 28 итерации, а при $\gamma = \frac{2}{3}$ са 37 итерации. Теорема 1.1.19 ни дава възможност да избираме $\gamma \in [\beta_1, \beta_2]$. При $\gamma = \beta_2$ с $tol = 10^{-7}$ правим 49 итерации. Интересен момент е, че при различни γ получаваме едно и също решение с точност tol. Например, $\left\|Y_{2/3} - Y_{\beta_2}\right\|_\infty = 4.84e - 8$, където $Y_{2/3}$ е приближението на 37-та итерация с $\gamma = \frac{2}{3}$ и Y_{β_2} е приближението при $\gamma = \beta_2$ за разгледания пример.

От експериментите се вижда, че втория метод (1.1.20) дава най-добри резултати при $\eta = \beta_2$.

Следователно, за предпочитане са: за метод (1.1.19) начално приближение с $\gamma = \beta_1$, а за метод (1.1.20) с $\eta = \beta_2$.

1.2 Теореми за съществуване и методи за пресмятане решенията на $X - A^*X^{-n}A = Q$

В този параграф ще разгледаме следващия вид матрични уравнения, изследван за съществуване на положително определени решения.

Разглеждаме уравнение

$$X - A^*X^{-n}A = Q\,, \tag{1.2.21}$$

където $A,\, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$, Q е положително определена матрица, X е неизвестната матрица и n е положително цяло число. Първо ще се спрем на уравнението при произволно n и $Q > 0$, а във втора секция основно при $n = 2$, $Q = I$ и някои резултати за произволно n. Показано е, че уравнението (1.2.21) винаги има положително определени решения. Дадено е и достатъчно условие за съществуване на единствено положително определено решение. Резултатите във втора секция при $n = 2$ и $Q = I$ са публикувани в [22], които нашироко са коментирани в дисертацията на Reurings [31] и са обобщени за произволно n. Тук ще дадем и други резултати получени за уравнението $X - A^*X^{-n}A = I$.

1.2.1 Изследване на уравнението $X - A^*X^{-n}A = Q$

Ще изкажем едно следствие от теорема 1.0.2.

Теорема 1.2.1. *Матричното уравнение (1.2.21) има положително определени решения, като всичките са в* $\left[Q,\ Q + \|Q^{-1}\|^n A^*A\right]$.

Доказателство. Използваме теорема 1.0.2 при

$$B = Q + \left\|Q^{-1}\right\|^n A^*A \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(X) = -X^{-n}\,.$$

Очевидно $B \geq Q$ и

$$Q - B = -\left\|Q^{-1}\right\|^n A^*A \leq -A^*X^{-n}A$$

за всяка матрица $X \geq Q$. Освен това $\mathcal{F}$ е непрекъсната за $X \geq Q > 0$.

Следователно (1.2.21) има положително определени решения и всичките те са в $[Q,\ B]$. □

Теорема 1.2.2. *Ако* $n\,\|A\|^2\,\|Q^{-1}\|^{n+1} < 1$, *тогава уравнението (1.2.21) има единствено положително определено решение* $X \geq Q$.

Доказателство. Уравнение (1.2.21) записваме във вида $X = Q + A^*X^{-n}A$. Очевидно, ако $X > 0$, то $X \geq Q$.

Допускаме, че (1.2.21) има две положително определени решения X' и X''. Тогава за тях имаме

$$\begin{aligned} X' - X'' &= A^*\left((X')^{-n} - (X'')^{-n}\right)A \\ &= A^*\sum_{i=1}^{n}(X')^{-i}(X'' - X')\,(X'')^{i-(n+1)}\,A\,. \end{aligned}$$

Понеже $X' \geq Q$ и $X'' \geq Q$, то $\left\|(X')^{-1}\right\| \leq \|Q^{-1}\|$ и $\left\|(X'')^{-1}\right\| \leq \|Q^{-1}\|$, от където получаваме

$$\begin{aligned} \|X' - X''\| &\leq \|A\|^2 \|X' - X''\| \sum_{i=1}^{n} \left\|(X')^{-1}\right\|^i \left\|(X'')^{-1}\right\|^{n+1-i} \\ &\leq n \|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} \|X' - X''\| < \|X' - X''\| . \end{aligned}$$

Следователно $X' \equiv X''$. □

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = Q\,, \quad X_{s+1} = Q + A^* X_s^{-n} A\,, \quad s = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.2.22}$$

Теорема 1.2.3. *Ако $n \|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} < 1$, тогава итерационният метод (1.2.22) е сходящ към единственото положително определено решение на уравнение (1.2.21) и скоростта на сходимост е поне линейна.*

Доказателство. За всеки елемент на матричната редица $\{X_s\}$ получена от (1.2.22) имаме $X_s \geq Q$, откъдето получаваме $X_s^{-1} \leq Q^{-1}$ и $\|X_s^{-1}\| \leq \|Q^{-1}\|$. Тогава за елементите X_{k+p} и X_k на разглежданата редица за произволни цели положителни p и k имаме

$$\begin{aligned} \|X_{k+p} - X_k\| &\leq \|A\|^2 \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \sum_{i=1}^{n} \left\|X_{k+p-1}^{-1}\right\|^i \left\|X_{k-1}^{-1}\right\|^{n+1-i} \\ &\leq n \|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| \leq \cdots \\ &\leq q^k \|X_p - X_0\| , \end{aligned}$$

където $q = n \|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} < 1$. Освен това, имаме

$$\begin{aligned} \|X_p - X_0\| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|X_{i+1} - X_i\| \\ &\leq \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{p-1}\right) \|X_1 - X_0\| \\ &= \frac{1 - q^p}{1 - q} \|X_1 - X_0\| \leq \frac{1}{1 - q} \|X_1 - X_0\| . \end{aligned}$$

Следователно

$$\|X_{k+p} - X_k\| \leq q^k \frac{1}{1 - q} \|X_1 - X_0\| .$$

От тук следва, че $\{X_s\}$ е редица на Коши в Банахово пространство. Следователно е сходяща към единственото положително определено решение $X \geq Q$.

Скоростта на сходимост е поне линейна, с частно q понеже

$$\begin{aligned} \|X_s - X\| &\leq \|A\|^2 \|X_{s-1} - X\| \sum_{i=1}^{n} \|X_{s-1}^{-1}\|^i \|X^{-1}\|^{n+1-i} \\ &\leq n \|A\|^2 \|Q^{-1}\|^{n+1} \|X_{s-1} - X\| \leq \cdots \\ &\leq q^s \|X_1 - X\| . \end{aligned}$$

□

1.2.2 Изследване на уравнението $X - A^*X^{-2}A = I$

В тази секция разглеждаме матричното уравнение

$$X - A^*X^{-2}A = I, \qquad (1.2.23)$$

което е уравнението (1.2.21) за $n = 2$ и $Q = I$.

Изследван е въпроса за съществуване на положително определени решения на уравнение (1.2.23) и методи за тяхното намиране. Предложени два итерационни метода.

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = \gamma I, \quad X_{s+1} = \sqrt{A\,(X_s - I)^{-1}\,A^*}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (1.2.24)$$

Имаме

Теорема 1.2.4. *[22] Ако A е неособена матрица и съществува реално число $\alpha > 1$, за което са изпълнени неравенствата:*

(*i*) $AA^* < \alpha^2(\alpha - 1)\, I\,;$

(*ii*) $\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A > I\,;$

(*iii*) $\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\sigma_m}\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma_m - \sqrt{\alpha-1}}\right)^2 \|A\|^2 < 1\,,$

където σ_m е най-малката сингулярна стойност на A, тогава уравнението (1.2.23) има положително определено решение.

Доказателство. Разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$, която се получава по формула (1.2.24) с $\gamma = \alpha$. Използвайки условието (i) получаваме

$$X_1 = \sqrt{A\,(X_0 - I)^{-1}\,A^*} = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} < \alpha\, I = X_0\,.$$

От условието (ii) получаваме

$$X_1 = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} > I + \frac{1}{\alpha^2}A^*A > I\,.$$

Следователно $I < X_1 < X_0$. Освен това, имаме

$$X_2 = \sqrt{A\,(X_1 - I)^{-1}\,A^*} > \sqrt{A\,(X_0 - I)^{-1}\,A^*} = X_1\,.$$

Понеже $X_1 - I > \frac{1}{\alpha^2}A^*A$, то

$$X_2 = \sqrt{A\,(X_1 - I)^{-1}\,A^*} < \alpha\, I = X_0\,.$$

Следователно $I < X_1 < X_2 < X_0$.

По индукция получаваме

$$I < X_1 < X_{2p+1} < X_{2p+3} < X_{2q+2} < X_{2q} < X_0 = \alpha\, I$$

за всеки две положителни цели числа p, q.

Разглеждаме подредиците $\{X_{2q}\}$, $\{X_{2p+1}\}$, които са сходящи. Ще докажем, че двете редици имат една и съща граница. За целта имаме

$$\|X_{2k} - X_{2k+1}\| = \left\|\sqrt{A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,A^*} - \sqrt{A\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^*}\right\|\,.$$

Нека положим

$$P = A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,A^*\,, \quad Q = A\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^*$$

и използваме тъждеството

$$\sqrt{P}\left(\sqrt{P} - \sqrt{Q}\right) + \left(\sqrt{P} - \sqrt{Q}\right)\sqrt{Q} = P - Q\,.$$

Тъй като $X_{2k-1} < X_{2k+1} < X_{2k}$ за всяко $k = 1, 2, \ldots$, то матрицата $Y = \sqrt{P} - \sqrt{Q}$ е положително определено решение на матрично уравнение

$$\sqrt{P}\,Y + Y\sqrt{Q} = P - Q\,. \tag{1.2.25}$$

Тъй като $\sqrt{P}$ и $\sqrt{Q}$ са положително определени матрици, то $-\sqrt{P}$ и $-\sqrt{Q}$ са с отрицателни собствени стойности. Тогава, съгласно теорема 8.5.2 [24] единственото решение на (1.2.25) се записва

$$Y = \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{P}\,t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\,dt\,. \tag{1.2.26}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|X_{2k} - X_{2k+1}\| &= \left\| \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{P}\,t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\,dt \right\| \\ &\leq \int_0^{\infty} \|P-Q\| \left\| e^{-\sqrt{P}\,t} \right\| \left\| e^{-\sqrt{Q}\,t} \right\| dt\,. \end{aligned}$$

За всеки елемент на редицата $\{X_s\}$ имаме $X_1 < X_s$, откъдето получаваме

$$\left\|(X_s - I)^{-1}\right\| < \left\|(X_1 - I)^{-1}\right\| = \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\sigma_m - \sqrt{\alpha-1}}\,.$$

Освен това, имаме и $X_{s+1} = \sqrt{A\,(X_s - I)^{-1} A^*} > X_1 = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} \geq \frac{\sigma_m}{\sqrt{\alpha-1}}\,I$.

Така получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{2k} - X_{2k+1}\| &\leq \|P-Q\| \int_0^{\infty} e^{-2\frac{\sigma_m}{\sqrt{\alpha-1}}\,t} dt \;=\; \|P-Q\| \,\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\,\sigma_m} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\,\sigma_m} \left\| A\,(X_{2k-1} - I)^{-1} A^* - A\,(X_{2k} - I)^{-1} A^* \right\| \\ &= \frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\,\sigma_m} \left\| A\,(X_{2k} - I)^{-1} (X_{2k} - X_{2k-1})\,(X_{2k-1} - I)^{-1} A^* \right\| \\ &\leq \frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\,\sigma_m} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma_m - \sqrt{\alpha-1}} \right)^2 \|A\|^2 \,\|X_{2k} - X_{2k-1}\| \\ &= \theta\,\|X_{2k} - X_{2k-1}\|\,, \end{aligned}$$

където $\theta = \frac{\sqrt{\alpha-1}}{2\,\sigma_m} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma_m - \sqrt{\alpha-1}} \right)^2 \|A\|^2$. От условието (iii) имаме $\theta < 1$.

Следователно, подредиците $\{X_{2q}\}$, $\{X_{2p+1}\}$ са сходящи и имат една и съща граница, която е положително определено решение на уравнението (1.2.23).

$\square$

Забележка 1.2.1. *От неравенството*

$$\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A \geq I$$

при $\alpha > 0$ *следва, че матрицата* A *е неособена и* $\alpha < \sigma_m^2 + 1$, *където* σ_m *е най-малката сингулярна стойност на* A.

Теорема 1.2.5. *[22] Ако съществува реално число* $\alpha > 2$, *за което са изпълнени неравенствата:*

(*i*) $AA^* > \alpha^2(\alpha-1)\,I\,;$

(*ii*) $\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A < I\,;$

(*iii*) $\|A\|^2 < 2\alpha(\alpha-1)^2\,,$

тогава уравнението (1.2.23) има положително определено решение.

Доказателство. По подобие на предната теорема, разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$, която се получава по формула (1.2.24) с $\gamma = \alpha$. Използвайки условието (*i*) получаваме

$$X_1 = \sqrt{A\,(X_0 - I)^{-1}\,A^*} = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} > \alpha\,I = X_0\,.$$

Освен това, имаме

$$X_2 = \sqrt{A\,(X_1 - I)^{-1}\,A^*} < \sqrt{A\,(X_0 - I)^{-1}\,A^*} = X_1\,.$$

От (*ii*) имаме $X_1 - I < \frac{1}{\alpha^2}A^*A$ и

$$X_2 = \sqrt{A\,(X_1 - I)^{-1}\,A^*} > \alpha\,I = X_0\,.$$

Следователно, получаваме $X_0 < X_2 < X_1$.

По индукция доказваме, че

$$\alpha I = X_0 < X_{2p} < X_{2p+2} < X_{2q+3} < X_{2q+1} < X_1$$

за всеки две положителни цели числа p, q.

Следователно, подредиците $\{X_{2p}\}$, $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи. Сега ще докажем, че границите им са едни и същи.

Имаме

$$\|X_{2k+1} - X_{2k}\| = \left\| \sqrt{A\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^*} - \sqrt{A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,A^*} \right\| .$$

Отбелязваме $P = A\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^*$, $\quad Q = A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,A^*$.

Аналогично на разсъжденията в доказателството на предната теорема, получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\sqrt{P}\,t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}\,t}\,dt \right\| \\ &\le \int_0^\infty \|P-Q\| \left\|e^{-\sqrt{P}\,t}\right\| \left\|e^{-\sqrt{Q}\,t}\right\| dt\,. \end{aligned}$$

За всеки елемент на редицата $\{X_s\}$ имаме $\alpha\,I = X_0 < X_s$, откъдето получаваме

$$\left\|(X_s - I)^{-1}\right\| \;<\; \left\|(X_0 - I)^{-1}\right\| \;=\; \frac{1}{\alpha - 1},$$

$$\sqrt{P} \;=\; X_{2k+1} \;>\; \alpha\,I, \qquad \sqrt{Q} \;=\; X_{2k} \;>\; \alpha\,I\,.$$

Така, получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &\le \|P-Q\| \int_0^\infty e^{-2\alpha\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{2\,\alpha}\,\|P-Q\| \\ &= \frac{1}{2\,\alpha}\left\|A\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^* - A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,A^*\right\| \\ &= \frac{1}{2\,\alpha}\left\|A\,(X_{2k-1} - I)^{-1}\,(X_{2k-1} - X_{2k})\,(X_{2k} - I)^{-1}\,A^*\right\| \\ &\le \frac{\|A\|^2}{2\,\alpha\,(\alpha-1)^2}\,\|X_{2k-1} - X_{2k}\| \;=\; \theta\,\|X_{2k-1} - X_{2k}\|\,, \end{aligned}$$

където $\theta = \frac{\|A\|^2}{2\,\alpha(\alpha-1)^2}$. От условието (iii) имаме $\theta < 1$.

Следователно, подредиците $\{X_{2p}\}$, $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи и имат една и съща граница, която е положително определено решение на уравнението (1.2.23).

□

Забележка 1.2.2. *Строгите неравенства в (i) и (ii) съответно на теореми 1.2.4 и 1.2.5 можем да заменим с нестроги неравенства.*

Забележка 1.2.3. *Ако матрицата A в теореми 1.2.4 и 1.2.5 е нормална, тогава условие (i) е следствие на условие (ii) в теорема 1.2.4, а при теорема 1.2.5 е обратно, т.е., (ii) е следствие на (i). Освен това, ако в теорема 1.2.4 заедно с условие (i) имаме и $AA^* > \frac{\alpha^2}{\alpha-1}I$ ($AA^* \geq \frac{\alpha^2}{\alpha-1}I$ съгласно забележка 1.2.2), тогава следва условие (ii).*

Поради трудността на определянето на α в теореми 1.2.4 и 1.2.5 ще изкажем едно следствие от теорема 1.2.5, което улеснява избора на α в този случай.

Следствие 1.2.6. *Ако за матрицата A съществува реално число $\alpha > 2$, за което са изпълнени неравенствата*

$$\alpha^2 \left[\sqrt{2\alpha(\alpha-1)} - 1\right] I \leq AA^* < 2\alpha\,(\alpha-1)^2\, I\,,$$

тогава уравнението (1.2.23) има положително определено решение.

Доказателство. Нека съществува α с желаните свойства. Понеже

$$\alpha^2(\alpha-1) \leq \alpha^2 \left[\sqrt{2\alpha(\alpha-1)} - 1\right] \quad \text{за всяко} \quad \alpha \geq 2\,,$$

то следва условие (i) на теорема 1.2.5.

Разглеждаме

$$\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A\,,$$

за което от дадените неравенства за AA^*, получаваме

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A \;&<\; \sqrt{2\alpha\,(\alpha-1)}\; I \;-\; \frac{1}{\alpha^2}A^*A \\
&\leq\; \sqrt{2\alpha\,(\alpha-1)}\; I \;-\; \left(\sqrt{2\alpha(\alpha-1)} - 1\right) I \\
&=\; I\,.
\end{aligned}$$

Следователно изпълнено е и условие (ii) на теорема 1.2.5. □

Преди да разгледаме следващия итерационен метод, ще изкажем една теорема на Reurings [31], която се отнася за уравнението

$$X - A^*X^{-n}A = I\,. \tag{1.2.27}$$

Reurings посвещава цяла една глава от своята дисертация [31] на уравнението (1.2.27). На базата на нашите теореми от [22], тя изказва подобни за произволно n.

Теорема 1.2.7. *(Theorem 6.3.12, [31]) Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Ако $1 < \alpha < \beta$ удовлетворяват*

(i) $\alpha^n(\beta - 1)\, I \leq AA^* \leq \beta^n(\alpha - 1)\, I$,

(ii) $\frac{\|A\|^2}{n}\left(\frac{\sigma_m^2}{\beta-1}\right)^{\frac{1-n}{n}}\frac{1}{(\alpha-1)^2} < 1$,

където σ_m е най-малката сингулярна стойност на A, тогава уравнението (1.2.27) има единствено решение $\bar{X}$ в $[\alpha I,\, \beta I]$ и $\lim_{s\to\infty} X_s = \bar{X}$, където

$$X_{s+1} = \sqrt[n]{A\,(X_s - I)^{-1}\,A^*}$$

за всяко $X_0 \in [\alpha I,\, \beta I]$.

В случай на $n = 2$, Reurings [31] показва, че ако за матрицата A са изпълнени условията $(i), (ii)$ на теорема 1.2.7, то са изпълнени и условията $(i), (ii)$ и (iii) на нашата теорема 1.2.4.

Разглеждаме втори итерационен метод за уравнение (1.2.23)

$$X_0 = \eta I, \quad X_{s+1} = I + A^* X_s^{-2} A, \quad s = 0, 1, 2, \dots \tag{1.2.28}$$

Теорема 1.2.8. *[22] Ако за матрицата A съществуват числа α, β, за които са изпълнени неравенствата:*

(i) $1 \leq \alpha < \beta < \frac{\alpha}{2} + 1$;

(ii) $\beta^2(\alpha - 1)\, I \leq A^*A \leq \alpha^2(\beta - 1)\, I$,

тогава матричната редица $\{X_s\}$ дефинирана с (1.2.28) за $\eta \in [\alpha, \beta]$ е сходяща и границата ѝ X е положително определено решение на (1.2.23). Сходимостта е поне линейна с частно $q = \frac{2(\beta-1)}{\alpha} < 1$ и $X \in [\alpha I,\, \beta I]$.

Доказателство. Разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$, която се получава по формула (1.2.28). За $X_0 = \eta I$ имаме $X_0 \in [\alpha I, \beta I]$. Допускаме, че $X_k \in [\alpha I, \beta I]$. Тогава получаваме

$$\frac{1}{\beta^2} A^* A \le A^* X_k^{-2} A \le \frac{1}{\alpha^2} A^* A .$$

От неравенствата (ii) получаваме $(\alpha - 1)\, I \le \frac{1}{\beta^2} A^* A$ и $\frac{1}{\alpha^2} A^* A \le (\beta - 1)\, I$, откъдето следва, че

$$\alpha I \le X_{k+1} = I + A^* X_k^{-2} A \le \beta I .$$

Следователно, всеки елемент на матричната редица $\{X_s\}$ е в $[\alpha I, \beta I]$. Ще докажем, че $\{X_s\}$ е редица на Коши. За целта имаме

$$\begin{aligned} X_{k+p} - X_k &= A^* \left(X_{k+p-1}^{-2} - X_{k-1}^{-2}\right) A \\ &= A^* X_{k-1}^{-2} \left(X_{k-1}^2 - X_{k+p-1}^2\right) X_{k+p-1}^{-2} A \\ &= A^* X_{k-1}^{-2} \left[X_{k-1} \left(X_{k-1} - X_{k+p-1}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(X_{k-1} - X_{k+p-1}\right) X_{k+p-1}\right] X_{k+p-1}^{-2} A \\ &= A^* X_{k-1}^{-1} \left(X_{k-1} - X_{k+p-1}\right) X_{k+p-1}^{-2} A \\ &\quad + A^* X_{k-1}^{-2} \left(X_{k-1} - X_{k+p-1}\right) X_{k+p-1}^{-1} A . \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \|X_{k+p} - X_k\| &\le \left(\left\|A^* X_{k-1}^{-1}\right\| \left\|X_{k+p-1}^{-2} A\right\| + \left\|A^* X_{k-1}^{-2}\right\| \left\|X_{k+p-1}^{-1} A\right\|\right) \\ &\quad \times \|X_{k-1} - X_{k+p-1}\| . \end{aligned}$$

Но за всяко s имаме $\|X_s^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha}$ и $\|X_s^{-2}\| \le \frac{1}{\alpha^2}$. Отново от условие (ii) имаме $\|A\| \le \sqrt{\alpha^2 (\beta - 1)}$.

Следователно

$$\left\|A^* X_s^{-1}\right\| \le \frac{\sqrt{\alpha^2 (\beta - 1)}}{\alpha}, \quad \left\|A^* X_s^{-2}\right\| \le \frac{\sqrt{\alpha^2 (\beta - 1)}}{\beta^2} .$$

От тук за произволни положителни цели числа p и k имаме

$$\|X_{k+p} - X_k\| \le \frac{2(\beta - 1)}{\alpha} \|X_{k+p-1} - X_{k-1}\| .$$

По условие (i) имаме $\beta < \frac{\alpha}{2} + 1$, откъдето следва, че $q = \frac{2(\beta-1)}{\alpha} < 1$.

Получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{k+p} - X_k\| &\leq q^k \|X_p - X_0\| \\ &\leq \frac{q^k(1-q^p)}{1-q} \|X_1 - X_0\| . \end{aligned}$$

Следователно матричната редица $\{X_s\}$ е редица на Коши в Банаховото пространство $[\alpha I, \beta I]$. Следователно $\{X_s\}$ е сходяща и границата й $X \in [\alpha I, \beta I]$ е решение на уравнението (1.2.23). Освен това имаме

$$\begin{aligned} \|X_{s+1} - X\| &\leq \left(\left\|A^* X^{-1}\right\| \left\|X_s^{-2} A^*\right\| + \left\|A^* X^{-2}\right\| \left\|X_s^{-1} A^*\right\|\right) \|X_s - X\| \\ &\leq \frac{2(\beta-1)}{\alpha} \|X_s - X\| . \end{aligned}$$

С това доказахме, че скоростта на сходимост не е по-лоша от това на геометрична прогресия. □

Reurings обобщава предходната теорема за произволно n, т.е., за уравнение (1.2.27). Тя разглежда изображението

$$\mathcal{G}_{A,n}(X) = I + A^* X^{-n} A .$$

Изображението $\mathcal{G}_{A,n}$ приложено k пъти означаваме с $\mathcal{G}^k_{A,n}(X)$.

Теорема 1.2.9. *(Theorem 6.3.1, [31]) Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Тогава $\mathcal{G}_{A,n}$ е свиващо в множеството $[\alpha I, \beta I]$ с $0 < \alpha < \beta$ тогава и само тогава, когато α и β удовлетворяват*

(i) $\beta^n(\alpha - 1) I \leq AA^* \leq \alpha^n(\beta - 1) I$,

(ii) $\frac{n}{\alpha^{n+1}} \|A\|^2 < 1$.

Освен това, в този случай уравнението (1.2.27) има единствено решение $\bar{X}$ в $[\alpha I, \beta I]$ и

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{G}^k_{A,n}(X) = \bar{X},$$

за всяко $X \in [\alpha I, \beta I]$.

В условието на предходната теорема случая на $\alpha \in (0,1)$ не е интересен, понеже $AA^* \geq 0$ винаги и за кое да е положително определено решение X имаме $X \geq I$.

Не е трудно да се забележи, че ако $1 \leq \alpha < \beta$ и условие (i) на теорема 1.2.9 е изпълнено, то $\alpha < \frac{n}{n-1}$, $(n > 1)$.

В случай на $n = 2$, Reurings [31] отбелязва, че ако α, β удовлетворяват теорема 1.2.8, то те удовлетворяват и теорема 1.2.9. Така оставаме с впечатление, че изказаната от нея теорема е не само обобщение за произволно n, но е и по-обща, т.е., обхваща по-широк клас матрици A. Ще покажем, че е вярно и обратното, т.е., ако има α и β, които удовлетворяват теорема 1.2.9, то съществуват $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ удовлетворяващи теорема 1.2.8.

Нека с $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ означим множеството от двойки (α, β), за които условията на теорема 1.2.9 са удовлетворени. Освен това, нека $(\tilde{\alpha}, \beta)$ е произволна двойка от $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$, тогава двойката $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$, където $\tilde{\beta} = \frac{\sigma_1^2}{\tilde{\alpha}^2} + 1$ и σ_1 е максималната сингулярна стойност на A. Не е трудно да се забележи, че $\tilde{\beta} \leq \beta$. Ще покажем, че $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ удовлетворяват теорема 1.2.8. Щом $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$, то $\sigma_1^2 < \frac{\tilde{\alpha}^3}{2}$. Следователно $\tilde{\beta} = \frac{\sigma_1^2}{\tilde{\alpha}^2} + 1 < \frac{\tilde{\alpha}}{2} + 1$.

На фиг. 1.1 са дадени графиките на функциите, които определят множествата от допустимите стойности на α и β за двете теореми.

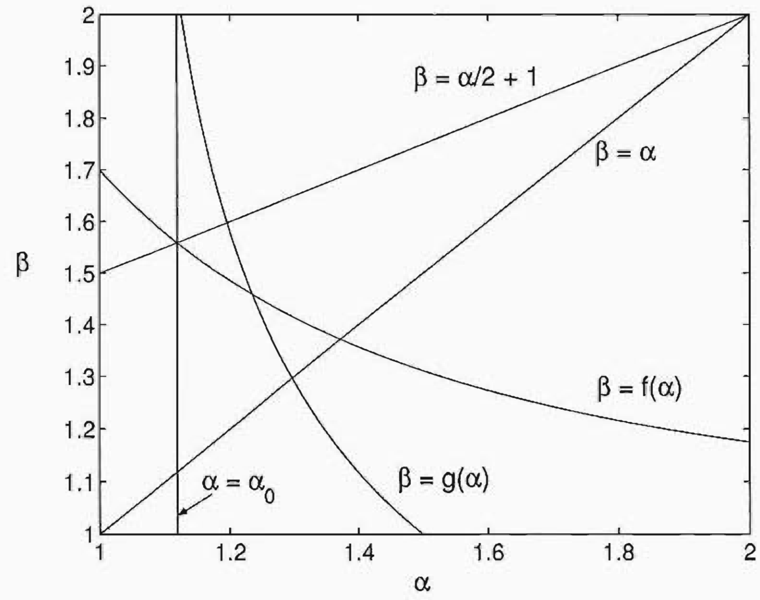
Областта от допустими стойности на α и β по теорема 1.2.8 е

$$D_1 = \begin{cases} \beta \leq \frac{\alpha}{2} + 1\,, \\ \beta \leq f(\alpha) \equiv \frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + 1\,, \\ \beta \geq g(\alpha) \equiv \frac{\sigma_m}{\alpha - 1}\sqrt{\alpha - 1}\,, \end{cases}$$

а по теорема 1.2.9 областта е

$$D_2 = \begin{cases} \alpha \geq \alpha_0 \equiv \max\left\{1,\ \sqrt[3]{2\sigma_1^2}\right\}\,, \\ \beta \leq f(\alpha)\,, \\ \beta \geq g(\alpha)\,. \end{cases}$$

Графиките на фиг. 1.1 са при $\sigma_1^2 = \frac{7}{10}$ и $\sigma_m^2 = \frac{1}{2}$. От фигурата и от казаното по-горе се вижда, че $D_1 \subset D_2$, но множеството от стойности на α съвпада и



Фиг. 1.1: Области на допустими α и β

при двата случая, за разлика от стойностите на β.

Предимство на теорема 1.2.9 е, че тя дава по-голямо множество $[\alpha I, \beta I]$, в което има единствено решение. Това не е съществено, понеже Reurings [31] след поредица от леми изказва по-силна теорема.

Теорема 1.2.10. *(Theorem 6.3.10, [31]) Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и σ_1, σ_m са съответно максималната и минималната сингулярни стойности на A такива, че*

(*i*) $\sigma_1^2 < \frac{n^n}{(n-1)^{n+1}}$,

(*ii*) $\sigma_m^2 > \left(\frac{1}{n}\sqrt[n+1]{n\sigma_1^2}+1\right)^n\left(\sqrt[n+1]{n\sigma_1^2}-1\right)$.

Тогава уравнението (1.2.27) има единствено положително определено решение $\bar{X}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{G}_{A,n}^k(X) = \bar{X},$$

за всяко $X > 0$.

Условията (*i*) и (*ii*) на теорема 1.2.9 и теорема 1.2.10 са еквивалентни.

Освен това, α и β може да се изберат съответно

$$\alpha = \hat{\alpha} = \frac{\sigma_m^2}{\left(\frac{1}{n}\sqrt[n+1]{n\sigma_1^2}+1\right)^n} + 1\,, \qquad \beta = \hat{\beta} = \frac{1}{n}\sqrt[n+1]{n\sigma_1^2} + 1 \qquad (1.2.29)$$

(Lemma 6.3.4 [31]).

Продължаваме изследванията при $n = 2$. Понеже функцията $h(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha)$ е монотонно намаляваща за $\alpha > 1$ и точната долна граница на допустимите α по теореми 1.2.8 и 1.2.9 е α_0, то необходимо и достатъчно условие за съществуване на α и β по споменатите теореми освен теорема 1.2.10 може да бъде и $\lim_{\alpha\to\alpha_0} h(\alpha) > 0$ и $\alpha_0 < 2$.

Аналогични функци на g и f могат да се дадат и за произволно n, а именно

$$f(\alpha) = \frac{\sigma_1^2}{\alpha^n} + 1\,, \qquad g(\alpha) = \sqrt[n]{\frac{\sigma_m^2}{\alpha - 1}}\,. \qquad (1.2.30)$$

Със следващата теорема ще дадем оптималния избор на α и β, т. е., максималното α и минималното β, за които теорема 1.2.9 е удовлетворена (в частност на $n = 2$ и теорема 1.2.8).

Теорема 1.2.11. *Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и σ_1, σ_m са съответно максималната и минималната сингулярни стойности на A такива, че за $\alpha_0 = \max\left\{1,\ \sqrt[n+1]{n\sigma_1^2}\right\}$ имаме*

(*i*) $\alpha_0 < \frac{n}{n-1}\,,$

(*ii*) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\,[g(\alpha) - f(\alpha)] > 0\,,$

където f, g са дефинирани в (1.2.30). Тогава числовите редици

$$\beta_{k+1} = f(\alpha_k)\,, \qquad \alpha_{k+1} = g^{-1}(\beta_{k+1})\,, \qquad k = 0, 1, \ldots\,, \qquad (1.2.31)$$

където g^{-1} е обратната функция на g $\left(g^{-1}(\beta) = \frac{\sigma_m^2}{\beta^n} + 1\right)$ са сходящи и границите им α_∞ и β_∞ са съответно най-голямото α и най-малкото β, за които теорема 1.2.9 е удовлетворена.

Доказателство. Условията (i) и (ii) са еквивалентни на съответните от теорема 1.2.10. Следователно, съществуват α и β, които удовлетворяват теорема 1.2.9.

Нека $\beta_0 = \lim_{\alpha\to\alpha_0} g(\alpha)$. От формулите (1.2.31) имаме, че $\beta_1 = f(\alpha_0)$, за което съответно от (i) следва $\beta_1 > \alpha_0$ и от (ii) следва $\beta_0 > \beta_1$. Двете функции f и g^{-1} са монотонно намаляващи за $x > 0$. Освен това, $f(x) \geq g^{-1}(x)$ за $x > 0$, като равенство имаме, когато $\sigma_1 = \sigma_m$. От тук имаме веригата неравенства

$$\beta_1 = f(\alpha_0) \geq g^{-1}(\alpha_0) > g^{-1}(\beta_1) = \alpha_1\,,$$

$$\beta_2 = f(\alpha_1) \geq g^{-1}(\alpha_1) > g^{-1}(\beta_1) = \alpha_1\,.$$

Освен това, от дефиницията на β_0 имаме $\alpha_0 = \lim_{\beta\to\beta_0} g^{-1}(\beta)$. От $\beta_0 > \beta_1$ и монотонността на g^{-1} следва $\alpha_1 > \alpha_0$, откъдето заедно с монотонността на f следва $\beta_2 < \beta_1$.

Аналогично на горните разсъждения по индукция лесно се показва, че за всяко k, имаме $\alpha_k \leq \beta_k$, $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ и $\beta_{k+1} \leq \beta_k$, т.е., редиците $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ са съответно монотонно растяща и монотонно намаляваща и ограничени. Следователно те са сходящи. Нека границите им са съответно α_∞ и β_∞. Тогава

$$\beta_\infty = \frac{\sigma_1^2}{\alpha_\infty^n} + 1\,, \qquad \alpha_\infty = \frac{\sigma_m^2}{\beta_\infty^n} + 1\,.$$

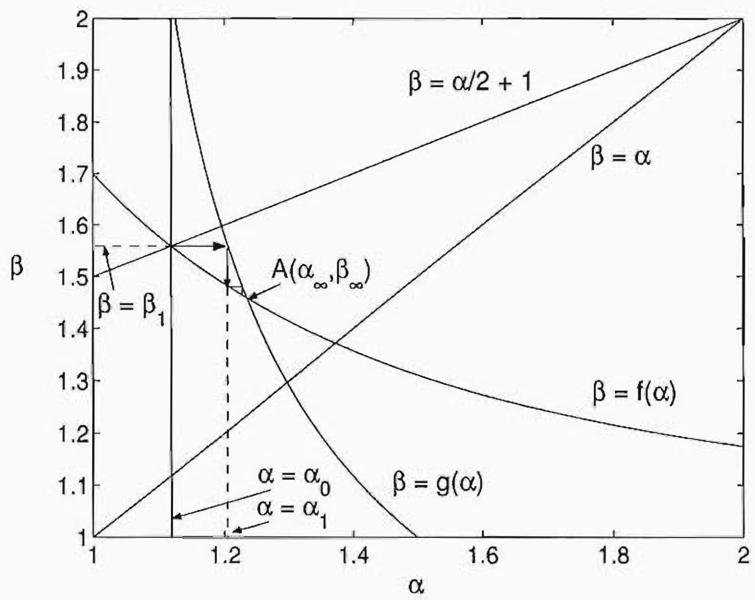
От тук и неравенствата

$$\beta_\infty^n\,(\alpha_\infty - 1)\,I \leq AA^* \leq \alpha_\infty^n\,(\beta_\infty - 1)\,I\,.$$

Освен това, от $\alpha_0 \geq \sqrt[n+1]{n\sigma_1^2}$ имаме $n\,\|A\|^2 \leq \alpha_0^{n+1} < \alpha_\infty^{n+1}$.

Следователно α_∞, β_∞ удовлетворяват теорема 1.2.9. □

Отбелязваме, че предложените от Reusings [31] $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ дадени с формули (1.2.29) са съответно α_1 и β_1 на редиците $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$. На фиг. 1.2 са дадени съответните елементи на разгледаните числови редици и техните граници α_∞ и β_∞ съответно.



Фиг. 1.2: Оптимални стойности на α и β — α_∞ и β_∞

1.2.3 Числени експерименти

В тази секция ще опишем резултатите от числените експерименти за уравнението (1.2.23) с различни коефициенти-матрици A и размерност m, т.е., ще пресмятаме приближено положително определено решение с двата предложени метода (1.2.24) и (1.2.28) с различни начални приближения.

Програмите, с които се реализират итерационните методи са писани на MATLAB.

Нека елементите на матричната редица генерирана с рекурентната формула (1.2.24) ги бележим с Y_s, а елементите на редицата от формула (1.2.28) с X_s. И за двата метода за стоп критерий използваме съответно

$$\|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty \leq tol \quad \text{и} \quad \|X_{s+1} - X_s\|_\infty \leq tol\,,$$

където tol е желаната точност. Най-малкия брой итерации, за които се достига съответния стоп критерий бележим с $iter$. Нека $\varepsilon(Z) = \|Z - A^*Z^{-2}A - I\|_\infty$.

Отбелязваме, че за метод (1.2.24) с елементи Y_s имаме

$$Y_{s+1} - Y_s = Y_{s+1} - A^*\,Y_{s+1}^{-2}\,A - I\,,$$

получаваме го аналогично на резултата за уравнението от предния параграф. Следователно $\varepsilon(Y_{s+1}) = \|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty$. За втория метод имаме $X_{s+1} - X_s = -(X_s - A^* X_s^{-2} A - I)$, откъдето $\varepsilon(X_s) = \|X_{s+1} - X_s\|_\infty$. За краткост в таблиците с резултати от експериментите, $\varepsilon(Y_{iter})$ и $\varepsilon(X_{iter-1})$ ще означим с ε.

Ще сравним методите с различни начални приближения, т.е., с различни стойности на γ и η.

Пример 1.2.1. *Разглеждаме уравнението (1.2.23) с матрица $A = UDU^T$, където D е диагонална матрица с елементи $d_{ii} = \sqrt{10m - i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $U = I - \frac{2vv^T}{m}$ с вектор $v = (1, 1, \ldots, 1)^T$.*

Минималната и максималната сингулярни стойности на матрицата A в разгледания пример са съответно $\sigma_m = 3\sqrt{m}$ и $\sigma_1 = \sqrt{10m - 1}$. Освен това, примера е със симетрична матрица, в частност на нормална, с цел по-лесно определяне на α, което да удовлетворява теорема 1.2.4 или теорема 1.2.5. Имайки впредвид забележки 1.2.2 и 1.2.3 за двете теореми определяме α по следния начин:

- за теорема 1.2.4.

  От неравенството $AA^T \le \alpha^2(\alpha - 1)I$ определяме допустимото най-малко $\alpha = \alpha_{min}$. (α_{min} е реалното решение на уравнението $\alpha^2(\alpha - 1) = \sigma_1^2$). За $\alpha = \alpha_{min}$ проверяваме неравенството $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \le \sigma_m^2$ и условие (*iii*) на теорема 1.2.4. Ако не са удовлетворени, то не съществува α за избраната симетрична матрица A, което да удовлетворява теорема 1.2.4.

- за теорема 1.2.5.

  От неравенството $\alpha^2(\alpha - 1)I \le AA^T$ определяме допустимото най-голямо $\alpha = \alpha_{max}$. (α_{max} е реалното решение на уравнението $\alpha^2(\alpha - 1) = \sigma_m^2$). За $\alpha = \alpha_{max}$ проверяваме условие (*iii*) на теорема 1.2.5. Ако не е удовлетворено, то не съществува α за избраната симетрична матрица A, което да удовлетворява теорема 1.2.5.

Таблица 1.2: Резултати за пример 1.2.1 с $tol = 10^{-7}$.

m	γ	$iter$	ε
5	$\alpha_{min} = 4.0248$	38	$7.89e{-8}$
	$1.1\alpha_{min}$	42	$6.75e{-8}$
	$\alpha_{max} = 3.9234$	37	$9.13e{-8}$
	$\alpha_{mn} = 3.6065$	40	$9.88e{-8}$
	$2\alpha_{min}$	46	$7.92e{-8}$
	2	46	$8.66e{-8}$
	1.5	47	$9.76e{-8}$
50	$\alpha_{min} = 8.2794$	30	$7.24e{-8}$
	$1.1\alpha_{min}$	32	$6.17e{-8}$
	$\alpha_{max} = 7.2610$	31	$8.71e{-8}$
	$\alpha_{mn} = 6.9792$	32	$6.12e{-8}$
	$2\alpha_{min}$	34	$9.80e{-8}$
	2	36	$8.66e{-8}$

В таблица 1.2 са дадени резултатите от експериментите за пример 1.2.1 с метод (1.2.24) при различни стойности на γ. За $\alpha = \alpha_{min}$ и $\alpha = 1.1\alpha_{min}$ теорема 1.2.4 е удовлетворена, откъдето следва сходимостта на (1.2.24) при $\gamma = \alpha_{min}$ и $\gamma = 1.1\alpha_{min}$. За всяко $\alpha \in [\alpha_{mn}, \alpha_{max}]$ теорема 1.2.5 е удовлетворена, където $\alpha_{mn} = x_1 + 0.0001$, $x_1 > 1$ е решение на уравнението $2x(x-1)^2 = \sigma_1^2$.

Независимо, че теорема 1.2.4 и теорема 1.2.5 не са удовлетворени за $\alpha = 2\alpha_{min}, \alpha = 2$ и $\alpha = 1.5$, то след съответно $46, 46$ и 47 итерации с метод (1.2.24) се достига желаната точност при $m = 5$ и $34, 36$ и 36 итерации при $m = 50$.

Пример 1.2.2. *Разглеждаме уравнението (1.2.23) с матрица $A = UD$, където D и U са матриците от пример 1.2.1.*

В пример 1.2.2 матрицата A вече не е симетрична, но е със същите сингулярни стойности. За този пример ще определим α, така че да удовлетворява следствие 1.2.6. Нека α_{mx} е реалното решение на уравнение

$$\alpha^2 \left[\sqrt{2\alpha(\alpha-1)} - 1\right] = \sigma_m^2 ,$$

което намираме с функция `fzero` на MATLAB. След това проверяваме за неравенството $\|A\|^2 < 2\alpha(\alpha-1)^2$.

Таблица 1.3: Резултати за пример 1.2.2 с $tol = 10^{-7}$.

m	γ	$iter$	ε
5	$\alpha_{max} = 3.9234$	37	$9.15e{-8}$
	$\alpha_{mx} = 3.6437$	40	$9.30e{-8}$
	$\alpha_{mn} = 3.6065$	41	$7.96e{-8}$
	2	46	$8.35e{-8}$
50	$\alpha_{max} = 8.0113$	30	$3.36e{-8}$
	$\alpha_{mx} = 7.2610$	31	$9.41e{-8}$
	$\alpha_{mn} = 6.9792$	32	$5.67e{-8}$
	2	36	$6.60e{-8}$

В таблица 1.3 са дадени резултатите от експериментите за пример 1.2.2 с метод (1.2.24) при различни стойности на γ. За всяко $\alpha \in [\alpha_{mn}, \alpha_{mx}]$ следствието 1.2.6 е удовлетворено. Въпреки че матрицата A е несиметрична, то определеното α_{max} по начина описан по-горе, удовлетворява теорема 1.2.5. Както и при предходния пример $\alpha = 2$ не удовлетворява и двете теореми 1.2.4 и 1.2.5.

Със следващия пример ще илюстрираме метод (1.2.28) и теоремите свързани с него.

Пример 1.2.3. *Разглеждаме уравнението (1.2.23) с матрица $A = UD$, където D е диагонална матрица с елементи $d_{ii} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{i-1}{2n}\right)}$, а U е матрицата дефинирана в пример 1.2.1.*

Таблица 1.4: Резултати за пример 1.2.3 с $tol = 10^{-7}$.

m	η	$iter$	ε
5	1	27	$8.14e{-8}$
	$\hat{\alpha} = 1.2056$	26	$5.83e{-8}$
	$\hat{\beta} = 1.5593$	26	$5.32e{-8}$
	$\alpha_5 = 1.2348$	25	$8.61e{-8}$
	$\beta_5 = 1.4593$	24	$9.51e{-8}$
	$(\hat{\alpha} + \hat{\beta})/2$	22	$7.66e{-8}$
	$(\alpha_5 + \beta_5)/2$	22	$8.76e{-8}$

В таблица 1.4 са дадени резултатите от експериментите за пример 1.2.3 с метод (1.2.28) при различни стойности на η. Тук $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ са предложените от Reurings стойности съответно на α, β коментирани в предходната секция и α_5, β_5 са съответно петите членове на редиците $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ дефинирани в (1.2.31). Виждаме, че при $\eta = \alpha_5$ и $\eta = \beta_5$ правим по-малко итерации в сравнение с тези, при които $\eta = \hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, 1. Разликата не е значителна. Определянето на α_5, β_5 или границите α_∞, β_∞ е за определяне на минимален интервал-множество $[\alpha_\infty I, \beta_\infty I]$, в който имаме решение на уравнението (1.2.23), понеже при $\eta = \frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2}$ се правят най-малко итерации.

Глава 2

Положително определени решения на матричните уравнения $X \pm A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$

В тази глава разглеждаме втория клас от нелинейни матрични уравнения

$$X \pm A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q\,, \tag{2.0.1}$$

Първи изследвания върху уравненията (2.0.1) има при $n = 2$ и $Q = I$ [1]. През 2001 г. и 2002 г. съответно излизат работите на El-Sayed с Ran [7] и на Ran с Reurings [30] за матричното уравнение

$$X + A^* \mathcal{F}(X)\, A = Q\,.$$

В първата публикация матричната функция $\mathcal{F}$ е монотонно растяща или монотонно намаляваща, докато във втората няма такива ограничения.

Други работи посветени на уравнения от вида на (2.0.1) са: на Liu и Gao ([26], 2003) за уравненията $X^s \pm A^T X^{-t} A = I$, където s и t са естествени числа; на Du и Hou ([5], 2003), които разглеждат операторното уравнение $X^m + A^* X^{-n} A = I$.

2.1 Теореми за съществуване и методи за пресмятане решенията на $X + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$

Този параграф е посветен на матричното уравнение

$$X + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q\,, \tag{2.1.2}$$

където A е $m \times m$ матрица, Q е положително определена матрица, а X е неизвестната матрица.

Изведени са необходими условия и достатъчни условия за съществуване на положително определени решения и са предложени итерационни методи за численото им пресмятане. Направени са числени експерименти.

Уравнението (2.1.2) при $n = 2$ и $Q = I$ е разгледано за първи път от El-Sayed [1]. По-късно [15], получаваме по-добри достатъчни условия за съществуване на положително определени решения за този на разгледаното уравнение, след модификация на предложения от El-Sayed итерационен метод.

Параграфът е разделен на три секции. В първата е изследвано уравнението в общия му вид, в следващата са дадени получените предварително резултати от други автори и специфични резултати за $n = 2$ и в последната секция са описани резултатите от числените експерименти.

2.1.1 Изследване на уравнението $X + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$

Разглеждаме итерационни методи за получаване на положително определени решения на уравнение (2.1.2). Преди това ще изкажем теореми с необходимо условие, за да има уравнението (2.1.2) положително определени решения и свойства на тези решения.

Теорема 2.1.1. *Ако матричното уравнение (2.1.2) има положително определено решение X, тогава*

$$\sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A} - AQ^{-1}A^* > 0 \tag{2.1.3}$$

и

$$\sqrt[n]{X} \in \left(AQ^{-1}A^*,\ \sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A} \right]. \qquad (2.1.4)$$

Доказателство. Нека (2.1.2) има положително определено решение X, тогава имаме $0 \le A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A < Q$. От тук получаваме последователно $X \le Q$ и

$$X = Q - A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A \le Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A,$$

откъдето и

$$\sqrt[n]{X} \le \sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A}.$$

От друга страна, от $A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A < Q$ следват

$$\begin{aligned} \sqrt{Q^{-1}}A^* \sqrt[2n]{X^{-1}} \sqrt[2n]{X^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}} &< I, \\ \sqrt[2n]{X^{-1}}AQ^{-1}A^* \sqrt[2n]{X^{-1}} &< I, \\ AQ^{-1}A^* &< \sqrt[n]{X}. \end{aligned}$$

Следователно

$$AQ^{-1}A^* < \sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A}.$$

С това теоремата е доказана. □

Теорема 2.1.2. *Ако матричното уравнение (2.1.2) има положително определено решение X, то*

$$X \in \left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{n-1} (AQ^{-1}A^*)^n,\ Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A \right],$$

където μ и ν са минималната и максималната сингулярни стойности съответно на $AQ^{-1}A^*$ и $\sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A}$.

Доказателство. Нека (2.1.2) има положително определено решение X, тогава от теорема 2.1.1 (2.1.4) имаме

$$AQ^{-1}A^* < \sqrt[n]{X} \le \sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A}.$$

Нека m_X и M_X са съответно минималната и максималната сингулярни стойности на $\sqrt[n]{X}$. Тогава $m_X\, I \leq \sqrt[n]{X} \leq M_X\, I$ и съгласно [12] имаме

$$\left(AQ^{-1}A^*\right)^n < \left(\frac{M_X}{m_X}\right)^{n-1} X\,.$$

От $AQ^{-1}A^* < \sqrt[n]{X}$ следва $\mu < m_X$. От друга страна $\sqrt[n]{X} \leq \sqrt[n]{Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A}$, откъдето имаме $\nu \geq M_X$. Тогава окончателно получаваме

$$\left(AQ^{-1}A^*\right)^n < \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{n-1} X\,.$$

От $X > 0$ имаме $0 \leq A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A < Q$, откъдето получаваме $X \leq Q$ и

$$X = Q - A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A \leq Q - A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A\,.$$

С това теоремата е доказана. $\square$

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = \gamma Q, \quad X_{s+1} = Q - A^* \sqrt[n]{X_s^{-1}}A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.1.5}$$

Теорема 2.1.3. *Ако съществуват числа α и β, такива че $\frac{1}{n+1} \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ и матриците A и Q удовлетворяват неравенствата*

$$\sqrt[n]{\alpha}\,(1-\alpha)\; I \leq \sqrt{Q^{-1}}A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}} \leq \sqrt[n]{\beta}\,(1-\beta)\; I, \tag{2.1.6}$$

тогава матричното уравнение (2.1.2) притежава положително определено решение $X \in [\beta\, Q,\, \alpha\, Q]$. Освен това, решението в $[\beta\, Q,\, \alpha\, Q]$ се получава като граница на редицата $\{X_s\}$ от (2.1.5) при $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$.

Доказателство. Ще докажем, че матричната редица $\{X_k\}$ от (2.1.5) при $\gamma = \beta$ е монотонно растяща и ограничена отгоре.

Пресмятаме

$$X_1 = Q - A^* \sqrt[n]{(\beta\, Q)^{-1}}A = \sqrt{Q}\left(I - \sqrt{Q^{-1}}A^* \sqrt[n]{(\beta\, Q)^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}\right)\sqrt{Q}\,.$$

Съгласно (2.1.6) получаваме

$$I - \sqrt{Q^{-1}}A^* \sqrt[n]{(\beta Q)^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}} \geq \beta I.$$

Следователно $X_1 \geq \beta Q = X_0$.

Допускаме, че $X_k \geq X_{k-1}$ за фиксирано k. Пресмятаме

$$X_{k+1} = Q - A^* \sqrt[n]{X_k^{-1}} A \geq Q - A^* \sqrt[n]{X_{k-1}^{-1}} A = X_k \,.$$

Следователно $X_{s+1} \geq X_s$ за $s = 0, 1, 2 \ldots$. С това доказахме, че матричната редица $\{X_s\}$ е монотонно растяща.

Очевидно $X_0 = \beta Q \leq \alpha Q$. Допускаме, че $X_k \leq \alpha Q$. След като отново използваме неравенства (2.1.6) получаваме

$$X_{k+1} = Q - A^* \sqrt[n]{X_k^{-1}} A \leq Q - A^* \sqrt[n]{(\alpha Q)^{-1}} A \leq \alpha Q \,.$$

Следователно матричната редица $\{X_s\}$ е сходяща и нейната граница X е положително определено решение на уравнение (2.1.2).

Тъй като $X_s \in [\beta Q, \, \alpha Q]$ за $s = 1, 2, \ldots$, то и $X \in [\beta Q, \, \alpha Q]$.

Аналогично на случая с $\gamma = \beta$ при $\gamma = \alpha$ доказваме, че редицата $\{X_s\}$ от метод (2.1.5) е монотонно намаляваща и ограничена отдолу. □

Следствие 2.1.4. *Ако* $\left\| \sqrt[2n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}} \right\| \leq \frac{\sqrt{n}\,\sqrt[2n]{(n+1)^{n-1}}}{n+1}$, *тогава матричното уравнение (2.1.2) има положително определено решение* $X \in \left[\frac{1}{n+1}\, Q, \, Q\right]$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(x) = \sqrt[n]{x}(1-x), \quad x \in [0, \, 1]$. Тя е монотонно растяща в $\left[0, \, \frac{1}{n+1}\right]$ и монотонно намаляваща в $\left[\frac{1}{n+1}, \, 1\right]$, като

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} f(x) \;&=\; f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n\,\sqrt[n]{(n+1)^{n-1}}}{(n+1)^2}\,, \\ \min_{x \in [0,1]} f(x) \;&=\; f(0) \;=\; f(1) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

От

$$\left\| \sqrt[2n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}} \right\| \leq \frac{\sqrt{n}\;\sqrt[2n]{(n+1)^{n-1}}}{n+1}$$

следва, че

$$\sqrt{Q^{-1}}A^* \sqrt[n]{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}} \le \frac{n\sqrt[n]{(n+1)^{n-1}}}{(n+1)^2} I .$$

Следователно съществуват α и β удовлетворяващи условията на теорема 2.1.3. $\square$

Забележка 2.1.1. *Нека σ_1 и σ_m са съответно най-голямата и най-малката сингулярни стойности на матрицата $\sqrt[2n]{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}$, тогава за α и β могат да бъдат избрани съответно решенията на уравненията*

$$\sqrt[n]{\alpha}(1-\alpha) = \sigma_m^2 \quad и \quad \sqrt[n]{\beta}(1-\beta) = \sigma_1^2$$

в интервала $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$. Когато $\sigma_1^2 \le \frac{n\sqrt[n]{(n+1)^{n-1}}}{(n+1)^2}$, такива решения съществуват.

Теорема 2.1.5. *Ако матричното уравнение (2.1.2) има положително определено решение, то има и максимално.*

Доказателство. Разглеждаме итерационния метод (2.1.5) с $X_0 = Q$. Очевидно, за кое да е положително определено решение X на уравнение (2.1.2) е вярно $X \le Q = X_0$. Допускаме, че $X_k \ge X$ за фиксирано k. Тогава

$$X_{k+1} = Q - A^* \sqrt[n]{X_k^{-1}}A \ge Q - A^* \sqrt[n]{X^{-1}}A = X .$$

Следователно, за всяко s и кое да е решение X е изпълнено $X_s \ge X$. Освен това, $\{X_s\}$ е монотонно намаляваща матрична редица. Следователно тя е сходяща и границата ѝ X_L е решение на (2.1.2). Понеже $X_L \ge X$ за произволно положително определено решение X, то X_L е максимално положително определено решение. $\square$

Разглеждаме втори итерационен метод за пресмятане на положително определено решение на уравнение (2.1.2).

$$Y_0 = \eta I , \quad Y_{s+1} = \left[A(Q-Y_s)^{-1}A^*\right]^n , \quad s = 0,1,2,\dots \tag{2.1.7}$$

Теорема 2.1.6. *Ако съществуват числа α и β, такива че $0 < \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{n+1}$ и за матриците A и Q са изпълнени неравенствата*

$$\sqrt[n]{\alpha}(1-\alpha)\sqrt[n]{\|Q\|^{n+1}}\, I \leq AA^* \leq \sqrt[n]{\beta}(1-\beta)\sqrt[n]{\|Q^{-1}\|^{-(n+1)}}\, I\,, \qquad (2.1.8)$$

тогава уравнението (2.1.2) има положително определено решение

$$Y \in \left[\alpha \|Q\|\, I,\ \frac{\beta}{\|Q^{-1}\|} I\right] \quad \text{и} \quad \|Y_s - Y\| \leq q^s \left(\frac{\beta}{\|Q^{-1}\|} - \alpha \|Q\|\right),$$

където Y_s е от итерационния метод (2.1.7), $\eta \in \left[\alpha \|Q\|, \beta \|Q^{-1}\|^{-1}\right]$ и

$$q = n\, \|A\|^{2n} \left(\frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta}\right)^{n+1} \leq 1\,. \qquad (2.1.9)$$

Доказателство. Разглеждаме итерационния метод (2.1.7), за който

$$Y_0 \in \left[\alpha \|Q\|\, I,\ \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right].$$

Допускаме, че $Y_k \in \left[\alpha \|Q\|\, I,\ \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$ за фиксирано k.

Следователно

$$\frac{1}{(1-\alpha)\|Q\|} I \leq (Q - Y_k)^{-1} \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} I\,.$$

От тук получаваме

$$A(Q-Y_k)^{-1}A^* \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} AA^* \leq \sqrt[n]{\beta \|Q^{-1}\|^{-1}}\, I$$

и

$$A(Q-Y_k)^{-1}A^* \geq \frac{1}{(1-\alpha)\|Q\|} AA^* \geq \sqrt[n]{\alpha \|Q\|}\, I\,.$$

Следователно $Y_{k+1} \in \left[\alpha \|Q\|\, I,\ \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$, откъдето по индукция следва, че $Y_s \in \left[\alpha \|Q\|\, I,\ \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$ за всяко s.

Тъй като изображението

$$\mathcal{G}(Y) \equiv \left[A(Q-Y)^{-1}A^*\right]^n$$

е непрекъснато в изпъкналото множество $\left[\alpha \|Q\|\, I,\ \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$, то от теоремата на Шаудер за неподвижната точка следва, че съществува матрица

$Y \in \left[\alpha \|Q\| I, \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$, за която $\mathcal{G}(Y) = Y$. Понеже A е неособена, то Y удовлетворява матричното уравнение (2.1.2).

Нека положим $P = A(Q-Y)^{-1}A^*$ и $P_s = A\left(Q - Y_{s-1}\right)^{-1} A^*$, тогава

$$\begin{aligned} Y_s - Y &= \sum_{k=1}^{n} P_s^{n-k} \left(P_s - P\right) P^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_s^{n-k} A \left(Q - Y_{s-1}\right)^{-1} \left(Y_{s-1} - Y\right) \left(Q - Y\right)^{-1} A^* P^{k-1}. \end{aligned}$$

Понеже $Y_{s-1} \in \left[\alpha \|Q\| I, \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$, то $\left(Q - Y_{s-1}\right)^{-1} \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} I$, откъдето получаваме $P_s \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} AA^*$.

Аналогично, от това, че $Y \in \left[\alpha \|Q\| I, \beta \|Q^{-1}\|^{-1} I\right]$ имаме

$$\left(Q - Y\right)^{-1} \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} I \quad \text{и} \quad P \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta} AA^*.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|Y_s - Y\| &\leq \|A\|^2 \left\|\left(Q - Y_{s-1}\right)^{-1}\right\| \left\|\left(Q - Y\right)^{-1}\right\| \|Y_{s-1} - Y\| \sum_{k=1}^{n} \left\|P_s^{n-k}\right\| \left\|P^{k-1}\right\| \\ &\leq \left(\|A\| \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta}\right)^2 \|Y_{s-1} - Y\| \sum_{k=1}^{n} \|P_s\|^{n-k} \|P\|^{k-1} \\ &\leq n \left(\|A\| \frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta}\right)^2 \left(\frac{\|Q^{-1}\| \|A\|^2}{1-\beta}\right)^{n-1} \|Y_{s-1} - Y\| \\ &= n \|A\|^{2n} \left(\frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta}\right)^{n+1} \|Y_{s-1} - Y\| \\ &\leq q^s \|Y_0 - Y\| \leq q^s \left(\frac{\beta}{\|Q^{-1}\|} - \alpha \|Q\|\right), \end{aligned}$$

където $q = n \|A\|^{2n} \left(\frac{\|Q^{-1}\|}{1-\beta}\right)^{n+1}$.

От неравенства (2.1.8) имаме $\|A\|^2 \leq \sqrt[n]{\beta}\,(1-\beta) \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|^{-(n+1)}}$, откъдето

$$\|A\|^{2n} \leq \beta (1-\beta)^n \left\|Q^{-1}\right\|^{-(n+1)} = \frac{\beta}{1-\beta} \left[(1-\beta) \left\|Q^{-1}\right\|^{-1}\right]^{n+1}.$$

Тъй като $\beta \leq \frac{1}{n+1}$, то $\frac{\beta}{1-\beta} \leq \frac{1}{n}$.

Следователно $\|A\|^{2n} \leq \frac{1}{n} \left[(1-\beta) \|Q^{-1}\|^{-1}\right]^{n+1}$, т.е., $q \leq 1$. □

Следствие 2.1.7. *Ако матрицата A е неособена и*

$$\|A\| \sqrt[2n]{\|Q^{-1}\|^{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n} \sqrt[2n]{(n+1)^{n-1}}}{n+1}, \tag{2.1.10}$$

тогава матричното уравнение (2.1.2) има положително определено решение $Y \leq \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I$.

Доказателство. Понеже A е неособена, то съществува число $\alpha > 0$, което удовлетворява първото от неравенствата (2.1.8).

От (2.1.10) следва, че

$$AA^* \leq \frac{n \sqrt[n]{[\|Q^{-1}\| (n+1)]^{n-1}}}{[\|Q^{-1}\| (n+1)]^2} = f\left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{\sqrt[n]{\|Q^{-1}\|^{n-1}}}{\|Q^{-1}\|^2},$$

където $f(x) = \sqrt[n]{x}(1-x)$. Както казахме в доказателството на следствие 2.1.4 функцията f достига своя максимум за интервала $(0, 1)$ в точката $x = \frac{1}{n+1}$. Следователно, съществуват α и β, които удовлетворяват неравенствата (2.1.8) в теорема 2.1.6, откъдето получаваме, че (2.1.2) има положително определено решение $Y \leq \frac{\beta}{\|Q^{-1}\|} I \leq \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I$ □

Забележка 2.1.2. *За α и β могат да бъдат избрани съответно решенията на уравненията*

$$\sqrt[n]{\alpha}(1-\alpha) \sqrt[n]{\|Q\|^{n+1}} = \sigma_m^2 \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\beta}(1-\beta) \frac{\sqrt[n]{\|Q^{-1}\|^{n-1}}}{\|Q^{-1}\|^2} = \sigma_1^2$$

в интервала $\left(0, \frac{1}{n+1}\right]$, където σ_1 и σ_m са съответно най-голямата и най-малката сингулярни стойности на матрицата A. Когато A е неособена и $\sigma_1^2 \leq \frac{n \sqrt[n]{[\|Q^{-1}\|(n+1)]^{n-1}}}{[\|Q^{-1}\|(n+1)]^2}$ *, такива решения съществуват.*

Следствие 2.1.8. *Ако матрицата A е неособена и*

$$\|A\| \sqrt[2n]{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \frac{\sqrt{n} \sqrt[2n]{(n+1)^{n-1}}}{n+1},$$

тогава матричното уравнение (2.1.2) има само едно положително определено решение $Y_{(<)} < \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|} I$ и всяко друго положително определено решение не удовлетворява последното неравенство.

Доказателство. Подобно на разсъжденията при следствие 2.1.7, следва съществуването на $\alpha > 0$ и $\beta < \frac{1}{n+1}$ удовлетворяващи неравенствата (2.1.8). Следователно, съществува решение $Y_{(<)}$, за което са изпълнени неравенствата $\alpha\,\|Q\| < Y_{(<)} < \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I$, където α може да бъде произволно малко число.

Понеже $\beta < \frac{1}{n+1}$, то $q < 1$ в (2.1.9). От тук следва, че изображението $\mathcal{G}$ освен, че е непрекъснато е и свиващо в $\left[\alpha\,\|Q\|\,,\ \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\right]$. Следователно от теоремата на Банах имаме, че $\mathcal{G}$ има единствена неподвижна точка в $\left[\alpha\,\|Q\|\,,\ \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\right] \subset \left(0,\ \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\right]$, т.е., $Y_{(<)}$ е единствено решение в $\left(0,\ \frac{1}{(n+1)\|Q^{-1}\|}\, I\right]$. □

2.1.2 Изследване на уравнението $X + A^*\sqrt{X^{-1}}A = Q$

В тази секция ще опишем някои специфични резултати за уравнение

$$X + A^*\sqrt{X^{-1}}A = Q, \tag{2.1.11}$$

което е уравнението (2.1.2) при $n = 2$.

El-Sayed в дисертацията си [1] изследва уравнението (2.1.11) при $Q = I$ и неособена матрица A

$$X + A^*\sqrt{X^{-1}}A = I, \qquad (\det A \neq 0)\,. \tag{2.1.12}$$

Той доказва следните теореми:

Теорема 2.1.9. *[1] Ако $X > 0$ е решение на (2.1.12), то*

$$AA^* < \sqrt{I - A^*A}\,.$$

El-Sayed в доказателството използва, че A е неособена матрица. Както се вижда, тази теорема е частна на нашата теорема 2.1.1 (2.1.3) за $n = 2$ и $Q = I$, при това ние сме я доказали без ограничение за неособеност на матрицата A.

Теорема 2.1.10. *[1] Ако $A^*A < \frac{1}{2\sqrt{2}}I$, то уравнение (2.1.12) притежава положително определено решение.*

Ако приложим теорема 2.1.3 за уравнение (2.1.11) при $Q = I$ получаваме, че от $A^*A \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}I$ следва съществуването на положително определени решения. Очевидно е, че множеството на матриците A, които удовлетворяват последното неравенство е по-широко в сравнение с тези, които удовлетворяват условието на El-Sayed. Този резултат за уравнение (2.1.12) сме получили в [15] и други, които ще обобщим за уравнението (2.1.11).

Записваме итерационния метод (2.1.5) за $n = 2$

$$X_0 = \gamma Q\,, \quad X_{s+1} = Q - A^*\sqrt{X_s^{-1}}A\,, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1.13}$$

и съответно втория метод (2.1.7)

$$Y_0 = \eta I\,, \quad Y_{s+1} = \left[A(Q - Y_s)^{-1}A^*\right]^2, \quad s = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{2.1.14}$$

Теорема 2.1.11. *Ако за матриците A и Q е изпълнено*

$$\|A\|\,\sqrt[4]{\|Q^{-1}\|^3} \leq \frac{\sqrt[4]{12}}{3}\,,$$

тогава матричното уравнение (2.1.11) притежава положително определено решение $X \in \left[\frac{1}{3}Q,\, Q\right]$, за което $\|X_s - X\| \leq q_X^s\frac{2\|Q\|}{3}$, където X_s е от матричната редица (2.1.13) за $\gamma \in \left[\frac{1}{3},\, 1\right]$ и

$$q_X = \frac{3\,\|Q^{-1}\|\,\sqrt{3\,\|Q^{-1}\|}\,\|A\|^2}{2} \leq 1\,.$$

Освен това, ако матрицата A е неособена, тогава (2.1.11) има и положително определено решение $Y \leq \frac{1}{3\|Q^{-1}\|}I$, за което $\|Y_s - Y\| \leq q_Y^s\frac{1}{3\|Q^{-1}\|}$, където Y_s е от матричната редица (2.1.14) и $q_Y = q_X^2$.

Доказателство. На втората част от теоремата, касаеща итерационния метод (2.1.14) и решенисто Y няма да се спираме, понеже то е следствие от теорема 2.1.6 и следствие 2.1.7 при $n = 2$.

Разглеждаме итерационния метод (2.1.13). Тъй като

$$\left\|\sqrt[4]{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}\right\| \leq \|A\|\,\sqrt[4]{\|Q^{-1}\|^3} \leq \frac{\sqrt[4]{12}}{3}\,,$$

то от теорема 2.1.3 и следствие 2.1.4 ($n = 2$) следва, че уравнение (2.1.11) има решение $X \in \left[\frac{1}{3}Q,\, Q\right]$. Освен това и $X_s \in \left[\frac{1}{3}Q,\, Q\right]$. Остана да докажем оценката за сходимост на метод (2.1.13). Това всъщност е *новото* в тази теорема, останалото е частен случай на доказаните теореми за произволно n.

За $\|X_s - X\|$ имаме

$$\begin{aligned} \|X_s - X\| &= \left\| A^* \left(\sqrt{X_{s-1}^{-1}} - \sqrt{X^{-1}} \right) A \right\| \\ &= \left\| A^* \sqrt{X_{s-1}^{-1}} \left(\sqrt{X} - \sqrt{X_{s-1}} \right) \sqrt{X^{-1}} A \right\| \\ &\leq \|A\|^2 \left\| \sqrt{X^{-1}} \right\| \left\| \sqrt{X_{s-1}^{-1}} \right\| \left\| \sqrt{X_{s-1}} - \sqrt{X} \right\| . \end{aligned}$$

Разглеждаме линейното матрично уравнение

$$\sqrt{X_{s-1}}\, Y + Y \sqrt{X} = X_{s-1} - X\,. \tag{2.1.15}$$

Тъй като $\sqrt{X_{s-1}}$ и $\sqrt{X}$ са положително определени матрици, то съгласно теорема 3 (теорема 8.5.2 [24])

$$Y = \int_0^\infty e^{-\sqrt{X_{s-1}}\, t} (X_{s-1} - X)\, e^{-\sqrt{X}\, t}\, dt$$

е единсвено положително определено решение на (2.1.15). От друга страна, с непосредствена проверка се установява, че $\sqrt{X_{s-1}} - \sqrt{X}$ удовлетворява уравнение (2.1.15).

Следователно

$$\sqrt{X_{s-1}} - \sqrt{X} = \int_0^\infty e^{-\sqrt{X_{s-1}}\, t} (X_{s-1} - X)\, e^{-\sqrt{X}\, t}\, dt\,.$$

За елементите X_s на редицата (2.1.5) и решението X имаме

$$X_s \geq \frac{1}{3} Q \geq \frac{1}{3\, \|Q^{-1}\|} I, \qquad \sqrt{X_s^{-1}} \leq \sqrt{3\, Q^{-1}},$$

$$X \geq \frac{1}{3} Q \geq \frac{1}{3\, \|Q^{-1}\|} I, \qquad \sqrt{X^{-1}} \leq \sqrt{3\, Q^{-1}}\,.$$

Тогава получаваме

$$\begin{aligned}\|X_s - X\| &\le 3\left\|Q^{-1}\right\| \|A\|^2 \|X_{s-1} - X\| \int_0^\infty \left\|e^{-\sqrt{X_{s-1}}\,t}\right\| \left\|e^{-\sqrt{X}\,t}\right\| dt \\ &\le 3\left\|Q^{-1}\right\| \|A\|^2 \|X_{s-1} - X\| \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\sqrt{3\|Q^{-1}\|}}t} dt \\ &= \frac{3\|Q^{-1}\| \sqrt{3\|Q^{-1}\|}\, \|A\|^2}{2} \|X_{s-1} - X\| .\end{aligned}$$

Следователно $\|X_s - X\| \le q_X^s \|X_0 - X\| \le q_X^s \frac{2\|Q\|}{3}$. □

Теорема 2.1.12. *Ако за матриците A и Q е изпълнено*

$$\|A\| \sqrt[4]{\|Q^{-1}\|^3} < \frac{\sqrt[4]{12}}{3},$$

тогава матричното уравнение (2.1.11) притежава единствено положително определено решение $X_L \in \left(\frac{1}{3}Q, Q\right]$. За X_L е изпълнено $\|X_s - X_L\| < q_X^s \frac{2\|Q\|}{3}$, където X_s е от матричната редица (2.1.13) за $\gamma \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ и

$$q_X = \frac{3\|Q^{-1}\| \sqrt{3\|Q^{-1}\|}\, \|A\|^2}{2} < 1.$$

Освен това, ако матрицата A е неособена, тогава (2.1.11) има единствено положително определено решение $Y_{(<)} < \frac{1}{3\|Q^{-1}\|} I$. За $Y_{(<)}$ е изпълнено $\left\|Y_s - Y_{(<)}\right\| < q_Y^s \frac{1}{3\|Q^{-1}\|}$, където Y_s е от матричната редица (2.1.14) за $\eta \in \left[\alpha\|Q\|, \beta\|Q^{-1}\|^{-1}\right]$ и $q_Y = q_X^2$.

Доказателство. На втората част от теоремата касаеща итерационен метод (2.1.14) и решението $Y_{(<)}$ няма да се спираме, понеже то е следствие от теорема 2.1.6 и следствие 2.1.8 при $n = 2$.

Разглеждаме итерационния метод (2.1.13). Тъй като

$$\|A\| \sqrt[4]{\|Q^{-1}\|^3} < \frac{\sqrt[4]{12}}{3},$$

то съществува число $\beta > \frac{1}{3}$, което удовлетворява условията на теорема 2.1.3 за $n = 2$. Следователно уравнение (2.1.11) има решение $X \in \left(\frac{1}{3}Q, Q\right]$. Едно такова решение е максималното решение X_L.

Допускаме, че има поне две решения $X' \in \left(\frac{1}{3}Q, Q\right]$ и $X'' \in \left(\frac{1}{3}Q, Q\right]$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\|X' - X''\| &= \left\| A^* \sqrt{(X')^{-1}} \left(\sqrt{X''} - \sqrt{X'} \right) \sqrt{(X'')^{-1}} A \right\| \\
&\le 3 \left\|Q^{-1}\right\| \|A\|^2 \|X' - X''\| \int_0^\infty \left\| e^{-\sqrt{X'}\,t} \right\| \left\| e^{-\sqrt{X''}\,t} \right\| dt \\
&\le 3 \left\|Q^{-1}\right\| \|A\|^2 \|X' - X''\| \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\sqrt{3\|Q^{-1}\|}}t} dt \\
&= \frac{3\left\|Q^{-1}\right\| \sqrt{3\left\|Q^{-1}\right\|}\, \|A\|^2}{2} \|X' - X''\| < \|X' - X''\| .
\end{aligned}$$

Следователно $X' \equiv X'' \equiv X_L$. □

2.1.3 Числени експерименти

В тази секция, ще дадем резултати от някои числени експерименти, направени за уравнението

$$X + A^* \sqrt{X^{-1}} A = I \tag{2.1.16}$$

с различни матрици A и размерност m. Твърденията, които цитираме от предходните секции, отнасящи се до разгледаното уравнение за произволно Q и n, ще ги имаме впредвид при $Q = I$ и $n = 2$ съответно.

За пресмятане на положително определените решения са използвани съответно итерационните методи (2.1.13) за $Q = I$,

$$X_0 = \gamma I, \quad X_{s+1} = I - A^* \sqrt{X_s^{-1}} A\,, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1.17}$$

и (2.1.14) за $Q = I$,

$$Y_0 = \eta I\,, \quad Y_{s+1} = \left[A \left(I - Y_s \right)^{-1} A^* \right]^2, \quad s = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1.18}$$

Програмите, с които се реализират методите са писани на Matlab. И при двата итерационни метода за стоп критерий използваме съответно

$$\|X_{s+1} - X_s\|_\infty \le tol \quad \text{и} \quad \|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty \le tol\,.$$

С $iter$ означаваме най-малкия брой итерации, за които се достига съответния стоп критерий. Нека $\varepsilon(Z) = \left\| Z + A^*\sqrt{Z^{-1}}A - I \right\|_\infty$. Отбелязваме, че при метод (2.1.17) имаме $X_{s+1} - X_s = -\left(X_s + A^*\sqrt{X_s^{-1}}A - I\right)$. Следователно $\varepsilon(X_s) = \|X_{s+1} - X_s\|_\infty$. За втория метод съответно имаме

$$\begin{aligned} Y_{s+1} - Y_s &= Y_{s+1} + I - Y_s - I = Y_{s+1} + \left((I - Y_s)^{-1}\right)^{-1} - I \\ &= Y_{s+1} + A^*\left(A\,(I - Y_s)^{-1} A^*\right)^{-1} A - I \\ &= Y_{s+1} + A^*\sqrt{Y_{s+1}^{-1}}\, A - I\,. \end{aligned}$$

Следователно $\varepsilon(Y_{s+1}) = \|Y_{s+1} - Y_s\|_\infty$. За краткост в таблиците с резултати от експериментите $\varepsilon(X_{iter-1})$ и $\varepsilon(Y_{iter})$ ще означим с ε.

Както казахме и по-рано, метод (2.1.17) за $\gamma = 1$ е разгледан от El-Sayed. Ще сравним итерационните методи с различни начални приближения, т.е., с различни стойности на γ и η.

Нека $0 < \alpha_1 \le \beta_1 \le \frac{1}{3} \le \beta_2 \le \alpha_2 \le 1$, където α_i, β_i, $i = 1, 2$ са съответно решения на уравненията

$$\sqrt{\alpha}\,(1 - \alpha) = \sigma_m^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\beta}\,(1 - \beta) = \sigma_1^2\,,$$

а σ_m и σ_1 са минималната и максималната сингулярни стойности на A. От забележки 2.1.1 и 2.1.2 имаме, че α_i, β_i, $i = 1, 2$ съществуват, когато $\sigma_1^2 = \|A\|^2 \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Освен това, за α_1 допълнително е необходимо A да е неособена.

Предполагаме, че $\sigma_1^2 \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$, тогава теорема 2.1.3 се удовлетворява за всяко $\alpha \in [\alpha_2,\, 1]$ и всяко $\beta \in \left[\frac{1}{3},\, \beta_2\right]$. Следователно метод (2.1.17) поражда монотонно растяща редица от матрици при $\gamma \in \left[\frac{1}{3},\, \beta_2\right]$ и монотонно намаляваща редица за $\gamma \in [\alpha_2,\, 1]$. Освен това, ако A е неособена, тогава теорема 2.1.6 се удовлетворява за всяко $\alpha \in (0,\, \alpha_1]$ и всяко $\beta \in \left[\beta_1,\, \frac{1}{3}\right]$.

В случай на $\sigma_1^2 < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ (теорема 2.1.12) уравнението $X + A^*\sqrt{X^{-1}}A = I$ има единствено решение в $\left(\frac{1}{3}I,\, I\right]$, което е максималното положително определено и принадлежи в $[\beta_2 I,\, \alpha_2 I] \subset \left(\frac{1}{3}I,\, I\right]$. Освен това, ако A е неособена, тогава има и единствено решение в $\left(0,\, \frac{1}{3}I\right)$, което принадлежи в $[\alpha_1 I,\, \beta_1 I] \subset \left(0,\, \frac{1}{3}I\right)$.

Ще направим експерименти с метод (2.1.17) при $\gamma = 1$, $\gamma = \alpha_2$ и $\gamma = \beta_2$, и с метод (2.1.18) при $\eta = \frac{1}{6}$, $\eta = \alpha_1$ и $\eta = \beta_1$.

Пример 2.1.1. *Разглеждаме уравнение (2.1.16) с матрица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} = \frac{3i}{5m}, & i = 1, 2, \dots, m, \\ a_{ij} = \frac{|i-j|}{m^3}, & i \neq j; \end{cases}$$

Минималната σ_m и максималната σ_1 сингулярни стойности на A са пресметнати с функция **svd** на MATLAB.

Таблица 2.1: Резултати за пример 2.1.1 с $tol = 10^{-7}$.

	Метод (2.1.17)			Метод (2.1.18)		
$m, \sigma_1^2, \sigma_m^2$	γ	$iter$	ε	η	$iter$	ε
$m = 10$	1	24	$9.39e{-}8$	1/6	20	$8.97e{-}8$
$\sigma_m^2 = 0.0035$	$\alpha_2 = 0.9965$	24	$9.36e{-}8$	$\alpha_1 = 1.2e-5$	22	$7.88e{-}8$
$\sigma_1^2 = 0.3610$	$\beta_2 = 0.4777$	13	$6.30e{-}8$	$\beta_1 = 0.2075$	11	$7.24e{-}8$
	1/3	25	$7.95e{-}8$			
$m = 30$	1	24	$6.58e{-}8$	1/6	20	$6.02e{-}8$
$\sigma_m^2 = 3.9e-4$	$\alpha_2 = 0.9996$	24	$6.58e{-}8$	$\alpha_1 = 1.6e-7$	22	$5.41e{-}8$
$\sigma_1^2 = 0.36$	$\beta_2 = 0.4807$	17	$4.20e{-}8$	$\beta_1 = 0.2052$	15	$4.85e{-}8$
	1/3	25	$5.57e{-}8$			
$m = 50$	1	24	$6.39e{-}8$	1/6	20	$5.84e{-}8$
$\sigma_m^2 = 1.4e-4$	$\alpha_2 = 0.9999$	24	$6.39e{-}8$	$\alpha_1 = 2.1e-8$	22	$5.25e{-}8$
$\sigma_1^2 = 0.36$	$\beta_2 = 0.4808$	18	$4.61e{-}8$	$\beta_1 = 0.2051$	16	$5.51e{-}8$
	1/3	25	$5.40e{-}8$			

Отбелязваме, че достатъчното условие ($\sigma_1^2 < \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.354$) на El-Sayed за сходимост на предложения от него метод ((2.1.17) $\gamma = 1$) *не е изпълнено*, но той е сходящ. Сходимостта следва от теорема 2.1.12 ($\sigma_1^2 < \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.38$). Понеже минималната сингулярна стойност е близка до нулата ($\sigma_m^2 = 0.0035$), то решенията на уравнението $\sqrt{\alpha}(1-\alpha) = \sigma_m^2$ са близки до 1 и 0 (виж таблица 2.1), за това няма разлика в броя на итерациите при $\gamma = 1$ и $\gamma = \alpha_2$. Интересен е факта, че и двата итерационни метода са значително по-бързи съответно с начални приближения с $\gamma = \beta_2$ и $\eta = \beta_1$, които са решения на уравнението $\sqrt{\beta}\,(1-\beta) = \sigma_1^2$.

Пример 2.1.2. *Разглеждаме уравнение (2.1.16) с матрица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2i-m}{m^2}, & i = 1, 2, \ldots, m, \\ a_{ij} = \frac{3i-j}{m^3}, & i \neq j; \end{cases}$$

Таблица 2.2: Резултати за пример 2.1.2 с $tol = 10^{-7}$.

	Метод (2.1.17)			Метод (2.1.18)		
$m, \sigma_1^2, \sigma_m^2$	γ	$iter$	ε	η	$iter$	ε
m = 30	1	40	$7.13e{-8}$	1/6	36	$7.19e{-8}$
$\sigma_m^2 = 0.2941$	$\alpha_2 = 0.6293$	39	$7.22e{-8}$	$\alpha_1 = 0.1089$	36	$9.58e{-8}$
$\sigma_1^2 = 0.3767$	$\beta_2 = 0.4160$	28	$9.98e{-8}$	$\beta_1 = 0.2570$	27	$8.15e{-8}$
	1/3	40	$9.31e{-8}$			
m = 50	1	24	$9.64e{-8}$	1/6	20	$8.60e{-8}$
$\sigma_m^2 = 0.3099$	$\alpha_2 = 0.5998$	23	$7.87e{-8}$	$\alpha_1 = 0.1256$	21	$8.07e{-8}$
$\sigma_1^2 = 0.3592$	$\beta_2 = 0.4834$	19	$8.35e{-8}$	$\beta_1 = 0.2032$	18	$5.07e{-8}$
	1/3	25	$8.18e{-8}$			

В таблица 2.2 са дадени резултатите за пример 2.1.2. Тук α_2 е по-малко от 1 с по-голяма разлика в сравнение с предния пример, но разликата в броя на итерациите при $\gamma = \alpha_2$ и $\gamma = 1$ е само единица. Не такова е отношението на броя итерации при начални приближения съответно $\gamma = \frac{1}{3}$ и $\gamma = \beta_2$, тук разликата е значителна.

Следователно за разгледаните два примера най-подходящо начално приближение за метод (2.1.17) е с $\gamma = \beta_2$.

Понеже вторият метод (2.1.18) не поражда монотонна редица, няма теоретични изводи за това, какво да бъде началното приближение, така че сходимостта да е най-бърза. Примерите показват, че и за метод (2.1.18) за предпочитане е начално приближение с $\eta = \beta_1$.

2.2 Теореми за съществуване и методи за пресмятане решенията на $X - A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$

Този параграф е посветен на матричното уравнение

$$X - A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q\,, \tag{2.2.19}$$

където A е $m \times m$ матрица, Q е положително определена матрица, а X е неизвестна матрица.

Изведени са теореми за съществуване на положително определени решения на уравнението (2.2.19) и достатъчно условие за единственост. Предложени са итерационни методи за числено пресмятане на разгледаните решения. Направени са и числени експерименти.

Уравнението (2.2.19) подобно на уравнението (2.1.2) за $n = 2$ и $Q = I$ е разгледано за първи път от El-Sayed в дисертацията му [1]. По-късно [20] ние (Хасанов, Иванов и Минчев) получаваме нови и по-добри достатъчни условия за съществуване на положително определени решения на разгледаното уравнение за този случай.

Структурата на параграфа е както на предходния. Разделен е на три секции. В първата е изследвано уравнението в общия му вид. В следващата, уравнението е разгледано за $n = 2$. Тук са представени резултатите, които е получил El-Sayed и други, получени от нас за този случай. В последната секция са описани резултати от числени експерименти.

2.2.1 Изследване на уравнението $X - A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A = Q$

Първо ще изкажем и докажем едно твърдение, което е следствие от теорема 1.0.2 (Lemma 2.2 [30]).

Теорема 2.2.1. *Уравнението (2.2.19) има положително определено решение X и всички такива решения са в $\left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$.*

Доказателство. Рзглеждаме изображението

$$\mathcal{G}(X) = Q + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A .$$

Нека X е произволна матрица от $\left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$. Тогава

$$\mathcal{G}(X) \in \left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right] .$$

Освен това, $\mathcal{G}$ е непрекъснато изображение в $\left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$, тогава от теоремата на Шаудер за неподвижната точка следва, че $\mathcal{G}$ има неподвижна точка в $\left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$. Тази точка е решение на (2.2.19).

Остана да докажем, че всяко положително определено решение на (2.2.19) е в $\left[Q,\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$. Нека X е произволно положително определено решение. Тогава

$$X = Q + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A \geq Q .$$

От тук получаваме

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{X^{-1}} &\leq \sqrt[n]{Q^{-1}} , \\ Q + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A &\leq Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A . \end{aligned}$$

Следователно $X \leq Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A$. □

Следващата теорема е подобна на теорема 2.5 [26], изказана от Liu и Gao за уравнението $X^s - A^T X^{-t} = I$.

Теорема 2.2.2. *Всяко положително определено решение X на уравнението (2.2.19) принадлежи в $[\alpha I,\, \beta I]$, където α и β са решения на системата*

$$\left| \begin{aligned} \alpha &= \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta^{-1}} \\ \beta &= \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha^{-1}} , \end{aligned} \right. \qquad (2.2.20)$$

а σ_m и σ_1 са съответно минималната и максималната сингулярни стойности на матрицата A.

Доказателство. Дефинираме числовите редици $\{\alpha_s\}$ и $\{\beta_s\}$, както следва:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \left\|Q^{-1}\right\|^{-1}, \quad \beta_0 = \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|}, \\ \alpha_s &= \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta_{s-1}^{-1}}, & (2.2.21) \\ \beta_s &= \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_s^{-1}}, \qquad s = 1, 2, \ldots. & (2.2.22) \end{aligned}$$

Ще докажем, че така дефинираните редици $\{\alpha_s\}$ и $\{\beta_s\}$ са съответно монотонно растяща и монотонно намаляваща. Освен това, за кое да е положително определено решение X е вярно $X \in [\alpha_s I, \beta_s I]$, $s = 0, 1, 2, \ldots$.

Тъй като $\|Q^{-1}\| \, \|Q\| \geq \|I\| = 1$, то $\|Q\| \geq \left\|Q^{-1}\right\|^{-1}$. Следователно $\alpha_0 < \beta_0$. По дефиниция $\alpha_0 > 0$. От тук

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta_0^{-1}} \geq \alpha_0 ,$$

откъдето и

$$\beta_1 = \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_1^{-1}} \leq \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_0^{-1}} = \beta_0 .$$

Допускаме, че $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ и $\beta_k \leq \beta_{k-1}$. Тогава

$$\alpha_{k+1} = \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta_k^{-1}} \geq \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta_{k-1}^{-1}} = \alpha_k ,$$

откъдето получаваме и

$$\beta_{k+1} = \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_{k+1}^{-1}} \leq \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_k^{-1}} = \beta_k .$$

Следователно за всяко s имаме $\alpha_{s+1} \geq \alpha_s$ и $\beta_{s+1} \leq \beta_s$.

Остана да покажем, че $X \in [\alpha_s I, \beta_s I]$, за всяко s и кое да е положително определено решение X.

От теорема 2.2.1 знаем, че всяко положително определено решение е в $\left[Q, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right]$, т.е.,

$$Q \leq X \leq Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A .$$

Понеже $Q \geq \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} I$, то $X \geq \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} I = \alpha_0 I$. От друга страна

$$Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \leq Q + A^* A \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} \leq \|Q\| + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} = \beta_0 I ,$$

откъдето имаме $X \leq \beta_0 I$. Следователно $X \in [\alpha_0 I,\, \beta_0 I]$.

Допускаме, че $X \in [\alpha_k I,\, \beta_k I]$ за фиксирано k. Тогава

$$\begin{aligned} X &= Q + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A \;\geq\; Q + A^* \sqrt[n]{(\beta_k I)^{-1}} A \\ &\geq \left\|Q^{-1}\right\|^{-1} I + \sigma_m^2 \sqrt[n]{\beta_k^{-1}}\, I \;=\; \alpha_{k+1} I\,, \end{aligned}$$

откъдето получаваме и

$$\begin{aligned} X &= Q + A^* \sqrt[n]{X^{-1}} A \;\leq\; Q + A^* \sqrt[n]{(\alpha_{k+1} I)^{-1}} A \\ &\leq \|Q\|\, I + \sigma_1^2 \sqrt[n]{\alpha_{k+1}^{-1}}\, I \;=\; \beta_{k+1} I\,. \end{aligned}$$

Следователно $\alpha_s I \leq X \leq \beta_s I$ за всяко s. Освен това, получихме, че редиците $\{\alpha_s\}$ и $\{\beta_s\}$ са не само монотонни, но и ограничени съответно отгоре и отдолу. Следователно те са сходящи.

Нека

$$\alpha = \lim_{s\to\infty} \alpha_s\,, \qquad \beta = \lim_{s\to\infty} \beta_s\,.$$

Тогава $X \in [\alpha I,\, \beta I]$. Освен това, като направим граничен преход във формули (2.2.21) и (2.2.22) получаваме, че α и β удовлетворяват системата (2.2.20). □

Теорема 2.2.3. *Ако* $\|A\|^2 < n\,\alpha \sqrt[n]{\alpha}$, *тогава уравнението (2.2.19) има единствено положително определено решение* X, *където* α *е по-малкото решение на системата (2.2.20).*

Доказателство. Допускаме, че X и Y са две положително определени решения на уравнение (2.2.19). Тогава от теорема 2.2.2 имаме $X \geq \alpha I$, $Y \geq \alpha I$ и

$$X - Y = A^* \left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}} \right) A\,.$$

Последното равенство записваме

$$\operatorname{vec}(X - Y) = \left(A^T \otimes A^*\right) \operatorname{vec}\left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}} \right). \tag{2.2.23}$$

От друга страна, за произволни две положително определени матрици X и Y е изпълнено тъждеството

$$Y - X = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{X^i} \left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}} \right) \sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\,. \tag{2.2.24}$$

Равенството (2.2.24) можем да запишем

$$\mathrm{vec}(Y-X) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X^i}\right) \mathrm{vec}\left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}}\right),$$

откъдето получаваме

$$\mathrm{vec}\left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X^i}\right)^{-1} \mathrm{vec}(Y-X). \quad (2.2.25)$$

Комбинираме равенства (2.2.23) и (2.2.25) и оценяваме векторната норма (тази, на която е подчинена спектралната матрична норма)

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{vec}(X-Y)\| &\leq \left\|\left(A^T \otimes A^*\right)\right\| \left\|\mathrm{vec}\left(\sqrt[n]{X^{-1}} - \sqrt[n]{Y^{-1}}\right)\right\| \\
&= \|A\|^2 \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X^i}\right)^{-1} \mathrm{vec}(Y-X)\right\| \\
&\leq \|A\|^2 \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X^i}\right)^{-1} \right\| \|\mathrm{vec}(Y-X)\|,
\end{aligned}$$

тъй като $\left\|\left(A^T \otimes A^*\right)\right\| = \|A\|^2$. Освен това, $\|\mathrm{vec}(X-Y)\| = \|X-Y\|_F$ и

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{Y^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X^i}\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{n\,\alpha\sqrt[n]{\alpha}},$$

откъдето получаваме

$$\|X-Y\|_F \leq \frac{\|A\|^2}{n\,\alpha\sqrt[n]{\alpha}} \|X-Y\|_F.$$

Тъй като $\|A\|^2 < n\,\alpha\sqrt[n]{\alpha}$, то $X \equiv Y$. □

Следствие 2.2.4. *Ако $\|A\|^2 \, \|Q^{-1}\| \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} < n$, тогава уравнението (2.2.19) има единствено положително определено решение X.*

Доказателство. Нека α е по-малкото решение на системата (2.2.20). Очевидно е от (2.2.20), че $\alpha \geq \|Q^{-1}\|^{-1}$.

Следователно

$$\|A\|^2 < n\,\left\|Q^{-1}\right\|^{-1} \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|^{-1}} \leq n\,\alpha\sqrt[n]{\alpha}\,,$$

което неравенство представлява условието на теорема 2.2.3, откъдето следва, че уравнение (2.2.19) има единствено положително определено решение. □

По-нататък разглеждаме итерационни методи за пресмятане на положително определено решение на уравнението (2.2.19).

Разглеждаме итерационния метод

$$X_0 = \gamma Q, \quad X_{s+1} = Q + A^* \sqrt[n]{X_s^{-1}} A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.2.26}$$

Теорема 2.2.5. *Ако за матриците A и Q, и за число $\gamma \geq 1$ са изпълнени неравенствата:*

$$(i) \quad \sqrt[n]{\gamma}(\gamma - 1)\, I \leq \sqrt{Q^{-1}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}}\,;$$

$$(ii) \quad (\gamma - 1)\, \sqrt[n^2]{\gamma^{-1}}\, I \leq \sqrt{Q^{-1}} A^* \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{\gamma} Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right)^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}}\,;$$

$$(iii) \quad \|A\|^2\, \|Q^{-1}\|\, \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} < n\,\gamma\,\sqrt[n]{\gamma}\,,$$

тогава итерационния метод (2.2.26) е сходящ към единственото положително определено решение $X \geq \gamma\, Q$ на уравнение (2.2.19).

Доказателство. Разглеждаме матричната редица $\{X_s\}$ от (2.2.26). За X_1 имаме

$$X_1 = Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\,.$$

От условието (i) получаваме

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\gamma}(\gamma - 1)\, Q \ &\leq \ A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \\ X_0 \ = \ \gamma Q \ &\leq \ Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \ = \ X_1\,. \end{aligned}$$

За X_2 имаме

$$\begin{aligned} X_2 \ &= \ Q + A^* \sqrt[n]{X_1^{-1}} A \ = \ Q + A^* \sqrt[n]{\left(Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right)^{-1}} A \\ &= \ Q + \sqrt[n^2]{\gamma}\, A^* \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{\gamma}\, Q + A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\right)^{-1}} A\,. \end{aligned}$$

Използвайки условието (ii) получаваме $X_0 \leq X_2$. Освен това, от $X_0 \leq X_1$ получаваме $X_2 \leq X_1$.

Следователно $X_0 \leq X_2 \leq X_1$.

По индукция лесно се доказва, че за елементите на редицата $\{X_s\}$ от (2.2.26), за всеки две положителни цели числа p и q е изпълнено

$$X_0 \leq X_{2p} \leq X_{2p+2} \leq X_{2q+3} \leq X_{2q+1} \leq X_1 \,. \tag{2.2.27}$$

Следователно подредиците $\{X_{2p}\}$, $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Ще докажем, че двете редици имат една и съща граница. За целта разглеждаме $\|X_{2s+1} - X_{2s}\|_F$. Следвайки разсъжденията в доказателството на теорема 2.2.3 получаваме

$$\begin{aligned}
\|X_{2s+1} - X_{2s}\|_F &= \left\|(A^T \otimes A^*) \operatorname{vec}\left(\sqrt[n]{X_{2s}^{-1}} - \sqrt[n]{X_{2s-1}^{-1}}\right)\right\| \\
&\leq \|A\|^2 \left\|\operatorname{vec}\left(\sqrt[n]{X_{2s}^{-1}} - \sqrt[n]{X_{2s-1}^{-1}}\right)\right\| \\
&\leq \|A\|^2 \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[n]{X_{2s-1}^{n+1-i}}\right)^T \otimes \sqrt[n]{X_{2s}^{i}}\right)^{-1}\right\| \|X_{2s-1} - X_{2s}\|_F \,.
\end{aligned}$$

Тъй като $X_s \geq \gamma \left\|Q^{-1}\right\|^{-1}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{X_{2k-1}^{n+1-i}} \otimes \sqrt[n]{X_{2k}^{i}}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\|Q^{-1}\| \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|}}{n \gamma \sqrt[n]{\gamma}} \,.$$

Следователно

$$\begin{aligned}
\|X_{2k+1} - X_{2k}\|_F &\leq \frac{\|A\|^2 \|Q^{-1}\| \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|}}{n \gamma \sqrt[n]{\gamma}} \|X_{2k-1} - X_{2k}\|_F \\
&\leq q^{2k} \|X_1 - X_0\|_F \,,
\end{aligned}$$

където $q = \frac{\|A\|^2 \|Q^{-1}\| \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|}}{n \gamma \sqrt[n]{\gamma}} < 1$ от условие (iii).

Следователно подредиците $\{X_{2p}\}$, $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи към една и съща матрица, която е решение на (2.2.19).

Единствеността е очевидна. Ако допуснем, че имаме две решения $X \geq \gamma Q$ и $Y \geq \gamma Q$, то за тях получаваме $\|X - Y\|_F \leq q \|X - Y\|_F < \|X - Y\|_F$, което е противоречие. $\square$

Следствие 2.2.6. *Ако* $\|A\|^2\, \|Q^{-1}\|\, \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} < n$, *тогава итерационния метод (2.2.26) с* $X_0 = Q$ *е сходящ към единственото положително определено решение на уравнение (2.2.19).*

Доказателство. От следствие 2.2.4 имаме, че уравнение (2.2.19) има единствено положително определено решение.

Очевидно е, че при $\gamma = 1$ трите условия (i), (ii) и (iii) на теорема 2.2.5 са изпълнени. Следователно метод (2.2.26) е сходящ. □

Теорема 2.2.7. *Ако съществуват числа* $\gamma \geq 1$ *и* $\xi \geq \gamma$, *за които матриците* A *и* Q *удовлетворяват неравенствата:*

$$(i) \quad \sqrt[n]{\xi}(\gamma - 1)\, I \leq \sqrt{Q^{-1}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}} \leq \sqrt[n]{\gamma}(\xi - 1)\, I\,;$$

$$(ii) \quad \|A\|^2\, \|Q^{-1}\|\, \sqrt[n]{\|Q^{-1}\|} < n\, \gamma \sqrt[n]{\gamma}\,,$$

тогава в $[\gamma Q,\, \xi Q]$ *уравнението (2.2.19) има единствено положително определено решение. Освен това, итерационния метод (2.2.26) е сходящ към това решение.*

Доказателство. От $X_0 = \gamma Q$, имаме

$$X_1 = Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\,.$$

Тъй като

$$\sqrt[n]{\gamma}(\gamma - 1)\, I \leq \sqrt[n]{\xi}(\gamma - 1)\, I \leq \sqrt{Q^{-1}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}}\,,$$

то

$$(\gamma - 1)\, Q \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A\,,$$

откъдето получаваме

$$X_0 = \gamma Q \leq Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A = X_1\,.$$

От второто неравенство в (i)

$$\sqrt{Q^{-1}} A^* \sqrt[n]{Q^{-1}} A \sqrt{Q^{-1}} \leq \sqrt[n]{\gamma}(\xi - 1)\, I\,,$$

получаваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A &\leq (\xi-1)\,Q\,,\\ X_1 = Q+\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A &\leq \xi\,Q = X_0'.\end{aligned}$$

Пресмятаме

$$X_1' = Q + \frac{1}{\sqrt[n]{\xi}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A\,.$$

Понеже $X_0 = \gamma\,Q \leq \xi\,Q = X_0'$, то $X_1 \geq X_1'$.

От

$$\sqrt[n]{\xi}(\gamma-1)\,I \leq \sqrt{Q^{-1}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}\,,$$

получаваме

$$\begin{aligned}(\gamma-1)\,Q &\leq \frac{1}{\sqrt[n]{\xi}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A\,,\\ X_0 = \gamma\,Q &\leq Q+\frac{1}{\sqrt[n]{\xi}}A^*\sqrt[n]{Q^{-1}}A = X_1'.\end{aligned}$$

Освен това, от $X_1 \leq X_0'$ имаме $X_2 \geq X_1'$. Следователно получаваме следната наредба $X_0 \leq X_1' \leq X_2 \leq X_1 \leq X_0'$. От тези неравенства по индукция лесно се доказва, че за елементите на редицата $\{X_s\}$ от (2.2.26) са изпълнени неравенствата (2.2.27).

От условие (ii) аналогично на доказателството на теорема 2.2.5 получаваме, че подредиците $\{X_{2p}\}$ и $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи към една и съща матрица, която е решение на (2.2.19). □

2.2.2 Изследване на уравнението $X - A^*\sqrt{X^{-1}}A = Q$

В тази секция ще разгледаме уравнението (2.2.19) за $n = 2$.

Записваме уравнението

$$X - A^*\sqrt{X^{-1}}A = Q \tag{2.2.28}$$

и съответния итерационен метод

$$X_0 = \gamma Q, \quad X_{s+1} = Q + A^*\sqrt{X_s^{-1}}A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2.29}$$

Уравнението (2.2.28) при $Q = I$ и неособена матрица A е разгледано от El-Sayed в дисертацията му [1]. За удобство ще препишем уравнението (2.2.28) и метод (2.2.29) за $Q = I$.

$$X - A^*\sqrt{X^{-1}}A = I \tag{2.2.30}$$

и

$$X_0 = \gamma I, \quad X_{s+1} = I + A^*\sqrt{X_s^{-1}}A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.2.31}$$

Следващата теорема е доказана от El-Sayed.

Теорема 2.2.8. *[1] Ако* $\|A\|^2 < 2$*, то уравнението (2.2.30) има положително определено решение.*

Можем да добавим към твърдението на тази теорема, че решението при това условие е единствено.

Макар че El-Sayed разглежда уравнението (2.2.30) с неособена матрица A, то теорема 2.2.8 е валидна и при особена матрица A.

За $Q = I$ и неособена матрица A изследвания сме направили съвместно с Иванов и Минчев [20]. Следващите две теореми са доказани в [20]. Тук само ще ги изкажем за пълнота.

Теорема 2.2.9. *[20] Ако съществува реално число* $\gamma > 1$*, за което са изпълнени неравенствата:*

(*i*) $\sqrt{\gamma}(\gamma - 1)\, I < A^*A\,;$

(*ii*) $\frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}(AA^*)^2 - A^*A > \sqrt{\gamma}\, I\,;$

(*iii*) $\|A\|^2 < 2\gamma\sqrt{\gamma}\,,$

тогава итерационния метод (2.2.31) е сходящ към положително определено решение на уравнение (2.2.30).

Забележка 2.2.1. *В случай на особена матрица* A *теорема 2.2.9 не дава резултат. Тогава е валидна теорема 2.2.8. Но има неособени матрици* A*,* *които удовлетворяват теорема 2.2.9 и не удовлетворяват теорема 2.2.8. Такива примери са дадени в следващата секция на този параграф.*

Забележка 2.2.2. *В случай на неособена нормална матрица A ($AA^* = A^*A$) условие (ii) на теорема 2.2.9 следва от условието (i) на същата теорема. Пресмятаме*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}(AA^*)^2 - A^*A &= A^*A\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}AA^* - I\right) \\ &> \sqrt{\gamma}(\gamma-1)\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}\sqrt{\gamma}(\gamma-1) - 1\right)I \\ &= \sqrt{\gamma}\,I\,. \end{aligned}$$

Преди да изкажем следващата теорема, доказана в [20], поради трудността на определяне на числото γ, което да удовлетворява условията на теорема 2.2.9 ще изкажем и докажем твърдение с по-строги ограничения.

Теорема 2.2.10. *Ако съществува реално число $\gamma \geq 1$, за което са изпълнени неравенствата:*

$$\sqrt{2\gamma+1}\,(\gamma-1)\,I \;\leq\; A^*A \;<\; 2\gamma\sqrt{\gamma}\,I\,, \tag{2.2.32}$$

тогава итерационният метод (2.2.31) е сходящ към положително определено решение на уравнение (2.2.30).

Доказателство. Нека имаме γ, за което матрицата A удовлетворява неравенствата (2.2.32).

В случай на особена матрица A имаме $\gamma = 1$, с което получаваме теорема 2.2.8.

Нека A е неособена матрица. От неравенството $A^*A < 2\gamma\sqrt{\gamma}\,I$ имаме $\|A\|^2 < 2\gamma\sqrt{\gamma}$, т.е., условие (iii) на теорема 2.2.9. Освен това, като използваме двете неравенства от условието, получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}(AA^*)^2 - A^*A &> \frac{\sqrt{\gamma}}{(\gamma-1)^2}(AA^*)^2 - 2\gamma\sqrt{\gamma}\,I \\ &= \sqrt{\gamma}\left(\frac{1}{(\gamma-1)^2}(AA^*)^2 - 2\gamma\,I\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sqrt{\gamma}\left(\frac{(2\gamma+1)(\gamma-1)^2}{(\gamma-1)^2} I - 2\gamma I\right) \\ &= \sqrt{\gamma} I. \end{aligned}$$

Така получихме условие (ii). Понеже $\sqrt{\gamma}(\gamma - 1) < \sqrt{2\gamma+1}(\gamma - 1)$ за $\gamma > 1$, то и условието (i) е изпълнено. Следователно γ удовлетворява теорема 2.2.9, откъдето следва, че итерационния метод (2.2.31) е сходящ към положително определено решение на уравнение (2.2.30). □

Забележка 2.2.3. *Нека σ_m, σ_1 са съответно минималната и максималната сингулярни стойности на A. Съществуването на γ, което да удовлетворява теорема 2.2.10 проверяваме по следния начин: пресмятаме $\gamma_1 = \sigma_1 \sqrt[3]{\frac{\sigma_1}{4}}$ (γ_1- корен на уравнението $2x\sqrt{x} = \sigma_1^2$) и проверяваме неравенството $\sqrt{2\gamma_1+1}(\gamma_1 - 1) < \sigma_m^2$. Ако е изпълнено, тогава съществува γ, в противен случай - не.*

В предната забележка даваме отговор дали съществува γ или не, но не поясняваме как се определя γ. Това става ясно от следващата

Забележка 2.2.4. *Нека σ_m, σ_1 са съответно минималната и максималната сингулярни стойности на A. За определяне на γ в теорема 2.2.10 решаваме уравнение $2x^3 - 3x^2 + 1 - \sigma_m^4 = 0$, реалното решение $x = \gamma_2 \geq 1$, на което е решение и на уравнение $\sqrt{2x+1}(x-1) = \sigma_m^2$. След това, проверяваме дали $\sigma_1^2 < 2\gamma_2\sqrt{\gamma_2}$ (или $\gamma_1 < \gamma_2$, ако $\gamma_1 = \sigma_1\sqrt[3]{\frac{\sigma_1}{4}}$ е пресметнато). Ако е изпълнено, тогава $\gamma = \gamma_1$, в противен случай не съществува γ, което да удовлетворява теорема 2.2.10.*

Определеното $\gamma = \gamma_2$ (ако съществува) в предходната забележка е максималното, което удовлетворява теорема 2.2.10. Понеже γ не е единствено, ще дадем интервал, в който се мени.

Нека γ_1 е решение на уравнение $2x\sqrt{x} = \sigma_1^2$ $\left(\gamma_1 = \sigma_1\sqrt[3]{\frac{\sigma_1}{4}}\right)$ и $\gamma_2 \geq 1$ е решение на уравнението $\sqrt{2x+1}(x-1) = \sigma_m^2$. Ако $\gamma_1 < \gamma_2$, тогава всяко $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2]$ удовлетворява теорема 2.2.10, иначе не съществува такова γ.

Теорема 2.2.11. *[20] Ако A е неособена матрица и съществува реално число $\beta > 1$, за което са изпълнени неравенствата:*

$$(i) \quad A^*A < \sqrt{\beta}\,(\beta - 1)\; I\,;$$

$$(ii) \quad \frac{\sqrt{\beta}}{(\beta-1)^2}\,(AA^*)^2 - \sqrt{\beta}\,I < A^*A\,;$$

$$(iii) \quad \|A\|^2 < 2\rho\sqrt{\rho}\,,$$

където ρ е минималната собствена стойност на матрицата $I + \frac{1}{\sqrt{\beta}}A^*A$, тогава итерационния метод (2.2.31) с $X_0 = \beta\, I$ е сходящ към положително определено решение на уравнение (2.2.30).

Забележка 2.2.5. *Строгите неравенства в (i) и (ii) на теореми 2.2.9 и 2.2.11 съответно, могат да се заменят с нестроги неравенства.*

Ще изкажем теорема 2.2.5 за $n = 2$ и ще дадем второ доказателство.

Теорема 2.2.12. *Ако за матриците A и Q и число $\gamma \geq 1$ са изпълнени неравенствата:*

$$(i) \quad \sqrt{\gamma}(\gamma - 1)\, I \leq \sqrt{Q^{-1}}A^*\sqrt{Q^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}\,;$$

$$(ii) \quad (\gamma - 1)\sqrt[4]{\gamma^{-1}}\, I \leq \sqrt{Q^{-1}}A^*\sqrt{\left(\sqrt{\gamma}Q + A^*\sqrt{Q^{-1}}A\right)^{-1}}A\sqrt{Q^{-1}}\,;$$

$$(iii) \quad \|A\|^2\;\|Q^{-1}\|\,\sqrt{\|Q^{-1}\|} < 2\,\gamma\sqrt{\gamma}\,,$$

тогава итерационния метод (2.2.29) е сходящ към единствено положително определено решение $X \geq \gamma\, Q$ на уравнение (2.2.28).

Доказателство. Като частен случай на теорема 2.2.5, от (i) и (ii) за елементите на редицата (2.2.29) имаме неравенствата (2.2.27).

Следователно подредиците $\{X_{2p}\}$ и $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Ще докажем, че двете подредици имат една и съща граница. За целта разглеждаме $\|X_{2s+1} - X_{2s}\|$.

$$\|X_{2s+1} - X_{2s}\| \;=\; \left\|A^*\left(\sqrt{X_{2s}^{-1}} - \sqrt{X_{2s-1}^{-1}}\right)A\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| A^* \sqrt{X_{2s}^{-1}} \left(\sqrt{X_{2s-1}} - \sqrt{X_{2s}} \right) \sqrt{X_{2s-1}^{-1}}\, A \right\| \\
&\leq \|A\|^2 \left\| \sqrt{X_{2s}^{-1}} \right\| \left\| \sqrt{X_{2s-1}^{-1}} \right\| \left\| \sqrt{X_{2s-1}} - \sqrt{X_{2s}} \right\| .
\end{aligned}
$$

Аналогично на разсъжденията за уравнението (2.1.11) в предходния параграф, имаме

$$
\sqrt{X_{2s-1}} - \sqrt{X_{2s}} = \int_0^\infty e^{-\sqrt{X_{2s-1}}\,t} \left(X_{2s-1} - X_{2s} \right) e^{-\sqrt{X_{2s}}\,t}\, dt \,.
$$

Тъй като $0 < \gamma \, \|Q^{-1}\|^{-1} \leq \gamma \, Q = X_0 \leq X_s$ за $s = 1, 2, \ldots$, то

$$
\left\| \sqrt{X_s^{-1}} \right\| \leq \frac{\sqrt{\gamma \, \|Q^{-1}\|}}{\gamma}, \qquad s = 1, 2, \ldots .
$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
\|X_{2s+1} - X_{2s}\| &\leq \frac{1}{\gamma} \|Q^{-1}\| \, \|A\|^2 \left\| \int_0^\infty e^{-\sqrt{X_{2s-1}}\,t} \left(X_{2s-1} - X_{2s} \right) e^{-\sqrt{X_{2s}}\,t}\, dt \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \|A\|^2 \, \|Q^{-1}\| \sqrt{\|Q^{-1}\|} \, \|X_{2s-1} - X_{2s}\| \\
&\leq q^{2s} \, \|X_1 - X_0\| \,,
\end{aligned}
$$

където $q = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \|A\|^2 \, \|Q^{-1}\| \sqrt{\|Q^{-1}\|} < 1$.

Следователно подредиците $\{X_{2p}\}$, $\{X_{2q+1}\}$ са сходящи към една и съща граница, откъдето следва, че редицата X_s е сходяща и нейната граница е решение на уравнението (2.2.28). Понеже за всяко s имаме $X_s \geq \gamma \, Q$, то и за границата X имаме $X \geq \gamma \, Q$. Единствеността е очевидна. □

2.2.3 Числени експерименти

В тази секция ще изложим резултати от някои числени експерименти, направени за уравнението (2.2.30) с различни матрици A и размерност m. За пресмятане на положително определените решения е използван итерационният метод (2.2.31).

Програмите, с които се реализира метода са писани на MATLAB. За стоп критерий използваме $\|X_{s+1} - X_s\|_\infty \leq tol$, където tol е желаната точност. С

$iter$ означаваме най-малкия брой итерации, за които се достига стоп критерия. Нека $\varepsilon(Z) = \left\| Z - A^*\sqrt{Z^{-1}}A - I \right\|_\infty$. Отбелязваме, че $X_{s+1} - X_s = -\left(X_s - A^*\sqrt{X_s^{-1}}A - I\right)$. Следователно $\varepsilon(X_s) = \|X_{s+1} - X_s\|_\infty$. За краткост в таблиците с резултати от експериментите, $\varepsilon(X_{iter-1})$ ще означим с ε.

Както казахме и по-рано метод (2.2.31) за $\gamma = 1$ е разгледан от El-Sayed. Ще сравним метода с различни начални приближения съответно $\gamma = 1$ и $\gamma = \gamma_2$, където γ_2 е решение на уравнението $2x^3 - 3x^2 + 1 - \sigma_m^4 = 0$, а σ_m е минималната сингулярна стойност на A.

Пример 2.2.1. *Разглеждаме уравнение (2.2.30) с матрица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} = \frac{27}{20} - \frac{i}{35} - \frac{i}{2m}, & i = 1, 2, \dots, m, \\ a_{ij} = 2^{\frac{i+j+m}{m^3}}, & i \neq j; \end{cases}$$

Минималната σ_m и максималната σ_1 сингулярни стойности на A са пресметнати с функцията **svd** на MATLAB.

Таблица 2.3: Резултати за пример 2.2.1 с $tol = 10^{-7}$ и $tol = 10^{-10}$.

			$tol = 10^{-7}$		$tol = 10^{-10}$	
m	σ_m^2, σ_1^2	γ	$iter$	ε	$iter$	ε
10	$\sigma_m^2 = 1.8210$	1	18	$5.0625e{-8}$	24	$7.1250e{-11}$
	$\sigma_1^2 = 3.5045$	$\gamma_1 = 1.8415$	17	$6.6130e{-8}$	23	$9.2870e{-11}$
20	$\sigma_m^2 = 1.5992$	1	16	$3.6735e{-8}$	21	$8.3685e{-11}$
	$\sigma_1^2 = 2.2722$	$\gamma_1 = 1.7533$	15	$4.4800e{-8}$	21	$3.0199e{-11}$
30	$\sigma_m^2 = 0.9769$	1	15	$5.4273e{-8}$	20	$9.1926e{-11}$
	$\sigma_1^2 = 1.8331$	$\gamma_1 = 1.4897$	14	$9.6983e{-8}$	20	$4.5703e{-11}$
40	$\sigma_m^2 = 0.4975$	1	15	$3.9615e{-8}$	20	$6.1735e{-11}$
	$\sigma_1^2 = 1.7829$	$\gamma_1 = 1.2648$	15	$2.7479e{-8}$	20	$4.2792e{-11}$

В таблица 2.3 са дадени резултати от експериментите за пример 2.2.1. Отбелязваме, че достатъчното условие ($\sigma_1^2 < 2$) на El-Sayed при $m = 10$ и $m = 20$ не е изпълнено. Независимо от това методът е сходящ.

В случаите, когато $\sigma_1^2 < 2$, т.е., гарантирана е сходимостта на разгледания метод при $\gamma = 1$, не е необходимо да се пресмятат сингулярните стойности и съответно да се търси γ_2, понеже разликата в броя на итерациите е не повече от единица при началните приближения съответно $\gamma = 1$ и $\gamma = \gamma_2$.

Пример 2.2.2. *Разглеждаме уравнение (2.2.30) с матрица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} = m^3\,, & i = 1, 2, \ldots, m, \\ a_{ij} = i - j\,, & i \neq j; \end{cases}$$

Таблица 2.4: Резултати за пример 2.2.2 с $tol = 10^{-7}$.

m	σ_m^2, σ_1^2	γ	$iter$	ε
10	$\sigma_m^2 = 1.0000e+6$	1	42	$6.2627e{-}8$
	$\sigma_1^2 = 1.0008e+6$	$\gamma_2 = 7.9375e+3$	37	$5.0494e{-}8$
20	$\sigma_m^2 = 6.4000e+7$	1	46	$8.3108e{-}8$
	$\sigma_1^2 = 6.4013e+7$	$\gamma_2 = 1.2699e+5$	41	$5.2435e{-}8$
30	$\sigma_m^2 = 7.2900e+8$	1	49	$6.9410e{-}8$
	$\sigma_1^2 = 7.2907e+8$	$\gamma_2 = 6.4290e+5$	43	$7.4181e{-}8$

В таблица 2.4 са дадени резултатите за пример 2.2.2. Тук γ_2 е с хиледи и повече пъти по-голямо от 1, на което се дължи и разликата в броя на итерациите при различни начални приближения. Колкото по-голямо е σ_m, от там и γ_2, толкова повече е и разликата в броя на итерациите за достигане на желаната точност.

За пример 2.2.2 също сме направили експерименти при $tol = 1e - 10$: за $m = 10$ имаме 52 итерации с $\gamma = 1$ и 47 итерации с $\gamma = \gamma_2 = 7.9375e + 3$; за $m = 20$ и $m = 30$ метода е спрян на 1000 итерации, до тогава желаната точност не е достигната.

Интересен е факта, че за направените експерименти решенията, които се получават с различните начални приближения на метод (2.2.31) са равни с точност ε.

Глава 3

Пертурбационна теория на уравненията $X \pm A^*X^{-n}A = Q$

В тази глава е направен пертурбационен анализ на решенията на уравненията

$$X \pm A^*X^{-n}A = Q\,, \tag{3.0.1}$$

които са разгледани в първа глава.

Както казахме и по-рано, уравненията (3.0.1) при $n = 1$ предизвикват най-голям интерес. Така, излиза и първата работа посветена за пертурбационния анализ на уравнението $X + A^*X^{-1}A = Q$ [34]. Положително определеното решение на уравнението $X - A^*X^{-1}A = Q$ може да се разгледа, като решение на конкретно рикатиево уравнение. Пертурбационен анализ на уравненията на Рикати е направено от много автори (виж библиографията на [33]).

Ran и Reurings [30] разглеждат уравнението $X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q$ и извеждат пертурбационни оценки за неговите решения. Разгледаните от нас уравнения се получават при $\mathcal{F}(X) = X^{-n}$ и $\mathcal{F}(X) = -X^{-n}$, съответно.

Главата е разделена на два параграфа, в които са дадени пертурбационни граници за уравненията (3.0.1).

3.1 Пертурбационна теория на $X + A^*X^{-n}A = Q$

Разглеждаме нелинейното матрично уравнение

$$X + A^*X^{-n}A = Q\,, \tag{3.1.2}$$

където A, $Q \in C^{m\times m}$ и Q е положително определена матрица, а n е цяло положително число. Разглеждаме и съответното пертурбационно уравнение

$$\tilde{X} + \tilde{A}^*\tilde{X}^{-n}\tilde{A} = \tilde{Q}\,, \tag{3.1.3}$$

където $\tilde{A} = \Delta A + A$, $\tilde{Q} = \Delta Q + Q$ и $\tilde{X} = \Delta X + X$.

Уравнение (3.1.2) разгледахме в първа глава и изследвахме за съществуване и свойства на положително определени решения. Тук, в първа секция ще дадем пертурбационни оценки на тези решения и по-специално на решението X_l, а в следващата са сравнени получените от нас пертурбационни граници с тези на Xu [34] при $n = 1$, и с тези на Ran и Reurings [30] в общия случай.

3.1.1 Пертурбационни оценки

Първо ще изкажем две теореми, които са в сила и за двете уравнения $X + A^*X^{-n}A = Q$ и $X - A^*X^{-n}A = Q$ заедно с пертурбационните им уравнения. Те са разгледани в [18]. Тук ще докажем теоремите само за уравнение (3.1.2).

Теорема 3.1.1. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на матричните уравнения (3.1.2) и (3.1.3). Ако*

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}\tilde{A}\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| > 0\,,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \le \frac{1}{\varepsilon}\left[\|\Delta Q\| + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\|\Delta A\|\right] \tag{3.1.4}$$

или

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\frac{\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right]. \tag{3.1.5}$$

Доказателство. Разглеждаме тъждеството

$$\Delta X - \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X \, X^{i-(n+1)} A = \Delta Q - \tilde{A}^* \tilde{X}^{-n} \Delta A - \Delta A^* X^{-n} A \, .$$

Нека лявата страна означим с $B = \Delta X - \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X \, X^{i-(n+1)} A$, тогава имаме

$$\begin{aligned} \|B\| &\geq \left| \|\Delta X\| - \left\| \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} A \right\| \right| \\ &\geq \|\Delta X\| - \left\| \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} A \right\| \\ &\geq \|\Delta X\| - \|\Delta X\| \sum_{i=1}^{n} \left\| \tilde{A}^* \tilde{X}^{-i} \right\| \left\| X^{i-(n+1)} A \right\| \\ &= \varepsilon \, \|\Delta X\| \, \geq \, 0 \, . \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \Delta X - \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} A \right\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \Delta Q - \tilde{A}^* \tilde{X}^{-n} \Delta A - \Delta A^* X^{-n} A \right\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left[\|\Delta Q\| + \left(\left\| \tilde{X}^{-n} \tilde{A} \right\| + \left\| X^{-n} A \right\| \right) \|\Delta A\| \right] . \end{aligned}$$

С това неравенството (3.1.4) е доказано. След като разделим двете страни на полученото неравенство на $\|X\|$, получаваме неравенството (3.1.5). □

Теорема 3.1.2. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на матричните уравнения (3.1.2) и (3.1.3). Ако*

$$\eta = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left\| \tilde{X}^{-i} A \right\| \left\| X^{i-(n+1)} A \right\| > 0 \, ,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\eta} \left[\|\Delta Q\| + 2 \left\| \tilde{X}^{-n} A \right\| \|\Delta A\| + \left\| \tilde{X}^{-n} \right\| \|\Delta A\|^2 \right] \tag{3.1.6}$$

или

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\eta} \left[\frac{\|Q\|}{\|X\|} \frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \frac{2 \left\| \tilde{X}^{-n} A \right\| \|A\|}{\|X\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\left\| \tilde{X}^{-n} \right\| \|A\|^2}{\|X\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)^2 \right] . \tag{3.1.7}$$

Доказателство. Доказателството е подобно на теорема 3.1.1. За целта разглеждаме друго тъждество

$$\Delta X - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X \, X^{i-(n+1)} \, A = \Delta Q - A^* \tilde{X}^{-n} \Delta A - \Delta A^* \tilde{X}^{-n} \tilde{A} \,. \qquad (3.1.8)$$

Нека $\tilde{B} = \Delta X - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X \, X^{i-(n+1)} \, A$, тогава получаваме

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{B} \right\| &\geq \left| \|\Delta X\| - \left\| A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} \, A \right\| \right| \\ &\geq \|\Delta X\| - \left\| A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} \, A \right\| \\ &\geq \|\Delta X\| - \|\Delta X\| \sum_{i=1}^{n} \left\| \tilde{X}^{-i} A \right\| \left\| X^{i-(n+1)} A \right\| \\ &= \eta \, \|\Delta X\| \geq 0 \,. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \frac{1}{\eta} \left\| \Delta X - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i} \Delta X X^{i-(n+1)} \, A \right\| \\ &= \frac{1}{\eta} \left\| \Delta Q - A^* \tilde{X}^{-n} \Delta A - \Delta A^* \tilde{X}^{-n} \tilde{A} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\eta} \left[\|\Delta Q\| + \left(\left\| \tilde{X}^{-n} A \right\| + \left\| \tilde{X}^{-n} \tilde{A} \right\| \right) \|\Delta A\| \right] \\ &\leq \frac{1}{\eta} \left[\|\Delta Q\| + \left(\left\| \tilde{X}^{-n} A \right\| + \left\| \tilde{X}^{-n} (A + \Delta A) \right\| \right) \|\Delta A\| \right] \\ &\leq \frac{1}{\eta} \left[\|\Delta Q\| + 2 \left\| \tilde{X}^{-n} A \right\| \|\Delta A\| + \left\| \tilde{X}^{-n} \right\| \|\Delta A\|^2 \right] . \end{aligned}$$

С това неравенството (3.1.6) е доказано. След като разделим двете страни на полученото неравенство на $\|X\|$, получаваме неравенството (3.1.7). □

Следващите резултати се отнасят за специалното решение X_l. Теореми за съществуване и свойства на X_l са дадени в първа глава.

Теорема 3.1.3. *[21] Нека A, $\tilde{A}$, Q, $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а Q и $\tilde{Q}$ са положително определени. Ако*

$$\xi = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} - \|A\| \sqrt{\left\|Q^{-1}\right\|^{n+1}} > 0 \,,$$

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| < \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}} - \sqrt{n^n}}{\sqrt{\left[(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|\right]^{n+1}}}\,\xi\,, \tag{3.1.9}$$

$$\left\|\tilde{Q} - Q\right\| \leq \frac{1}{\left\|Q^{-1}\right\|}\left(1 - \sqrt[n+1]{(1-\xi)^2}\right), \tag{3.1.10}$$

тогава решенията X_l *и* $\tilde{X}_l$ *на уравненията (3.1.2) и (3.1.3) съществуват и удовлетворяват*

$$\left\|\tilde{X}_l - X_l\right\| \leq \frac{1}{\delta}\left[\|\Delta Q\| + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \left(\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|\right)\|\Delta A\|\right] \tag{3.1.11}$$

и

$$\frac{\left\|\tilde{X}_l - X_l\right\|}{\|X_l\|} \leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\,\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right], \tag{3.1.12}$$

където $\delta = 1 - \|A\|^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i}$.

Доказателство. Съгласно тъждеството $\tilde{Q}^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}\Delta Q\,\tilde{Q}^{-1}$ и условието (3.1.10), получаваме

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\| &\leq \left\|Q^{-1}\right\| + \left\|Q^{-1}\right\|\|\Delta Q\|\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|Q^{-1}\right\| + \left(1 - \sqrt[n+1]{(1-\xi)^2}\right)\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|.\end{aligned}$$

От тук имаме

$$\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \leq \frac{\sqrt{\left\|Q^{-1}\right\|^{n+1}}}{1-\xi}. \tag{3.1.13}$$

Като комбинираме (3.1.9) и (3.1.13), получаваме

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{A}\right\|\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} &\leq \left(\|A\| + \|\Delta A\|\right)\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \\ &< \left(\|A\| + \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}} - \sqrt{n^n}}{\sqrt{\left[(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|\right]^{n+1}}}\,\xi\right)\frac{\sqrt{\left\|Q^{-1}\right\|^{n+1}}}{1-\xi} \\ &= \frac{\|A\|\sqrt{\left[(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|\right]^{n+1}} + \left(\sqrt{(n+1)^{n+1}} - \sqrt{n^n}\right)\xi}{(1-\xi)\sqrt{(n+1)^{n+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Съгласно теорема 1.1.4 следва, че решенията X_l и $\tilde{X}_l$ съответно на уравненията (3.1.2) и (3.1.3) съществуват. От следствие 1.1.5 следва, че те удовлетворяват неравенствата:

$$\left\|X_l^{-1}\right\| < \frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|; \qquad \frac{n}{n+1}\|Q\| < \|X_l\|; \tag{3.1.14}$$

$$\left\|\tilde{X}_l^{-1}\right\| < \frac{n+1}{n}\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|; \qquad \frac{n}{n+1}\left\|\tilde{Q}\right\| < \left\|\tilde{X}_l\right\|. \tag{3.1.15}$$

Отбелязваме, че

$$\|A\|\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \leq (\|A\|+\|\Delta A\|)\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}.$$

Записваме тъждеството (3.1.8) за решенията X_l и $\tilde{X}_l$.

$$\Delta X_l - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_l^{-i} \Delta X_l\, X_l^{i-(n+1)} A = \Delta Q - A^* \tilde{X}_l^{-n} \Delta A - \Delta A^* \tilde{X}_l^{-n} \tilde{A}, \tag{3.1.16}$$

където $\Delta X_l = \tilde{X}_l - X_l$. Нека лявата страна на (3.1.16) означим с B_l, тогава използвайки неравенствата (3.1.14) и (3.1.15), получаваме

$$\begin{aligned}
\|B_l\| &= \left\|\Delta X_l - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_l^{-i} \Delta X_l\, X_l^{i-(n+1)} A\right\| \\
&\geq \left|\|\Delta X_l\| - \left\|A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_l^{-i} \Delta X_l X_l^{i-(n+1)} A\right\|\right| \\
&\geq \|\Delta X_l\| - \left\|A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_l^{-i} \Delta X_l X_l^{i-(n+1)} A\right\| \\
&\geq \|\Delta X_l\| - \|A\|^2\, \|\Delta X_l\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}_l^{-i}\right\| \left\|X_l^{i-(n+1)}\right\| \\
&\geq \delta\, \|\Delta X_l\| \geq 0,
\end{aligned}$$

където $\delta = 1 - \|A\|^2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{i} \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} > 0$.

Следователно, от тъждеството (3.1.16) имаме

$$\begin{aligned}
\delta\, \|\Delta X_l\| &\leq \left\|\Delta Q + A^* \tilde{X}^{-n} \Delta A + \Delta A^* \tilde{X}^{-n} \tilde{A}\right\| \\
&\leq \|\Delta Q\| + \|A\| \left\|\tilde{X}^{-n}\right\| \|\Delta A\| + \|\Delta A\| \left\|\tilde{X}^{-n}\right\| \left\|\tilde{A}\right\| \\
&\leq \|\Delta Q\| + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n} \left(\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|\right) \|\Delta A\|.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\|\Delta X_l\| \leq \frac{1}{\delta}\left[\|\Delta Q\| + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \left(\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|\right)\|\Delta A\|\right].$$

Така получихме неравенство (3.1.11).

Отбелязваме, че

$$\|X_l\| \geq \frac{n}{n+1}\,\|Q\| \geq \frac{n}{n+1}\,\left\|Q^{-1}\right\|^{-1}.$$

Тогава, като разделим двете страни на неравенство (3.1.11) на $\|X_l\|$ получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta X_l\|}{\|X_l\|} &\leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|X_l\|} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \left(\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|X_l\|}\right] \\
&= \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\frac{\|Q\|}{\|X_l\|} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \left(\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\frac{\|A\|}{\|X_l\|}\right] \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\frac{n+1}{n} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \kappa\left(\frac{\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|}{\|A\|}\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right],
\end{aligned}$$

където $\kappa = \|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \|Q^{-1}\|$. Понеже

$$\|A\|\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \quad \text{и} \quad \|A\|\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}},$$

то $\kappa < \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Следователно

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta X_l\|}{\|X_l\|} &\leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\frac{n+1}{n} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\left(\frac{\|A\| + \left\|\tilde{A}\right\|}{\|A\|}\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right] \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right].
\end{aligned}$$

С това теоремата е доказана. □

Теорема 3.1.4. *[21] Нека* $\|A\|\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$ *и* $\tilde{X}$ *е положително определена матрица, която апроксимира решението* X_l *на уравнението (3.1.2). Ако*

$$\nu = 1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left(\frac{n+1}{n}\,\|Q^{-1}\|\right)^{n+1-i} > 0,$$

тогава

$$\left\|\tilde{X} - X_l\right\| \le \frac{1}{\nu}\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|$$

и

$$\frac{\left\|\tilde{X} - X_l\right\|}{\|X_l\|} \le \frac{n+1}{n\,\nu}\,\frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|},$$

където $R\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} + A^*\tilde{X}^{-n}A - Q$.

Доказателство. Отбелязваме, че $\tilde{X}$ е решение на матричното уравнение $X + A^*X^{-n}A = \tilde{Q}$, където $\tilde{Q} = Q + R\left(\tilde{X}\right)$. Тогава от тъждеството (3.1.16) можем да запишем

$$R\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} - X_l - A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\left(\tilde{X} - X_l\right) X_l^{i-(n+1)} A\,.$$

От тук, получаваме

$$\begin{aligned}
\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\| &\ge \left\|\tilde{X} - X_l\right\| - \left\|\tilde{X} - X_l\right\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| \\
&\ge \left\|\tilde{X} - X_l\right\| - \|A\| \left\|\tilde{X} - X_l\right\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left\|X_l^{i-(n+1)}\right\| \\
&\ge \left\|\tilde{X} - X_l\right\| \left[1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left(\frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|\right)^{n+1-i}\right] \\
&= \nu \left\|\tilde{X} - X_l\right\| \ \ge\ 0\,.
\end{aligned}$$

Тъй като $\dfrac{\|Q\|}{\|X_l\|} \le \dfrac{n+1}{n}$, то

$$\frac{\left\|\tilde{X} - X_l\right\|}{\|X_l\|} \le \frac{1}{\nu}\,\frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|}\,\frac{\|Q\|}{\|X_l\|} \le \frac{n+1}{n\,\nu}\,\frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|}\,.$$

□

Следствие 3.1.5. *[21] Нека* $\|A\|\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} < \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$ *и* $\tilde{X}$ *е положително определена матрица, която апроксимира решението* X_l *на уравнението (3.1.2). Ако* $\left\|\tilde{X}^{-1}\right\| \le \frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|$*, тогава*

$$\left\|\tilde{X} - X_l\right\| \le \frac{1}{\nu_1}\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|$$

и

$$\frac{\left\|\tilde{X} - X_l\right\|}{\|X_l\|} \leq \frac{n+1}{n\,\nu_1} \frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|},$$

където

$$\nu_1 = 1 - \frac{\left[(n+1)\left\|Q^{-1}\right\|\right]^{n+1}}{n^n} \|A\|^2 \quad \textit{и} \quad R\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} + A^*\tilde{X}^{-n}A - Q\,.$$

Доказателство. Понеже $\left\|\tilde{X}^{-1}\right\| \leq \frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|$, то

$$\begin{aligned}
\nu &= 1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left(\frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|\right)^{n+1-i} \\
&\geq 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}\right\| \left(\frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|\right)^{n+1-i} \\
&\geq 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|\right)^{i} \left(\frac{n+1}{n}\left\|Q^{-1}\right\|\right)^{n+1-i} \\
&= \nu_1 > 0\,.
\end{aligned}$$

Следователно, от теорема 3.1.4 имаме съответно

$$\left\|\tilde{X} - X_l\right\| \leq \frac{1}{\nu}\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\| \leq \frac{1}{\nu_1}\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|$$

и

$$\frac{\left\|\tilde{X} - X_l\right\|}{\|X_l\|} \leq \frac{n+1}{n\,\nu} \frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|} \leq \frac{n+1}{n\,\nu_1} \frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|}.$$

С това следствието е доказано. □

3.1.2 Числени експерименти

В тази секция са направени сравнения на нашите пертурбационни граници с тези на Ran и Reurings [30] в общия случай и допълнително с оценката на Xu [34] при $n = 1$.

Нека направим следните означения на десните страни на неравенствата (3.1.5), (3.1.7) и (3.1.12) съответно

$$err_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\frac{\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right],$$

$$
\begin{aligned}
err_\eta &= \frac{1}{\eta}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \frac{2\left\|\tilde{X}^{-n}A\right\|\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\left\|\tilde{X}^{-n}\right\|\|A\|^2}{\|X\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)^2\right], \\
err_\delta &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right].
\end{aligned}
$$

Авторите Ran и Reurings [30] правят анализ на уравнението

$$X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q \tag{3.1.17}$$

със съответно пертурбационно уравнение

$$X + \tilde{A}^*\mathcal{F}(X)\tilde{A} = \tilde{Q} \tag{3.1.18}$$

и дават пертурбационни граници на положително определените му решения. Ето и техните граници.

Теорема 3.1.6. *(Proposition 4.1 [30]) Нека $\bar{X}$ положително определено решение на (3.1.17) в $\mathcal{J}(m)$. Ако $M_{\mathcal{J}(m)}\|A\|^2 < 1$ и*

(a) $\left\|\tilde{A}\right\| \leq \left\|\tilde{A}\right\|$, *или*

(b) $\left\|\tilde{A}\right\| > \left\|\tilde{A}\right\|$ *и* $\left\|A - \tilde{A}\right\| < \frac{1 - M_{\mathcal{J}(m)}\|A\|^2}{M_{\mathcal{J}(m)}\|A\|}$,

тогава

$$\left\|\bar{X} - \tilde{X}\right\| \leq \frac{\left\|\tilde{A}\right\|\left\|\mathcal{F}(\tilde{X})\right\| + \|A\|\left\|\mathcal{F}(\bar{X})\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)}\|A\|\left\|\tilde{A}\right\|}\left\|A - \tilde{A}\right\| + \frac{\left\|Q - \tilde{Q}\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)}\|A\|\left\|\tilde{A}\right\|} \tag{3.1.19}$$

за всички решения $\tilde{X}$ на (3.1.18) (ако съществуват).

В горната теорема $\mathcal{J}(m)$ е множество от вида

$$[B, C] \quad \text{или} \quad \{X \in \mathcal{P}(m) | X \geq B\},$$

където $B, C \in \mathcal{P}(m)$ (положително полуопределени матрици). $M_{\mathcal{J}(m)}$ е най-малката възможна стойност, така че неравенството

$$\sup_{X \in \mathcal{J}(m)} \|\mathcal{DF}(X)\| \leq M_{\mathcal{J}(m)}$$

да е изпълнено, а $\mathcal{DF}(X)$ е производната на Fréchet.

Теорема 3.1.7. *(Remark 4.2 [30]) Нека $\bar{X}$ положително определено решение на (3.1.17) в $\mathcal{J}(m)$. Ако $M_{\mathcal{J}(m)} \|A\|^2 < 1$, тогава*

$$\left\|\bar{X} - \tilde{X}\right\| \leq \frac{\left\|\mathcal{F}(\tilde{X})\right\| \left(2\|A\| + \left\|A - \tilde{A}\right\|\right)}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\|^2} \left\|A - \tilde{A}\right\| + \frac{\left\|Q - \tilde{Q}\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\|^2} \qquad (3.1.20)$$

за всички решения $\tilde{X}$ на (3.1.18) (ако съществуват).

За $\mathcal{F}(X) = \pm X^{-n}$ имаме

$$\mathcal{DF}(X)(H) = \mp \sum_{j=0}^{n-1} X^{-j-1} H X^{j-n},$$

където n е естествено число. От тук

$$\begin{aligned} \|\mathcal{DF}(X)\| &= \sup_{\|H\|=1} \|\mathcal{DF}(X)(H)\| \\ &\leq \sup_{\|H\|=1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\|X^{-j-1}\right\| \|H\| \left\|X^{j-n}\right\| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\|X^{-j-1}\right\| \left\|X^{j-n}\right\| . \end{aligned}$$

Следователно

$$\sup_{X \in \mathcal{J}(m)} \|\mathcal{DF}(X)\| \leq \sup_{X \in \mathcal{J}(m)} \sum_{j=0}^{n-1} \left\|X^{-j-1}\right\| \left\|X^{j-n}\right\| .$$

Нека десните страни на неравенствата (3.1.19) и (3.1.20) разделени на $\|X\|$ означим съответно

$$\begin{aligned} Pr.4.1 &= \frac{1}{\|X\|} \left[\frac{\left\|\tilde{A}\right\| \left\|\mathcal{F}(\tilde{X})\right\| + \|A\| \left\|\mathcal{F}(\bar{X})\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\| \left\|\tilde{A}\right\|} \left\|A - \tilde{A}\right\| + \frac{\left\|Q - \tilde{Q}\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\| \left\|\tilde{A}\right\|} \right] \\ R.4.2 &= \frac{1}{\|X\|} \left[\frac{\left\|\mathcal{F}(\tilde{X})\right\| \left(2\|A\| + \left\|A - \tilde{A}\right\|\right)}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\|^2} \left\|A - \tilde{A}\right\| + \frac{\left\|Q - \tilde{Q}\right\|}{1 - M_{\mathcal{J}(m)} \|A\|^2} \right] . \end{aligned}$$

Пример 3.1.1. *Разглеждаме уравнението $X + A^* X^{-n} A = Q$ с коефициенти*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и решение } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix},$$

където $a \in (0,\, 1)$.

За пертурбационното уравнение $\tilde{X} + \tilde{A}^* \tilde{X}^{-n} \tilde{A} = \tilde{Q}$ *имаме* $\tilde{A} = A + \epsilon Q$,

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 - a^2 \end{pmatrix} \quad \textit{и} \quad \tilde{Q} = \tilde{X} + \tilde{A}^* \tilde{X}^{-n} \tilde{A}, \ \textit{където}\ \epsilon = 10^{-2j}, j = 2, 3, 4\,.$$

За разгледания пример 3.1.1 при $n = 2,\ 3$ с

$$a = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} - 10^{-j}\,, \ \text{имаме} \ \ \xi = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} - \|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} > 0\ .$$

Следователно, $\|X^{-1}\| < \frac{n+1}{n} \|Q^{-1}\|$. Оценяваме $\|\mathcal{DF}(X)\| \le \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \|Q^{-1}\|^{n+1}$, откъдето $M_{\mathcal{J}(m)} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \|Q^{-1}\|^{n+1}$. Ако $\xi < 0$ и нямаме оценка на $\|X^{-1}\|$, тогава е невъзможно пресмятането на $M_{\mathcal{J}(m)}$.

Таблица 3.1: Пертурбационни граници за пример 3.1.1.

	$n=2$			$n=3$		
j	2	3	4	2	3	4
$\frac{\|\tilde{X}-X\|}{\|X\|}$	$1.000e{-}4$	$1.000e{-}6$	$1.000e{-}8$	$1.000e{-}4$	$1.000e{-}6$	$1.000e{-}8$
err_ε	$2.434e{-}4$	$2.507e{-}6$	$2.514e{-}8$	$2.319e{-}4$	$2.403e{-}6$	$2.412e{-}8$
err_η	$2.434e{-}4$	$2.507e{-}6$	$2.514e{-}8$	$2.319e{-}4$	$2.403e{-}6$	$2.412e{-}8$
err_δ	$8.149e{-}3$	$7.912e{-}4$	$7.890e{-}5$	$5.710e{-}3$	$5.519e{-}4$	$5.500e{-}5$
$Pr.4.1$	$3.929e{-}3$	$3.962e{-}4$	$3.966e{-}5$	$3.069e{-}3$	$3.094e{-}4$	$3.097e{-}5$
$R.4.2$	$3.929e{-}3$	$3.962e{-}4$	$3.966e{-}5$	$3.069e{-}3$	$3.094e{-}4$	$3.097e{-}5$

В таблица 3.1 се вижда, че оценките err_ε и err_η са доста близки до истинската грешка $\frac{\|\tilde{X}-X\|}{\|X\|}$, но техен недостатък, както и на оценките на Ran и Reurings е, че трябва да има някаква информация за X и $\tilde{X}$. Оценката err_δ конкурира оценките $Pr.4.1$ и $R.4.2$, като голямото ѝ предимство пред тях е, че в нея не участват X и $\tilde{X}$.

Остана да опишем оценката, изведена от Xu [34].

Теорема 3.1.8. *(Theorem 3.1 [34]) Нека* $A, \tilde{A}, Q, \tilde{Q} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, *а* Q *и* $\tilde{Q}$ *са положително определени. Ако*

$$\xi = \frac{1}{2} - \|A\|\, \|Q^{-1}\| > 0\,, \tag{3.1.21}$$

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| < \frac{1}{2\left\|Q^{-1}\right\|}\,\xi\,,$$
$$\left\|\tilde{Q} - Q\right\| \le \frac{1}{\left\|Q^{-1}\right\|}\,\xi\,,$$

тогава максималните решения X_L и $\tilde{X}_L$ на уравненията $X + A^*X^{-1}A = Q$ и $\tilde{X} + \tilde{A}^*\tilde{X}^{-1}\tilde{A} = \tilde{Q}$ съществуват и удовлетворяват

$$\frac{\left\|\tilde{X}_L - X_L\right\|}{\|X_L\|} \le \frac{1}{\xi}\left(\frac{\left\|\tilde{Q} - Q\right\|}{\|Q\|} + \frac{\left\|\tilde{A} - A\right\|}{\|A\|}\right) \equiv XuT.3.1\,. \qquad (3.1.22)$$

Понеже разгледаното уравнение (3.1.2) при $n = 1$ има максимално положително определено решение X_L, то при условие (3.1.21) $X_L \equiv X_l$. Нашите условия на теорема 3.1.3 са обобщение на тези на Xu.

Таблица 3.2: Пертурбационни граници за пример 3.1.1 за $n = 1$.

j	2	3	4
$\frac{\|\tilde{X}-X\|}{\|X\|}$	$1.0000e{-}4$	$1.0000e{-}6$	$1.0000e{-}8$
err_ε	$2.6057e{-}4$	$2.6605e{-}6$	$2.6660e{-}8$
err_η	$2.6058e{-}4$	$2.6605e{-}6$	$2.6660e{-}8$
err_δ	$1.5396e{-}2$	$1.5039e{-}3$	$1.5004e{-}4$
$Pr.4.1$	$5.7821e{-}3$	$5.8281e{-}4$	$5.8328e{-}5$
$R.4.2$	$5.7824e{-}3$	$5.8281e{-}4$	$5.8328e{-}5$
$XuT.3.1$	$3.0409e{-}2$	$3.0040e{-}3$	$3.0004e{-}4$

3.2 Пертурбационна теория на $X - A^*X^{-n}A = Q$

В този параграф правим пертурбационен анализ на положително определените решения на матричното уравнение

$$X - A^*X^{-n}A = Q\,, \qquad (3.2.23)$$

където $A, Q \in C^{m\times m}$ и Q е положително определена матрица, а n е цяло положително число. Разглеждаме и съответното пертурбационно уравнение

$$\tilde{X} - \tilde{A}^*\tilde{X}^{-n}\tilde{A} = \tilde{Q}\,, \qquad (3.2.24)$$

където $\tilde{A} = \Delta A + A$, $\tilde{Q} = \Delta Q + Q$ и $\tilde{X} = \Delta X + X$.

Уравнение (3.2.23) разгледахме в първа глава и изследвахме свойствата на неговите положително определени решения. Тук, в първа секция ще дадем пертурбационни оценки на тези решения, а в следващата са сравнени нашите пертурбационни граници с тези на Sun [33] при $n = 1$, и с тези на Ran и Reurings [30] в общия случай.

3.2.1 Пертурбационни оценки

Както казахме и в предходния параграф, първите две теореми са в сила и за двете уравнения $X + A^*X^{-n}A = Q$ и $X - A^*X^{-n}A = Q$. Те са разгледани в [18] и са доказани в предния параграф. Тук ще дадем кратко доказателство на двете теореми в случай на уравнение (3.2.23) и ще продължим с други резултати валидни само за уравнението (3.2.23).

Теорема 3.2.1. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на матричните уравнения (3.2.23) и (3.2.24). Ако*

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}\tilde{A}\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| > 0\,,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\|\Delta Q\| + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\|\Delta A\|\right] \tag{3.2.25}$$

или

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\frac{\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right] \tag{3.2.26}$$

Доказателство. Разглеждаме тъждеството

$$\Delta X + \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)}\, A = \Delta Q + \tilde{A}^*\tilde{X}^{-n}\Delta A + \Delta A^* X^{-n} A$$

Нека $B = \Delta X + \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)}\, A$, тогава

$$\begin{aligned}\|B\| &\geq \|\Delta X\| - \|\Delta X\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{A}^*\tilde{X}^{-i}\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| \\ &= \varepsilon\,\|\Delta X\| \;\geq\; 0\,.\end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\le \frac{1}{\varepsilon}\left\|\Delta X + \tilde{A}^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)} A\right\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left\|\Delta Q + \tilde{A}^*\tilde{X}^{-n}\Delta A + \Delta A^* X^{-n} A\right\| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\left[\|\Delta Q\| + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\|\Delta A\|\right]. \end{aligned}$$

С това доказахме неравенството (3.2.25). След почленно разделяне на $\|X\|$ получаваме неравенството (3.2.26). □

Теорема 3.2.2. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на матричните уравнения (3.2.23) и (3.2.24). Ако*

$$\eta = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| > 0,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \le \frac{1}{\eta}\left[\|\Delta Q\| + 2\left\|\tilde{X}^{-n}A\right\| \|\Delta A\| + \left\|\tilde{X}^{-n}\right\| \|\Delta A\|^2\right]$$

или

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \frac{1}{\eta}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \frac{2\left\|\tilde{X}^{-n}A\right\| \|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\left\|\tilde{X}^{-n}\right\| \|A\|^2}{\|X\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)^2\right] \tag{3.2.27}$$

Доказателство. Разглеждаме тъждеството

$$\Delta X + A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)} A = \Delta Q + A^*\tilde{X}^{-n}\Delta A + \Delta A^*\tilde{X}^{-n}\tilde{A}. \tag{3.2.28}$$

От тук нататък доказателството е подобно на теорема 3.2.1. □

Следствие 3.2.3. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на уравненията (3.2.23) и (3.2.24). Ако*

$$\tilde{\eta} = 1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{i} \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| > 0,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\tilde{\eta}}\left[\|\Delta Q\| + (2\|A\| + \|\Delta A\|)\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \|\Delta A\|\right] \tag{3.2.29}$$

или

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\tilde{\eta}}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|A\|^2\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right] \tag{3.2.30}$$

Доказателство. Тъй като за всяко положително определено решение на уравненията (3.2.23) и (3.2.24) е изпълнено съответно $X \geq Q$ и $\tilde{X} \geq \tilde{Q}$, то получаваме $\left\|\tilde{X}^{-1}\right\| \leq \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|$, от където имаме

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{X}^{-i}A\right\|\left\|X^{i-(n+1)}A\right\| \geq 1 - \|A\|\sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{X}^{-1}\right\|^i\left\|X^{i-(n+1)}A\right\| \\ &\geq 1 - \|A\|\sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i\left\|X^{i-(n+1)}A\right\| = \tilde{\eta} > 0\,. \end{aligned}$$

Следователно от теорема 3.2.2 получаваме

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \frac{1}{\eta}\left[\|\Delta Q\| + 2\left\|\tilde{X}^{-n}A\right\|\|\Delta A\| + \left\|\tilde{X}^{-n}\right\|\|\Delta A\|^2\right] \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\eta}}\left[\|\Delta Q\| + 2\left\|\tilde{X}^{-n}\right\|\|A\|\|\Delta A\| + \left\|\tilde{X}^{-n}\right\|\|\Delta A\|^2\right] \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\eta}}\left[\|\Delta Q\| + 2\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n\|A\|\|\Delta A\| + \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n\|\Delta A\|^2\right] \\ &= \frac{1}{\tilde{\eta}}\left[\|\Delta Q\| + (2\|A\| + \|\Delta A\|)\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n\|\Delta A\|\right]. \end{aligned}$$

Неравенство (3.2.30) получаваме, като двете страни на (3.2.29) разделим на $\|X\|$. □

Следствие 3.2.4. *[18] Нека X и $\tilde{X}$ са положително определени решения съответно на уравненията (3.2.23) и (3.2.24). Ако*

$$\hat{\eta} = 1 - \|A\|^2\sum_{i=1}^{n}\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i\left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} > 0\,,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\hat{\eta}}\left[\|\Delta Q\| + (2\|A\| + \|\Delta A\|)\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n\|\Delta A\|\right]$$

и

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\hat{\eta}} \left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right) \frac{\|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|Q\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right]. \tag{3.2.31}$$

Доказателство. Както казахме в доказателството на следствие 3.2.3, за всяко положително определено решение на уравненията (3.2.23) и (3.2.24) е изпълнено съответно $X \geq Q$ и $\tilde{X} \geq \tilde{Q}$, откъдето $\left\|\tilde{X}^{-1}\right\| \leq \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|$ и $\|X^{-1}\| \leq \|Q^{-1}\|$. От тук получаваме

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= 1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|X^{i-(n+1)} A\right\| \geq 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-1}\right\|^i \left\|X^{-1}\right\|^{n+1-i} \\ &\geq 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} = \hat{\eta} > 0. \end{aligned}$$

Следователно от предното следствие имаме

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \frac{1}{\tilde{\eta}} \left[\|\Delta Q\| + (2\|A\| + \|\Delta A\|) \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \|\Delta A\| \right] \\ &\leq \frac{1}{\hat{\eta}} \left[\|\Delta Q\| + (2\|A\| + \|\Delta A\|) \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n \|\Delta A\| \right]. \end{aligned}$$

Тъй като $\|Q\| \leq \|X\|$, то получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} &\leq \frac{1}{\tilde{\eta}} \left[\frac{\|Q\|}{\|X\|} \frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right) \frac{\|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|X\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right] \\ &\leq \frac{1}{\hat{\eta}} \left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right) \frac{\|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|Q\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right]. \end{aligned}$$

С това следствието е доказано. □

Теорема 3.2.5. *[18] Нека $A, \tilde{A}, Q, \tilde{Q} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а Q и $\tilde{Q}$ са положително определени матрици. Ако*

$$\theta = \frac{\sqrt{n}}{n} - \|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} > 0, \tag{3.2.32}$$

$$\left\|\tilde{Q} - Q\right\| \leq \frac{1}{\|Q^{-1}\|} \left(1 - \sqrt[n+1]{(1-\theta)^2}\right), \tag{3.2.33}$$

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| < \frac{(n - \sqrt{n}) \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}}}{n \|Q^{-1}\|^{n+1}} \theta, \tag{3.2.34}$$

тогава уравненията (3.2.23) и (3.2.24) имат единствени положително определени решения съответно X и $\tilde{X}$, които удовлетворяват

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\hat{\eta}} \left[\|\Delta Q\| + (2\,\|A\| + \|\Delta A\|) \left\| \tilde{Q}^{-1} \right\|^n \|\Delta A\| \right] \tag{3.2.35}$$

и

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\hat{\eta}} \left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right) \frac{\|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|Q\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right], \tag{3.2.36}$$

където $\hat{\eta} = 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^n \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \|Q^{-1}\|^{n+1-i} > 0$.

Доказателство. Съгласно тъждеството $\tilde{Q}^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1} \Delta Q\, \tilde{Q}^{-1}$ и условието (3.2.33), пресмятаме

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\| &\leq \|Q^{-1}\| + \|Q^{-1}\|\,\|\Delta Q\| \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\| \\ &\leq \|Q^{-1}\| + \left(1 - \sqrt[n+1]{(1-\theta)^2}\right) \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|. \end{aligned}$$

От тук имаме

$$\sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \leq \frac{\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}}}{1-\theta}. \tag{3.2.37}$$

Като комбинираме (3.2.34) и (3.2.37), получаваме

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{A}\right\| \sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} &\leq (\|A\| + \|\Delta A\|) \sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \\ &< \left(\|A\| + \frac{(n - \sqrt{n}) \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}}}{n\, \|Q^{-1}\|^{n+1}}\, \theta \right) \frac{\sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}}}{1-\theta} \\ &= \frac{n\, \|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} + (n - \sqrt{n})\, \theta}{n\,(1-\theta)} \\ &= \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{n}\, \|A\| \sqrt{\|Q^{-1}\|^{n+1}} + (\sqrt{n} - 1)\, \theta \right)}{n\,(1-\theta)} = \frac{\sqrt{n}}{n}. \end{aligned}$$

Съгласно теорема 1.2.2 уравненията (3.2.23) и (3.2.24) имат единствени положително определени решения $X \geq Q$ и $\tilde{X} \geq \tilde{Q}$.

Отбелязваме, че

$$\|A\| \sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} \leq (\|A\| + \|\Delta A\|) \sqrt{\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1}} < \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

От (3.2.32) и последното неравенство следва съответно

$$\|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Имаме две възможности: ако $\|Q^{-1}\| \geq \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|$, тогава за $\hat{\eta}$ имаме

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} \geq 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|Q^{-1}\right\|^i \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} \\ &= 1 - n\|A\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1} > 0 \end{aligned}$$

и ако $\|Q^{-1}\| < \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|$ съответно получаваме

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} > 1 - \|A\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^i \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1-i} \\ &= 1 - n\|A\|^2 \left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^{n+1} > 0. \end{aligned}$$

Следователно $\hat{\eta} > 0$, откъдето съгласно следствие 3.2.4, получаваме оценките (3.2.35) и (3.2.36). □

Теорема 3.2.6. *[18] Нека матричното уравнение (3.2.23) има положително определено решение X, а $\tilde{X}$ е негово приближение така, че $\tilde{X} - A^*\tilde{X}^{-n}A > 0$. Ако*

$$\nu = 1 - \|A\| \sum_{i=1}^{n} \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| > 0,$$

тогава

$$\|\Delta X\| \leq \frac{1}{\nu} \left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\| \tag{3.2.38}$$

и

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{1}{\nu} \frac{\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|}{\|Q\|}, \tag{3.2.39}$$

където $R\left(\tilde{X}\right) = \tilde{X} - A^*\tilde{X}^{-n}A - Q$.

Доказателство. Нека $\tilde{Q} = R\left(\tilde{X}\right) + Q$, тогава имаме

$$\begin{aligned} \tilde{X} - A^*\tilde{X}^{-n}A &= \tilde{Q}\,, \quad (\tilde{Q} > 0) \quad \text{и} \\ X - A^*\tilde{X}^{-n}A &= Q\,. \end{aligned}$$

След почленно изваждане на двете уравнения получаваме тъждеството

$$\tilde{X} - X + A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\left(\tilde{X} - X\right) X^{i-(n+1)}A = \tilde{Q} - Q\,.$$

За $\left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\|$ имаме

$$\begin{aligned} \left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\| &= \left\|\tilde{Q} - Q\right\| = \left\|\Delta X + A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)}A\right\| \\ &\geq \left|\|\Delta X\| - \left\|A^* \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}^{-i}\Delta X X^{i-(n+1)}A\right\|\right| \\ &\geq \|\Delta X\| - \|\Delta X\| \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left\|X^{i-(n+1)}A\right\| \\ &= \nu\, \|\Delta X\|\,. \end{aligned}$$

Тъй като $X \geq Q$, то $X^{-1} \leq Q^{-1}$ и $\|X^{-1}\|^p \leq \|Q^{-1}\|^p$ за всяко p.

Следователно

$$\begin{aligned} \left\|R\left(\tilde{X}\right)\right\| &\geq \|\Delta X\| \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\| \left\|X^{i-(n+1)}\right\| \|A\|\right) \\ &\geq \|\Delta X\| \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \|A\| \left\|Q^{-1}\right\|^{n+1-i} \left\|\tilde{X}^{-i}A\right\|\right) \\ &= \nu \|\Delta X\|\,. \end{aligned}$$

От тук получаваме (3.2.38) и (3.2.39). □

3.2.2 Числени експерименти

Направени са експерименти при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 1$ с различни матрици A и Q – коефициенти на матричното уравнение (3.2.23). Пресмятанията са извършени в програмната среда MATLAB. Резултатите при $n = 2$ и $n = 3$ са сравнени с тези на Ran и Reurings [30]. При $n = 1$ е направена еквивалентна връзка с уравнения на Рикати и резултатите са сравнени със съответните оценки на Sun [33].

Пример 3.2.1. *Разглеждаме матричното уравнение*

$$X - A_k^T X^{-n} A_k = Q_k\,, \qquad A_k = \frac{\delta_k}{\|A\|}\, A,$$

където

$$\delta_k = 0.967 - 10^{-k}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

с решение $X = E + 1.5I$, където E е матрица с елементи единица а $Q_k = X - A_k^T X^{-n} A_k$.

Разглеждаме пертурбационното уравнение

$$X_{kj} - A_{kj}^T X_{kj}^{-n} A_{kj} = Q_{kj}\,,$$

където $A_{kj} = A_k + 10^{-k.j} A_0$, $A_0 = \frac{1}{\|C^T + C\|}\,(C^T + C)$, а C е случайна матрица, генерирана с функция `randn` (функция на MATLAB). Освен това, решението $X_{kj} = X + 10^{-k.j}\,(E - 2I)$, а $Q_{kj} = X_{kj} - A_{kj}^T X_{kj}^{-n} A_{kj}$.

Направили сме следните означения на десните страни съответно на неравенства (3.2.26), (3.2.27), (3.2.30) и (3.2.31):

$$\begin{aligned}
err_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(\left\|\tilde{X}^{-n}\tilde{A}\right\| + \left\|X^{-n}A\right\|\right)\frac{\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right]; \\
err_\eta &= \frac{1}{\eta}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \frac{2\left\|\tilde{X}^{-n}A\right\|\|A\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\left\|\tilde{X}^{-n}\right\|\|A\|^2}{\|X\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)^2\right]; \\
err_{\tilde\eta} &= \frac{1}{\tilde\eta}\left[\frac{\|Q\|}{\|X\|}\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \left(2 + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|A\|^2\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|X\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right];
\end{aligned}$$

$$err_{\hat{\eta}} \;=\; \frac{1}{\hat{\eta}}\left[\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|}+\left(2+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\frac{\|A\|^2\left\|\tilde{Q}^{-1}\right\|^n}{\|Q\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right].$$

Освен тях използваме и означенията $Pr.4.1$ и $R.4.2$ направени в предходния параграф за оценките на Ran и Reurings, $\mathcal{F}(X) = X^{-n}$ и $M_{\mathcal{J}(m)} = n\,\|Q^{-1}\|^{n+1}$.

Резултатите са дадени в следващите таблици, като в горните формули $A = A_k$, $\tilde{A} = A_{kj}$, $Q = Q_k$, $\tilde{Q} = Q_{kj}$, $\tilde{X} = X_{kj}$.

Таблица 3.3: Пертурбационни граници за пример 3.2.1 за $n = 2$.

	$k=2$			$k=3$		
j	2	3	4	2	3	4
$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$	$4.615e{-5}$	$4.615e{-7}$	$4.615e{-9}$	$4.615e{-7}$	$4.615e{-10}$	$4.615e{-13}$
err_ε	$8.763e{-5}$	$8.654e{-7}$	$8.756e{-9}$	$8.893e{-7}$	$9.060e{-10}$	$9.468e{-13}$
err_η	$8.764e{-5}$	$8.654e{-7}$	$8.756e{-9}$	$8.893e{-7}$	$9.060e{-10}$	$9.468e{-13}$
$err_{\tilde{\eta}}$	$1.493e{-4}$	$1.476e{-6}$	$1.491e{-8}$	$1.573e{-6}$	$1.599e{-9}$	$1.661e{-12}$
$err_{\hat{\eta}}$	$2.066e{-3}$	$2.022e{-5}$	$2.042e{-7}$	$3.369e{-4}$	$3.418e{-7}$	$3.552e{-10}$
$Pr.4.1$	$1.846e{-3}$	$1.822e{-5}$	$1.843e{-7}$	$3.027e{-4}$	$3.081e{-7}$	$3.214e{-10}$
$R.4.2$	$1.844e{-3}$	$1.822e{-5}$	$1.843e{-7}$	$3.027e{-4}$	$3.081e{-7}$	$3.214e{-10}$

В таблица 3.3 са дадени пертурбационни оценки за пример 3.2.1 при $n = 2$. Експериментите показват, че оценките err_ε и err_η са най-близки до истинската пертурбация. Недостатък на споменатите оценки, както и на оценките на Ran и Reurings е, че са необходими оценки за X и $\tilde{X}$. Оценката $err_{\hat{\eta}}$ е от порядъка на $Pr.4.1$ и $R.4.2$ и при нея не участват решенията X или $\tilde{X}$.

Резултатите при $n = 3$ са дадени в таблица 3.4. Изводите са, както за примера при $n = 2$.

И в двата случая на $n = 2$ и $n = 3$ за разгледания пример условията (3.2.32), (3.2.34) и (3.2.33) на теорема 3.2.5 са изпълнени. Следователно, оригиналното и пертурбационното уравнение имат единствени положително определени решения, откъдето следва, че дадените пертурбационни граници са за тях.

Таблица 3.4: Пертурбационни граници за пример 3.2.1 за $n = 3$.

	$k=2$			$k=3$		
j	2	3	4	2	3	4
$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$	$4.615e{-5}$	$4.615e{-7}$	$4.615e{-9}$	$4.615e{-7}$	$4.615e{-10}$	$4.615e{-13}$
err_ε	$8.166e{-5}$	$8.137e{-7}$	$8.196e{-9}$	$8.314e{-7}$	$8.282e{-10}$	$8.336e{-13}$
err_η	$8.167e{-5}$	$8.137e{-7}$	$8.196e{-9}$	$8.314e{-7}$	$8.282e{-10}$	$8.336e{-13}$
$err_{\tilde\eta}$	$1.271e{-4}$	$1.266e{-6}$	$1.275e{-8}$	$1.335e{-6}$	$1.331e{-9}$	$1.338e{-12}$
$err_{\hat\eta}$	$5.475e{-4}$	$5.440e{-6}$	$5.476e{-8}$	$7.266e{-6}$	$7.241e{-9}$	$7.283e{-12}$
$Pr.4.1$	$5.083e{-4}$	$5.067e{-6}$	$5.103e{-8}$	$6.757e{-6}$	$6.732e{-9}$	$6.774e{-12}$
$R.4.2$	$5.084e{-4}$	$5.067e{-6}$	$5.103e{-8}$	$6.756e{-6}$	$6.732e{-9}$	$6.774e{-12}$

Преди да разгледаме следващия пример, ще дадем връзката между уравнението (3.2.23) при $n = 1$ и уравнение (дискретно алгебрично уравнение на Рикати)

$$X - S^*XS + S^*XB(R + B^*XB)^{-1}B^*XS - C^*C = 0\,, \quad R > 0\,, \tag{3.2.40}$$

което разглеждат Sun [33], Константинов, Петков и Христов [23].

Разгледаното от нас уравнение $X - A^*X^{-1}A = Q$ записваме

$$X = Q + A^*X^{-1}A\,. \tag{3.2.41}$$

Следвайки Ferante и Levy [11] имаме, ако X е решение на (3.2.41), тогава то е решение и на уравнението

$$X = Q + A^*\left(Q + A^*X^{-1}A\right)^{-1}A\,.$$

Предполагаме, че A е неособена, тогава можем да запишем

$$X = Q + S^*\left(R^{-1} + X^{-1}\right)^{-1}S\,, \quad \text{където } S = A^{-*}A\,,\ R = AQ^{-1}A^*\,.$$

От формулата на Woodbury имаме $(X^{-1} + R^{-1})^{-1} = X - X\,(R + X)^{-1}X$, откъдето получаваме

$$X - S^*XS + S^*X\,(R + X)^{-1}XS - Q = 0\,,$$

което е от вида на (3.2.40).

Следователно пертурбационни оценки за положително определеното решение на уравнението (3.2.41) можем да получим като пертурбационни оценки на решението на уравнението (3.2.40) при $B = I$ и $C^*C = Q$.

При изследване на уравнението (3.2.40), Sun разглежда еквивалентното уравнение

$$X - S^*X(I + GX)^{-1}S - Q = 0\,, \tag{3.2.42}$$

където $Q = C^*C > 0$ и $G = BR^{-1}B^* > 0$ и съответното пертурбационно уравнение

$$\tilde{X} - \tilde{S}^*\tilde{X}(I + \tilde{G}\tilde{X})^{-1}\tilde{S} - \tilde{Q} = 0\,. \tag{3.2.43}$$

За да дадем оценките на Sun, ще направим някои предварителни означения използвани от него.

$$\Delta X = \tilde{X} - X\,, \quad \Delta Q = \tilde{Q} - Q\,, \quad \Delta S = \tilde{S} - S\,, \quad \Delta G = \tilde{G} - G\,,$$

$$F = (I + GX)^{-1}\,, \quad \Phi = FS\,, \quad \Psi = XF\,, \quad K = \Psi S\,, \quad \Theta = F(I + \Delta G\Psi)^{-1}\,.$$

Освен това, дефинираме операторите $\mathbf{L} : \mathcal{H}(m) \to \mathcal{H}(m)$, $\mathbf{P} : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathcal{H}(m)$ и $\mathbf{Q} : \mathcal{H}(m) \to \mathcal{H}(m)$ по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}W &= W - \Phi^*W\Phi\,, & W \in \mathcal{H}(m)\,; \\ \mathbf{P}N &= \mathbf{L}^{-1}(K^*N - N^*K)\,, & N \in \mathbb{C}^{m\times m}\,; \\ \mathbf{Q}N &= \mathbf{L}^{-1}(K^*MK)\,, & M \in \mathcal{H}(m)\,. \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Нека

$$l = \left\|\mathbf{L}^{-1}\right\|_U^{-1}\,, \quad p = \|\mathbf{P}\|_U\,, \quad q = \|\mathbf{Q}\|_U\,, \tag{3.2.45}$$

където $\|.\|_U$ е някоя унитарно инвариантна норма. Освен това,

$$\kappa = \|K\|\,, \quad f = \|F\|\,, \quad g = \|G\|\,, \quad \phi = \|\Phi\|\,, \quad \psi = \|\Psi\|\,, \tag{3.2.46}$$

$$\alpha = \|S\|\,, \quad \hat{\alpha} = \frac{f\,(\alpha + \|\Delta A\|)}{1 - \psi\,\|\Delta G\|}\,, \quad \hat{g} = \frac{f\,(g + \|\Delta G\|)}{1 - \psi\,\|\Delta G\|}\,. \tag{3.2.47}$$

Теорема 3.2.7. *(Theorem 4.1, [33]) Нека X е единствено положително определено решение на (3.2.42). Дефинирани са l, p и q в (3.2.45), κ, f, g, ϕ и ψ в (3.2.46) и $\alpha, \hat{\alpha}$ и $\hat{g}$ в (3.2.47) съответно. Освен това, нека $\tilde{Q} = Q + \Delta Q, \tilde{S} = S + \Delta S, \tilde{G} = G + \Delta G$ са коефициенти на пертурбационното уравнение (3.2.43) и нека*

$$\delta = \frac{\|\Delta S\| + \kappa \|\Delta G\|}{1 - \psi \|\Delta G\|}, \quad \eta = f\delta(2\psi + f\delta),$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{l} \|\Delta Q\|_U + p \|\Delta S\|_U + q \|\Delta G\|_U, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \frac{\psi\delta}{l} (\|\Delta S\|_U + \kappa \|\Delta G\|_U) \tag{3.2.48}$$

и

$$\xi_* = \frac{2l\epsilon}{l - \eta + l\hat{g}\epsilon + \sqrt{(l - \eta + l\hat{g}\epsilon)^2 - 4l\hat{g}(l - \eta + \hat{\alpha}^2)\epsilon}}. \tag{3.2.49}$$

Ако

$$\tilde{Q}, \tilde{G} \geq 0, \quad 1 - \psi \|\Delta G\| > 0, \quad 1 - \hat{g}\xi_* > 0, \quad \frac{f\delta + \psi\hat{g}\xi_*}{1 - \hat{g}\xi_*} < \frac{l}{\psi + \sqrt{\psi^2 + l}}$$

и

$$\epsilon < \frac{(l - \eta)^2}{l\hat{g}\left(l - \eta + 2\hat{\alpha} + \sqrt{(l - \eta + 2\hat{\alpha})^2 - (l - \eta)^2}\right)},$$

тогава уравнението (3.2.43) има единствено положително определено решение $\tilde{X}$ и

$$\left\|\tilde{X} - X\right\|_U \leq \xi_*. \tag{3.2.50}$$

Друга оценка извеждат по-рано Константинов, Петков и Христов [23].

Нека дефинираната унитарно инвариантна норма $\|.\|_U$ в рамките на следващата теорема се разбира - $\|.\|_F$ или $\|.\|_2$.

Теорема 3.2.8. *(Theorem 3.2, [23], Theorem 4.2, [33]) Нека X е единствено положително определено решение на (3.2.42). Дефинирани са линейния оператор $\mathbf{L}$ в (3.2.44) и $l = \|\mathbf{L}^{-1}\|_U^{-1}$. Освен това, нека $\tilde{Q} = Q + \Delta Q, \tilde{S} = S + \Delta S$, $\tilde{G} = G + \Delta G$ са коефициенти на пертурбационното уравнение (3.2.43) и*

$$a_0 = \frac{1}{l} \left(\|\Delta Q\|_U + \|X\|_U (2\|S\|_U + \|\Delta S\|_U) \|\Delta S\|_U + \|S\|_U^2 \|X\|_U^2 \|\Delta G\|_U\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{l}\left((2\left\|S\right\|_U + \left\|\Delta S\right\|_U)\left\|\Delta S\right\|_U + 2\left\|S\right\|_U^2\left\|X\right\|_U\left\|\Delta G\right\|_U\right),$$
$$a_2 = \frac{1}{l}\left(\left\|(I+GX)^{-1}S\right\|_U^2\left\|G\right\|_U + \left\|S\right\|_U^2\left\|\Delta G\right\|_U\right).$$

Ако

$$D \equiv (1-a_1)^2 - 4a_0a_2 > 0\,,$$

тогава уравнението (3.2.43) има единствено ермитово решение $\tilde{X}$ *и*

$$\left\|\tilde{X} - X\right\|_U \le \frac{1-a_1-\sqrt{D}}{2a_2} \equiv \xi_{KPC}\,. \tag{3.2.51}$$

В [33] и [23] са дадени съответно две пертурбационни граници линейни относно ΔQ, ΔS и ΔG, когато същите са достатъчно малки:

$$\left\|\tilde{X} - X\right\|_U \lesssim \frac{1}{l}\left\|\Delta Q\right\|_U + p\left\|\Delta S\right\|_U + q\left\|\Delta G\right\|_U \equiv \epsilon_1 \tag{3.2.52}$$

и

$$\left\|\tilde{X} - X\right\|_U \lesssim \frac{1}{l}\left(\left\|\Delta Q\right\|_U + 2\left\|S\right\|_U\left\|X\right\|_U\left\|\Delta S\right\|_U + \left\|S\right\|_U\left\|X\right\|_U\left\|\Delta S\right\|_U\right) \equiv \epsilon_{KPC}\,. \tag{3.2.53}$$

Пресмятането на точните стойности на l, p, и q е много трудно в общия случай. Обаче, ако операторната норма $\|.\|_U$ за дефиниране на l и q е индуцирана с нормата на Фробениус $\|.\|_F$ в $\mathcal{H}(m)$ и нормата $\|.\|_U$ за дефиниране на p е индуцирана с $\|.\|_F$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$, тогава l, p, и q може да се пресметнат по следния начин: нека

$$T = I_{m^2} - \Phi^T \otimes \Phi^*\,,$$

където $\Phi = (I_m + GX)^{-1}A$ е d-устойчива, т.е., $\lambda(\Phi) < 1$. Тогава

$$l = \left\|T^{-1}\right\|^{-1}\,,$$

$$p = \left\|T^{-1}\left[(I_m \otimes K^*)(I_{m^2}, iI_{m^2}) + (K^* \otimes I_m)\Pi(I_{m^2}, -iI_{m^2})\right]\right\|$$

и

$$q = \left\|T^{-1}\left[(K^T \otimes K^*)\right]\right\|\,,$$

където П е vec-пермутационна матрица и $K = X(I_m + GX)^{-1}A$. Отбелязваме, че в реалния случай имаме

$$p = \left\| T^{-1} \left[(I_m \otimes K^*) + (K^* \otimes I_m) \Pi \right] \right\| .$$

Всичко това, за пресмятане на l, p и q е дадено в [33]. За пояснение на vec-пермутационната матрица П, ще дадем как тя действа - $\mathrm{vec}N^T = \Pi\, \mathrm{vec}N$.

Пример 3.2.2. *Разглеждаме матричното уравнение*

$$X - A_k^T X^{-1} A_k = I\,, \qquad A_k = \frac{2\delta_k}{\|A\|} A,$$

където

$$\delta_k = \frac{1}{2} - 10^{-k}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решението $X = X^{(k)}$ пресмятаме по формулата

$$X^{(k)} = \frac{I + \sqrt{I + 4A_k^* A_k}}{2}.$$

Разглеждаме пертурбационното уравнение $X_{kj} - A_{kj}^T X_{kj}^{-1} A_{kj} = I$, където $A_{kj} = A_k + 10^{-k.j} A_0$, $A_0 = \frac{1}{\|C^T + C\|} \left(C^T + C\right)$, а C е матрица на Хилберт, $\left(C = (c_{pq})\,,\ c_{pq} = \frac{1}{p+q-1}\right)$. Освен това, решението

$$X^{(kj)} = \frac{I + \sqrt{I + 4A_{kj}^* A_{kj}}}{2}.$$

Резултатите са дадени в следващите таблици.

В таблица 3.5 са дадени пертурбациинни оценки за пример 3.2.2. Със $*$ са означени случаите, при които някое от условията на съответните теореми не е изпълнено. Резултатите показват предимствата на предложените оценки. Резултатите за оценките на Sun – $\frac{\epsilon_1}{\|X\|}$, $\frac{\xi_*}{\|X\|}$ и Константинов, Петков и Христов – $\frac{\epsilon_{KPC}}{\|X\|}$, $\frac{\xi_{KPC}}{\|X\|}$ в тази таблица са дадени при спектрална норма. Начина по

Таблица 3.5: Пертурбационни граници за пример 3.2.2.

	$k=2$			$k=3$		
j	2	3	4	2	3	4
$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$	$4.057e{-5}$	$4.057e{-7}$	$4.057e{-9}$	$4.041e{-7}$	$4.041e{-10}$	$4.047e{-13}$
err_ε	$1.225e{-4}$	$1.225e{-6}$	$1.225e{-8}$	$1.235e{-6}$	$1.235e{-9}$	$1.235e{-12}$
err_η	$1.225e{-4}$	$1.225e{-6}$	$1.225e{-8}$	$1.235e{-6}$	$1.235e{-9}$	$1.235e{-12}$
$err_{\tilde\eta}$	$2.974e{-4}$	$2.974e{-6}$	$2.974e{-8}$	$3.208e{-6}$	$3.208e{-9}$	$3.208e{-12}$
$err_{\hat\eta}$	$4.950e{-3}$	$4.950e{-5}$	$4.950e{-7}$	$4.995e{-4}$	$4.995e{-7}$	$4.995e{-10}$
$Pr.4.1$	$3.067e{-3}$	$3.063e{-5}$	$3.063e{-7}$	$3.060e{-4}$	$3.059e{-7}$	$3.059e{-10}$
$R.4.2$	$3.063e{-3}$	$3.063e{-5}$	$3.063e{-7}$	$3.059e{-4}$	$3.059e{-7}$	$3.059e{-10}$
$\frac{\epsilon_1}{\|X\|}$	$3.000e{-2}$	$3.003e{-4}$	$3.003e{-6}$	$2.984e{-4}$	$2.984e{-7}$	$2.984e{-10}$
$\frac{\xi_*}{\|X\|}$	$*$	$3.014e{-4}$	$3.003e{-6}$	$2.996e{-4}$	$2.984e{-7}$	$2.984e{-10}$
$\frac{\epsilon_{KPC}}{\|X\|}$	$2.132e{-1}$	$2.134e{-3}$	$2.134e{-5}$	$2.052e{-3}$	$2.052e{-6}$	$2.052e{-9}$
$\frac{\xi_{KPC}}{\|X\|}$	$*$	$2.277e{-3}$	$2.135e{-5}$	$2.186e{-3}$	$2.053e{-6}$	$2.052e{-9}$

който са пресметнати стойностите на променливите l, p, q са тъй, както за нормата на Фробениус. В такъв смисъл те не са съвсем коректни. В следващата таблица даваме техните оценки относно $\|.\|_F$.

Таблица 3.6: Пертурбационни граници за пример 3.2.2 с $\|.\|_F$.

	$k=2$			$k=3$		
j	2	3	4	2	3	4
$\frac{\|\Delta X\|_F}{\|X\|_F}$	$4.615e{-5}$	$4.615e{-7}$	$4.615e{-9}$	$2.314e{-7}$	$2.314e{-10}$	$2.318e{-13}$
$\frac{\epsilon_1}{\|X\|_F}$	$1.706e{-2}$	$1.707e{-4}$	$1.707e{-6}$	$1.703e{-4}$	$1.703e{-7}$	$1.703e{-10}$
$\frac{\xi_*}{\|X\|_F}$	$*$	$1.714e{-4}$	$1.707e{-6}$	$1.710e{-4}$	$1.703e{-7}$	$1.703e{-10}$
$\frac{\epsilon_{KPC}}{\|X\|_F}$	$1.876e{+0}$	$1.878e{-2}$	$1.878e{-4}$	$1.799e{-2}$	$1.799e{-7}$	$1.799e{-8}$
$\frac{\xi_{KPC}}{\|X\|_F}$	$*$	$*$	$1.912e{-4}$	$*$	$1.802e{-5}$	$1.799e{-8}$

Понеже уравнението $X - A^*X^{-1}A = Q$ винаги има единствено положително определено решение независимо от коефициентите-матрици A и Q [11], то разгледаното уравнение в пример 3.2.2 и съответното пертурбационно имат единствени положително определени решения. Следователно, дадените оценки се отнасят за тях.

С разгледания пример не бива да се заблуждаваме, че оценките на Sun и Константинов, Петков и Христов са винаги по-лоши от останалите. Съществуват примери, при които последните оценки дават резултат, но предложените от нас и оценките на Ran и Reurings не дават резултат, т.е., условията на изказаните теореми не са изпълнени. Можем със сигурност да твърдим, че винаги, когато са изпълнени условията на твърденията на Ran и Reurings, са изпълнени и условията на изказаните от нас твърдения. Освен това и оценките не са по-лоши.

Литература

[1] С. М. Ел-Сайед, *Изследване на специални матрици и числени методи за специални матрични уравнения*, PhD дисертация, Българска академия на науките, София, 1996.

[2] W. N. Anderson, T. D. Morley, G. E. Trapp, Positive Solutions to $X = A - BX^{-1}B^*$, *Linear Algebra Appl.*, 134:53–62, 1990.

[3] D. Bini, G. Latouche, B. Meini, Solving Matrix Polynomial Equations in Queueing Problems, *Linear Algebra Appl.*, 340:225–244, 2002.

[4] D. Bini, B. Meini, On the Solution of a Nonliner Matrix Equation Arising in Queueing Problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17:906–926, 1996.

[5] Sh. Du, J. Hou, Positive Definite Solutions of Operator Equations $X^m + A^*X^{-n}A = I$, *Linear and Multilinear Algebra*, 51:163–173, 2003.

[6] S. M. El-Sayed, M. El-Alem, Some Properties for the Existence of a Positive Definite Solution of Matrix Equation $X + A^*X^{-2^m}A = I$, *Appl. Math. Comput.*, 128:99–108, 2002.

[7] S. M. El-Sayed, A. C. M. Ran, On an Iteration Method for Solving a Class of Nonliner Matrix Equations, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23:632–645, 2001.

[8] J. C. Engwerda, On the Existence of a Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^TX^{-1}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 194:91–108, 1993.

[9] J. C. Engwerda, A. C. M. Ran, A. L. Rijkeboer, Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^*X^{-1}A = Q$, *Linear Algebra Appl.*, 186:255–275, 1993.

[10] P. Favati, B. Meini, On Functional Iteration Methods for Solving Nonliner Matrix Equation Arising in Queueing Problems, *IMA J. Numer. Anal.*, 19:39–49, 1999.

[11] A. Ferrante, B. C. Levy, Solutions of the Equation $X = Q+NX^{-1}N^*$, *Linear Algebra Appl.*, 247:359–373, 1996.

[12] T. Furuta, Operator Inequalities Associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich Inequalities, *J. Inequal. Appl.*, 6:137–148, 1998.

[13] G. Golub, C. van Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins, Baltimore, 1989.

[14] C. Guo, P. Lancaster, Iterative Solution of Two Matrix Equations, *Math. Comp.*, 68:1589–1603, 1999.

[15] V. I. Hasanov, Positive Definite Solutions of a Nonlinear Matrix Equation, *In: Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, pages 107–112, 1999.

[16] V. Hasanov, I. Ivanov, Positive Definite Solutions of the Equation $X + A^*X^{-n}A = I$, *In: Numerical Analysis and Application, LNCS 1988, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, pages 377–384, 2001.

[17] V. Hasanov, I. Ivanov, Solutions and Perturbation Theory of a Special Matrix Equation I: Properties of Solutions, *In: Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Thirty Second Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, pages 244–248, 2003.

[18] V. Hasanov, I. Ivanov, Solutions and Perturbation Estimates for the Matrix Equations $X \pm A^*X^{-n}A = Q$ *Appl. Math. Comput. (to appear)*, 2003.

[19] I. G. Ivanov, S. M. El-Sayed, Properties of Positive Definite Solution of the Equation $X + A^*X^{-2}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 279:303–316, 1998.

[20] I. G. Ivanov, B. V. Minchev, V. I. Hasanov, Positive Definite Solutions of the Equation $X - A^*\sqrt{X^{-1}}A = I$, *In: Application of Mathematics in Engineering'24, Proc. of the XXIV Summer School Sozopol'98, Heron Press*, pages 113–116, 1999.

[21] I. G. Ivanov, V. I. Hasanov, Solutions and Perturbation Theory of a Special Matrix Equation II: Perturbation Theory, *In: Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Thirty Second Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, pages 258–262, 2003.

[22] I. G. Ivanov, V. I. Hasanov, B. V. Minchev, On Matrix Equations $X \pm A^*X^{-2}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 326:27–44, 2001.

[23] M. M. Konstantinov, P. H. Petkov, N. D. Christov, Perturbation Analysis of the Discrete Riccati Equation, *Kybernetika*, 29:18–29, 1993.

[24] P. Lancaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, New York, 1969.

[25] G. Latouche, V. Ramaswami, A Logarithmic Reduction Algorithm for Quasi-Birt-Death Processes, *J. Appl. Probab.*, 30:650–674, 1993.

[26] X-G. Liu, H. Gao, On the Positive Definite Solutions of the Equation $X^s + A^TX^{-t}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 368:83–97, 2003.

[27] B. Meini, Efficient Computation of the Extreme Solutions of $X+A^*X^{-1}A = Q$ and $X - A^*X^{-1}A = Q$, *Math. Comp.*, 71:1189–1204, 2001.

[28] V. A. Naoumov, Matrix-Multiplicative Aproach to Quasi-Birt-and-Death Processes Analysis, *In: S. R. Chakravarthy and A. S. Alfa, eds., Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, Marcel Dekker, New York*, pages 87–106, 1997.

[29] V. A. Naoumov, U. R. Krieger, D. Wagner, Analysis of a Multi-Server Delay-Loss System with a General Markovian Arrival Process, *In: S. R. Chakravarthy and A. S. Alfa, eds., Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, Marcel Dekker, New York*, pages 43–66, 1997.

[30] I. C. M. Ran, M. C. B. Reurings, On the Nonlinear Matrix Equation $X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q$: Solution and Perturbation Theory, *Linear Algebra Appl.*, 346:15–26, 2002.

[31] M. Reurings, *Symmetric Matrix Equations*, PhD thesis, Thomas Stieltjies Institute for Mathematics, Amsterdam, 2003.

[32] G. W. Stewart, J.-G Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, London, 1990.

[33] J-G. Sun, Perturbation Theory for Algebraic Riccati Equations, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 19:39-65, 1998.

[34] S. F. Xu, Perturbation Analysis of the Maximal Solution of the Matrix Equation $X + A^*X^{-1}A = P$, *Linear Algebra Appl.*, 336:61–70, 2001.

[35] X. Zhan, Computing the Extremal Positive Definite Solution of a Matrix Equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, 219:330–345, 1996.

[36] X. Zhan, J. Xie, On the Matrix Equation $X + A^TX^{-1}A = I$. *Linear Algebra Appl.*, 247:337–345, 1996.

[37] Y. Zhang, On Hermitian Positive Definite Solutions of Matrix Equation $X + A^*X^{-2}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 372:295–304, 2003.