

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Институт по Математика и Информатика

Галина Живкова Бобева

**Приложение на метода на локалната активност за изследване динамиката на
нелинейни Клетъчно Невронни Мрежи**

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за получаване на образователна и научна степен “доктор”

Научна специалност

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научен ръководител: проф. дмн Анжела Славова

София, 2020

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на научен семинар на секция „Диференциални уравнения и математическа физика” при Института по математика и информатика на БАН, състоял се на 21.09.2020 г.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика на БАН.

Автор: Галина Живкова Бобева

Заглавие: Приложение на метода на локалната активност за изследване динамиката на нелинейни Клетъчно Невронни Мрежи

Научен ръководител: проф. дмн Анжела Славова

Обща характеристика на дисертацията

1. Актуалност и мотивировка на темата

В настоящия дисертационен труд се изучава метода на локална активност и неговото приложение за изследване на динамичното поведение на нелинейни Клетъчно Невронни Мрежи (КНМ).

Клетъчно Невронните Мрежи са въведени в статията на Л. Чуа и Л. Янг (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) през 1988 г. Основната идея е да се използва решетка от нелинейни динамични вериги, взаимосвързани помежду си, с цел да се проведе сравнително голямо количество информация в реално време. Концепцията за тази нова архитектура е взимана от архитектурата на клетъчните автомати и на невронните мрежи, като по този начин се показва нова възможност за ефективно решаване на доста бавни във времето задачи, например за разпознаване и обработка на образи и за решаване на нелинейни частни диференциални уравнения. През последните 20 години оригиналната архитектура на КНМ е обобщавана и разширявана с оглед на все по-увеличаващите се приложения след разработването на КНМ чип – универсална машина (Arena, A mechatronic lampreycontrolled by analog circuits, 2001), (Arena, Fortuna, & Branciforte, Realization of a reaction- diffusion KHM algorithm for locomotion control in an hexapode robot, 1999), (Arena, Fortuna, & Frasca, Attitude control in walking hexapod robots : an analogic spatio-temporal approach, 2002), (Arena, Fortuna, & Occhipinti, A KHM algorithm for real time analysis of DNA microarrays), (Balya, Roska, Roska, & Werblin, 2002), (Chua & Roska, Cellular neural networks and visual computing, 2002), (Chua & Roska, The KHM paradigm, 1993).

Едно от най-важните свойства на КНМ е, че отделните клетки са нелинейни динамични системи, но връзките между тях са линейни. С други думи, тези мрежи могат да се разглеждат като нелинейни с линейна пространствена структура, което прави общите техники за изследване от физиката и инженерството еднакво атрактивни. За някои симетрични темплети уравненията, описващи динамиката на КНМ, са много близки до пространствената дискретизация на нелинейни частни диференциални уравнения, като например системите на реакция-дифузия (Slavova, Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling, 2003). В КНМ активната среда представлява локално свързани активни клетки, чиито изграждащи блокове включват нелинейни елементи (като например транзистори) захранени от батерии.

2. Цел, предмет, задачи и структура на дисертацията

Цел на дисертацията е изследване динамиката на нелинейни КНМ. Основен метод на изследванията е методът на локалната активност, който позволява да се намери такова подмножество на множеството от клетъчни параметри, в което се наблюдава сложно динамично поведение на КНМ, наречено *ръб на хаоса*. В Глава 4 се прилага и един друг метод за изследване на динамиката на КНМ – метода на хармоничния баланс.

Предмет на изследване в дисертацията са приложенията на метода на локалната активност при изследване на сложната динамика на КНМ. Разглеждат се основно нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ), които се апроксимират върху архитектурата на КНМ на реакция-дифузия. Решенията на тези КНМ модели имат четири основни свойства: 1). непрекъснати са във времето; 2). непрекъснати и ограничени са по стойности; 3). непрекъснати са по взаимодействащи параметри; 4). дискретни са в пространството.

В дисертационния труд е изучено и явлението хистерезис. Това е специален тип зависимост с памет между входния сигнал и изходния сигнал. При хистерезис зависимостта от отговора на входа е независима от скоростта: скоростта, с която входа се движи оказва влияние само на скоростта на изхода. Качествената природа на отговора не се променя. Обикновено хистерезисът се дължи на многото равновесни състояния на клетките. Това явление е особено важно при моделирането в биологията, а също така и във феромагнетизма, електрониката и др. В Глава 3 се въвежда и един нов елемент към хистерезисните КНМ, а именно мемристора. Въведен теоретично от Л. Чуа през 1971 г., през 2008 г. в лабораториите на Hewlett-Packard е намерен подходящ материал за неговото производство. Мемристорните КНМ се развиват интензивно през последните 5 години и тематиката е изключително актуална.

В Глава 1 се въвеждат основните определения и уравнения на КНМ. Представени са различните видове клетъчна динамика – линеини, нелинейни, както и изходните уравнения, които ще бъдат използвани при изследванията в другите глави. Определен е и динамичния обхват на КНМ, който е особено важен за осигуряване на устойчивостта им и за редица техни приложения, като обработка на образи, провеждане на информацията и др.

Глава 2 е посветена на метода на локалната активност (Chua L. O., *Local activity is the origin of complexity*, 2005). В последните 5 години той предизвиква особен интерес сред изследователите, защото позволява да се намери със строги математически формулировки областта на клетъчните параметри, в която КНМ

може да прояви сложно динамично поведение. Нещо повече, дефинира се една малка подобласт на областта на локална активност, която се нарича *ръб на хаоса* и в която може да се получи по-голяма информация за различни приложения. Представени са практически тестове за определяне на такава област, които се базират на строги математически условия. Въз основа на това е разработен алгоритъм за определяне на *ръба на хаоса*, който ще се приложи в Глава 3 при изследванията на хистерезисни КНМ с мемристори. Разгледани са два примера – тримерна система на ФицХю-Нагумо за провеждане на нервни импулси и система на реакция-дифузия на Орегонатор, при които е приложен разработения алгоритъм за намиране на областта *ръб на хаоса*.

В Глава 3 са въведени нов вид КНМ, а именно хистерезисни КНМ (ХКНМ) с мемристорни синапси. Разгледана е ХКНМ, работеща в режим на релаксационен осцилатор, при който резисторът се заменя с мемристор. За този модел е приложен разработения в Глава 2 алгоритъм и е определена областта в параметричното пространство, в която се наблюдава сложно поведение – *ръб на хаоса*. Представени са две приложения на ХКНМ с мемристорни синапси – за обработка на изображения и за отстраняване на шумови ефекти. Изследван е и още един модел КНМ с динамични синапси на паметта. За този модел е намерена областта *ръб на хаоса* и са направени съответни симулации. Изучена е КНМ на реакция дифузия (РД КНМ) с мемристорни синапси. Като пример на такава КНМ е разгледан свързан модел на ФицХю Нагумо.

Глава 4 изучава моделиране чрез КНМ на задачи, възникващи в нано структурите. По конкретно е разгледан пиезоелектричния материал (ПЕМ) с нано нехомогенности - като нано дупки, нано включения и др. Граничната задача, която описва изучаваните нано структури се свежда до интегро-диференциално уравнение. Апроксимираме го със съответната архитектура на КНМ и изследваме неговата динамика. За целта се прилага един друг метод, известен като метод на хармоничния баланс. Той позволява да се докаже съществуване на периодични решения в получения модел. Направени са симулации и валидация за конкретен ПЕМ. Построени са решения от типа *бягаща вълна* за него.

Структурата на дисертацията се състои от уводна част, 4 глави, списък на цитираните литературни източници и списък на публикациите на автора, както и научните и научно-приложни приноси. Текстът е в обем от 88 страници, в това число 31 фигури. Списъкът на литературата обхваща 82 заглавия. Номерацията на уравненията и фигурите в автореферата съвпадат с тези от дисертацията.

3. Ползност и приложимост на получените резултати в дисертацията

Основните резултати в дисертацията са публикувани в Comptes Rendus De L'Academie Bulgare Des Sciences- 2 статии, Pliska Studia Mathematica – 2 статии, IEEE Proc., ECCTD 2017 – 1 статия, Proc. ANNA 2018, VDE – 1 статия, QUALITDE 2017 – 1 статия.

Част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДФНИ - И 02/12, финансиран от Националния Фонд Научни Изследвания на тема „Интегродиференциални уравнения за решаване на свързани задачи за многофункционални материали с нано нееднородности“. Друга част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДФНП - 17-26 „Нов математически подход в нанотехнологиите“ по програмата за млади учени и докторанти на БАН.

Числените резултати са получени с програма MatLab 7, CNN Tools, MATCNN.

Също така резултатите са докладвани на международните конференции NTADES 2017, NTADES 2018, ECCTD 2017, ANNA 2018, както и на семинара по диференциални уравнения в ИМИ, БАН през 2017 г.

Съдържание на дисертацията

1 ГЛАВА 1. НЕЛИНЕЙНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ (КНМ)

1.1. Определения на КНМ.

Ще дадем две общи дефиниции на КНМ, както следва (Chua, L.O, Yang, L., Cellular neural networks: Theory, 1988):

Определение 1.1: КНМ е 2-, 3-, или n-мерен масив от главно идентични динамични системи, наречени клетки, които удовлетворяват две свойства:

- повечето взаимодействия са локални в рамките на краен радиус r , и
- всички променливи на състоянието са непрекъснати сигнали.

Определение 1.2: Клетъчната невронна мрежа е многомерна динамична нелинейна верига, съставена от локално свързани, пространствено повтарящи се елементи, наречени клетки. Получената мрежа може да има различна архитектура, включително правоъгълна, шестоъгълна, тороидална, сферична и т.н. $M \times M$ КНМ се определя математически чрез четири спецификации:

- 1) клетъчна динамика;
- 2) синаптичен закон, който представя взаимодействията (пространствено свързване) между съседните клетки;
- 3) гранични условия;
- 4) начални условия.

1.2. Основни видове уравнения на КНМ

В този раздел ще формулираме каноничните уравнения, описващи динамиката на КНМ (Slavova A., Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling, 2003). От определение 1.2 можем да обосновем КНМ математически, както следва.

1.2.1. Уравнения на състоянието

Предполагаме за простота, че елементите на КНМ са разположени на двумерна (2-D) решетка. Тогава динамиката на КНМ, по-общо, може да бъде описана от:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij}(t) &= -x_{ij}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}_{ij,kl} (y_{kl}(t), y_{ij}(t)) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}_{ij,kl} (u_{kl}, u_{ij}) + I_{ij} \\ y_{ij}(t) &= f(x_{ij}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M,$$

x_{ij} , y_{ij} , u_{ij} се отнасят за състоянието, изходното и входното напрежение на клетка $C(i, j)$; $C(i, j)$ се отнася до точка на мрежата, свързана с клетка на 2-D решетка, I_{ij} е независим източник. \tilde{A} и \tilde{B} са нелинейни темплети, които определят

взаимодействията между всяка клетка и всички съседни клетки по отношение на техните входни, статични и изходни променливи.

Определение 1.3. За темплет A , който дефинира динамичното правило на клетъчната верига, определяме конволюционен оператор $*$ по следния начин:

$$A * z_{ij} = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(k-i, l-j) z_{kl} \quad (1.2)$$

където $A(m, n)$ означава елемента в m -тата и n -тата колона на темплета, $m = -1, 0, 1$ и $n = -1, 0, 1$, съответно.

С други думи, за линейна КНМ имаме следното уравнение на състоянието:

$$\dot{x}_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + A * y_{ij}(t) + B * u_{ij} + I_{ij} \quad (1.3)$$

Темплетите за нелинейни КНМ могат да се зададат със следната по-обща форма,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ p_2 & 2 & p_2 \\ 0 & p_1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

където $p_1 = c_1 u_{kl} u_{ij}$, $p_2 = c_2 [\exp(u_{kl} - 1)]$, $p_3 = c_3 (u_{kl} - u_{ij})$, за да се осигури устойчивостта на нелинейната КНМ. Освен това \tilde{A} и \tilde{B} се наричат темплет на обратна връзка и контролен темплет съответно.

Както видяхме по-горе, състоянието на клетката $C(i, j)$ в момент t се обозначава с $x_{ij}(t)$, докато изходът в момент t е

$$y_{ij}(t) = f(x_{ij}(t))$$

където $f(x_{ij}(t))$ е частично линейна функция, дефинирана по следния начин:

$$f(x_{ij}) = \frac{1}{2} (|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \quad (1.4)$$

1.3. Динамичен обхват на КНМ.

На първо място, ще дадем оценка за динамичния обхват на КНМ, дефиниран по-горе от динамичната система (1.1), (1.4).

Твърдение 1.1 За КНМ, описана от уравнението на състоянието (1.1) с ограничени нелинейни темплети и изход (1.4), всички състояния x_{ij} са ограничени за всяко $t > 0$ и границата x_{\max} може да бъде изчислена по следната формула:

$$x_{\max} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M} \left[\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} (\max_t |\tilde{A}| + \max_u |\tilde{B}|) \right] \quad (1.5)$$

V_b), D означава $m \times m$ диагонална матрица, дефинирана от $D\sigma$, и $\nabla^2 V_a \in \mathbb{R}^m$ означава $m \times 1$ вектор, дефиниран с m дискретен оператор на Лаплас $\nabla^2 V_\sigma$, $\sigma = 1, 2, \dots, m$.

По принцип всяко уравнение на реакция-дифузия свързано с реална физична система има някои настройващи параметри, които ще бележим с

$$\mu = [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]^T \quad (2.3)$$

Следователно, терминът кинетично уравнение на реакция-дифузия (2.1) за всяка клетка на позиция $r = (j, k, l)$ може да се представи от:

Клетъчни кинетични уравнения

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(r) &= f_a(V_a(r), V_b(r); \mu) \\ \dot{V}_b(r) &= f_b(V_a(r), V_b(r); \mu) \end{aligned} \quad (2.4)$$

За $N \times N \times N$ тримерна мрежа имаме N^3 идентични клетки, всяка от които е описана от уравнения (2.4).

2.2. Математическо определение на локална активност

Тъй като локална активност се дефинира само относно m -те променливи на вектора $V_a = [V_1 V_2 \dots V_m]^T$, и тъй като тя не включва дифузните коефициенти D_1, D_2, \dots, D_m в (2.4) дефинираме допълнителен член на взаимодействие:

$$I_a \triangleq D\nabla^2 V_a \quad (2.5)$$

Заместваме уравнение (2.5) в уравнение (2.4) и получаваме клетъчните кинетични уравнения в следния вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(r) &= f_a(V_a(r), V_b(r); \mu) + I_a \\ \dot{V}_b(r) &= f_b(V_a(r), V_b(r); \mu) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$I_a \in \mathbb{R}_m$ може да се интерпретира като външна сила, приложена върху m -те дифузионни елемента. Забелязваме, че $f_a(\bullet)$ и $f_b(\bullet)$ в уравнение (2.6) зависят от параметъра $\mu \in \mathbb{R}_p$.

2.2.1. Клетъчни равновесни точки

По-горе приехме, че всички клетки са идентични и системата (2.6) представя динамичното състояние на изолирани клетки, върху които действа външна сила $I_a \in \mathbb{R}^m$.

Равновесните точки на системата (2.6) се получават чрез избирането на нулеви стойности $\dot{V}_a = 0$, $\dot{V}_b = 0$ в (2.6); т.е.

$$f_a(V_a, V_b; \mu) + I_a = 0 \quad (2.7)$$

$$f_b(V_a, V_b; \mu) = 0 \quad (2.8)$$

2.2.2. Линеаризирани клетъчни уравнения на състоянията

Нека с $V_a(t)$, $V_b(t)$ и $i_a(t)$ означим безкрайно малките променливи в околност на V_a , V_b и I_a ; а именно,

$$\begin{aligned} V_a(t) &\triangleq \bar{V}_a + v_a(t) \\ V_b(t) &\triangleq \bar{V}_b + v_b(t) \\ I_a(t) &\triangleq \bar{I}_a + i_a(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Замествайки $f_a(V_a, V_b; \mu)$ и $f_b(V_a, V_b; \mu)$ в уравнения (2.6) с техните развиятия в Тейлорови редове около клетъчната равновесна точка $Q(V_a = \bar{V}_a, V_b = \bar{V}_b)$ с входна константа $I_a = \bar{I}_a$, и премахвайки членовете от по-голям ред получаваме линейните клетъчни уравнения за равновесна клетка в точка Q :

$$\begin{aligned} \frac{dv_a(t)}{dt} &= A_{11}(Q)v_a(t) + A_{12}(Q)v_b(t) + i_a(t) \\ \frac{dv_b(t)}{dt} &= A_{21}(Q)v_a(t) + A_{22}(Q)v_b(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

където

$$\begin{aligned} A_{11}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_a(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_a} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} & A_{12}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_a(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_b} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} \\ A_{21}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_b(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_a} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} & A_{22}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_b(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_b} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.3. Локална активност в клетъчната точка на равновесие Q .

Линеаризираните клетъчни уравнения на състоянията (2.10) може да се интерпретират като клетъчната динамика около допирателна равнина в клетъчната точка на равновесие Q , която зависи от $I_a \in \mathbb{R}^m$ и $\mu \in \mathbb{R}^p$. Ако е дадена някоя непрекъсната входна функция на времето $i_a(t)$ за $t \geq 0$, и вземайки нулеви начални условия $V_a(0)=0$, $V_b(0)=0$, нека $V_a(t)$ и $V_b(t)$ да са решение на уравнения (2.10) за $t \geq 0$.

Определение 2.1. Казва се, че клетката е локално активна в клетъчната точка на равновесие Q , ако съществува непрекъсната по времето функция $i_a(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, такава, че при някакво крайно време $0 < T < \infty$, е изпълнено следното условие за локална активност:

$$\int_0^T (V_a(t), i_a(t)) dt < 0 \quad (2.12)$$

където $V_a(t)$ е решение на линеаризираното клетъчно уравнение на състоянията (2.10) относно Q с нулеви начални условия $V_a(0) = 0$ и $V_b(0) = 0$

Означението в уравнение (2.12) представлява скаларното произведение на двата вектора $V_a(t)$ и $i_a(t)$

Определение 2.2. Локална пасивност. Казва се, че клетката е локално пасивна в клетъчната точка на равновесие Q , ако тя не е локално активна в Q , т.е.

$$\int_0^t (V_a(t), i_a(t)) dt \geq 0 \quad (2.13)$$

за всички непрекъснати входни функции $i_a(t) \in \mathbb{R}^m$, и за всяко, $t \geq 0$, при нулеви начални условия $V_a(0) = 0$ и $V_b(0) = 0$.

Определение 2.3. Локално активни уравнения на реакция-дифузия. Уравненията на реакция-дифузия (2.1) се наричат локално активни, ако свързаната с тях клетка е локално активна в някоя клетъчно равновесна точка Q . В противен случай се наричат локално пасивни.

2.2.4. Матрица на комплексност

Въпреки че уравнение (2.12) дава точно математическо определение за локална активност в клетъчна равновесна точка Q , на практика е невъзможно да се тества, тъй като определението не съдържа начин за определяне дали функцията $i_a(t)$, удовлетворяваща уравнение (2.12), наистина съществува. Затова въвеждаме т.нар.

Матрица на комплексност

$$Y_Q(s) \triangleq [(s1 - A_{11}(Q)) - A_{12}(Q)(s1 - A_{22}(Q))^{-1}A_{21}(Q)] \quad (2.14)$$

в клетъчната равновесна точка Q . В най-елементарния случай при $m=1$ и $n=2$, когато има само една променлива $V_a(s)$ (един дифузионен коефициент) и само една променлива на състоянията $V_b(s)$, уравнение (2.14) се редуцира до следната скаларна рационална функция, наречена **функция на комплексност**:

$$Y_Q(s) = \frac{s^2 - (A_{11}(Q) + A_{22}(Q))s + A_{11}(Q)A_{22}(Q) - A_{12}(Q)A_{21}(Q)}{s - A_{22}(Q)} \quad (2.15)$$

2.3. Теорема за локална активност

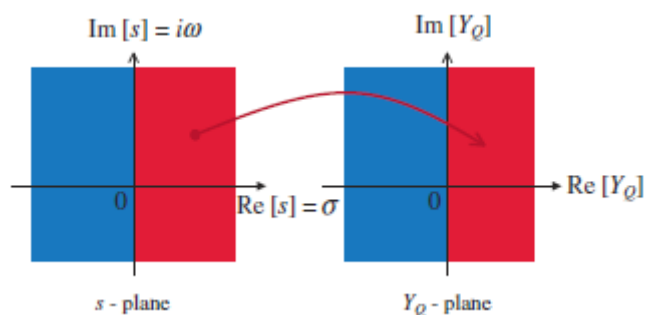
За да докажем, че клетка е локално активна, Определение 2.1 изисква да се намери функция $i_a(t)$, която да удовлетворява уравнение (2.12). Това е много трудна задача. Целта ни тук е да разработим практически необходими и достатъчни условия, които гарантират, че уравнение (2.13) е удовлетворено, и по този начин, че клетката е пасивна (Chua L. O., Local activity is the origin of complexity, 2005). Противоречието с поне едно от тези условия тогава ще осигури необходимо и достатъчно условие за клетката да се счита за локално активна.

2.3.1. Положително-реална функция на комплексност

Определение 2.4. Казва се, че функцията на комплексност $Y_Q(s)$ е положително-реална, ако:

1. $Y_Q(s)$ е реално число когато s е реално число.
2. $\operatorname{Re}[Y_Q(s)] \geq 0$ за всяко s с $\operatorname{Re}[s] \geq 0$, където $Y_Q(s)$ е несингулярно.

Тъй като $Y_Q(s)$ е рационална функция, условие 1), винаги е удовлетворено. В този случай, $Y_Q(s)$ е положително-реална функция на затворената дясна половина на равнината и се преобразува в затворена дясна половина Y_Q -равнина, както е показано на фиг. 2.1.



Фиг. 2.1. Представяне на положително-реална функция на комплексност $Y_Q(s)$ в комплексната равнина.

Твърдение 2.1. $Y_Q(s)$ е положително-реална функция, ако и само, ако $Z_Q(s) \triangleq Y_Q^{-1}(s)$ е положително-реална функция.

Теорема 2.1. Теорема за локална пасивност (скаларен случай). Несвързана клетка с една променлива на състоянието ($m = 1$) е локално пасивна в клетъчно равновесна точка $Q (V_1 = \bar{V}_1)$ тогава и само тогава, когато функцията на комплексност $Y_Q(s)$ е положително-реална функция.

2.3.2. Практически тест за локална пасивност

От фиг.2.1 следва, че клетката е локално пасивна тогава и само тогава, когато затворената дясна половина от s -равнината се преобразува в затворената дясна половина на Y_Q -равнината. Следващата теорема предоставя практически тест за това необходимо и достатъчно условие за локална пасивност.

Теорема 2.2. Тест за локална пасивност.

Клетка с една променлива на състоянието е локално пасивна в $Q(V_1=V_1)$ тогава и само тогава, всичките четири условия по-долу се удовлетворяват:

- (i) $Y_Q(s)$ няма полюси в $\text{Re}[s] > 0$.
- (ii) $Y_Q(s)$ няма многократни полюси върху имагинерната ос.
- (iii) Ако $Y_Q(s)$ има полюс $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос, тогава $K_Q(i\omega_p) \triangleq \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s)$ трябва да е положително реално число.
- (iv) $\text{Re}[Y_Q(i\omega)] \geq 0$ за всяко $\omega \in (-\infty, \infty)$ където $s = i\omega$ не е полюс.

2.3.3. Практически тест за локална активност

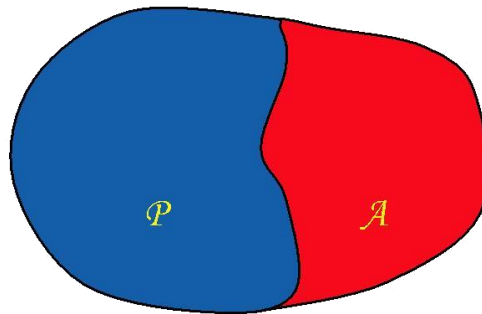
Тъй като всички 4 свойства трябва да бъдат удовлетворени в Теорема 2.2, за да бъде $Y_Q(s)$ локално пасивна, то нарушаването на кое да е от тези свойства ни дава следната теорема, която търсехме:

Теорема 2.3. Тест за локална активност на функция на комплексност $Y_Q(s)$

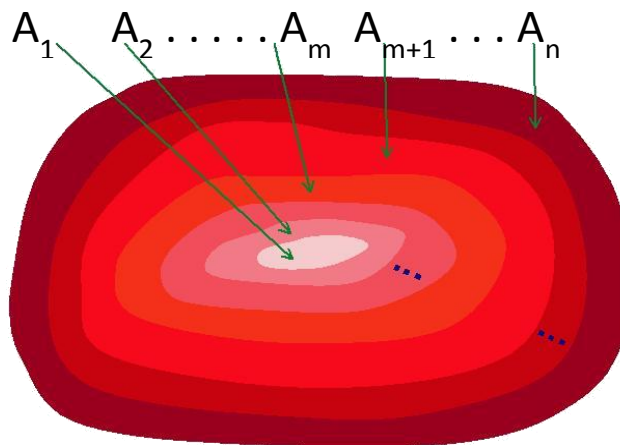
Клетка с една променлива е локално активна в $Q(V_1=V_1)$ тогава и само тогава, когато едно от следните условия е изпълнено:

- (i) $Y_Q(s)$ има полюс в $\text{Re}[s] > 0$.
- (ii) $Y_Q(s)$ има многократен полюс върху имагинерната ос.
- (iii) $Y_Q(s)$ има полюс $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос и $K_Q(i\omega_p) \triangleq \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s)$ е или отрицателно реално число или комплексно число.
- (iv) $\text{Re}[Y_Q(i\omega)] < 0$ за някое $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Можем да разделим параметричното пространство на локално пасивна област P и локално-активна област A за всички възможни клетъчни равновесни точки, съответстващи на $V_a \in \mathbb{R}^m$, където $P \cup A = \mathbb{R}^m$, както се вижда от Фиг.2.2



Фиг. 2.2. Разделяне на клетъчното параметрично пространство на две взаимно-изключващи се области P и A .



Фиг. 2.3. „Вложени“ подмножества от локално активни области.

2.4. Примери за определяне на режим на рѳб на хаоса.

Известният невронен модел на Ходжкин-Хъксли е първият математически модел на предаване на нервни импулси и полага основата на невро-физиология (Hodgkin A.L., Huxley A.F. , A quantitative description of membrane current and its application to conduct ion and excitation in nerve, 1952). Уравнението на ФицХю Нагумо, което е опростяване на модела на Ходжкин-Хъксли, описва зараждането и разпространяването на нервния импулс (Slavova, A., Zecca, P., Modeling natural phenomena via Cellular Nonlinear Networks, 2017). Нека разгледаме невронна система

на ФиХю Нагумо, базирана на крайната скорост на разпространение при предаване на сигнала между невроните:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_1(u_1 - 1)(u_1 - a) - u_2 + cf(u_3) \\ \dot{u}_2 &= b(u_1 - \gamma u_2) \\ \dot{u}_3 &= -u_3(u_3 - 1)(u_3 - a) - u_4 + cf(u_1) \\ \dot{u}_4 &= b(u_3 - \gamma u_4) \end{aligned} \quad (2.16),$$

където a, b, γ са положителни константи, $u_{1,2}$ представлява променлива на предаването и $u_{3,4}$ са променливи на получаването; c измерва съединителната сила, $f \in C^3, f(0) = 0, f'(0) = 1$. За нашето изследване вземаме $f(x) = \tanh(x)$. Система (2.16) е симетрична. Така, разглеждането на съществуването, пространствено-времевия модел и устойчивостта на бифуркационните периодични решения на Хопф е от особен интерес.

Въз основа на всичко изложено по-горе в тази глава сме разработили структурен алгоритъм за определяне на РХ (*ръб на хаоса*) в система на ФХН (Фиц Хю – Нагумо):

1) Преобразуване на свързаната ФХН система (2.16) в съответна дискретно пространствена версия, която ще наричаме свързан Фиц Хю – Нагумо КНМ модел:

$$\begin{aligned} \frac{du_j^1}{dt} &= -u_j^1(u_j^1 - 1)(u_j^1 - a) - u_j^2 + cf(u_j^3) \\ \frac{du_j^2}{dt} &= b(u_j^1 - \gamma u_j^2) \\ \frac{du_j^3}{dt} &= -u_j^3(u_j^3 - 1)(u_j^3 - a) - u_j^4 + cf(u_j^1) \\ \frac{du_j^4}{dt} &= b(u_j^3 - \gamma u_j^4) \end{aligned} \quad (2.17)$$

2) Намиране на равновесните точки на (2.17). Според теорията на динамичните системи равновесните точки \hat{u}_j^i са реалните корени на дясната част на (2.17) и са функции на мрежовите параметри: a, b, c, γ . С други думи имаме $\hat{u}_j^i = \hat{u}_j^i(a, b, c, \gamma), i = 1, 2, 3, 4$. Ще разглеждаме само равновесната точка $E_0 = (0, 0, 0, 0)$.

3) Пресмятане на Якубиана относно равновесната точка E_0 . В частния случай Якубиана в тази равновесна точка е:

$$J = \begin{bmatrix} -a & -1 & c & 0 \\ b & -b\gamma & 0 & 0 \\ c & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & b & -b\gamma \end{bmatrix}$$

4) Пресмятане на следата $Tr(E_0) = \sum_{q=1}^N \lambda_q$ и $\Delta(E_0)$ - детерминантата в равновесната точка $E_0 = (0,0,0,0)$. Следата е $Tr(0,0,0,0) = -2(a + b\gamma)$.

Определение 2.4. Устойчива и Локално Активна Област (SLAR) в равновесната точка E_0 за свързан Фиц Хю – Нагумо КНМ модел (2.55) имаме при $Tr < 0$ и $\Delta > 0$.

В нашия частен случай това условие е удовлетворено, поради което в равновесната точка E_0 имаме устойчива локално активна област.

5) Ръб на хаос (PX).

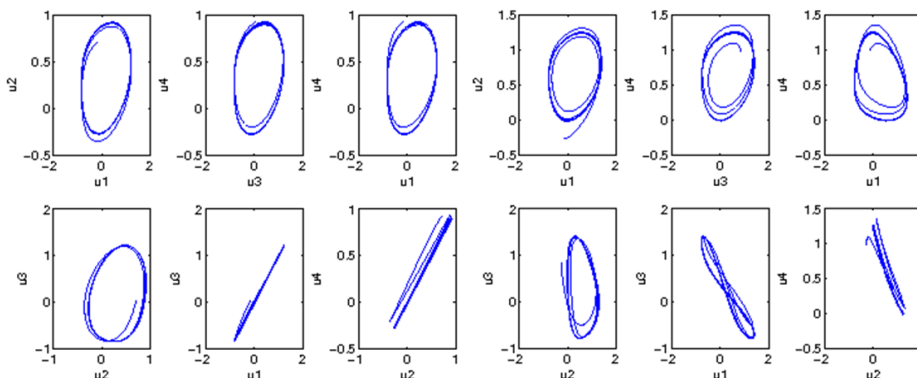
Трябва да намерим областта на ръба на хаос (PX) в клетъчното параметрично пространство, като използваме следното определение:

Определение 2.5. Казваме, че КНМ модел на свързаната система на Фиц Хю – Нагумо работи в режим на *ръб на хаоса*, ако съществува поне една равновесна точка E_0 , която принадлежи на SLAR.

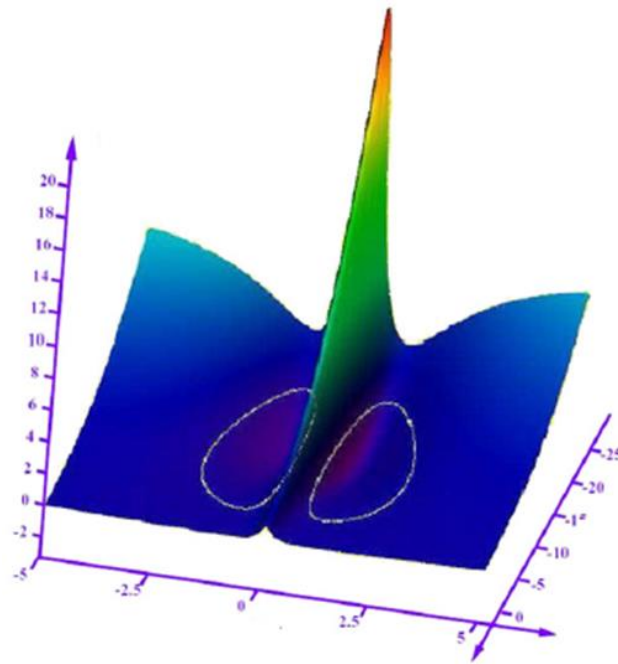
В сила е следната теорема:

Теорема 2.5. КНМ модел на свързаната система на Фиц Хю – Нагумо (2.16) работи в режим на *ръб на хаоса* при положителни a, b, γ . При тези стойности на параметрите има поне една равновесна точка, която принадлежи на SLAR.

Направени са следните симулации на (2.16):



Фиг. 2.4. Областта *ръб на хаоса* за модела на ФицХю Нагумо.



Фиг. 2.5. Област на локална активност – белите контури.

2.4.1. Ръб на хаоса за модел на реакция-дифузия

Теорията за локалната активност дава окончателен отговор на основния въпрос: какви са стойностите на параметрите на клетката, за които взаимосвързаната система може да проявява сложност? Отговорът е - необходимото условие за неконсервативна система да проявява сложност е клетката да е локално активна. За КНМ на реакция-дифузия може да се определи областта на клетъчните параметри, за да могат клетките да бъдат локално активни и по този начин потенциално да могат да проявяват сложност. Прилагаме конструктивния алгоритъм, получен по-горе за изучаване на динамиката на КНМ на реакция-дифузия (РД-КНМ) на Орегонатор (Slavova, A., Vobeva, G. Edge of chaos in reaction-diffusion CNN, 2018):

$$\frac{du_{ij}}{dt} = D_1 A_2 * u_{ij} (1 - u_{ij}) - a v_{ij} \frac{u_{ij} - b}{b + u_{ij}} = G_1(u_{ij}, v_{ij}) \quad (2.18)$$

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = D_2 A_2 * v_{ij} + u_{ij} - v_{ij} = G_2(u_{ij}, v_{ij})$$

Ще определим стабилен и локално активен регион за модела РД-КНМ.

Определение 2.6. Казваме, че клетката е едновременно устойчива и локално активна в равновесната точка E_k за КНМ модел на Орегонатор (2.18), ако

$$a_{22} > 0 \text{ или } 4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2 \text{ и}$$

$$\text{Tr}(E_k) < 0 \text{ и } \Delta(E_k) > 0.$$

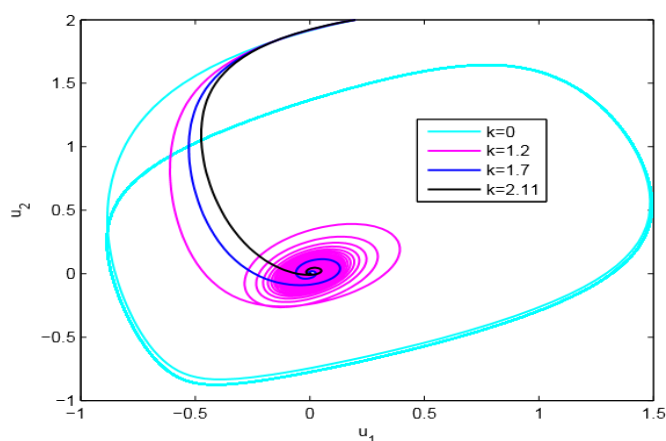
Този регион в параметърното пространство се нарича SLAR (E_k).

Определяме така наречения *ръб на хаоса* за нашия модел РД-КНМ (2.18). Ръбът на хаоса (РХ) е регион в параметричното пространство на динамична система, в който е възможно възникване на сложни явления и обработка на информация.

Определение 2.7. Моделът РД-КНМ (2.18) работи в режим на хаоса, ако и само ако съществува поне една равновесна точка, която е едновременно локално активна и устойчива. Следвайки горния алгоритъм, ние доказахме основната теорема в този документ.

Теорема 2.6. Моделът РД-КНМ (2.18) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако са изпълнени следните условия: $0 < a < 1, \forall b$. Това означава, че има поне една равновесна точка, която е едновременно локално активна и устойчива.

На фигура 2.6 ръбът на хаос за РД-КНМ модел (2.18) е симулиран за различни стойности на параметрите.

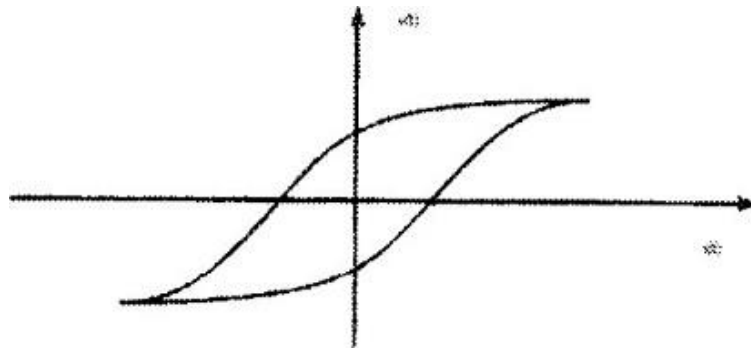


Фиг. 2.6. Ръб на хаоса за областта РД-КНМ модел (2.18).

3. ГЛАВА 3. ХИСТЕРЕЗИСНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ

3.1. Хистерезисен модел на клетъчно нелинейни мрежи (КНМ) с мемристорни синапси

Няколко физически явления проявяват хистерезис. Математическият модел за хистерезис може да бъде представен чрез система от диференциални уравнения, която е съчетана с един или няколко хистерезисни оператора. За пълнота можем да добавим начални и гранични условия. Известно е, че хистерезисът е резултат от множество стационарни състояния. Можем да получим интересни математически задачи от теорията за нелинейните трептения, ако съчетаем системата от обикновени диференциални уравнения с хистерезисни нелинейности, независими от скоростта. Могат да бъдат представени два типа отношения на хистерезис - относителен хистерезис и активен хистерезис (виж фиг. 3.1).



Фиг. 3.1. Активен хистерезис

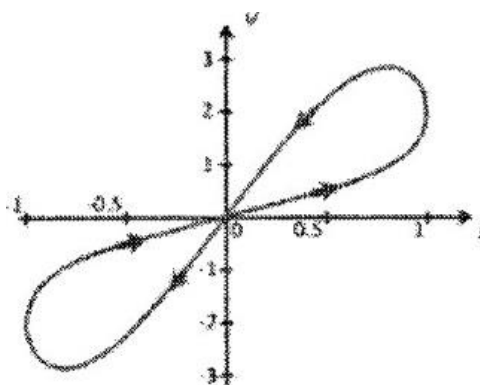
От друга страна, ефектът на хистерезис може да се открие и в мемристорните системи. Ще разгледаме следната мемристорна система (Chua, L.O., Kang, S.M., Memristive devices and systems, 1976):

$$y(t) = g(x, u, t)u(t),$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{3.1}$$

където променливата $u(t)$ е входният сигнал, променливата $y(t)$ е изходният сигнал, и g, f са непрекъснати функции.

Ако входът $u(t)$ е ток $i(t)$, изходът $v(t)$ е напрежението $v(t)$, тогава цикълът на хистерезис, даден на фигура 3.2, представлява електрическото съпротивление. Вижда се, че когато променим наклона на кривите на хистерезис, се появява превключване между различни състояния на съпротивлението. Известно е, че при високи честоти мемристорната теория предсказва хистерезисния ефект, което означава, че получаваме права линия, характерна за линеен резистор.



Фиг.3.2. Контур на хистерезис в мемристори.

Разглежданият модел на хистерезисна КНМ се състои от клетки от I ред, в които имаме хистерезисни превключватели. Има два режима на работа на хистерезисна КНМ - 1). би-стабилен мултивибратор, 2). режим на реаксационен осцилатор. По този начин хистерезисната КНМ може да има много приложения.

Когато КНМ работи в режим на релаксационен осцилатор, тогава могат да се генерират различни шаблони и нелинейни вълни. Асоциативните (статичните) и динамичните функции на паметта могат да бъдат извлечени също от хистерезисна КНМ (ХКМН).

Нека разгледаме ХКНМ с мемристорни синапси, чиято динамика се описва от следните уравнения на състоянието:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) + \sum_{k,l \in N_{ij}} (a_{k-i,l-j} f(u_{kl})) \quad (3.2)$$

$$1 \leq i, j \leq N,$$

където u_{ij} обозначава състоянието на клетката, изходът $y_{ij} = f(u_{ij})$ е функция на динамичен хистерезис, дефиниран от:

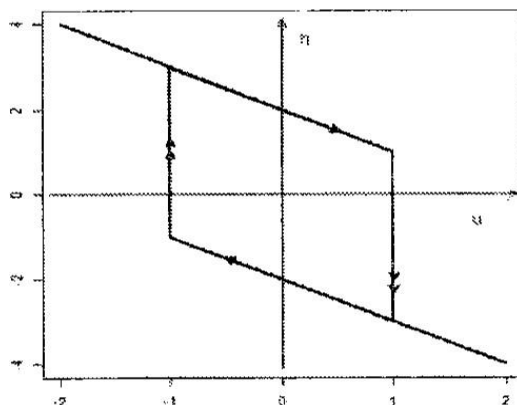
$$f(u(t)) \begin{cases} 1, \text{ for } u(t) > -l, f(u(t_-)) = 1 \\ -1, \text{ for } u(t) = -l \\ -1, \text{ for } u(t) < l, f(u(t_-)) = -1 \\ 1, \text{ for } u(t) = l, \end{cases} \quad (3.3)$$

$t_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t - \varepsilon), \varepsilon > 0, m(\cdot)$ се дефинира като $m(u_{ij}) = \frac{u_{ij}}{M(t)}$ в който $M(t)$ е мемристорна функция.

Въвеждаме мемристор в модела ХКНМ, за да получим по-добра разделителна способност в статични и динамични изображения. Заменяме оригиналния линеен резистор в нашия ХКНМ модел с мемристор, който може да показва характеристика на нелинейно напрежение с локално отрицателно диференциално съпротивление. По този начин, ХКНМ с мемристорни синапси (М-ХКНМ) е универсален и компактен модел, поради програмируемите схеми на синапса. Освен това спестява традиционните сложни схеми за реализация на изходната функция. Ще разгледаме нашия М-ХКНМ модел, работещ в режим на релаксационен осцилатор, а именно:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) - 2h(u_{ij}) + bf(u_{ij}), 1 \leq i, j \leq N \quad (3.4)$$

По-долу е графиката на релаксационен осцилатор, който се разглежда.

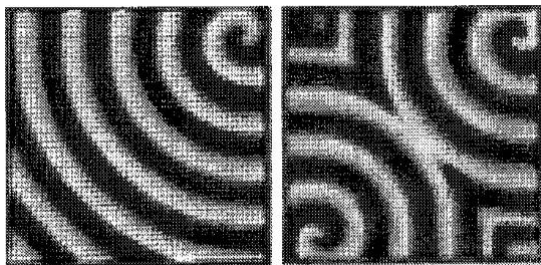


Фиг.3.3. Релаксационен осцилатор, определен от (3.4).

Моделът М-ХКНМ (3.4) генерира шаблони, близки до бифуркационната точка $b = 3$.

Компютърни симулации на (3.4), когато използваме Лапласов темплет $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

показва генерирането и на спирални вълни за $b = 3$ (виж фиг.3.4):



Фиг.3.4. Спирални вълни в НКНМ модел (3.4).

3.1.2. Определяне на режима на ръб на хаоса в М-ХКНМ

Прилагаме конструктивния алгоритъм за определяне на ръба на хаос в М-ХКНМ модел (3.4):

1). Проектираме модела М-ХКНМ (3.4) в неговата дискретно-пространствена

версия, като избираме темплета на Лаплас $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ като темплет за обратна

връзка. След това в режим на релаксация динамиката на изолирана клетка, когато няма контролни и прагови параметри, може да се запише като:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) - 2h(u_{kl}) + bf(u_{kl}) = F(u_{kl}) \quad (3.5)$$

2) Можем да намерим точките на равновесие E_k на (3.5), които удовлетворяват уравнението $F(u_{kl}) = 0$. Като цяло тази система може да има четири реални корена като функции на параметрите на клетката.

3) Изчисляваме четирите коефициента $a_{11}(E_k)$, $a_{12}(E_k)$, $a_{21}(E_k)$, $a_{22}(E_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ на Якобиана във всяка точка на равновесие.

4) Тогава можем да изчислим следата $Tr(E_k)$ и детерминанта $\Delta(E_k)$ на Якобиана за всяка равновесна точка E_k .

Определение 3.1. Ще казваме, че клетката е едновременно устойчива и локално активна в региона $SLAR(E_k)$ на точката на равновесие E_k за М-ХКНМ (3.4), ако $a_{22} > 0$ или $4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2$ и $Tr(E_k) < 0$ и $\Delta(E_k) > 0$

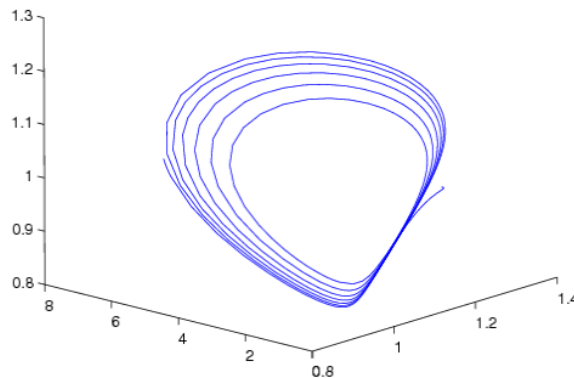
5) Определяме така наречения *ръб на хаоса* за нашия модел М-ХКНМ (3.4). Вече споменахме, че ръбът на хаоса (РХ) е регион в параметричното пространство на динамична система, в който е възможно възникване на сложни явления и обработка на информация.

Определение 3.2. Моделът М-ХКНМ (3.4) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако има поне една точка на равновесие, която е едновременно локално активна и устойчива.

Следвайки горния алгоритъм, ние доказахме основната теорема в този параграф:

Теорема 3.1. Моделът М-ХКНМ (3.4) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако са дефинирани само следните условия: $-1 < b < 3$. Това означава, че имаме поне една точка на равновесие E_k , $k = 1, 2, 3, 4$, в която моделът е едновременно локално активен и устойчив.

Получаваме следната област на *ръб на хаоса* за нашия модел М-ХКНМ (3.4) чрез компютърна симулация:



Фиг.3.5. *Ръб на хаоса* за М-ХКНМ модел (3.4).

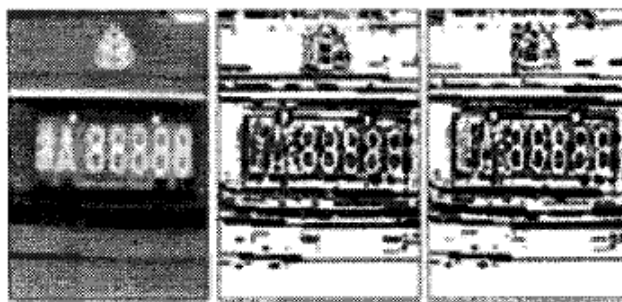
3.1.3. Приложения на модела на М-ХКНМ

Ще представим приложенията на М-ХКНМ модел (3.4) в обработката на изображения, като извличане на ръбове и отстраняване на шум (Chua, L.O, Yang, L., CNN: Applications, 1988). Всички цифрови резултати се анализират на софтуер MATLAB в случай на двете разглеждани приложения. Прилагаме алгоритъм на Ойлер с размер на стъпка във времето $\Delta t = 0.01$ към всички компютърни симулации. Тогава функцията за динамичен хистерезис $h(x)$ се дискретизира както следва:

$$h(u(t_n)) = \begin{cases} 1, \text{ за } u(t_n) > -1, & h(u(t_{n-1})) = 1 \\ -1, \text{ за } u(t_n) = -1, & \\ -1, \text{ за } u(t_n) < -1, & h(u(t_{n-1})) = -1 \\ 1, \text{ за } u(t_n) = 1, & \end{cases}$$

където $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$

Първото приложение, което ще представим, е за извличане на ръба на изображението (виж Фиг.3.6):



а) оригинален; б) М-ХКНМ; в) КНМ

Фиг.3.6. Изход за извличане на ръба на изображение - а) Оригиналното изображение,

б) М-ХКНМ и в) стандартен КНМ.

Второто приложение е в премахването на шума (виж фиг. 3.7):



а) шум; б) М-ХКНМ; в) КНМ

Фиг. 3.7. Резултати за отстраняване на шума

Ако имаме изображение в реалния свят с камера, обикновено то е замърсено от някакъв шум. В този случай е много важно да се направи премахване на шума. Симулациите на фиг. 3.7 показват, че М-ХКНМ (3.4) има добри показатели за обработка на отстраняване на шума, които са подобни на стандартните КНМ.

3.2. Локална активност в КНМ с динамични синапси на паметта.

Нека разгледаме динамиката на хистерезиса КНМ с динамични синапси на паметта, която е описана от следните уравнения:

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i - 2h(u_i) = d(m_i u_0 - u_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

където $h(u_i)$ е динамична хистерезисна функция:

$$h(u(t)) = \begin{cases} 1, \text{ за } u(t) > -1, h(u(t_-)) = 1 \\ -1, \text{ за } u(t) = -1, \\ -1, \text{ за } u(t) < 1, h(u(t_-)) = -1 \\ 1, \text{ за } u(t) = 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

$t_- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t - \epsilon)$, $\epsilon > 0$, d е достатъчно голяма константа, m_i се определя от

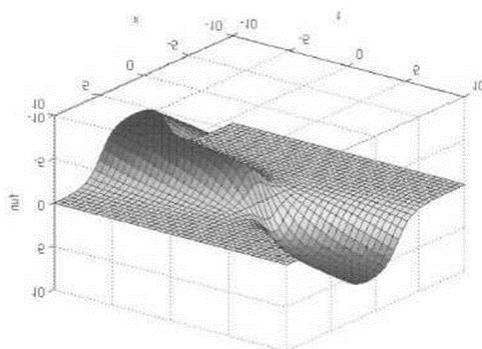
$$m_i = \text{sgn}(\sum_{j=1}^N s_{ij} w_j) \quad (3.8)$$

$w_j = \text{sgn}(h(u_j)h(u_0))$. Като се имат предвид M двоични модели $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^M$, всеки модел σ съдържа N бита информация σ_i^m , тогава коефициентите на свързване s_{ij} се определят, както следва:

$$s_{ij} = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=1}^M \sigma_i^m \sigma_j^m \right)$$

u_0 се получава от главния релаксационен осцилатор:

$$\frac{du_0}{dt} = -u_0 - 2h(u_0) \quad (3.9)$$



Фиг. 3.8. Хистерезис в КНМ с динамични паметни.

3.2.1. Режим на ръб на хаоса.

Моделът на КНМ с динамични синапси на паметта, който ще изследваме, следва от (3.6), (3.7) и (3.9):

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i - 2h(u_i) = d(\sigma_i^1 u_0 - u_i), \quad \frac{du_0}{dt} = -u_0 - 2h(u_0) \quad (3.10)$$

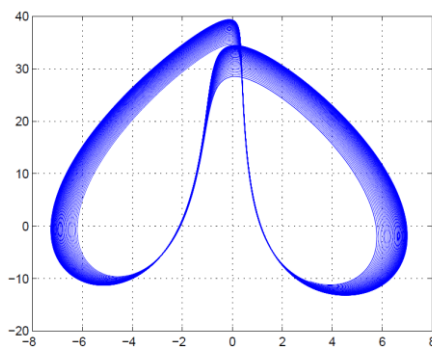
За него е в сила следната теорема:

Теорема 3.2. КНМ модел с динамични синапси на паметта (3.10) работи в режим на ръб на хаоса, ако

$$d(2\sigma_i^1 - 1) < 1 \text{ и } d(2\sigma_i^1 + 1) > -2$$

За тези стойности на параметрите съществува поне една равновесна точка, която принадлежи на $SLAR(E_j)$.

Числените симулации показват следния ръб на областта на хаоса:



Фиг. 3.10. Ръбна хаоса за модел КНМ (3.10) в случай на 4 клетки.

3.3. Модел на КНМ на реакция-дифузия с мемристорни синапси

Мемристорите, въведени от Чуа, показват връзка между потока φ и заряда q (Chua L. O. , Memristor, Hodgkin-Huxley and Edge of Chaos, 2013). Представените еквивалентни физически примери се държат като енергонезависим резистор, чието съпротивление непрекъснато се контролира от количеството на заряда на потока (тока). Общият модел на мемристорите е обяснен по отношение на мощността $M(q)$. Динамиката на мемристора е дадена от:

$$i = g_u(w)v, \quad \frac{dw}{dt} = i, \quad (3.11)$$

Където v представлява напрежението в мемристора; i е токът на мемристора; w е номиналното вътрешно състояние на мемристора, съответстващо на зарядния поток на мемристора, и $g_u(w)$ е монотонно не намаляваща функция с увеличаване на w .

Този модел предполага, че положителното (или отрицателното) i (текущия поток) води до увеличаване (или намаляване) на w , което води до увеличаване (или намаляване) на проводимостта на мемристор $g(w)$. По-долу ще представим мемристорен модел на реакция-дифузия.

3.4. Модел на ФицХю Нагумо

Системата на ФицХю Нагумо с две свързани частни диференциални уравнения и два дифузионни коефициента е опростяване на модела на Ходжкин-Хъксли и описва контрола на електрическия потенциал в клетъчната мембрана чрез промяната на потока на йонните канали, но също така може да се използва за модел на електрически вълни на сърцето (Slavova, A., Zecca, P., Modeling natural phenomena via Cellular Nonlinear Networks, 2017).

Тук ще представим следната система на ФицХю Нагумо с два дифузионна члена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + d_1 \nabla^2 u, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + d_2 \nabla^2 v,$$

където

$$f_1(u, v) = -\frac{1}{\varepsilon} u(u-1) \left(u - \frac{b+v}{a} \right),$$

$$f_2(u, v) = f(u) - v, \quad (3.13)$$

$f(u)$ е монотонно не намаляваща функция

$$f(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{27u(u-1)^2}{4}, & \frac{1}{3} \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

Параметрите ε , a , b са физични параметри, свързани с налягането на оксида, въглеродния оксид и температурата.

Дискретизираме в пространството системата (3.12) и получената динамика се дава по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{du_{ij}}{dt} &= f_1(u_{ij}, v_{ij}) + d_1(w^{l,r})(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij}) \\ \frac{dv_{ij}}{dt} &= f_2(u_{ij}, v_{ij}) + d_2(w^{l,r})(v_{i-1j} + v_{i+1j} + v_{ij-1} + v_{ij+1} - 4v_{ij}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

където $d_k(w^{l,r})$ означава монотонно увеличаващата се функция, дефинирана като динамиката на мемристора

$$d_k(w^{l,r}) = d_{min} + (d_{max} - d_{min}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\beta w_k^{l,r}}}, \quad k=1,2 \quad (3.15)$$

3.4.1. Ръб на хаоса в мемристорен модел на ФицХю Нагумо КНМ

Ще приложим конструктивния алгоритъм за определяне на РХ за мемристорната ФицХю Нагумо система (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{du_{ij}}{dt} &= f_1(u_{ij}, v_{ij}) + d_1(w)(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij}) \\ \frac{dv_{ij}}{dt} &= f_2(u_{ij}, v_{ij}) + d_2(w)(v_{i-1j} + v_{i+1j} + v_{ij-1} + v_{ij+1} - 4v_{ij}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Намираме равновесните точки на (3.16). Според теорията на динамичните системи равновесните точки u^* , v^* са тези, за които:

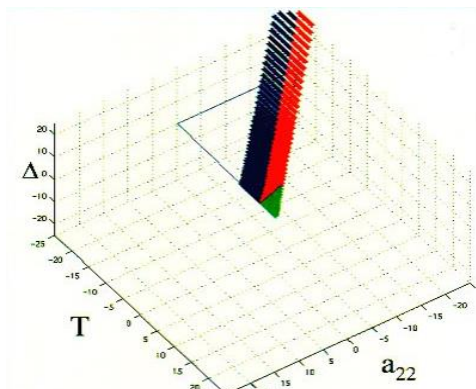
$$\begin{aligned} f_1(u^*, v^*) &= 0 \\ f_2(u^*, v^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Системата (3.16) може да има един, два или три реални корена (u_1^*, v_1^*) , (u_2^*, v_2^*) , (u_3^*, v_3^*) . По принцип тези корени са функциите на клетъчните параметри a , b , ε .

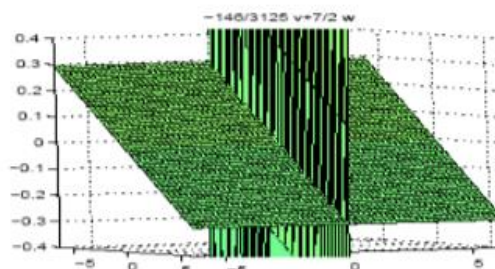
Доказана е следната теорема:

Теорема 3.3. КНМ моделът на системата на ФицХю Нагумо (3.12), (3.13) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако $\varepsilon \ll 1$, $\frac{a-b-1}{a} < 1$. За тези стойности на параметрите има поне една равновесна точка, която е активна и локално устойчива.

Получени са следните симулации:



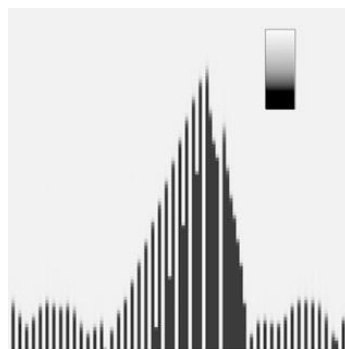
Фиг 3.11. а). (T, Δ, a_{22}) равнина
Пространствен изглед



б). (a, b, ε) равнина
Ръб на хаоса

3.4.2. Дискусия на симулациите.

В симулациите по-горе можем да видим проекцията на клетъчния параметър на равнината (T, Δ, a_{22}) . Разполагаме с червен субрегион, в който имаме 3 равновесни точки на нашия модел (3.16) и поне в една клетката е устойчива и локално активна; Син субрегион, в който имаме едно или три равновесни точки и във всяка равновесна точка е клетката е неустойчива; Зелен субрегион, в който има само една точка на равновесие и тя е едновременно устойчива и локално активна. По дефиниция червеният и зеленият подрегион на Фиг.3.11а заедно представляват *ръба на хаоса*. На фиг. 3.11b можем да видим диаграмата на ръба на хаоса в параметъра (a, b, ε) равнина.



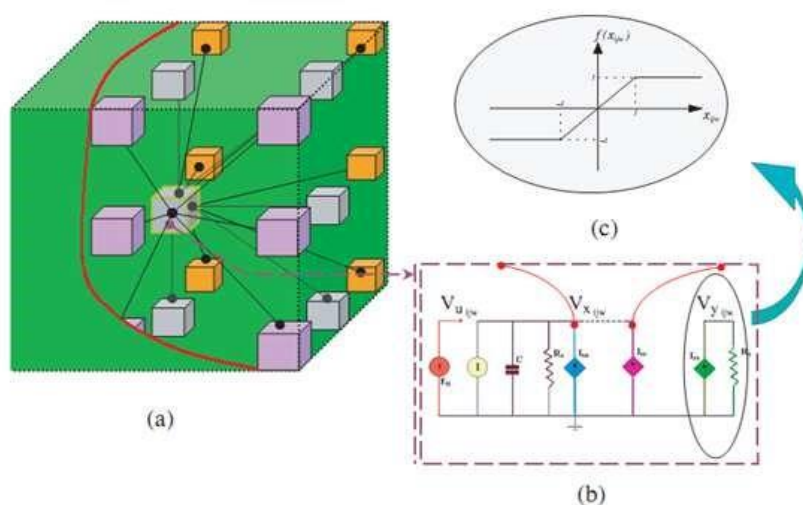
Фиг.3.12. Създаване на пространствени образци

На Фиг. 3.12 може да се види, че как се генерира вълна и тя се разпространява асиметрично поради мемристорния ефект.

4. ГЛАВА 4. КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ ВЪЗНИКВАЩИ В НАНОСТРУКТУРИТЕ

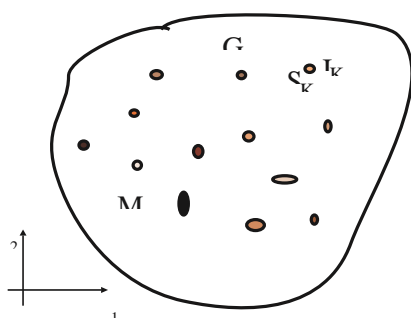
4.1. Моделиране с КНМ на пиезоелектричен материал.

В тази глава ще разгледаме Клетъчно Нано Невронни Мрежи (КННМ) за моделиране на сложни системи. Тези мрежи не представляват парадигма само за сложност, но също така установяват нови подходи към обработката на информация чрез динамиката на нелинейните сложни системи.



Фиг. 4.1. а). КННМ архитектура; б). клетъчна верига; в). изходна функция на КННМ

Ще изследваме пиезоелектрически материал (ПЕМ) с нано нехомогенности (виж фигура 4.2). ПЕМ са анизотропни диелектрици, където електрическите, магнитните и еластичните полета са свързани. Познаването както на разсеяното вълново поле, така и на динамичната концентрация на напрежение в близост до нано дефекти може да предостави полезна информация при повреда и счупване на тези материали и конструкциите, направени от тях.



4.2. Извеждане на граничната задача.

Нека $G \in \mathbb{R}^2$ е ограничена пиезоелектрична област с множество от нехомогенности $I = \cup I_k \in G$ (дупки, включения, нано дупки, нано включения), подложени на времево-хармонично натоварване на границата ∂G , виж фигура 4.2. Ще отбележим, че хетерогенностите са с макро размер, ако диаметърът им е по-голям от 10^{-6}m , докато хетерогенностите са с наноразмер, ако диаметърът им е по-малък от 10^{-7}m .

Целта е да се намери полето във всяка точка на $M = G \setminus I$, I и да се оцени концентрацията на стрес около нехомогенностите.

Използвайки методите на непрекъснатата механика, задачата може да бъде формулирана като гранична задача за система от диференциални уравнения от втори ред:

$$\begin{cases} c_{44}^N \Delta u_3^N + e_{15}^N \Delta u_4^N - \rho^N u_{3,tt} = 0 \\ e_{15}^N \Delta u_3^N - \varepsilon_{15}^N \Delta u_4^N = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

където $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ е оператор на Лаплас по отношение на t , $N = M$ за $x \in M$ и $N = I$ за $x \in I$; u_3^N е механично изместване, u_4^N е електрически потенциал, ρ^N е плътността на масата, $c_{44}^N > 0$ е твърдостта на срязване, $e_{15}^N \neq 0$ е пиезоелектричната константа и $\varepsilon_{11}^N > 0$ е диелектричната пропускливост.

4.3. Гранични условия

Нека определим обобщен стрес σ_i^J , $i = 1, 2$; $J = 3, 4$ като

$$\begin{cases} \sigma_{i3}^N = c_{44}^N \frac{\partial u_3^N}{\partial x_i} + e_{15}^N \frac{\partial u_4^N}{\partial x_i} \\ \sigma_{i4}^N = e_{15}^N \frac{\partial u_3^N}{\partial x_i} + \varepsilon_{11}^N \frac{\partial u_4^N}{\partial x_i} \end{cases}$$

Обръщаме внимание, че σ_{13}^N се нарича механично напрежение, докато σ_{14}^N се нарича електрическо изместване (обичайната нотация в механиката е $D_i^N = \sigma_{14}^N$, $i = 1, 2$).

Обобщеното сцепление в точката x на линейния сегмент с нормален вектор $n = (n_1, n_2)$ се определя като

$$\begin{cases} t_3^N = \sigma_{13}^N n_1 + \sigma_{23}^N n_2 \\ t_4^N = \sigma_{14}^N n_1 + \sigma_{24}^N n_2 \end{cases}$$

Във всяка точка $x \in S = \partial I$ можем да определим нормален вектор n и единичен допирателен вектор l такъв, че (l, n) образува дясна координатна система.

4.3.1. Гранични условия за хетерогенности в макромасщаб

А) В случай, че I е дупка, формално можем да считаме, че константите в I са $c_{44}^I = 0$, $e_{15}^I = 0$, $\varepsilon_{11}^I = 0$, а граничните условия на S са

$$t_j^M = 0, \text{ за } S,$$

Тук векторите се определят като $t_j^M = (t_3^M, t_4^M)$

Б) В случай, че I е включение, константите в I са $c_{44}^I > 0, e_{15}^I \neq 0,$

$\varepsilon_{11}^I > \varepsilon_{11}^M > 0;$ константи в M са $c_{44}^M > 0, e_{15}^M \neq 0, \varepsilon_{11}^M > 0$ и гранични условия на S са

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j^M = \mathbf{u}_j^I \\ \mathbf{t}_j^I + \mathbf{t}_j^M \end{cases}$$

Забелязваме, че $n_i^I = -n_i^M, i = 1, 2,$ където n_i^I и n_i^M са компонентите на външния нормален вектор по протежение на $S,$ считан съответно за граница на включването или матрицата. Освен това имаме това $t_j^M = (t_3^M, t_4^M), N = I, M.$

4.3.2. Гранични условия за нано хетерогенности

Да приемем, че интерфейсът между нано включването I и заобикалящата го матрица M се счита за тънка повърхност на материала $S,$ която притежава собствени механични свойства и $c_{44}^S, e_{15}^S, \varepsilon_{11}^S$ и повърхностно напрежение $\tau^0.$

По-конкретно, τ^0 е остатъчното повърхностно напрежение при неограничени условия, което ще предизвика допълнителна статична деформация, но при динамичен анализ това често се игнорира, т.е. $\tau^0 = 0.$

В) В случай, че I е нано дупка, формално можем да считаме, че константите в I са $c_{44}^I = 0, e_{15}^I = 0, \varepsilon_{11}^I = 0$ и граничните условия на S са

$$t_j^M = \frac{\partial \sigma_{IJ}^S}{\partial l} \quad (4.2)$$

Г) В случай, че I е нано включване, константите в I са $c_{44}^I > 0, e_{15}^I \neq 0, \varepsilon_{11}^I > 0$

константи в M са $c_{44}^M > 0, e_{15}^M \neq 0, \varepsilon_{11}^M > 0$

На границата на хетерогенност $S,$ където са дефинирани константите, обобщеното тангенциално напрежение върху S се определя като:

$$\begin{cases} \sigma_{i3}^S = c_{44}^S \frac{\partial u_3^S}{\partial l} + e_{15}^S \frac{\partial u_4^S}{\partial l} \\ \sigma_{i4}^S = e_{15}^S \frac{\partial u_3^S}{\partial l} + \varepsilon_{11}^S \frac{\partial u_4^S}{\partial l} \end{cases}$$

Гранични условия за S са:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_j^M = \mathbf{u}_j^I \text{ за } S, \\ \mathbf{t}_j^I + \mathbf{t}_j^M = \frac{\mathbf{l}_j}{\partial l} \end{cases}$$

4.4. КННМ модел на граничната задача и неговата динамика.

КННМ моделът на граничната задача (4.1), (4.2), който се състои от $n = L.L$ клетки, може да бъде записан в следната форма:

$$\begin{cases} c_{44}^N A_1 * u_{3i} + e_{15}^N A_1 * u_{4i} - \rho^N \frac{d^2 u_{3i}}{dt^2} = 0 \\ e_{15}^N A_1 * u_{3i} - \varepsilon_{11}^N A_1 * u_{4i} = 0, 1 \leq i \leq n, \end{cases} \quad (4.3)$$

където A_1 е едномерен дискретизиран темплет на Лаплас, $*$ е конволюционен оператор, $1 \leq i \leq n$. Граничните условия (4.2) могат да бъдат записани по отношение на архитектурата на КННМ, както следва:

$$\begin{aligned} t_j^M &= \frac{\partial \sigma_{ij}^M}{\partial t}, j = 3, 4, \\ \sigma_{l3i}^M &= c_{44}^M \frac{\partial u_{3i}^l}{\partial x_l} + e_{15}^M \frac{\partial u_{4i}^l}{\partial x_l}, \\ \sigma_{l4i}^M &= e_{15}^M \frac{\partial u_{3i}^l}{\partial x_l} - \varepsilon_{11}^M \frac{\partial u_{4i}^l}{\partial x_l}, 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Изразяваме от второто уравнение на (4.3), $A_1 * u_{4i}$ и заместваме в първото уравнение. Така получаваме следното уравнение за u_{3i} :

$$\tilde{C} A_1 * u_{3i} - \rho^N \frac{d^2 u_{3i}}{dt^2} = 0, \quad (4.5)$$

където $\tilde{C} = c_{44}^N + \frac{(e_{15}^N)^2}{\varepsilon_{11}}$.

За изследване на динамиката на КННМ (4.4), (4.5) ще приложим метода на хармоничния баланс.

4.4.1. Динамика на КННМ модел (4.4), (4.5).

Следвайки метода на хармоничния баланс, въвеждаме двойна трансформация на Фурие:

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(-st) dt. \quad (4.6)$$

където $z = \exp(i\Omega)$, Ω е непрекъснатата пространствена честота, $s = i\omega$, ω е непрекъснатата времева честота.

Прилагаме горното преобразуване (4.6) на (4.5) и получаваме следната трансферна функция:

$$H(s, z) = \frac{p^N s^2}{\tilde{c}(z^{-1} - 2 + z)}. \quad (4.7)$$

Според метода на хармоничния баланс ще търсим решението на (4.4), (4.5) във формата:

$$\begin{aligned} u_{3i} &= U_3 \sin(\omega t + i\Omega), \\ u_{4i} &= U_4 \sin(\omega t + i\Omega), \end{aligned}$$

където U_3, U_4 са амплитуди, като $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T е минималният период.

Изразяваме трансферната функция (4.7) по отношение на $s = i\omega$ и $z = \exp(i\Omega)$ и получаваме:

$$H_\Omega(\omega) = \frac{-\rho^N \omega^2}{\tilde{C}(2\cos\Omega - 2)}. \quad (4.8)$$

Методът на хармоничен баланс налага следните ограничения на трансферната функция (4.8):

$$\operatorname{Re}(H_{\Omega}(w)) = \frac{U_3}{U_4} \quad (4.9)$$

$$\operatorname{Im}(H_{\Omega}(w)) = 0.$$

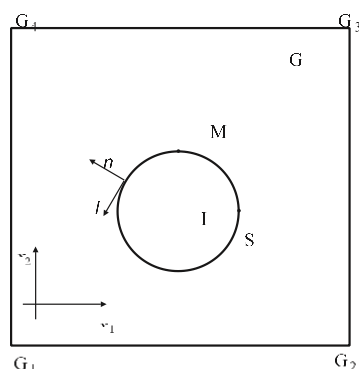
Сега според метода, ако за дадена стойност на Ω можем да намерим решение (w , U_3U_4) на (4.9), тогава можем да предвидим съществуването на периодични решения с амплитуди U_3 , U_4 и период приблизително $T = \frac{2\pi}{w}$.

В сила е следното предложение:

Предложение 4.1. КННМ модел (4.4), (4.5), състоящ се от $n = L.L$ клетки има периодични решения u_{3i} , u_{4i} с ограничено множество от пространствени честоти Ω и период $T = \frac{2\pi}{w}$.

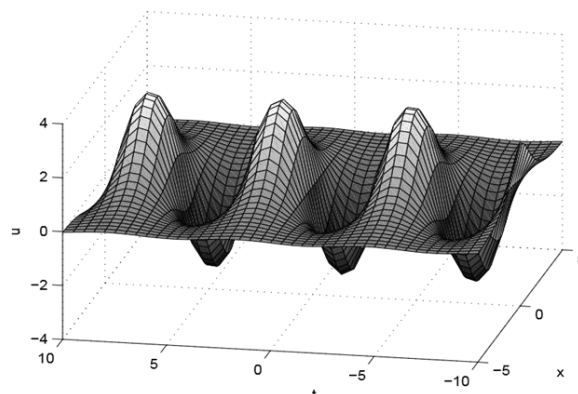
4.4.2. Симулации и валидиране.

Разглеждаме квадратната ПЕМ област $G_1G_2G_3G_4$ със страна a , съдържаща единична кръгова нехомогенност с радиус $r = \beta a$ и център в центъра на квадрата.



Фигура 4.3. Правоъгълна ПЕМ матрица с нехомогенност -кръг.

Обръщаме внимание, че ако $\beta < 0,05$ влиянието на външната граница G върху разтвора се очаква да бъде малка, докато, ако $\beta > 0,2$ се очаква значително влияние.



Фигура 4.4. Симулация на КННМ модел (4.4), (4.5).

Пространствената честота се определя като $\Omega = c \sqrt{\left(\frac{M}{c_{44}^M}\right) w}$.

Характеристиката, която представлява интерес за нано структурите, е нормализирано поле за концентрация на напрежение (σ / σ_0) и се изчислява по следната формула:

$$\sigma = -\sigma_{13} \sin(\varphi) + \sigma_{23} \cos(\varphi), \quad (4.10)$$

където φ е полярният ъгъл на наблюдаваната точка, σ_{ji} е напрежението близо до S.

Материалните параметри на матрицата за напречно изотропния пиезоелектричен материал ПЕМ са:

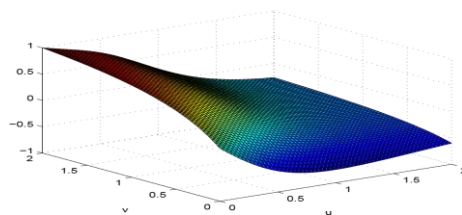
- Еластична коравина: $c_{44}^M = 2.56 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$;
- Пиезоелектрична константа: $e_{15}^M = 12.7 \text{ C/m}^2$;
- Диелектрична константа: $\varepsilon_{11}^M = 64.6 \times 10^{-10} \text{ C/Vm}$;
- Плътност: $\rho^M = 7,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Приложеното натоварване е хармонично едноосно по време на вертикална посока равномерно механично сцепление с честота ω и амплитуда $\sigma_0 = 400 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ и

електрическо изместване с амплитуда $D_0 = k \frac{\varepsilon_{11}^M}{e_{15}^M} \sigma_0$. Това означава, че граничните условия са:

- на $G_1 G_2$: $t_3^M = -\sigma_0, t_4^M = -D_0$;
- на $G_2 G_3$: $t_3^M = t_4^M = 0$;
- на $G_3 G_4$: $t_3^M = 0, t_4^M = D_0$;
- на $G_4 G_1$: $t_3^M = t_4^M = 0$.

Валидирането на нашия модел е дадено по-долу на Фигура 4.4 за дадените по-горе параметри.



Фигура 4.5. Валидиране - динамичен модел в наблюдаваната точка.

4.5. Решения от типа бягаща вълна за КННМ модел.

Изследваме структурата на решенията от типа бягаща вълна на модела КНМ

$$\frac{du_{ij}}{dt} = DA_2 * u_{ij} - C_1 \int_S G(u_{ij}) dt, 1 \leq i, j \leq n \quad (4.11)$$

Съществуват резултати в литературата за решения от типа бягащи вълни на пространствено дискретни или едновременно пространствени и времеви дискретни системи, но доколкото знаем, за КНМ няма резултати за решения от типа

периодични бягащи вълни. Тук изучаваме структурата на решенията от типа бягаща вълна на модела КНМ (4.11), имащи формата:

$$u_{ij} = \Phi(icos\theta + jsin\theta - ct) \quad (4.12)$$

където Φ е непрекъснатата функция и нека $s = icos\theta + jsin\theta - ct$.

Доказана е следната теорема:

Теорема 4.1. Да предположим, че $u_{ij} = \Phi(icos\theta + jsin\theta - ct)$ е решение от типа бягаща вълна на модела КНМ (4.32) и $\Omega = \frac{2\pi k}{L}, 0 \leq k \leq L - 1$. Тогава съществуват константите $c_* < c^* < 0$ такива, че

(1) ако $c \leq c_*$, тогава $\Phi(s; c)$ не намалява и удовлетворява

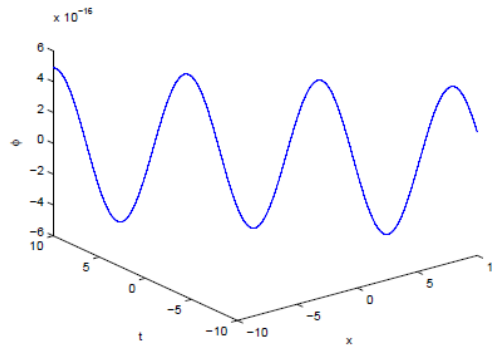
$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^0 \text{ и } \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^+ \quad (4.13)$$

(2) ако $c = c^* > c_*$, тогава $\Phi(s; c)$ не намалява и удовлетворява

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^- \text{ и } \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^+;$$

(3) ако $c^* < c < 0$, то $\Phi(s; c)$ е не намаляващо и неограничено.

Симулациите на решението от типа бягаща вълна на КНМ модел (4.11) на Фиг. 4.6:



Фигура 4.6. Решение от типа бягаща вълна на КНМ модел (4.11).

Заклучение

В дисертацията е представена теорията на локалната активност от математическа гледна точка. Получени са точни неравенства за определяне на локално активната и устойчива област в параметричното пространство. Въз основа на това е разработен алгоритъм за определяна на областта, в която КНМ може да прояви по-сложно поведение – *ръб на хаоса*.

Изследвана е динамиката на хистерезисни КНМ с мемристорни синапси. Въвеждането на мемристори в уравнението на клетъчната динамика е нова и много актуална задача през последните 5 години. Това води до някои интересни приложения като обработката на ръбовете на образи и изчистване на шума в образите. Разработеният конструктивен алгоритъм се прилага за ХКНМ с

мемристорни синапси, динамични памети и КНМ на реакция дифузия. Представени са много симулации на получената област – рѳб на хаос за различните модели.

Разработен е модел на КНМ за решаване на гранична задача, възникваща в нано структурите. Разгледан е пиезоелектричен материал с нано нехомогенности и задачата е моделирана с КНМ. Изследвана е динамиката на КНМ модел с метода на хармоничния баланс. Доказано е съществуване на периодични решения и са направени много симулации за конкретен материал, както и валидация на получените резултати. Намерени са и решения от типа бягаща вълна за задачата, възникваща в нано механиката.

Научни приноси:

Приносите в дисертацията могат да се разделят на научни и научно приложни:

А. Научни приноси

1. Получена е конкретна математическа формулировка на метода на локалната активност за дискретни системи на реакция-дифузия.
2. Получени са точни математически условия за определяне на локална активност на клетка в КНМ. Дефинирана е подобластта на областта на локална активност, наречена *рѳб на хаоса*, в която КНМ може да прояви сложно динамично поведение.
3. Разработен е алгоритъм за определяна на тази област от клетъчни параметри и е приложен за тримерна система на ФицХю-Нагумо и Орегонаторна система.
4. Изучени са хистерезисни КНМ с мемристорни синапси. За прѳв път е въведен модел на хистерезисни КНМ, в които оригиналния резистор се заменя с мемристор и работи в режим на релаксационен осцилатор.
5. Изведени са и модели на КНМ на реакция-дифузия, в които отново се въвеждат мемристорни вериги. Това води до разширяване на приложенията на тези нови модели в обработката на образи и сигнали. Динамиката им е изследвана като е приложен разработения в Глава 2 конструктивен алгоритъм за определяне на областта *рѳб на хаоса*.

Б. Научно-приложни приноси

1. Представени са някои много актуални приложения на разглежданите модели на КНМ като извличане на ръбовете на изображения и изчистване на шума от изображения.

2. Получени са резултати за приложенията на хистерезисна КНМ за асоциативни и динамични паметни.

3. Разработен е КНМ модел на задача, възникваща в пиезоелектричен материал с нано нехомогенности – нано дупки, нано включения и др. Направени са симулации за конкретен материал PZT4 и те са валидирани.

Публикации по дисертацията

1. Slavova, A., Bobeva, G. Local Activity of CNN with Dynamic Memory Synapses. C.R.Bulg.Acad.Sci., 69, 11, BAS, 2016, ISSN:1310-1331, 1401-1406.

2. Slavova, A., Bobeva, G., Determination of edge of chaos in hysteresis CNN model with memristor synapses, IEEE Proc., ECCTD 2017, DOI:10.1109/ECCTD.2017.8093294, 1-4.

3. Litsyn, E., Slavova, A., Bobeva, G., Studying Integro-Differential CNN Model with Applications in Nano-Technology. QUALITDE, 2017, ISSN:1512-3391, 113-117.

4. Slavova, A., Bobeva, G., Edge of Chaos Regime for CNN with Dynamic Memory Synapses, Proc. ANNA 2018, 2018, VDE.

5. Slavova, A., Bobeva, G., On Cellular Nanoscale Network model arising in nanostructures, C.R.Bulg.Acad. Sc., 71:7, 2018, 955-961.

6. Slavova, A., Bobeva, G. Edge of chaos in reaction-diffusion CNN, Pliska Studia Mathematica, vol.29, 2018, 127-138.

7. Slavova, A., Bobeva G., Dynamics of PEM with nano-inhomogeneities via Cellular nanoscale Networks, Pliska Studia Mathematica, vol. 30, 2019, 157-170.