

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Институт по Математика и Информатика

Галина Живкова Бобева

**Приложение на метода на локалната активност за изследване
динамиката на нелинейни Клетъчно Невронни Мрежи**

ДИСЕРТАЦИЯ

за образователна и научна степен “доктор”

Научна специалност

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научен ръководител: проф. дмн Анжела Славова

София

2020

Съдържание

УВОД	4
ГЛАВА 1. НЕЛИНЕЙНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ (КНМ).....	8
1.1. Определения на КНМ.....	8
1.2. Архитектура на КНМ.	9
1.3. Основни видове уравнения на КНМ.....	10
1.3.1. Уравнения на състоянието	10
1.3.2. Изходни уравнения	13
1.4. Динамичен обхват на КНМ.	14
1.5. Невронни мрежи на Хопфилд	16
ГЛАВА 2. МЕТОД НА ЛОКАЛНАТА АКТИВНОСТ И ПРИЛОЖЕНИЯ ЗА КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ	20
2.1. Въведение	20
2.2. Математическо определение на локална активност	22
2.2.1. Клетъчни равновесни точки.....	23
2.2.2. Линеаризирани клетъчни уравнения на състоянията.....	23
2.2.3. Локална активност в клетъчната точка на равновесие Q	24
2.2.4. Матрица на комплексност.....	25
2.3. Теорема за локална активност.....	27
2.3.1. Положителна реална функция на комплексност	27
2.3.2. Практически тест за локална пасивност	31
2.3.3. Практически тест за локална активност	33
2.4. Примери за определяне на режим на <i>ръб на хаоса</i>	36
2.4.1. <i>Ръб на хаоса</i> за модел на реакция-дифузия.....	40
ГЛАВА 3. ХИСТЕРЕЗИСНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ.....	44
3.1. Хистерезисен модел на клетъчно нелинейни мрежи (КНМ) с мемписторни синапси	44
3.1.2. Определяне на режима на <i>ръб на хаоса</i> в М-ХКНМ.....	47
3.1.3. Приложения на модела на М-ХКНМ	49
3.2. Локална активност в КНМ с динамични синапси на паметта.....	51
3.2.1. Режим на <i>ръб на хаоса</i>	53
3.3. Модел на КНМ на реакция-дифузия с мемристорни синапси	55
3.4. Модел на ФицХю Нагумо	57
3.4.1. <i>Ръб на хаоса</i> в мемристорен модел на ФицХю Нагумо КНМ.....	58
3.4.2. Дискусия на симулациите.	60
ГЛАВА 4. КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ ВЪЗНИКВАЩИ В НАНО СТРУКТУРИТЕ.....	62

4.1. Моделиране с КНМ на пиезоелектричен материал.....	62
4.2. КННМ моделиране на частни диференциални уравнения (ЧДУ).	64
4.2.1. Едномерна КННМ и ЧДУ.	65
4.3. Извеждане на граничната задача.....	67
4.4. Гранични условия.....	68
4.4.1. Гранични условия за хетерогенности в макромасаб.....	68
4.4.2. Гранични условия за нано-хетерогенности.....	69
4.5. КННМ модел на граничната задача и неговата динамика.....	70
4.4.1. Техника на хармоничен баланс.	71
4.4.2. Динамика на КННМ модел (4.17), (4.18).....	73
4.4.3. Симулации и валидиране.	74
4.6. Решения от типа бягаща вълна за КННМ модел.	77
Литература	79
Публикации по дисертацията.....	87
Научни приноси.....	88

УВОД

В настоящия дисертационен труд се изучава метода на локална активност и неговото приложение за изследване на динамичното поведение на нелинейни Клетъчно Невронни Мрежи (КНМ).

Клетъчно Невронните Мрежи са въведени в статията на Л.Чуа и Л.Янг (Chua & Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988) през 1988 г. Основната идея е да се използва решетка от нелинейни динамични вериги, взаимосвързани помежду си, с цел да се обработи сравнително голямо количество информация в реално време. Концепцията за тази нова архитектура е взимствана от архитектурата на клетъчните автомати и на невронните мрежи, като по този начин се показва нова възможност за ефективно решаване на доста бавни във времето задачи, например за разпознаване и обработка на образи и за решаване на нелинейни частни диференциални уравнения. През последните 20 години оригиналната архитектура на КНМ е обобщавана и разширявана с оглед на все по-увеличаващите се приложения след разработването на КНМ чип – универсална машина (Arena, A mechatronic lampreycontrolled by analog circuits, 2001), (Arena, Fortuna, & Branciforte, Realization of a reaction-diffusion CNN algorithm for locomotion control in an hexapode robot, 1999), (Arena, Fortuna, & Frasca, Attitude control in walking hexapod robots: an analogic spatio-temporal approach, 2002), (Arena, Fortuna, & Occhipinti, A CNN algorithm for real time analysis of DNA microarrays), (Balya, Roska, Roska, & Werblin, 2002), (Chua & Roska, Cellular neural networks and visual computing, 2002), (Chua & Roska, The CNN paradigm, 1993).

Едно от най-важните свойства на КНМ е, че отделните клетки са нелинейни динамични системи, но връзките между тях са линейни. С други думи, тези мрежи могат да се разглеждат като нелинейни с линейна пространствена структура, което прави общите техники за тяхното изследване от физиката и инженерството еднакво атрактивни. За някои симетрични темплети уравненията, описващи динамиката на КНМ, са много близки до пространствената дискретизация на нелинейни частни диференциални уравнения, като например системите на реакция-дифузия

(Slavova, Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling, 2003). В КНМ активната среда представлява локално свързани активни клетки, чиито изграждащи блокове включват нелинейни елементи (като например транзистори) захранени от батерии.

Цел на дисертацията е изследване динамиката на нелинейни КНМ. Основен метод на изследванията е метода на локалната активност, който позволява да се намери такова подмножество на множеството от клетъчни параметри, в което се наблюдава сложно динамично поведение на КНМ, наречено *ръб на хаоса*. В Глава 4 се прилага и един друг метод за изследване на динамиката на КНМ – метода на хармоничния баланс.

Предмет на изследване в дисертацията са приложенията на метода на локалната активност при изследване на сложната динамика на КНМ. Разглеждат се основно нелинейни частни диференциални уравнения (ЧДУ), които се апроксимират върху архитектурата на КНМ на реакция-дифузия. Решенията на тези КНМ модели имат четири основни свойства: 1). непрекъснати са във времето; 2). непрекъснати и ограничени са по стойности; 3). непрекъснати са по взаимодействиящи параметри; 4). дискретни са в пространството.

В дисертационния труд е изучено и явлението хистерезис. Това е специален тип зависимост с памет между входния сигнал и изходния сигнал. При хистерезис зависимостта от отговора на входа е независима от скоростта: скоростта, с която входа се движи оказва влияние само на скоростта на изхода. Качествената природа на отговора не се променя. Обикновено хистерезисът се дължи на многото равновесни състояния на клетките. Това явление е особено важно при моделирането в биологията, а също така и във феромагнетизма, електрониката и др. В Глава 3 се въвежда и един нов елемент към хистерезисните КНМ, а именно мемристора. Въведен теоретично от Л. Чуа през 1971 г., през 2008 г. в лабораториите на Hewlett-Packard е намерен подходящ материал за неговото производство. Мемристорните КНМ се развиват интензивно през последните 5 години и затова тематиката е изключително актуална.

В Глава 1 се въвеждат основните определения и уравнения на КНМ. Представени са различните видове клетъчна динамика – линейни,

нелинейни, както и изходните уравнения, които ще бъдат използвани при изследванията в другите глави. Определен е и динамичния обхват на КНМ, който е особено важен за осигуряване на устойчивостта им и за редица техни приложения, като обработка на образи, провеждане на информацията и др.

Глава 2 е посветена на метода на локалната активност (Chua L. O., *Local activity is the origin of complexity*, 2005). В последните 5 години той предизвиква особен интерес сред изследователите, защото позволява да се намери със строги математически формулировки областта на клетъчните параметри, в която КНМ може да прояви сложно динамично поведение. Нещо повече, дефинира се една малка подобласт на областта на локална активност, която се нарича *ръб на хаоса* и в която може да се получи по-голяма информация при различни приложения. Представени са практически тестове за определяне на такава област, които се базират на строги математически условия. Въз основа на това е разработен алгоритъм за определяне на *ръба на хаоса*, който ще се приложи в Глава 3 при изследванията на хистерезисни КНМ с мемристори. Разгледани са два примера – тримерна система на ФицХю Нагумо за провеждане на нервни импулси и система на реакция-дифузия на Орегонатор, при които е приложен разработения алгоритъм за намиране на областта *ръб на хаоса*.

В Глава 3 са въведени нов вид КНМ, а именно хистерезисни КНМ (ХКНМ) с мемристорни синапси. Разгледана е ХКНМ, работеща в режим на релаксационен осцилатор, при който резисторът се заменя с мемристор. За този модел е приложен разработения в Глава 2 алгоритъм и е определена областта в параметричното пространство, в която се наблюдава сложно поведение – *ръб на хаоса*. Представени са две приложения на ХКНМ с мемристорни синапси – за обработка на изображения и за отстраняване на шумови ефекти. Изследван е и още един модел КНМ с динамични синапси на паметта. За този модел е намерена областта *ръб на хаоса* и са направени съответни симулации. Изучена е КНМ на реакция дифузия (РД КНМ) с мемристорни синапси. Като пример на такава КНМ е разгледан модел на ФицХю Нагумо.

Глава 4 изучава моделиране чрез КНМ на задачи, възникващи в нано структурите. По конкретно е разгледан пиезоелектричния материал (ПЕМ)

с нано нехомогенности- като нано дупки, нано включения и др. Граничната задача, която описва изучаваните наноструктури се свежда до интегро-диференциално уравнение. Апроксимираме го със съответната архитектура на КНМ и изследваме неговата динамика. За целта се прилага един друг метод известен като метод на хармоничния баланс. Той позволява да се докаже съществуване на периодични решения на получения модел. Направени са симулации и валидация за конкретен ПЕМ. Построени са решения от типа *бягаща вълна* за него.

Основните резултати в дисертацията са публикувани в Comptes Rendus De L'Academie Bulgare Des Sciences- 2 статии, Pliska Studia Mathematica – 2 статии, IEEE Proc., ECCTD 2017 – 1 статия, Proc. ANNA 2018, VDE – 1 статия, QUALITDE 2017 – 1 статия.

Част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДФНИ- И 02/12, финансиран от Националния Фонд Научни Изследвания на тема „Интегродиференциални уравнения за решаване на свързани задачи за многофункционални материали с нано нееднородности“. Друга част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДФНП -17-26 „Нов математически подход в нано технологиите“ по програмата за млади учени и докторанти на БАН.

Числените резултати са получени с програма MatLab 7 , CNN Tools, MATCNN.

Също така резултатите са докладвани на международните конференции NTADES 2017, NTADES 2018, ECCTD 2017, ANNA 2018, както и на семинара по диференциални уравнения в ИМИ, БАН през 2017 г.

ГЛАВА 1. НЕЛИНЕЙНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ (КНМ)

1.1. Определения на КНМ.

Ще дадем две общи определения на КНМ, както следва (Chua, L.O, Yang, L., Cellular neural networks: Theory, 1988):

Определение 1.1: КНМ е 2-, 3-, или n -мерен масив от главно идентични динамични системи, наречени клетки, които удовлетворяват две свойства:

- повечето взаимодействия са локални в рамките на краен радиус r , и
- всички променливи на състоянието са непрекъснати сигнали.

Определение 1.2: Клетъчната невронна мрежа е многомерна динамична нелинейна верига, съставена от локално свързани, пространствено повтарящи се елементи, наречени клетки. Получената мрежа може да има различна архитектура, включително правоъгълна, шестоъгълна, тороидална, сферична и т.н. $M \times M$ КНМ се определя математически чрез четири спецификации:

- 1) клетъчна динамика;
- 2) синаптичен закон, който представя взаимодействията (пространствено свързване) между съседните клетки;
- 3) гранични условия;
- 4) начални условия.

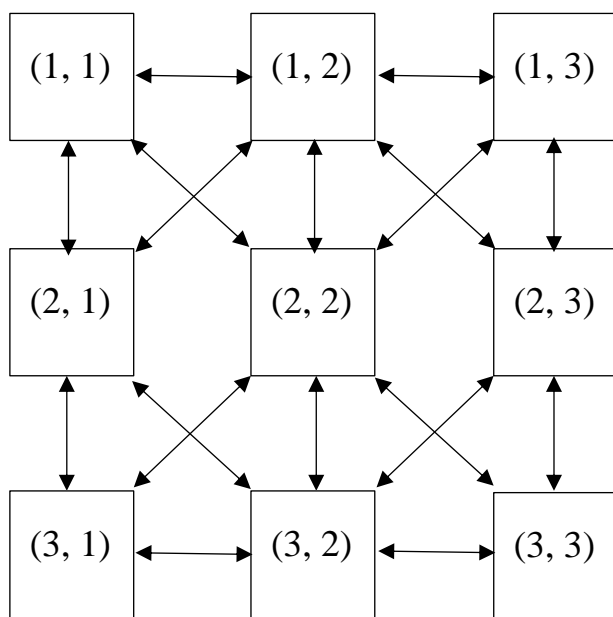
Забележка 1.1: Пространствената променлива винаги е дискретизирана, докато променливата за времето t може да бъде непрекъсната или дискретна.

Забележка 1.2: Взаимовръзката между клетките обикновено може да бъде представена като нелинейна функция на състоянието x , изход y и вход u на всяка клетка $C(i, j)$, в рамките на околността N_r на радиуса r :

$$N_r(i, j) = \{C(k, l) | \max\{|k-i|, |l-j|\} \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq M\}.$$

1.2. Архитектура на КНМ.

Изследването на КНМ се отнася до много широк клас задачи (Proceedings International Workshop CNN and their Appl., 1990-2020). Много изследователи са допринесли значително за изучаването на феномена КНМ, използвайки различни математически инструменти. КНМ е просто аналогов динамичен процесор, съставен от клетки, които съдържат линейни кондензатори, линейни резистори, линейни и нелинейни външни източници. Нека разгледаме двумерна решетка с 3×3 система на съседно взаимодействие, както е показано на Фиг.1.1.



Фигури 1.1. 3×3 КНМ.

Квадратите са отделните елементи - клетки $C(i, j)$, а връзките между клетките показват, че има взаимодействия между съседните клетки. Една от основните характеристики на КНМ е, че отделните клетки са нелинейни динамични системи, но връзката между тях е линейна. Приблизително може да се каже, че тези масиви са нелинейни, но имат линейна пространствена структура, което прави използването на техники за тяхното изследване често срещани в областта на инженерството или физиката.

1.3. Основни видове уравнения на КНМ

В този раздел ще формулираме каноничните уравнения, описващи динамиката на КНМ (Slavova A., Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling, 2003). От определение 1.2 можем да обосновем КНМ математически, както следва.

1.3.1. Уравнения на състоянието

Предполагаме за простота, че елементите на КНМ са разположени на двумерна (2-D) решетка (Фиг.1.1). Тогава динамиката на КНМ, най-общо, може да бъде описана от:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij}(t) = & -x_{ij}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}_{ij,kl} (y_{kl}(t), y_{ij}(t)) \\ & + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}_{ij,kl}(u_{kl}, u_{ij}) + I_{ij} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$y_{ij}(t) = f(x_{ij}), \quad (1.2)$$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M,$$

x_{ij} , y_{ij} , u_{ij} се отнасят за състоянието, изходното и входното напрежение на клетка $C(i, j)$; $C(i, j)$ се отнася до точка на мрежата, свързана с клетка на 2-D решетка, I_{ij} е независим източник. \tilde{A} и \tilde{B} са нелинейни темплети, които определят взаимодействията между всяка клетка и всички съседни клетки по отношение на техните входни, статични и изходни променливи.

Линейните (пространствено-инвариантни) темплети се представят по следния начин:

$$\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A_{ij,kl} y_{kl}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} B_{ij,kl} u_{kl}(t) \quad (1.3)$$

В този случай, когато темплетът е пространно инвариантен, всяка клетка се описва чрез идентични темплети, дефинирани като две реални матрици A и B . Непрекъснатите стойности на сигнала за вход (изход) се представят със стойности в диапазона $[-1,1]$ или $[0,1]$. Например, за КНМ с $r = 1$ (фиг.1.1) темплетите са дефинират чрез следните матрици:

$$A = \begin{pmatrix} A(i, j; i-1, j-1) & A(i, j; i-1, j) & A(i, j; i-1, j+1) \\ A(i, j; i, j-1) & A(i, j; i, j) & A(i, j; i, j+1) \\ A(i, j; i+1, j-1) & A(i, j; i+1, j) & A(i, j; i+1, j+1) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B(i, j; i-1, j-1) & B(i, j; i-1, j) & B(i, j; i-1, j+1) \\ B(i, j; i, j-1) & B(i, j; i, j) & B(i, j; i, j+1) \\ B(i, j; i+1, j-1) & B(i, j; i+1, j) & B(i, j; i+1, j+1) \end{pmatrix}$$

Тази форма ни позволява да пренапишем уравнението на състоянието (в линеен случай) в по-компактна форма посредством двумерния оператор на дефиниран по-долу.

Определение 1.3. За темплет A , който дефинира динамичното правило на клетъчната верига, определяме конволюционен оператор $*$ по следния начин:

$$A * z_{ij} = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(k-i, l-j) z_{kl} \quad (1.4)$$

където $A(m, n)$ означава елемента в m -тата и n -тата колона на темплета, $m = -1, 0, 1$ и $n = -1, 0, 1$, съответно.

С други думи, за линейна КНМ имаме следното уравнение на състоянието:

$$\dot{x}_{ij}(t) = -x_{ij}(t) + A * y_{ij}(t) + B * u_{ij} + I_{ij} \quad (1.5)$$

Симетрията на темплета за обратна връзка A е необходима за доказване на пълната устойчивост на КНМ.

Определение 1.4. (за симетрията) Темплетът е симетричен, ако:

$$A_{ij,kl} = A_{kl,ij}, \quad 1 \leq i, k \leq M, \quad 1 \leq j, l \leq M \quad (1.6)$$

Темплетите за нелинейни КНМ могат да се зададат със следната по-обща форма

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ p_2 & 2 & p_2 \\ 0 & p_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

където $p_1 = c_1 y_{kl} y_{ij}$, $p_2 = c_2 [\exp(y_{kl} - 1)]$, $p_3 = c_3 (u_{kl} - u_{ij})$, за да се осигури устойчивостта на нелинейната КНМ. Освен това \tilde{A} и \tilde{B} се наричат темплет на обратна връзка и контролен темплет съответно.

Според определение 1.2 можем да направим обобщение на горните динамични системи, описващи КНМ. За обща КНМ, чиито клетки се състоят от елементи с времева инвариантна верига, всяка клетка $C(i, j)$ се характеризира с нейната КНМ клетъчна динамика:

$$\dot{x}_{ij} = -g(x_{ij}, u_{ij}, I_{ij}^S) \quad (1.7)$$

където $x_{ij} \in R^m$, u_{ij} обикновено е скаларен. В повечето случаи взаимодействията (пространствено свързване) със съседната клетка $C(i+k, j+l)$ се определят от синаптичния закон на КНМ:

$$I_{ij}^S = A_{ij,kl}x_{i+k,j+l} + \tilde{A}_{ij,kl} * f_{kl}(x_{ij}, x_{i+k,j+l}) + \tilde{B}_{ij,kl} * u_{i+k,j+l}(t) \quad (1.8)$$

Първият член $A_{ij,kl}x_{i+k,j+l}$ на (1.8) е просто линейна обратна връзка на състоянията на съседните възли. Вторият член осигурява произволно нелинейно свързване, а третият отчита влиянието от външните входове на всяка съседна клетка, намираща се в областта N_r .

Следните три типа гранични условия са типични за КНМ:

1). Фиксирано (Дирихле) гранично условие:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv u_0 = E_1 \\ x_{M+1} &\equiv u_{M+1} = E_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тук КНМ е просто свързана в краищата си към някои фиксирани потенциали E_1, E_2 (например $E_1 = E_2 = 0$), u_0 е напрежението на най-лявата възлова точка, u_{M+1} е напрежението на десния най-възел.

2). Гранични условия за нулев поток (Нюман):

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv u_0 = u_1 \\ x_{M+1} &\equiv u_{M+1} = u_M \end{aligned} \quad (1.10)$$

3). Периодични гранични условия:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv u_0 = u_M \\ x_{M+1} &\equiv u_{M+1} = u_1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3.2. Изходни уравнения

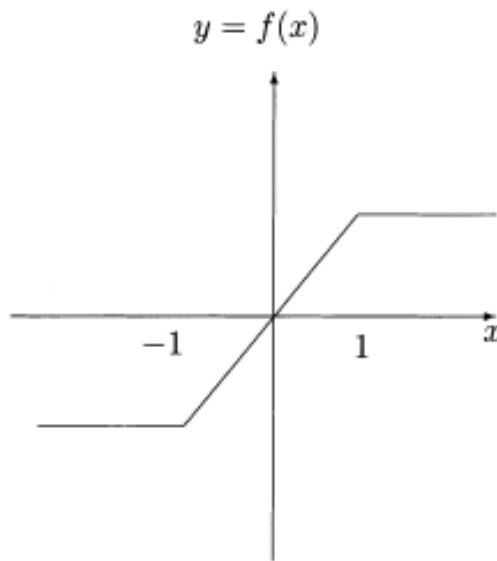
Както видяхме по-горе, състоянието на клетката С (i, j) в момент t се обозначава с $x_{ij}(t)$, докато изходът в момент t е

$$y_{ij}(t) = f(x_{ij}(t))$$

Някои полезни изходни функции f са:

- **Частично линейна функция**

$$f(x_{ij}) = \frac{1}{2} (|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \quad (1.12)$$



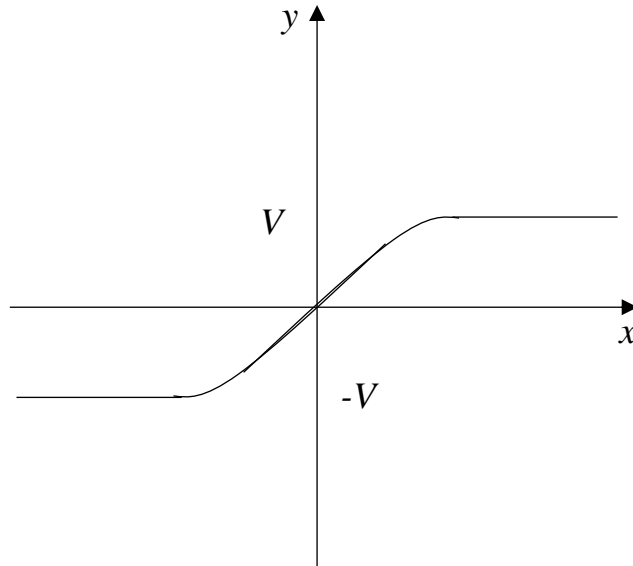
Фиг.1.2. Частично линейна функция.

- **Частично линейна функция с [0,1] изход:**

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 0 & x_{ij} < 0 \\ x_{ij} & 0 < x_{ij} \leq 1 \\ 1 & x_{ij} > 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

- **Нелинейна функция**

$$f(x_{ij}) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2V} x_{ij}\right) \quad (1.14)$$



Фиг.1.3. Нелинейна изходна функция.

По-обща изходна функция е такава със собствена динамика:

$$\dot{y}_{ij} = -y_{ij} + f(x_{ij}) \quad (1.15)$$

Приемаме, че началното състояние е дадено от $x_{ij}(0)$, а неговият обхват и обхватът на входа $u_{ij}(t)$ са ограничени:

$$|u_{ij}(t)| \leq 1, |x_{ij}(0)| \leq 1 \quad (1.16)$$

Ако $u_{ij}(t)$ е константа (което е стандартният случай), се казва, че КНМ има постоянен вход, в противен случай има времеви вариант вход.

1.4. Динамичен обхват на КНМ.

На първо място, ще дадем оценка за динамичния обхват на КНМ, дефиниран по-горе от динамичната система (1.1), (1.12).

Твърдение 1.1 За КНМ, описана от уравнението на състоянието (1.1) с ограничени нелинейни темплети и изход (1.12), всички състояния x_{ij} са ограничени за всяко $t > 0$ и границата x_{max} може да бъде изчислена по следната формула:

$$x_{max} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M} \left[\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} (\max_t |\widetilde{A}| + \max_u |\widetilde{B}|) \right] \quad (1.17)$$

Доказателство: Да разгледаме уравнението на състоянието на (1.1) във вида:

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij}(t) + F_{ijkl}(t) + G_{ijkl}(u) \quad (1.18)$$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M$$

където

$$F_{ijkl}(t) = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}(y_{kl}(t), y_{ij}(t))$$

$$G_{ijkl}(u) = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}(u_{kl}(t), u_{ij}(t))$$

Уравнение (1.18) е обикновено диференциално уравнение от първи ред и неговото решение е:

$$\dot{x}_{ij}(t) = x_{ij}(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [F_{ijkl}(\tau) + G_{ijkl}(u)] d\tau \quad (1.19)$$

Следователно,

$$|x_{ij}(t)| \leq |x_{ij}(0)|e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [|F_{ijkl}(\tau)| + |G_{ijkl}(u)|] d\tau$$

$$\leq |x_{ij}(0)|e^{-t} + [F + G] \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau \leq |x_{ij}(0)| + [F + G]$$

където

$$F \equiv \max_t |F_{ijkl}(t)| \leq \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \max_t |\tilde{A}(y_{kl}, y_{ij})|$$

$$G \equiv \max_u |G_{ijkl}(u)| = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \max_u |\tilde{B}(u_{kl}, u_{ij})|.$$

От условията (1.16) и $|y_{ij}(0)| \leq 1$ следва, че

$$|x_{ij}(t)| \leq 1 + \left[\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} (\max_t |\tilde{A}| + \max_u |\tilde{B}|) \right] \quad (1.21)$$

$$1 \leq i, k \leq M, 1 \leq j, l \leq M$$

А сега нека

$$x_{max} = \max_{(ij)} \left\{ 1 + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} (\max_t |\tilde{A}| + \max_u |\tilde{B}|) \right\} \quad (1.22)$$

Тогава имаме

$$\max_t |x_{ij}| \leq x_{max}$$

за всяко $1 \leq i, k \leq M, 1 \leq j, l \leq M$

Забележка 1.3. Основната разлика между КНМ и невронните мрежи е, че КНМ има динамичен обхват, който може да се изчисли по формулата (1.17).

Като цяло, за невронните мрежи често има тежки ограничения на динамичния диапазон на веригата.

Забележка 1.4 В случая на темплети (1.3) важи следната формула за динамичния обхват:

$$x_{max} = 1 + |I_{ij}| + \max_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M} [\sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} (|A_{ij,kl}| + |B_{ij,kl}|)].$$

1.5. Невронни мрежи на Хопфилд

Оригиналният модел на невронни мрежи на Хопфийлд (Hopfield Neural Networks (HNNs)) (Hopfield J.J. , Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, 1984) използва двустепенни прагови "неврони", които следват стохастичен алгоритъм. Във всеки модел неврон i има две степени, характеризиращи се с продукцията V_i на неврона, имаща стойности V_i^0 или V_i^1 (които често могат да се приемат съответно като 0 и 1). Входът на всеки неврон идва от два източника, външни входове I_i и входове от други неврони. Следователно общият вход към неврон i е

$$i = H_i = \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j + I_i$$

Елементът T_{ij} може да се разглежда като описание на синаптичната сила на свързване от неврон j към неврон i . Изменението на състоянието на система от N неврони в пространство на състоянието описва изчисляването, което се извършва от невроните. Моделът трябва да опише как състоянието се развива във времето, а оригиналният модел го описва в теорията на стохастическото развитие. Той работи като асоциативна памет, когато състоянието на пространствения поток, генерирано от алгоритъма, се характеризира с устойчива фиксирана точка s . Ако тези устойчиви точки описват обикновен поток, в който близките точки в статичното пространство са склонни да останат близки по време на потока, тогава първоначалните състояния, които са близо до определено устойчиво състояние и далеч от всички други, ще клонят към близко устойчиво състояние.

Ако местоположението на дадена специфична точка в пространството на състоянието се смята за информация на особената памет на системата, състояния близо до тази конкретна устойчива точка съдържат частична

информация за тази памет. От начално състояние на частична информация за паметта до окончателно устойчиво състояние с цялата информация за адреса се преминава чрез доставяне в началното състояние на някаква част от паметта. Всяка част от подходящия размер ще направи паметта да е наистина адресируема от съдържанието, а не от местоположението му. Дадена T матрица съдържа много памети едновременно, които се реконструират индивидуално от частична информация в първоначално състояние.

Конвергентният поток към устойчиви състояния е основната характеристика на тази операция. Има едно просто математическо условие, което гарантира, че алгоритъмът на състоянието на пространствения поток клони към устойчиви състояния.

Всяко симетрично T с нулеви диагонални елементи (т.е. $T_{ij} = T_{ji}$, $T_{ii} = 0$) ще доведе до такъв поток. Доказателството за това свойство произтича от изграждането на подходяща енергийна функция, която винаги е намаляваща от всяка промяна на състоянието, произведена от алгоритъма.

Нека разгледаме функцията

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum T_{ij} V_i V_j - \sum_i I_i V_i + \sum_i U_i V_i$$

Промяната ΔE в E се дължи на промяната на състоянието на неврон i ΔV_i и е

$$\Delta E = -\left[\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j + I_i - U_i \right] \Delta V_i$$

Но според алгоритъма, ΔV_i е положителен само когато в скобата имаме положителна стойност, подобен е и отрицателния случай. Така всяка промяна в E по алгоритъма е отрицателна. E е ограничен, така че итерация на алгоритъма трябва да доведе до устойчиво състояние, което не се променя с течение на времето.

Сега ще изградим модел, който се основава на непрекъснати променливи, но запазва всички поведения на оригиналния модел. Нека изходната променлива V_i за неврон има диапазон $V_i^0 \leq V_i \leq V_i^1$ и да бъде непрекъснатата и монотонна нарастваща функция на моментния вход u_i на неврон i . Типичната входно-изходна връзка $g_i(u_i)$ е сигмоидна с асимптоти V_i^0 и V_i^1 . За невроните, изясняващи потенциала за действие, u_i може да бъде

смятан за средния потенциал на един неврон от общия ефект на неговите възбуждащи и инхибиторни входове. V_i може да се разглежда като средна стойност на скоростта на възбуждане на клетката i . В теорията на електрическите схеми, $g_i(u_i)$ представлява входно-изходна характеристика на нелинеен усилвател с незначително време за реакция.

В биологичната система u_i ще закъснее зад моментния изход V_j на другата клетка поради входния капацитет C на клетъчните мембрани, трансмембранното съпротивление R и крайния импеданс T_{ij}^{-1} между изхода V_j и клетъчното тяло на клетка i . Така, че има уравнение за зареждане на съпротивление-капацитет (СК), което определя скоростта на промяна u_i .

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j T_{ij} V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i$$

$$u_i = g_i^{-1}(V_i)$$

$T_{ij} V_j$ представлява входа на електрическата енергия към клетка i поради съществуващия потенциал на клетка j и T_{ij} е ефикасността на синапса. Извежда се линейно сумиране на входовете. T_{ij} трябва да се появят и двата признаци. I_i е всеки друг (фиксиран) входен ток към неврон i .

Нека разгледаме уравнението

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} V_i V_j - \sum_i \frac{1}{R_i} \int_0^{V_i} g_i^{-1}(V) dV + \sum_i I_i V_i$$

Неговата производна по времето за симетрично T е

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_i \frac{dV_i}{dt} \left(\sum_j T_{ij} V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i \right)$$

Като се има предвид дясната страна на СК уравнението за зареждане получаваме

$$\frac{dE}{dT} = - \sum_i C_i \left(\frac{dV_i}{dt} \right) \left(\frac{du_i}{dt} \right) = - \sum_i C_i g_i^{-1}(V_i) \left(\frac{dV_i}{dt} \right)^2$$

Тъй като $g_i^{-1}(V_i)$ е монотонно нарастваща функция и C_i , е положително, всеки член в тази сума е отрицателен. Следователно

$$\frac{dE}{dT} \leq 0, \frac{dE}{dT} = 0 \rightarrow \frac{dV_i}{dt} = 0$$

за всяко i . Заедно с ограниченията на E горното уравнение показва, че еволюирането на системата е движение в статичното пространство, което търси минимални стойности в E и спира до такива точки. E е функция на Ляпунов за системата.

Този детерминиращ модел има същите поточни свойства в своето пространство, което стохастичният модел прави в неговото отделно пространство и е известен като рекурентна невронна мрежа на Хопфийлд.

ГЛАВА 2. МЕТОД НА ЛОКАЛНАТА АКТИВНОСТ И ПРИЛОЖЕНИЯ ЗА КНМ НА РЕАКЦИЯ-ДИФУЗИЯ

2.1. Въведение

Целта на тази глава е да покаже, че всички сложни явления и въпроси, са само прояви на един основен принцип, наречен локална активност, който за първи път е предложен от Чуа (Chua L.O., CNN.A Paradigm for complexity, 1998), с теоретични доказателства. Нашият основен резултат ще бъде да се представи строго математическо доказателство на теоремата за локална активност за следната система от дискретни уравнения на реакция-дифузия:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(j,k,l)}{dt} &= f_1(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) + D_1 \nabla^2 V_1(j,k,l) \\ \frac{dV_2(j,k,l)}{dt} &= f_2(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) + D_2 \nabla^2 V_2(j,k,l) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{dV_m(j,k,l)}{dt} &= f_m(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) + D_m \nabla^2 V_m(j,k,l) \\ \frac{dV_{m+1}(j,k,l)}{dt} &= f_{m+1}(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) \\ \frac{dV_{m+2}(j,k,l)}{dt} &= f_{m+2}(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{dV_n(j,k,l)}{dt} &= f_n(V_1(j,k,l), V_2(j,k,l), \dots, V_n(j,k,l)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

където $V_\sigma(j, k, l)$, $\sigma = 1, 2, \dots, m$ е вектор на "реакция" в точката на мрежата (j, k, l) на пространството R^3 , D_σ , $\sigma = 1, 2, \dots, m$, са положителни дифузионни коефициенти, свързани с променлива $V_\sigma(j, k, l)$, и $\nabla^2 V_\sigma(j, k, l)$ обозначава дискретен оператор на Лаплас в R^3 .

Ще запишем системата (2.1) във векторна форма по следния начин.

Нека означим с $V_a \triangleq [V_1, V_2, \dots, V_m]^T, V_b \triangleq [V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_n]^T$, така преработваме (2.1) в следната компактна векторна форма:

$$\dot{V}_a = f_a(V_a, V_b) + D\nabla^2 V_a, \quad \dot{V}_b = f_b(V_a, V_b), \quad (2.2)$$

където

$f_a(V_a, V_b) \in \mathbb{R}^m$ означава първите "m" компоненти $f_1(V_a, V_b), f_2(V_a, V_b), \dots, f_m(V_a, V_b)$, $f_b(V_a, V_b)$ означава следващите $(n - m)$ компоненти $f_{m+1}(V_a, V_b), f_{m+2}(V_a, V_b), \dots, f_n(V_a, V_b)$,

D означава $m \times m$ диагонална матрица, дефинирана от $D\sigma$, и

$\nabla^2 V_a \in \mathbb{R}^m$ означава $m \times 1$ вектор, дефиниран с "m" дискретен оператор на Лаплас $\nabla^2 V_\sigma, \sigma = 1, 2, \dots, m$.

Забелязваме, че променливите на състоянията V_a и V_b от уравнение (2.2) принадлежат на единствена изолирана клетка с координати $r = (j, k, l)$ (или на точка $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ в непрекъснатия случай). По принцип всяко уравнение на реакция-дифузия свързано с реална физична система има някои настройващи параметри

$$\mu = [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]^T \quad (2.3)$$

Следователно, кинетичните уравнения на реакция-дифузия (2.1) за всяка клетка на позиция $r = (j, k, l)$ може да се представи от:

Клетъчни кинетични уравнения

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(r) &= f_a(V_a(r), V_b(r); \mu) \\ \dot{V}_b(r) &= f_b(V_a(r), V_b(r); \mu) \end{aligned} \quad (2.4)$$

За $N \times N \times N$ тримерна мрежа имаме N^3 идентични клетки, всяка от които е описана от уравнение (2.4).

Тъй като само първите m променливи на състоянията $V_a(r) = [V_1(r), V_2(r), \dots, V_m(r)]^T$ от всяка клетка могат да влияят на съседните клетки, чрез дифузионният член $D\nabla^2 V_a(r)$, само енергията и частта, свързана с първите m променливи на състоянията може да премине в съседна клетка.

Дифузионният член $D\nabla^2 V_a(r)$ може да играе само разсейваща и следователно стабилизираща роля (допускайки че $D_i > 0$) в уравненията на

реакция-дифузия (2.1), и следователно въвеждането на какво да е сложно явление, представено от уравнение (2.1) може да се дължи само на кинетичните клетъчни уравнения (2.4).

Основният резултат от тази глава е да се докаже, че ако една клетка не е локално активна за определен параметър $\mu = \mu_0$, тогава уравненията на реакция-дифузия (2.1) не може да проявяват никаква сложност, независимо от избора на коефициентите на дифузия ($D_i > 0$). Освен това, ясно формулирани математически критерии ще бъдат дадени по-долу за тестване на всяко клетъчно кинетично уравнение за локална активност. Използването на тези критерии, може да определи точният активен параметър $\mu \in \mathbb{R}$ на областта A , където клетъчното кинетично уравнение е локално активно. Тъй като допълнението $P \triangleq \mathbb{R}^p \setminus A$ може само да доведе до получаване на хомогенно решение на (2.1), то се нарича пасивна параметрична област.

Горният резултат е особено полезен за изучаване на нови модели на реакция-дифузия. Може да се прилагат критериите за локална активност и да се изключи пасивната област P . Усложняване може да се получи само за параметри разположени в активната област A . В този случай казваме, че "локалната активност наистина е произход на сложност".

Кинетичното уравнение на локално-активна клетка може да прояви сложна динамика като гранични цикли или хаос, дори ако клетките са отделени една от друга (чрез нулиране на всички коефициенти на дифузия). Нещо повече, съществува подходящо подмножество E на активния параметър, наречен *ръб на хаоса*, в което системата (2.1) проявява сложно и хаотично поведение.

2.2. Математическо определение на локална активност

Тъй като локална активност се дефинира само относно m -те променливи на вектора $V_a = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m]^T$, и тъй като тя не включва дифузните коефициенти D_1, D_2, \dots, D_m в (2.4), дефинираме допълнителен член на взаимодействие:

$$I_a \triangleq D \nabla^2 V_a \tag{2.5}$$

Заместваме уравнение (2.5) в уравнение (2.4) и получаваме клетъчните кинетични уравнения в следния вид:

$$\dot{V}_a(r) = f_a(V_a(r), V_b(r); \mu) + I_a$$

$$\dot{V}_b(r) = f_b(V_a(r), V_b(r); \mu) \quad (2.6)$$

$I_a \in \mathbb{R}^m$ може да се интерпретира като външна сила, приложена върху m -те дифузионни елемента. Забелязваме, че $f_a(\bullet)$ и $f_b(\bullet)$ в уравнение (2.6) зависят от параметъра $\mu \in \mathbb{R}^p$.

2.2.1. Клетъчни равновесни точки

По-горе приехме, че всички клетки са идентични, и следователно системата (2.6) представя динамичното състояние на изолирани клетки, върху които действа външна сила $I_a \in \mathbb{R}^m$.

Равновесните точки на системата (2.6) се получават чрез избирането на нулеви стойности $\dot{V}_a = 0$, $\dot{V}_b = 0$ в (2.6); т.е.

$$f_a(V_a, V_b; \mu) + I_a = 0 \quad (2.7)$$

$$f_b(V_a, V_b; \mu) = 0 \quad (2.8)$$

Решавайки (2.7) и (2.8) за $V_a \in \mathbb{R}^m$ и $V_b \in \mathbb{R}^{n-m}$ за всеки избран параметър $\mu \in \mathbb{R}^p$ установяваме, че може да съществува множество равновесни точки за всяко $I_a \in \mathbb{R}^m$. Нека с V_a и V_b означим координатите на коя да е равновесна точка Q , където Q зависи от входната константа $I_a \in \mathbb{R}^m$ и параметър $\mu \in \mathbb{R}^p$.

2.2.2. Линеаризирани клетъчни уравнения на състоянията

Нека с $V_a(t)$, $V_b(t)$ и $i_a(t)$ означим безкрайно малките променливи в околност на V_a , V_b и I_a ; а именно,

$$\begin{aligned} V_a(t) &\triangleq \bar{V}_a + v_a(t) \\ V_b(t) &\triangleq \bar{V}_b + v_b(t) \\ I_a(t) &\triangleq \bar{I}_a + i_a(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Замествайки $f_a(V_a, V_b; \mu)$ и $f_b(V_a, V_b; \mu)$ в уравнение (2.7) с техните развятия в Тейлорови редове около клетъчната равновесна точка $Q(V_a = \bar{V}_a, V_b = \bar{V}_b)$ с входна константа $I_a = \bar{I}_a$, и премахвайки членовете от по-голям ред получаваме клетъчни линейни уравнения за равновесна клетка в точка Q .

$$\begin{aligned} \frac{dv_a(t)}{dt} &= A_{11}(Q)v_a(t) + A_{12}(Q)v_b(t) + i_a(t) \\ \frac{dv_b(t)}{dt} &= A_{21}(Q)v_a(t) + A_{22}(Q)v_b(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

където

$$\begin{aligned} A_{11}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_a(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_a} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} & A_{12}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_a(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_b} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} \\ A_{21}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_b(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_a} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} & A_{22}(Q) &\triangleq \frac{\partial f_b(V_a, V_b; \mu)}{\partial V_b} \Big|_{V_a=\bar{V}_a, V_b=\bar{V}_b} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Забелязваме, че $A_{11}(Q)$ е матрица $m \times m$, $A_{12}(Q)$ е матрица $m \times (n - m)$, $A_{21}(Q)$ е матрица $(n - m) \times m$, и $A_{22}(Q)$ е матрица $(n - m) \times (n - m)$.

Те са реални матрици, чиито елементи зависят от входната константа $I_a \in \mathbb{R}^m$, параметъра вектор $\mu \in \mathbb{R}^p$, и клетъчната точка на равновесие $Q(I_a, \mu)$.

2.2.3. Локална активност в клетъчната точка на равновесие Q.

Линеаризираните клетъчни уравнения на състоянията (2.10) може да се интерпретират като клетъчната динамика около допирателна равнина в клетъчната точка на равновесие Q, която зависи от $I_a \in \mathbb{R}^m$ и $\mu \in \mathbb{R}^p$. Ако е дадена някоя непрекъсната входна функция на времето $i_a(t)$ за $t \geq 0$, и вземайки нулеви начални условия $V_a(0)=0$, $V_b(0)=0$, нека $V_a(t)$ и $V_b(t)$ да са решение на уравнение (2.10) за $t \geq 0$.

Определение 2.1. Казва се, че клетката е локално активна в клетъчната точка на равновесие Q, ако съществува непрекъсната по времето функция $i_a(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, такава, че при някакво крайно време $0 < T < \infty$, е изпълнено следното условие за локална активност:

$$\int_0^T (V_a(t), i_a(t)) dt < 0 \quad (2.12)$$

където $V_a(t)$ е решение на линеаризираните клетъчни уравнения на състоянията (2.10) относно Q с нулеви начални условия $V_a(0) = 0$ и $V_b(0) = 0$. Означението в уравнение (2.12) представлява скаларното произведение на двата вектора $V_a(t)$ и $i_a(t)$.

Определение 2.2. Локална пасивността. Казва се, че клетката е локално пасивна в клетъчната точка на равновесие Q, ако тя не е локално активна в Q, т.е.

$$\int_0^t (V_a(t), i_a(t)) dt \geq 0 \quad (2.13)$$

за всички непрекъснати входни функции $i_a(t) \in \mathbb{R}^m$, и за всяко, $t \geq 0$, при нулеви начални условия $V_a(0) = 0$ и $V_b(0) = 0$.

Определение 2.3. Локално активни уравнения на реакция-дифузия. Уравненията на реакция-дифузия (2.1) се наричат локално активни, ако свързаната с тях клетка е локално активна в някоя клетъчно равновесна точка Q . В противен случай се наричат локално пасивни.

2.2.4. Матрица на комплексност

Въпреки, че уравнение (2.12) дава точно математическо определение за локална активност в клетъчна равновесна точка Q , на практика е невъзможно да се тества, тъй като определението не съдържа начин за определяне дали функцията $i_a(t)$, удовлетворяваща уравнение (2.12) наистина съществува.

За да се създаде конструктивна процедура за определяне дали $i_a(t)$, удовлетворяваща уравнение (2.12) съществува или не, е необходимо да се въведе математически критерий в комплексното пространство S (чиито елементи са комплексните числа $s = \sigma + i\omega$), чрез трансформация на Лаплас.

$$\begin{aligned}\hat{v}_a(s) &\triangleq \int_0^{\infty} v_a(t)e^{-st} dt \\ \hat{v}_b(s) &\triangleq \int_0^{\infty} v_b(t)e^{-st} dt \\ \hat{i}_a(s) &\triangleq \int_0^{\infty} i_a(t)e^{-st} dt\end{aligned}\tag{2.14}$$

за $V_a(t)$, $V_b(t)$, $i_a(t)$, съответно, където интеграла означава прилагането на трансформация на Лаплас за всяка компонента на съответните вектори $V_a(t)$, $V_b(t)$ и $i_a(t)$, и "шапката" в $\hat{V}_a(s)$, $\hat{V}_b(s)$ и $\hat{i}_a(s)$ означава съответната трансформация на Лаплас.

Чрез прилагане на трансформация на Лаплас към всеки член на уравнения (2.10), получаваме

$$\begin{aligned}s\hat{v}_a(s) &= A_{11}(Q)\hat{v}_a(s) + A_{12}(Q)\hat{v}_b(s) + \hat{i}_a(s) \\ s\hat{v}_b(s) &= A_{21}(Q)\hat{v}_a(s) + A_{22}(Q)\hat{v}_b(s)\end{aligned}\tag{2.15}$$

Решавайки второто уравнение на (2.15) за $\hat{v}_b(s)$, получаваме

$$\hat{v}_b(s) = (s\mathbf{1} - A_{22}(Q))^{-1}A_{21}(Q)\hat{v}_a(s)\tag{2.16}$$

Където със символ **1** означаваме единичната матрица. Замествайки уравнение (2.16) за $v_b(s)$ в първото уравнение на (2.15), получаваме

$$Y_Q(s)\hat{v}_a(s) = \hat{i}_a(s) \quad (2.17)$$

Оттук получаваме и така наречената

Матрица на комплексност

$$Y_Q(s) \triangleq [(s1 - A_{11}(Q)) - A_{12}(Q)(s1 - A_{22}(Q))^{-1}A_{21}(Q)] \quad (2.18)$$

в клетъчната равновесна точка Q. В най-елементарния случай при $m=1$ и $n=2$, когато има само една променлива $V_a(s)$ (един дифузионен коефициент) и само една променлива на състоянията $V_b(s)$, уравнение (2.18) се редуцира до следната скаларна рационална функция:

$$Y_Q(s) = \frac{s^2 - (A_{11}(Q) + A_{22}(Q))s + A_{11}(Q)A_{22}(Q) - A_{12}(Q)A_{21}(Q)}{s - A_{22}(Q)} \quad (2.19)$$

В общия случай на реакция-дифузия ($m=1$, $n>2$), и числителя и знаменателя на $Y_Q(s)$ са полиноми на s , и следователно $Y_Q(s)$ е винаги рационална функция на комплексната променлива $s = \sigma + i\omega$. В този случай е удобно да се разложи полинома в числителя на множители, включващи нули и полинома в знаменателя на множители, включващи полюси, както следва:

$$Y_Q(s) = \frac{a_\alpha s^\alpha + a_{\alpha-1} s^{\alpha-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_\beta s^\beta + b_{\beta-1} s^{\beta-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_\alpha)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_\beta)} \quad (2.20)$$

където $s=z_1, z_2, \dots, z_\alpha$ са “ α ” нулите на $Y_Q(s)$, и $s=p_1, p_2, \dots, p_\beta$ са “ β ” полюсите на $Y_Q(s)$.

В общия случай и нулите и полюсите на $Y_Q(s)$ са комплексни числа.

За $m > 1$, $Y_Q(s)$ е матрица $m \times m$, чиито елементи са рационални функции на $s = \sigma + i\omega$, а именно,

$$Y_Q(s) = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) & \dots & Y_{1m}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) & \dots & Y_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{m1}(s) & Y_{m1}(s) & \dots & Y_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

където всеки елемент $Y_{ij}(s)$ има същата форма като в уравнение (2.20). Може да се допусне, че всички полюси на $Y_{ij}(s)$ са идентични.

Наистина, ако някой полюс $s=p_k$ липсва в някои $Y_{ij}(s)$, ние можем да го вмъкнем като умножим числителя и знаменателя с $(s - p_k)$. Така няма да има неяснота по отношение на изказа „нека p_k е полюс на $Y_Q(s)$ ”.

В случая, когато на всяка променлива на състоянията $V_j(r)$ е съпоставен положителен дифузен коефициент $D_j>0$, $j = 1, 2, \dots, n$, имаме $m = n$, и така $A_{12}(Q) = 0$, $A_{21}(Q) = 0$ и $A_{22}(Q) = 0$. В този случай, матрицата на комплексност в уравнение (2.18) се редуцира до

Матрица на пълна комплексност

$$Y_Q(s) = s1 - A_{11}(Q) \quad (2.22)$$

където $A_{11}(Q)$ е $n \times n$ Якобианът на

$$f(V) = f(V_a, V_b) \triangleq \begin{bmatrix} f_a(V_a, V_b) \\ f_b(V_a, V_b) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.3. Теорема за локална активност

За да докажем, че клетка е локално активна, Определение 2.1 изисква да се намери функция $i_a(t)$, която да удовлетворява уравнение (2.12). Това е много трудна задача. Целта ни тук е да разработим практически необходими и достатъчни условия, които гарантират, че уравнение (2.13) е удовлетворено, и по този начин, че клетката е пасивна (Chua L. O., Local activity is the origin of complexity, 2005). Противоречието с поне едно от тези условия тогава ще осигури необходимо и достатъчно условие за клетката да се счита за локално активна.

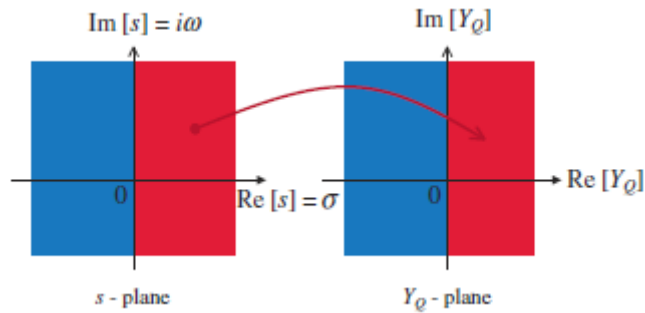
За по-голяма яснота ще разработим основната концепция и теорема за скаларния случай, където имаме само една променлива ($m=1$) така, че матрицата на комплексност $Y_Q(s)$ е скаларна, наричана оттук нататък функция на комплексността $Y_Q(s)$. (Обобщението до матричен случай ($m>1$) се извършва по същата процедура, аналогично на показаното).

2.3.1. Положително-реална функция на комплексност

Определение 2.4. Казва се, че функцията на комплексност $Y_Q(s)$ е положително-реална, ако:

1. $Y_Q(s)$ е реално число, когато s е реално число.
2. $\text{Re}[Y_Q(s)] \geq 0$ за всяко s с $\text{Re}[s] \geq 0$, където $Y_Q(s)$ е несингулярно.

Тъй като $Y_Q(s)$ е рационална функция, условие 1), винаги е удовлетворено. В този случай, $Y_Q(s)$ е положително-реална функция на затворената дясна половина на равнината и се преобразува в затворена дясна половина Y_Q -равнина, както е показано на фиг. 2.1.



Фиг. 2.1. Представяне на положително-реална функция на комплексност $Y_Q(s)$ в комплексната равнина.

Твърдение 2.1. $Y_Q(s)$ е положително-реална функция, ако и само, ако $Z_Q(s) \triangleq Y_Q^{-1}(s)$ е положително-реална функция.

Доказателство:

Нека

$$Y_Q(s) = a(s)/b(s).$$

$$\begin{aligned} & \text{Re}[Y_Q(s)] \\ &= \text{Re}[Y_Q(\sigma + i\omega)] = \text{Re}\left\{ \frac{\text{Re}[a(\sigma, \omega)] + i \text{Im}[a(\sigma, \omega)]}{\text{Re}[b(\sigma, \omega)] + i \text{Im}[b(\sigma, \omega)]} \right\} \\ &= \frac{\text{Re}[a(\sigma, \omega)] \text{Re}[b(\sigma, \omega)] + \text{Im}[a(\sigma, \omega)] \text{Im}[b(\sigma, \omega)]}{(\text{Re}[b(\sigma, \omega)])^2 + (\text{Im}[b(\sigma, \omega)])^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}[Z_Q(s)] \\
& \triangleq \operatorname{Re}[Y_Q^{-1}(s)] = \operatorname{Re}\left[\frac{b(s)}{a(s)}\right] \\
& = \operatorname{Re}\left\{\frac{\operatorname{Re}[b(\sigma, \omega)] + i \operatorname{Im}[b(\sigma, \omega)]}{\operatorname{Re}[a(\sigma, \omega)] + i \operatorname{Im}[a(\sigma, \omega)]}\right\} \\
& = \frac{\operatorname{Re}[a(\sigma, \omega)] \operatorname{Re}[b(\sigma, \omega)] + \operatorname{Im}[a(\sigma, \omega)] \operatorname{Im}[b(\sigma, \omega)]}{(\operatorname{Re}[a(\sigma, \omega)])^2 + (\operatorname{Im}[a(\sigma, \omega)])^2}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Тъй като числителите на уравнения (2.24) и (2.25) са идентични и знаменателите им са положителни, следва, че $\operatorname{Re}[Y_Q(s)] \geq 0$ тогава и само тогава, когато $\operatorname{Re}[Z_Q(s)] \triangleq \operatorname{Re}[Y_Q^{-1}(s)] \geq 0$. Така $Y_Q(s)$ е положително-реална функция тогава и само тогава, когато $Z_Q(s) \triangleq Y_Q^{-1}(s)$ е положително-реална функция.

Теорема 2.1. Теорема за локална пасивност (скаларен случай). Несвързана клетка с една променлива на състоянието ($m = 1$) е локално пасивна в клетъчно равновесна точка Q ($V_1 = \bar{V}_1$) тогава и само тогава, когато функцията на комплексност $Y_Q(s)$ е положително-реална функция.

Доказателство:

(а) Доказателство за необходимост

Нека функцията на комплексност $Y_Q(s)$ в уравнение (2.17) да е локално пасивна в Q ($V_1 = \bar{V}_1$). Тогава от твърдение 2.1 следва, че $Z_Q(s) \triangleq Y_Q^{-1}(s)$ е локално пасивна в Q ($V_1 = \bar{V}_1$). Преобразувайки уравнение (2.17) по отношение на $Z_Q(s)$, получаваме

$$\hat{v}_a(s) = Z_Q(s) \hat{i}_a(s) \tag{2.26}$$

Можем да интерпретираме уравнение (2.26) като трансформацията на Лаплас на интеграла

$$v_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \tau) i_a(\tau) d\tau \tag{2.27}$$

където $z(t)$ е функцията на Грийн, съответстваща на входна делта функция $i_a(t) = \delta(t)$. Тъй като $z(t) = 0$ за $t < 0$ следва, че

$$Z_Q(s) = Z_Q(\sigma + iw) = \int_0^{\infty} (z(t) e^{-\sigma t}) e^{iwt} dt \tag{2.28}$$

е непрекъснато сходящ за $\sigma \geq \varepsilon > 0$, и по този начин $Z_Q(s)$ е аналитична функция на s в отворената дясна половина на s -равнината ($\sigma > 0$). Прилагайки интеграл на Поасон над полуравнина, можем да пресметнем $Z_Q(\sigma_0 + i\omega_0)$ по отношение на $Z_Q(s)$ над имагинерната ос $s = i\omega$ за кое да е $\sigma_0 > 0$; т.е.,

$$Z_Q(\sigma_0 + i\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_Q(i\omega) \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] d\omega, \quad \sigma_0 > 0 \quad (2.29)$$

по същият начин,

$$Z_Q^*(\sigma_0 + i\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_Q(i\omega) \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] d\omega, \quad \sigma_0 > 0 \quad (2.30)$$

събирайки уравнения (2.29) и (2.30) и разделяйки на 2, получаваме

$$R_e[Z_Q(\sigma_0 + i\omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_Q(i\omega) \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] d\omega, \quad \sigma_0 > 0 \quad (2.31)$$

Тъй като $Z_Q(s)$ е локално пасивна в Q , по определение,

$$W \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (v_a(t), i_a(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v_a(t) i_a(t) dt \geq 0 \quad (2.32)$$

за коя да е непрекъснатата $i_a(t)$. В частност, нека изберем

$$i_a(t) = e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

където $\sigma_0 > 0$.

Големината на квадрат на преобразуването на Фурие $\hat{i}_a(i\omega)$ на $i_a(t)$ е:

$$|\hat{i}_a(i\omega)|^2 = \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] \quad (2.34)$$

Прилагайки теоремата на Парсевал към уравнение (2.32) и използвайки уравнение (2.26) с $s = i\omega$, получаваме

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Z_Q(i\omega) \hat{i}_a(i\omega)] [\hat{i}_a^*(i\omega)] d\omega \geq 0 \quad (2.35)$$

Замествайки с уравнение (2.34) в уравнение (2.35), получаваме

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_Q(i\omega) \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right] d\omega \geq 0 \quad (2.36)$$

Уравнения (2.31) и (2.36) ни дават $R_e[Z_Q(s)] \geq 0$ за $\sigma > 0$. Това важи също и за $\sigma \geq 0$, така можем да запишем

$$R_e[Z_Q(s)] \geq 0, \quad \text{за } R_e[s] \geq 0 \quad (2.37)$$

От уравнение (2.37) и твърдение 2.1 следва, че $Y_Q(s)$ е положителна реална функция

(б) Доказателство за достатъчност

Нека $Y_Q(s)$ е положителна реална функция. Разделяйки W в уравнение (2.35) на реалната и имагинерната му части, получаваме

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[Z_Q(i\omega)\hat{i}_a(i\omega)\hat{i}_a^*(i\omega)]d\omega + i \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}[Z_Q(i\omega)\hat{i}_a(i\omega)\hat{i}_a^*(i\omega)]d\omega \right) \quad (2.38)$$

Тъй като подинтегралната функция, съпоставена на имагинерната част в уравнение (2.38) е нечетна функция на w , $\operatorname{Im}[W] = 0$ уравнение (2.38) се редуцира до

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[Z_Q(i\omega)]|\hat{i}_a(i\omega)|^2d\omega \quad (2.39)$$

Тъй като $\operatorname{Re}[Z_Q(i\omega)] \geq 0$ за всяко w , според хипотезата следва, че $W \geq 0$ и така и двете $Z_Q(s)$ и $Y_Q(s)$ са локално пасивни в Q ($V_1 = \bar{V}_1$).

2.3.2. Практически тест за локална пасивност

От фиг.2.1 следва, че клетката е локално пасивна тогава и само тогава, когато затворената дясна половина от s -равнината се преобразува в затворената дясна половина на Y_Q -равнината. Следващата теорема предоставя практически тест за това необходимо и достатъчно условие за локална пасивност.

Теорема 2.2. Тест за локална пасивност.

Клетка с една променлива на състоянието е локално пасивна в $Q(V_1=V_1)$ тогава и само тогава, когато всичките четири условия по-долу се удовлетворяват:

- (i) $Y_Q(s)$ няма полюси в $\operatorname{Re}[s] > 0$.
- (ii) $Y_Q(s)$ няма многократни полюси върху имагинерната ос.
- (iii) Ако $Y_Q(s)$ има полюс $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос, тогава $K_Q(i\omega_p) \triangleq \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s)$ трябва да е положително реално число.
- (iv) $\operatorname{Re}[Y_Q(i\omega)] \geq 0$ за всяко $\omega \in (-\infty, \infty)$ където $s = i\omega$ не е полюс.

Доказателство. Ще докажем, първо, че условията (i) - (iii) са необходими за локална пасивност.

- (i) Нека $s = s_1$ да е полюс от ред n на $Y_Q(s)$ в отворената дясна половина на равнината $\operatorname{Re}[s] > 0$. Разложението на Лоран на $Y_Q(s)$ в $s = s_1$ се представя както следва:

$$Y_Q(s) = \frac{a_{-n}}{(s-s_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(s-s_1)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(s-s_1)} + a_0 + a_1(s-s_1) + \dots \quad (2.40)$$

За s в достатъчно малка околност на $s = s_1$ в отворената дясна половина на равнината, уравнение (2.40) може да бъде приближено с

$$Y_Q(s) \approx \frac{a_{-n}}{(s-s_1)^n} = \frac{Ae^{i\phi}}{(\rho e^{i\theta})^n} = \frac{A}{\rho^n} e^{i(\phi-n\theta)} \quad (2.41)$$

където $a_{-n} \triangleq Ae^{i\phi}$ и $s - s_1 \triangleq \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Да вземем реалната част на уравнение (2.41) и да я оценим в малка околност с радиус ρ с център в $s = s_1$, така получаваме

$$\operatorname{Re}Y_Q(s)|_{s=s_1+\rho e^{i\theta}} = \frac{A}{\rho^n} \cos(n\theta - \phi) < 0 \quad (2.42)$$

за $n \geq 1$ и някое $\theta \in [0, 2\pi]$. Затова $Y_Q(s)$ не може да бъде положителна реална функция, ако има полюс в отворената дясна половина на s -равнината $\operatorname{Re}[s] > 0$.

(ii) Нека $s = iw_p$ да е многократен полюс от ред $n \geq 2$ на $Y_Q(s)$ върху имагинерната ос. В този случай уравнение (2.42) е вярно за $n \geq 2$, където в малка околност има точки от малка полуокръжност с радиус ρ (център в $s = iw_0$) ограничена до затворената дясна половина на равнината, т.е.

$$s - iw_p = \rho e^{i\theta}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

По тази причина $Y_Q(s)$ не може да бъде положителна реална функция, ако има многократен полюс от ред $n \geq 2$ на $Y_Q(s)$ върху имагинерната ос.

(iii) Нека $s = iw_p$ да е полюс на $Y_Q(s)$ върху имагинерната ос. В този случай уравнение (2.41) придобива формата

$$\operatorname{Re}Y_Q(s)|_{s=iw_p+\rho e^{i\theta}} = \frac{A}{\rho} \cos(\theta - \phi) < 0 \quad (2.43)$$

За някои $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\phi = 0$. Въпреки това, ако $\phi = 0$, то

$$\operatorname{Re}Y_Q(s)|_{s=iw_p+\rho e^{i\theta}} = \frac{A}{\rho} \cos \theta > 0, \text{ за всяко } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.44)$$

Забелязваме, че

$$K_Q(iw_p) = \lim_{s \rightarrow iw_p} (s - iw_p)Y_Q(s) = a_{-1} \triangleq Ae^{i\phi} \quad (2.45)$$

е само остатък при полюса $s = iw_p$ от разширението на Лоран (уравнение (2.40)) на $Y_Q(s)$.

Така, за да бъде $Y_Q(s)$ положителна реална функция е необходимо $\varphi = 0$, или остатъка $K_Q(i\omega_p) = A$ трябва да е положително реално число

(iv) Да допуснем, че

$$\operatorname{Re}[Y_Q(s)] \geq 0, \text{ за всяко } w \in (-\infty, \infty) \quad (2.46)$$

Тъй като условия (i) и (ii) гарантират, че $Y_Q(s)$ е аналитична функция в затворената дясна половина на s -равнината с изключение на полюсите $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос, от свойството за минимална реална част на комплексна променлива следва, че минималната стойност на реалната част на $Y_Q(s)$ ще възникне върху имагинерната ос $s = i\omega$, за всяко $\omega \in (-\infty, \infty)$, с изключение на полюсите $s = i\omega_p$. От уравнения (2.44) и (2.46) следва, че

$\operatorname{Re}[Y_Q(s)] \geq 0$ за всяко s с $\operatorname{Re}[s] \geq 0$, където $Y_Q(s)$ е несингулярно.

2.3.3. Практически тест за локална активност

Тъй като всички 4 свойства трябва да бъдат удовлетворени в Теорема 2.2 за да бъде $Y_Q(s)$ локално пасивна, то нарушаването на кое да е от тези свойства ни дава следната теорема, която търсехме:

Теорема 2.3. Тест за локална активност на функцията на комплексност $Y_Q(s)$

Клетка с една променлива е локално активна в $Q(V_1 = V_1)$ тогава и само тогава, когато кое да е от следните условия е изпълнено:

- (i) $Y_Q(s)$ има полюс в $\operatorname{Re}[s] > 0$.
- (ii) $Y_Q(s)$ има многократен полюс върху имагинерната ос.
- (iii) $Y_Q(s)$ има полюс $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос и $K_Q(i\omega_p) \triangleq \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s)$ е или отрицателно реално число или комплексно число.
- (iv) $\operatorname{Re}[Y_Q(i\omega)] < 0$ за някое $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Като се следва същата процедура, аналогично, може да се докаже следният обобщен тест за локална активност на матрицата на комплексност $Y_Q(s)$ за кое да е $m \geq 2$.

Теорема 2.4. Тест за локална активност на матрицата на комплексност $Y_Q(s)$

Клетка с $m \times m$ матрица на комплексност $Y_Q(s)$ е локално активна в $Q(V_a=V_a)$ тогава и само тогава, когато кое да е от следните условия е изпълнено:

- (i) $Y_Q(s)$ има полюс в $\text{Re}[s] > 0$.
- (ii) $Y_Q(s)$ има многократен полюс върху имагинерната ос.
- (iii) $Y_Q(s)$ има полюс $s = i\omega_p$ върху имагинерната ос и

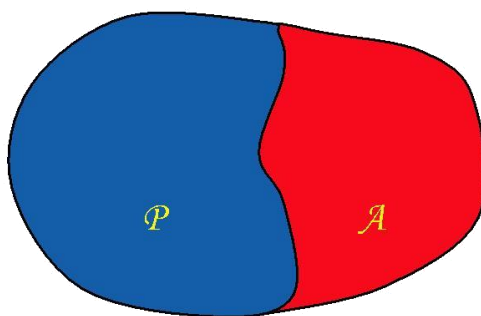
$K_Q(i\omega_p) = \lim_{s \rightarrow i\omega_p} (s - i\omega_p) Y_Q(s)$ е или неположително-определена матрица или комплексна не-Ермитова матрица.

(iv) $Y_Q^H(i\omega) = Y_Q^\dagger(i\omega) + Y_Q(i\omega)$ е не-положително определена матрица за някои $\omega \in (-\infty, \infty)$.

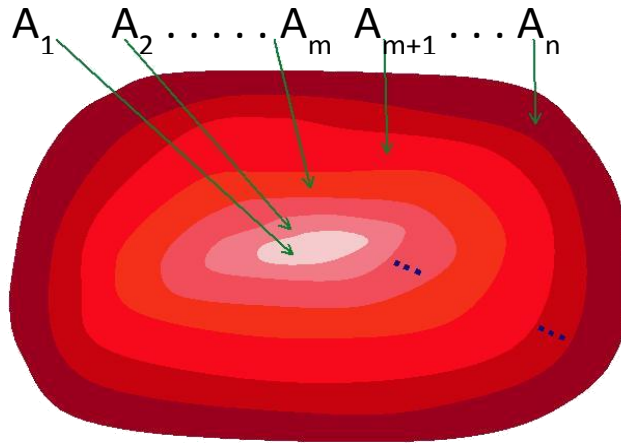
Горен индекс “ \dagger ” означава транспониране или комплексна спрегнатост. /Н-Ермитова матрица/

Матрицата на комплексност $Y_Q(s)$ като цяло зависи не само от клетъчната равновесна точка $Q(V_a=V_a)$, но и от клетъчните параметри $\mu \in \mathbb{R}^p$. За всяка (Q, μ) , можем да проверим дали някое от 4-те условия е удовлетворено. Тази явна процедура може да се получи аналитично.

По този начин можем да разделим параметричното пространство на локално пасивна област P и локално-активна област A за всички възможни клетъчни равновесни точки, съответстващи на $V_a \in \mathbb{R}^m$, където $P \cup A = \mathbb{R}^m$, както се вижда от Фиг.2.2



Фиг. 2.2. Разделяне на клетъчното параметрично пространство на две взаимно-изключващи се области P и A .



Фиг. 2.3. „Вложени“ подмножества от локално активни области.

Никое уравнение на реакция-дифузия не може да породи комплексност, ако неговите клетъчни параметри лежат в локално пасивна област P . Колкото е по-голяма областта на локална активност A , толкова по-големи са възможностите за комплексност. Тъй като броя на променливите, които не са променливи на състоянията може да бъде увеличен като вземем повече дифузионни коефициенти равни на нула, следва, че $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \dots \subset A_n$ както е изобразено (Фиг. 2.3). С A_m означаваме областта на локална активност на клетка с променливи на състоянията, където m е равно на броя на положителни дифузионни коефициенти.

Областта на локална активност A_m е дефинирана като обединение от всички локално активни области в клетъчно равновесните точки, съответстващи на променливи $V_a \in R^m$. Можем да определим съответната област I_a от входния вектор $I_a \in R^m$ като положим $\dot{V}_a = 0$ и $\dot{V}_b = 0$ в уравнение (2.7) и получаваме

$$I_a = -f_a(V_a, V_b; \mu) \quad (2.48)$$

$$0 = f_a(V_a, V_b; \mu) \quad (2.49)$$

където $V_a \in R^m$. Вижда се, че уравнение (2.49) дефинира явно зависимостта

$$V_b = h_b(V_a; \mu) \quad (2.50)$$

където $h_b(*)$ е приета като еднозначна функция

$$I_a \triangleq \{I_a \in R^m : I_a = -f_a(V_a, h_b(V_a; \mu); \mu), V_a \in R^m\} \quad (2.51)$$

(2.51) е множеството от всички входни вектори, които трябва да бъдат приложени, за да се включат всички равновесни точки $V_a \in R^m$. Вижда се, че $I_a = R^m$ ако функцията

$$f_a(V_a, h_b(V_a; \mu); \mu): R^m \rightarrow R^m \quad (2.52)$$

в уравнение (2.51) е сюрективна. В противен случай I_a е подмножество на R^m

Анализът по-горе е от интерес само от теоретична гледна точка, тъй като областта на локална активност A_m може да се определи директно от оценяването на Якобиана на функцията

$$I_a = -f_a(V_a, h_b(V_a; \mu); \mu) \quad (2.53)$$

За всяко $V_a \in R^m$, и всяко V_b дефинирано от уравнение (2.50).

Намирането на A_m за $m > 2$ може да е задача, отнемаща прекалено много време. За щастие при повечето добре известни уравнения на реакция-дифузия ограничаването на A_m до случая $I_a = 0$ не възпрепятства получаването на най-важната информация отнасяща се за комплексност.

2.4. Примери за определяне на режим на ръб на хаоса.

Известният невронен модел на Ходжкин-Хъксли е първият математически модел на предаване на нервни импулси и полага основата на невро-физиология (Hodgkin A.L., Huxley A.F., A quantitative description of membrane current and its application to conduct ion and excitation in nerve, 1952). Уравнението на ФицХю Нагумо, което е опростяване на модела на Ходжкин-Хъксли, описва зараждането и разпространяването на нервния импулс (Slavova, A., Zecca, P., Modeling natural phenomena via Cellular Nonlinear Networks, 2017). Системите на ФицХю Нагумо са от съществено значение за разбирането на качествена природа на разпространението на нервния импулс. Нека разгледаме невронна система на ФицХю Нагумо, базирана на крайната скорост на разпространение при предаване на сигнала между невроните:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -u_1(u_1 - 1)(u_1 - a) - u_2 + cf(u_3) \\
\dot{u}_2 &= b(u_1 - \gamma u_2) \\
\dot{u}_3 &= -u_3(u_3 - 1)(u_3 - a) - u_4 + cf(u_1) \\
\dot{u}_4 &= b(u_3 - \gamma u_4)
\end{aligned} \tag{2.54},$$

където a, b, γ са положителни константи, $u_{1,2}$ представляват променливи на предаването и $u_{3,4}$ са променливи на получаването; c измерва съединителната сила, $f \in C^3, f(0) = 0, f'(0) = 1$. За нашето изследване вземаме $f(x) = \tanh(x)$. Система (2.54) е симетрична.

Въз основа на всичко изложено по-горе в тази глава сме разработили конструктивен алгоритъм за определяне на РХ (*рѣб на хаоса*) в система на ФХН (ФицХю Нагумо), а именно:

1) Преобразуване на свързаната ФХН система (2.54) в съответна дискретно пространствена версия, която ще наричаме свързан ФицХю Нагумо КНМ модел:

$$\begin{aligned}
\frac{du_j^1}{dt} &= -u_j^1(u_j^1 - 1)(u_j^1 - a) - u_j^2 + cf(u_j^3) \\
\frac{du_j^2}{dt} &= b(u_j^1 - \gamma u_j^2) \\
\frac{du_j^3}{dt} &= -u_j^3(u_j^3 - 1)(u_j^3 - a) - u_j^4 + cf(u_j^1) \\
\frac{du_j^4}{dt} &= b(u_j^3 - \gamma u_j^4)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

2) Намиране на равновесните точки на (2.55). Според теорията на динамичните системи равновесните точки \hat{u}_j^i са реалните корени на дясната част на (2.55) и са функции на мрежовите параметри: a, b, c, γ . С други думи имаме $\hat{u}_j^i = \hat{u}_j^i(a, b, c, \gamma), i = 1, 2, 3, 4$. Ще разглеждаме само равновесната точка $E_0 = (0, 0, 0, 0)$.

3) Пресмятане на Якубиана относно равновесната точка E_0 . В частния случай Якубиана в тази равновесна точка е:

$$J = \begin{bmatrix} -a & -1 & c & 0 \\ b & -b\gamma & 0 & 0 \\ c & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & b & -b\gamma \end{bmatrix}$$

4) Пресмятане на следата $Tr(E_0) = \sum_{q=1}^N \lambda_q$ и $\Delta(E_0)$ - детерминантата в равновесната точка $E_0 = (0,0,0,0)$, като за нашия модел следата е $Tr(0,0,0,0) = -2(a+b\gamma)$.

5) Необходимо е да намерим променливите на състоянията u_j , както следва: u_j е свързана с волтажа във възел j на двумерната мрежа от линейни резистори G . Значимостта на модела на електрическата верига не се заключава само във факта, че имаме удобно физично приложение, а и във факта, че могат да се използват добре известни резултати от класическата теория на електрическите вериги за обосновка на локалната активност на клетките. В този смисъл, ако има поне една равновесна точка, за която модела действа като източник на „малка сигнална“ сила, т.е. ако клетката е в състояние да внесе средно малка сигнална мрежова сила в пасивни съпротивителни решетки, то се казва, че клетката е локално активна.

Определение 2.4. Устойчива и Локално Активна Област (SLAR) в равновесната точка E_0 за свързан ФицХю Нагумо КНМ модел (2.55) имаме при $Tr < 0$ и $\Delta > 0$.

В нашия случай това условие е удовлетворено, поради което в равновесната точка E_0 имаме устойчива локално активна област.

б) Ръб на хаос (PX).

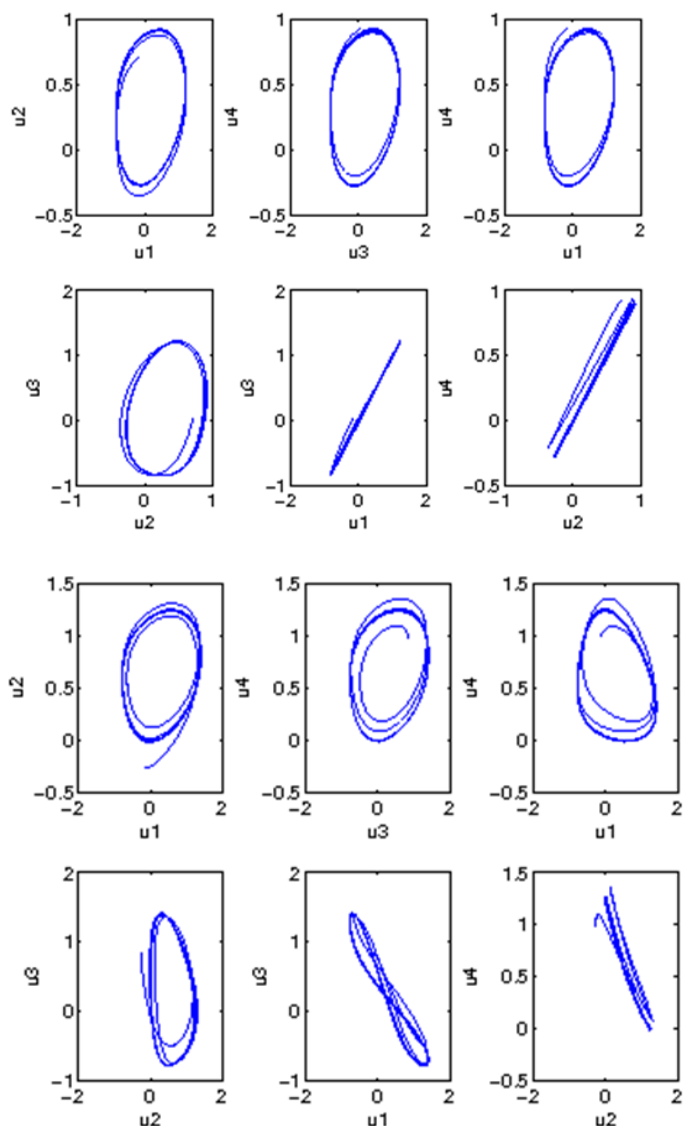
Трябва да намерим областта ръб на хаос (PX) в клетъчното параметрично пространство като използваме следното определение:

Определение 2.5. Казваме, че КНМ модел на свързаната система на ФицХю Нагумо работи в режим на *ръб на хаоса*, ако съществува поне една равновесна точка E_0 , която принадлежи на SLAR.

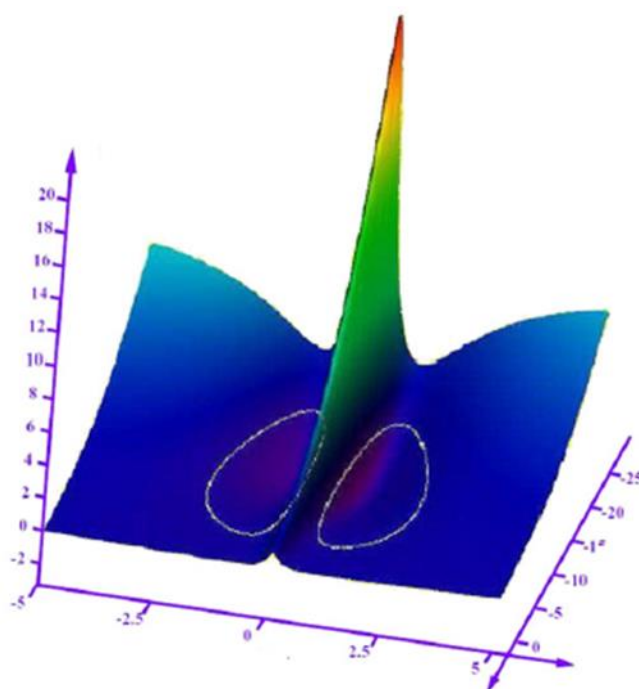
В сила е следната теорема:

Теорема 2.5. КНМ модел на свързаната система на ФицХю Нагумо (2.54) работи в режим на *ръб на хаоса* при положителни a, b, γ . При тези стойности на параметрите има поне една равновесна точка, която принадлежи на SLAR.

Симулации на примера:



Фиг. 2.4. Областта *ръб на хаоса* за модела на ФицХю Нагумо.



Фиг. 2.5. Област на локална активност – белите контури.

2.4.1. Ръб на хаоса за модел на реакция-дифузия

Теорията за локалната активност дава окончателен отговор на основния въпрос: какви са стойностите на параметрите на клетка, за които взаимосвързаната система може да проявява сложност? Отговорът е - необходимото условие за неконсервативна система да проявява сложност е клетката да е локално активна. Теорията, която ще бъде представена по-долу, предлага конструктивен аналитичен метод за разкриване на локална активност. По-специално, за КНМ на реакция-дифузия може да се определи областта на клетъчните параметри, за да могат клетките да бъдат локално активни и по този начин потенциално да могат да проявяват сложност. Тази точно определена област на параметър се нарича *ръба на хаоса*.

Прилагаме следния конструктивен алгоритъм за изучаване на динамиката на системата на реакция-дифузия на Орегонатор (Slavova, A., Vobeva, G. Edge of chaos in reaction-diffusion CNN, 2018):

1. Представете модела на реакция-дифузия на Орегонатора в неговата дискретна версия, като изберете темплата на Лаплас по следния тип

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогава моделът на реакция-дифузия на КНМ (РД-КНМ) приема формата:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = D_1 A_2 * u_{ij} (1 - u_{ij}) - a v_{ij} \frac{u_{ij} - b}{b + u_{ij}} = G_1(u_{ij}, v_{ij}) \quad (2.56)$$

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = D_2 A_2 * v_{ij} + u_{ij} - v_{ij} = G_2(u_{ij}, v_{ij})$$

2. Намерете точките на равновесие на уравнение (2.56), които удовлетворяват системата:

$$G_1(u_{ij}, v_{ij}) = 0 \quad (2.57)$$

$$G_2(u_{ij}, v_{ij}) = 0$$

Като цяло тази система може да има четири реални корена като функции на параметрите на клетката. Ще разглеждаме по-нататък равновесната точка $E_0 = (0,0)$.

3. Изчислете клетъчните коефициенти $a_{11}(E_0)$, $a_{12}(E_0)$, $a_{21}(E_0)$, $a_{22}(E_0)$, на Якобияна на (2.57) във всяка точка на равновесие.
4. Изчислете следата $\text{Tr}(E_0)$ и детерминантата $\Delta(E_0)$ на Якобияна в точка на равновесие E_0 .

Забележка 2.2. Много е важно да има схема на физическа електрическа верига. Ако клетката действа като източник на малък сигнал за поне една точка на равновесие, тогава можем да кажем, че е локално активна. В този случай клетката може да инжектира средна мощност с малък сигнал в пасивните резистивни мрежи.

Ще определим устойчивия и локално активен регион за модела РД-КНМ.

Определение 2.6. Казваме, че клетката е едновременно устойчива и локално активна в равновесната точка E_k за КНМ модел на Орегонатор (2.56), ако

$$a_{22} > 0 \text{ или } 4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2 \text{ и}$$

$$\text{Tr}(E_k) < 0 \text{ и } \Delta(E_k) > 0.$$

Този регион в параметърното пространство се нарича област на устойчивост и локална активност SLAR (E_k).

Определяме така наречения *ръб на хаоса* за нашия модел РД-КНМ (2.56). *Ръбът на хаоса* (PX) е регион в параметричното пространство на динамична система, в който е възможно възникване на сложни явления и обработка на информация.

Досега дефиницията на този феномен е известна само чрез емпирични примери. По-долу даваме по-точно математическо определение за PX.

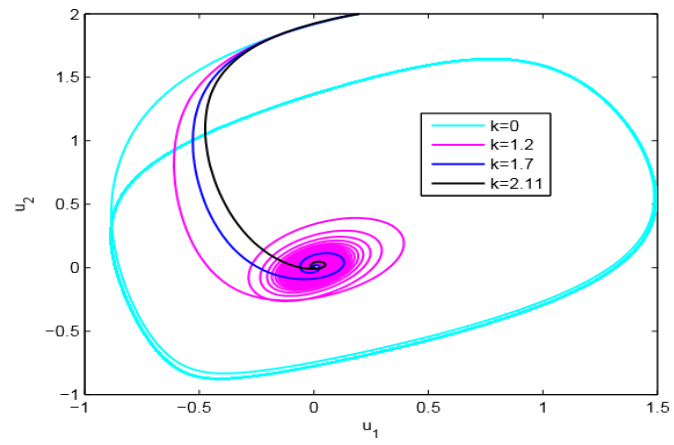
Определение 2.7. Моделът РД-КНМ (2.56) работи в режим на хаоса, ако и само ако съществува поне една равновесна точка, която е едновременно локално активна и устойчива.

Следвайки горния алгоритъм, ние доказахме основната теорема за РД-КНМ (2.56).

Теорема 2.6. Моделът РД-КНМ (2.56) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако са изпълнени следните условия: $0 < a < 1, \forall b$. Това означава, че има поне една равновесна точка, която е едновременно локално активна и устойчива.

Доказателство. Съгласно (2.57) ще вземем предвид равновесната точка $E_0 = (0,0)$. Четирите клетъчни коефициента в тази равновесна точка са съответно: $a_{11}(E_0) = 1, a_{12}(E_0) = a, a_{21}(E_0) = 1, a_{22}(E_0) = -1$. След това, следвайки Определение 2.6 имаме, установяваме, че условието $4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2$ е изпълнено в равновесната точка $E_0 = (0,0)$. Следата $\text{Tr}(E_0) = -1 < 0$ и детерминантата $\Delta(E_0) = -1 - a > 0$ за $a < 1$. Следователно, равновесната точка $E_0 = (0,0)$ е устойчива и локално активна. Тогава според Определение 2.7 открихме областта на параметрите, в която е определен ръбът на хаоса.

На фигура 2.6 ръбът на хаоса за РД-КНМ модел (2.56) е симулиран за различни стойности на параметрите.



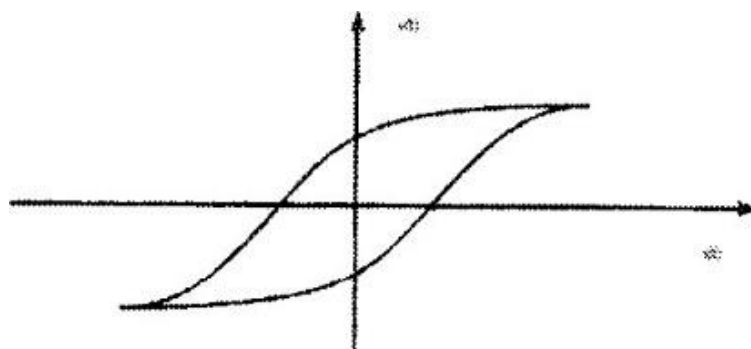
Фиг. 2.6. Ръб на хаоса за РД-КНМ модел (2.56).

ГЛАВА 3. ХИСТЕРЕЗИСНИ КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ

3.1. Хистерезисен модел на КНМ с мемписторни синапси

В тази Глава ще разгледаме с хистерезисни клетъчно невронни мрежи (ХКНМ) с мемристорни синапси. Първо, определяме хистерезисния феномен в мемристорна система. Това става като представим модел на ХКНМ, работещ в режим на релаксационен осцилатор, при който резисторът се заменя с мемристор. Режимът на хаоса се определя за модела на ХКНМ на базата теорията на локалната активност.

Няколко физически явления проявяват хистерезис. Математическият модел за хистерезис може да бъде представен чрез система от диференциални уравнения, която е съчетана с един или няколко хистерезисни оператора. За пълнота можем да добавим начални и гранични условия. Известно е, че хистерезисът е резултат от множество стационарни състояния. Можем да получим интересни математически задачи от теорията за нелинейните трептения, ако съчетаем системата от обикновени диференциални уравнения с хистерезисни нелинейности, независими от скоростта. Могат да бъдат представени два типа отношения на хистерезис - относителен хистерезис и активен хистерезис (виж фиг. 3.1).



Фиг. 3.1. Активен хистерезис

Математическите модели за тези два типа хистерезис могат да бъдат много различни, въпреки че поведението им на базата на памет може да бъде сходно. И двата типа се представят с непрекъснатата монотонна функция, но при активния хистерезис тя може да бъде разширена до непрекъснати входове чрез приближения и ограничен процес. Като се има предвид, че относителният

хистерезис по своята същност е прекъснат, то той действа като прекъсване между функционалните пространства. Това се дължи на факта, че функцията за въвеждане просто достига праг и след това се връща назад от прага за произволно малко изменение на входа.

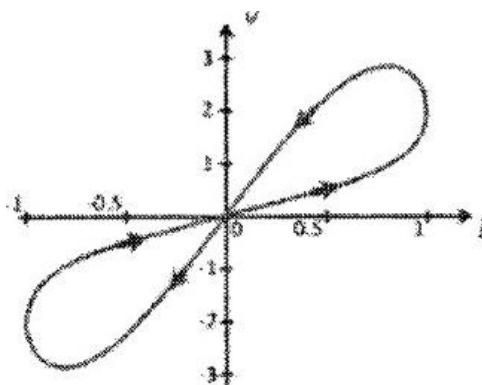
От друга страна, ефектът на хистерезис може да се открие и в мемристорните системи. Ще разгледаме следната мемристорна система (Chua, L.O., Kang, S.M., Memristive devices and systems, 1976):

$$y(t) = g(x, u, t)u(t),$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{3.1}$$

където променливата $u(t)$ е входният сигнал, променливата $y(t)$ е изходният сигнал, и g, f са непрекъснати функции.

Ако входът $u(t)$ е ток $i(t)$, изходът $v(t)$ е напрежението $v(t)$, тогава цикълът на хистерезис, даден на фигура 3.2, представлява електрическото съпротивление. Вижда се, че когато променим наклона на кривите на хистерезис, се появява превключване между различни състояния на съпротивление. Известно е, че при високи честоти мемристорната теория предсказва хистерезисния ефект, което означава, че получаваме права линия, характерна за линеен резистор.



Фиг.3.2. Контур на хистерезис в мемристори.

В КНМ с хистерезис се изследват нелинейностите. Динамиката на този модел се изследва в различни видове региони на нелинейност. В областта на хистерезиса се получава периодично поведение на хистерезис КНМ. Известно е, че типичната КНМ не се колебае или има хаотично поведение, но е възможно да възникнат бифуркации и сложна динамика. Ще бъде интересно да се разгледа специален тип базирана на паметта връзка между входния

сигнал и изходния сигнал в тази верига поради различните приложения на КНМ.

Разглежданата ХКНМ се състои от клетки от I ред, в които имаме хистерезисни превключватели. Има два режима на работа на хистерезисна КНМ - 1). би-стабилен мултивибратор, 2). режим на реаксационен осцилатор. По този начин хистерезисната КНМ може да има много приложения. Когато КНМ работи в режим на релаксационен осцилатор, тогава могат да се генерират различни шаблони и нелинейни вълни. Асоциативните (статичните) и динамичните функции на паметта също могат да бъдат извлечени от хистерезисна КНМ.

Нека разгледаме ХКНМ с мемристорни синапси, чиято динамика се описва от следните уравнения на състоянието:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) + \sum_{k,l \in N_{ij}} (a_{k-i,l-j} f(u_{kl})) \quad (3.2)$$

$$1 \leq i, j \leq N,$$

където u_{ij} обозначава състоянието на клетката, изходът $y_{ij} = f(u_{ij})$ е функция на динамичен хистерезис, дефиниран от:

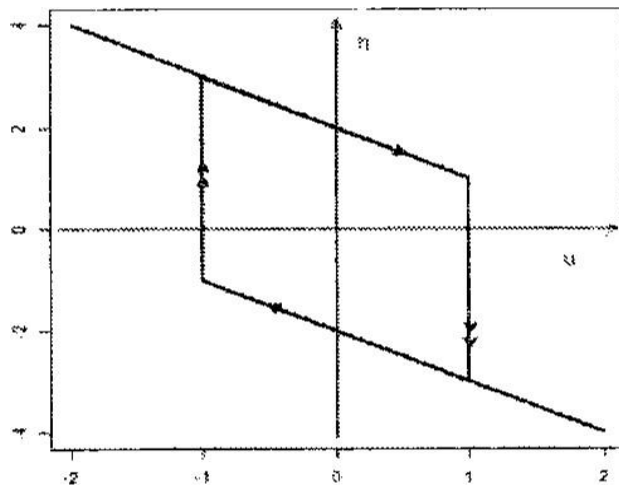
$$f(u(t)) \begin{cases} 1, \text{ for } u(t) > -l, f(u(t_-)) = 1 \\ -1, \text{ for } u(t) = -l \\ -1, \text{ for } u(t) < l, f(u(t_-)) = -1 \\ 1, \text{ for } u(t) = l, \end{cases} \quad (3.3)$$

$t_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t - \varepsilon), \varepsilon > 0, m(\cdot)$ се дефинира като $m(u_{ij}) = \frac{u_{ij}}{M(t)}$ в който $M(t)$ е мемристорна функция.

Ще въведем мемристор в модела ХКНМ, за да получим по-добра разделителна способност в статични и динамични изображения. Заменяме оригиналния линеен резистор в нашия ХКНМ модел с мемристор, който може да показва характеристика на нелинейно напрежение с локално отрицателно диференциално съпротивление. По този начин, ХКНМ с мемристорни синапси (М-ХКНМ) е универсален и компактен поради програмируемите схеми на синапсите. Освен това спестява традиционните сложни схеми за реализация на изходната функция. Ще разгледаме нашия М-ХКНМ модел, работещ в режим на релаксационен осцилатор, а именно:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) - 2h(u_{ij}) + bf(u_{ij}), 1 \leq i, j \leq N \quad (3.4)$$

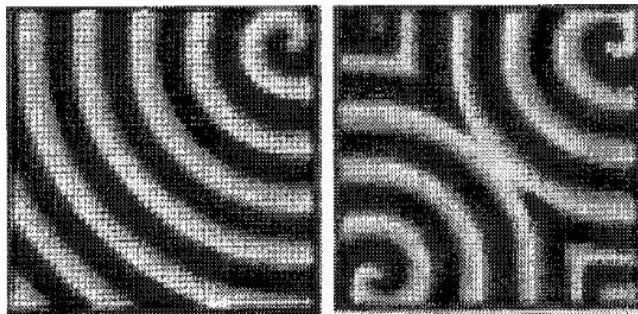
По-долу е графиката на релаксиращия осцилатор, който се разглежда.



Фиг.3.3. Релаксиращ осцилатор, определен от (3.4).

Моделът М-ХКНМ (3.4) генерира шаблони, близки до бифуркационната точка $b = 3$. Компютърни симулации на (3.4), когато използваме Лапласов темплет

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, показва генерирането на спирални вълни за $b = 3$ (виж фиг.3.4):



Фиг.3.4. Спирални вълни в М-ХКНМ модел (3.4).

3.1.2. Определяне на режима на *ръб на хаоса* в М-ХКНМ

Ще изучим динамиката на М-ХКНМ (3.4) с помощта на теорията за локалната активност. Известно е, че клетките на ХКНМ могат да проявяват сложност в областта на клетъчните параметри, в която клетките са локално активни. Така нареченият *ръб на хаоса* е дефиниран в литературата като

област в параметричното пространство, където се появява сложно поведение. Можем да намалим времето за изчисляване, което се изисква от алгоритмите за търсене на параметри, като ограничим пространството на параметрите на клетката въз основа на локалната активност.

Прилагаме следния конструктивен алгоритъм за определяне на ръба на хаос в М-ХКНМ модел (3.4):

1). Проектираме модела М-ХКНМ (3.4) в неговата дискретно-пространствена версия, като избираме темплата на Лаплас $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

като темплет за обратна връзка. След това в режим на релаксиращ осцилатор, динамиката на изолирана клетка, когато няма контролни и прагови параметри, може да се запише като:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = -m(u_{ij}) - 2h(u_{kl}) + bf(u_{kl}) = F(u_{kl}) \quad (3.5)$$

2) Можем да намерим точките на равновесие E_k на (3.5), които удовлетворяват уравнението $F(u_{kl}) = 0$. Като цяло тази система може да има четири реални корена като функции на параметрите на клетката.

3) Изчисляваме четирите коефициента $a_{11}(E_k)$, $a_{12}(E_k)$, $a_{21}(E_k)$, $a_{22}(E_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ на Якобиана във всяка точка на равновесие.

4) Тогава можем да изчислим следата $Tr(E_k)$ и детерминанта $\Delta(E_k)$ на Якобиана за всяка равновесна точка E_k .

Определение 3.1. Ще казваме, че клетката е едновременно устойчива и локално активна в региона $SLAR(E_k)$ на точката на равновесие E_k за М-ХКНМ (3.4), ако

$$a_{22} > 0 \text{ или } 4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2 \text{ и } Tr(E_k) < 0 \text{ и } \Delta(E_k) > 0$$

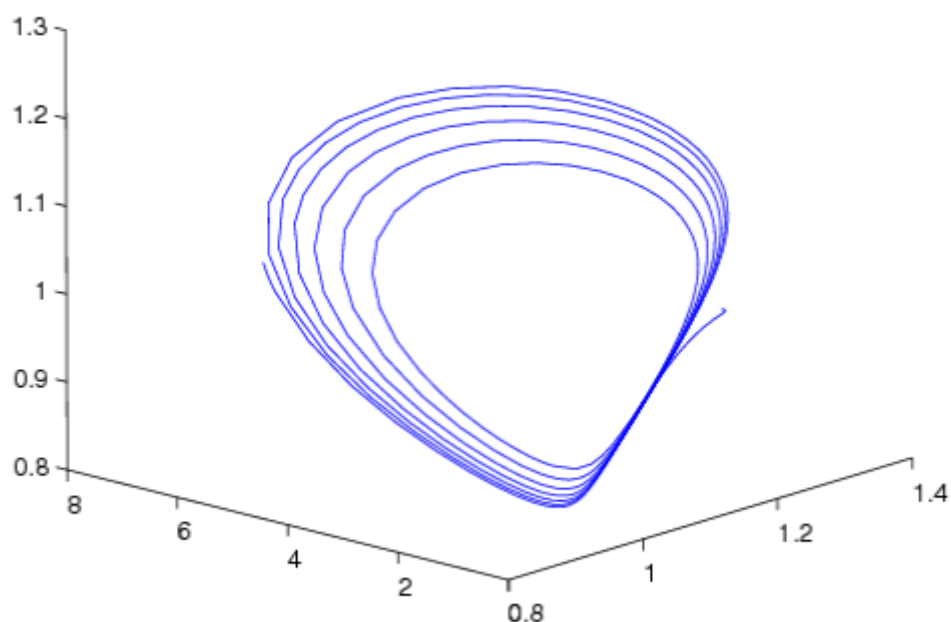
5) Определяме така наречения *ръб на хаоса* за нашия модел М-ХКНМ (3.4). Вече споменахме, че ръбът на хаоса (РХ) е регион в параметричното пространство на динамична система, в който е възможно възникване на сложни явления и обработка на информация.

Определение 3.2. Моделът М-ХКНМ (3.4) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако има поне една точка на равновесие, която е едновременно локално активна и устойчива.

Следвайки горния алгоритъм, ние доказахме основната теорема в този раздел:

Теорема 3.1. Моделът М-ХКНМ (3.4) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако и само ако е изпълнено следното условие: $-1 < b < 3$. Това означава, че имаме поне една точка на равновесие E_k , $k = 1, 2, 3, 4$, в която моделът е едновременно локално активен и устойчив.

Получаваме следната област на *ръб на хаоса* за нашия модел М-ХКНМ (3.4) чрез компютърна симулация:



Фиг.3.5. *Ръб на хаоса* за М-ХКНМ модел (3.4).

3.1.3. Приложения на модела на М-ХКНМ

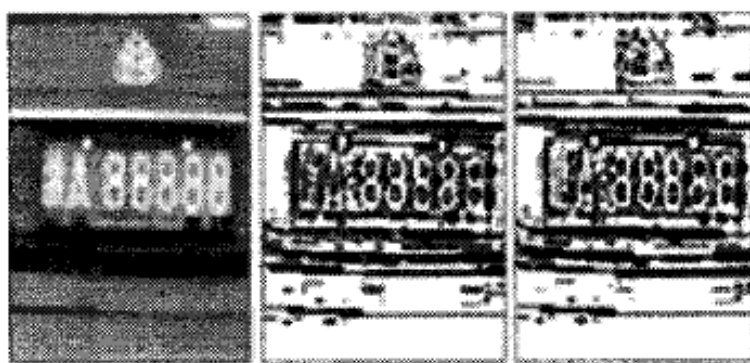
Ще представим някои важни приложения на М-ХКНМ модел (3.4) в обработката на изображения, като извличане на ръбове и отстраняване на шум (Chua, L.O, Yang, L., CNN: Applications, 1988). Всички цифрови резултати ще се анализират на софтуер MATLAB в случай на двете разглеждани

приложения. Прилагаме алгоритъм на Ойлер с размер на стъпка във времето $\Delta t = 0.01$ към всички компютърни симулации. Тогава функцията за динамичен хистерезис $h(x)$ се получава както следва:

$$h(u(t_n)) = \begin{cases} 1, & \text{за } u(t_n) > -1, & h(u(t_{n-1})) = 1 \\ -1, & \text{за } u(t_n) = -1, & h(u(t_{n-1})) = 1 \\ -1, & \text{за } u(t_n) < -1, & h(u(t_{n-1})) = -1 \\ 1, & \text{за } u(t_n) = 1, & h(u(t_{n-1})) = -1 \end{cases}$$

където $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$

Първото приложение, което ще представим, е за извличане на ръбове на изображение (виж Фиг.3.6):

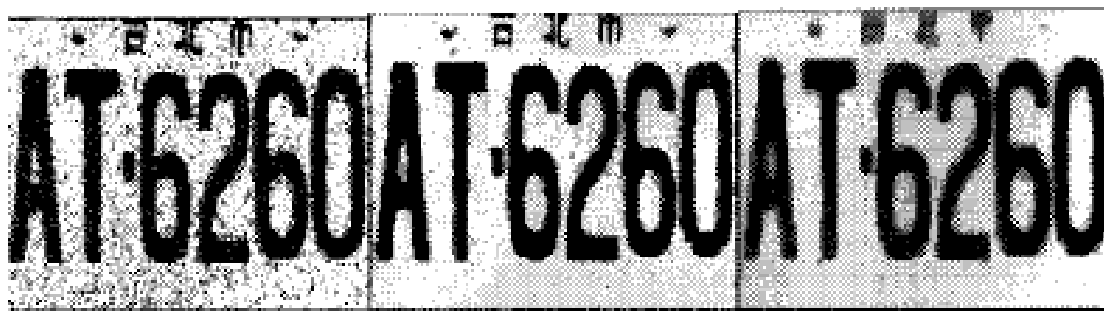


а) оригинален; б) М-ХКНМ; в) КНМ

Фиг.3.6. Изход за извличане на ръб на изображението - а) Оригиналното изображение,
б) М-ХКНМ и в) стандартна КНМ.

При обработката на образи е важно да се извлекат ръбовете на изображението, защото те могат да съдържат по-голямата част от информацията за формата на изображението. На фигура 3.6 са показани три случая - оригиналното изображение, резултатите, получени чрез прилагане на М-ХКНМ и със стандартна КНМ. Експерименталните резултати потвърждават, че резултатите на М-ХКНМ модел (3.4) са много сходни с резултатите от обработката на стандартната КНМ.

Второто приложение, което представяме в тази Глава, е в премахването на шума (виж фиг. 3.7):



а) шум; б) М-НКНМ; в) КНМ

Фиг. 3.7. Резултати за отстраняване на шума

Обикновено при заснемане на изображение на реалния свят с камера, то е замърсено от някакъв шум. В този случай е много важно да се направи премахване на този шум. Симулациите на фиг. 3.7 показват, че моделът на М-ХКНМ (3.4) има добри показатели при отстраняване на шума, които са подобни на стандартните КНМ.

Забележка 3.1. Резултатите от обработката образите не се променят при различен избор на теглата на мемристора. Това се дължи на влиянието на двоичното квантоване на изходните сигнали. Въпреки това, за да получим устойчиво решение, се нуждаем от повече итерации, когато се появят някои вариации в темплетите. Това може да се отрази върху скоростта на изпълнение на М-ХКНМ без промяна на качеството на крайните резултати.

3.2. Локална активност в КНМ с динамични синапси на паметта.

Ще разгледаме хистерезисна КНМ, съставена от клетки от първи ред с превключватели на хистерезис. Нека разгледаме динамиката на хистерезисна КНМ с динамични синапси на паметта, която е описана от следните уравнения:

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i - 2h(u_i) = d(m_i u_0 - u_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

където $h(u_i)$ е динамична хистерезисна функция:

$$h(u(t)) = \begin{cases} 1, \text{ за } u(t) > -1, h(u(t_-)) = 1 \\ -1, \text{ за } u(t) = -1, \\ -1, \text{ за } u(t) < 1, h(u(t_-)) = -1 \\ 1, \text{ за } u(t) = 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

$t_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, d е достатъчно голяма константа, m_i се определя от

$$m_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^N s_{ij} w_j\right) \quad (3.8)$$

$w_j = \operatorname{sgn}(h(u_j)h(u_0))$. Като се имат предвид M двоични модели $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^M$, всеки модел σ съдържа N бита информация σ_i^m , тогава коефициентите на свързване s_{ij} се определят, както следва:

$$s_{ij} = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=1}^M \sigma_i^m \sigma_j^m \right)$$

u_0 се получава от главния релаксиращ осцилатор

$$\frac{du_0}{dt} = -u_0 - 2h(u_0) \quad (3.9)$$

Асоциативната памет се преобразува в запаметен темплет, ако е даден вход. Въпреки това действителната асоциация на хората не винаги е статична, а динамична. Понякога се преминава от определена памет в друга памет, една след друга. Освен това понякога се появява нов спомен, който е от значение за известните спомени. Генерирането на такива спомени може да се тълкува като творческа дейност на мозъка. Динамиката, която описва функцията на динамичните спомени се получава чрез използване на релаксационни осцилатори.

Нека разгледаме динамичните паметни, описани от (3.6-3.9). За периода, удовлетворяващ $w_j = \operatorname{sgn}(h(u_0(t))h(u_j(t))) = \sigma_j^1$, получаваме следното отношение.

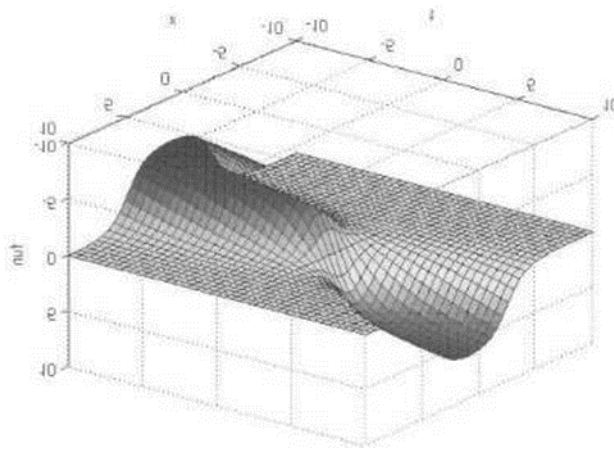
$$m_i = \sum_{j=1}^N s_{ij} w_j = \sum_{j=1}^N s_{ij} \sigma_j^1 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \sigma_i^m \sigma_j^m \right) \sigma_j^1 = \sigma_i^1 + \frac{1}{N} \sum_{m \neq 1}^M \sigma_i^m \sum_{j=1}^M \sigma_j^m \sigma_j^1 \quad (3.10)$$

Ако приемем, че $M \ll N$ (т.е. броят на съхранените модели е много по-малък от общия брой клетки), тогава имаме

$$m_i \approx \sigma_i^1 \quad (3.11)$$

$$d(m_i u_0 - u_i) \approx d(\sigma_i^1 u_0 - u_i)$$

Получаваме седната числена симулация на нашия хистерезисен модел на динамични паметни (виж фиг.3.8).



Фиг. 3.8. Хистерезис в КНМ с динамични памети

3.2.1. Режим на ръб на хаоса.

Моделът на КНМ с динамични синапси на паметта, който ще изследваме, следва от (3.6), (3.10) и (3.11):

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i - 2h(u_i) = d(\sigma_i^1 u_0 - u_i), \quad \frac{du_0}{dt} = -u_0 - 2h(u_0) \quad (3.12)$$

В този параграф прилагаме разработения по-горе конструктивен алгоритъм за определяне на областта ръб на хаоса:

1. Намераме точките на равновесие E_j , $j = 1, 2$ от хистерезисния модел КНМ (3.12).
2. Изчисляваме клетъчните коефициенти на Якобияна за всяка точка на равновесието E_j , $j = 1, 2$.
3. Изчисляваме следата $\text{Tr}(E_j)$ и детерминанта $\Delta(E_j)$ на Якобияна за всяка точка на равновесие.
4. Определете устойчивия и локално активен регион $\text{SLAR}(E_j)$ за равновесните точки.
5. Определяме *ръба на хаоса*.

В сила е следната теорема:

Теорема 3.2. КНМ модел с динамични синапси на паметта (3.12) работи в режим на *ръб на хаоса*, ако

$$d(2\sigma_i^1 - 1) < 1 \text{ и } d(2\sigma_i^1 + 1) > -2$$

За тези стойности на параметрите съществува поне една равновесна точка, която принадлежи на $\text{SLAR}(E_j)$.

Доказателство.

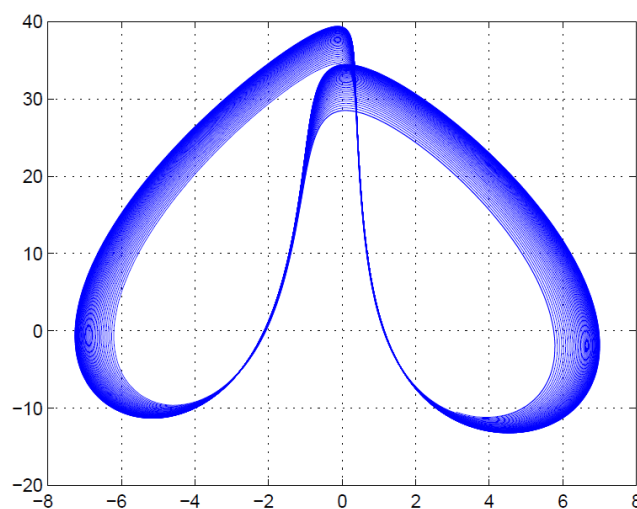
Първо дефинираме точките на равновесие на модел КНМ (3.12), а именно:

$$E_1 = \left(\frac{-2 - 2d\sigma_i^1}{1 + d}, -2 \right), E_2 = \left((-2 - 2d\sigma_i^1)(1 + d), 2 \right)$$

Определяме 4-те клетъчни коефициенти на Якобиян за (3.12). Базирайки се на определението за устойчив и локално активен регион $SLAR(E_j)$, намираме неравенствата за множеството от параметри, за които имаме поне една устойчива и локално активна точка на равновесие:

$$d(2\sigma_i^1 - 1) < 1 \text{ и } d(2\sigma_i^1 + 1) > -2$$

Числените симулации показват следния ръб на областта на хаоса:



Фиг. 3.10. Ръб на хаоса за модел КНМ (3.12)
в случай на 4 клетки.

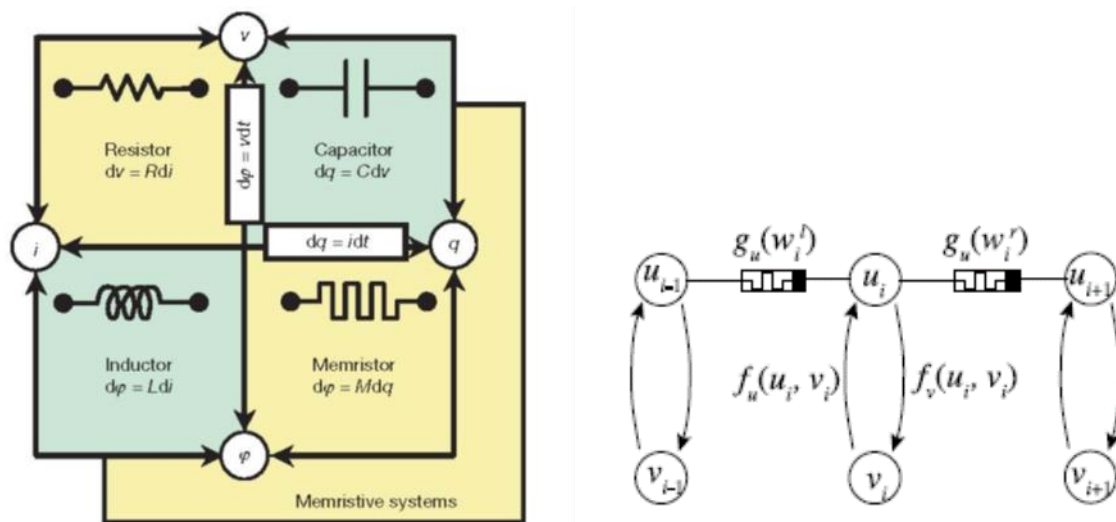
Забележка 3.2. Хистерезисните закони, формулирани по отношение на операторите на хистерезис, водят по естествен начин до частични диференциални уравнения, съчетани с хистерезисни оператори, където първите представляват законите на баланса за маса, импулс и вътрешна енергия. Предложените числени симулации за следния набор от параметри: $d(2\sigma_i^1) < 1, d(2\sigma_i^1 + 1) > -1$ показват, че динамичните синапси могат да породят сложно поведение в изследваните системи.

3.3. Модел на КНМ на реакция-дифузия с мемристорни синапси

Мемристорите, въведени от Чуа, показват връзка между потока ϕ и заряда q (Chua L. O. , Memristor, Hodgkin-Huxley and Edge of Chaos, 2013). Еквивалентни физически примери могат да бъдат представени като енергонезависим резистор, чието съпротивление непрекъснато се контролира от количеството на заряда на потока (тока). Общият модел на мемристорите се изразява по отношение на мощността $M(q)$. Динамиката на мемристора описва със следната система:

$$i = g_u(w)v, \quad \frac{dw}{dt} = i, \quad (3.13)$$

където v представлява напрежението в мемристора; i е токът на мемристора; w е номиналното вътрешно състояние на мемристора, съответстващо на зарядния поток на мемристора, и $q_u(w)$ е монотонно не намаляваща функция с увеличаване на w .



Фиг. 3.9. Схема на мемристорната система.

Добре известното уравнение на реакция дифузия (РД) е

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(u) + D \nabla^2 u$$

Където $u \in \mathbf{R}^n$, $g \in \mathbf{R}^n$, D е матрица с дифузионни коефициенти и ∇^2 е операторът на Лаплас в \mathbf{R}^2 .

Ще заменим резисторите в модела на РД-КНМ с мемристори.

Ще дискретизираме оператора на Лаплас ∇^2 по следния начин:

$$\nabla^2 u(x) = \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i}{\Delta x^2}$$

където Δx е дискретната стъпка в пространството.

В този параграф ще изучаваме динамиката на модела РД КНМ с мемристори в дифузионния термин.

Обикновено ще разгледаме системата на РД, описана от:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial t} &= g_u \nabla^2 u(x) + f_u(u(x), v(x)) \\ \frac{\partial v(x)}{\partial t} &= g_v \nabla^2 u(x) + f_v(u(x), v(x)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

където $g_{u,v}$ са дифузионните коефициенти, $f_{u,v}(\cdot)$ са функции на реакция.

Нека дискретизираме пространствено първо уравнение на (3.14) по следния начин:

$$\frac{d u_j(t)}{dt} = \frac{g_u(u_{j-1} - u_j) + g_u(u_{j+1} - u_j)}{\Delta x^2} + f_u(\cdot), \quad (3.15)$$

където j е пространственият индекс, Δx е дискретната стъпка в пространството, членовете $g_u(u_{j-1} - u_j)$ и $g_u(u_{j+1} - u_j)$ представляват съответно тока в j , $(j-1)$ и $(j+1)$ възли чрез два резистора, чиято проводимост е представена от g_u .

Въвеждаме мемрстора (3.13), като резисторите се заменят с мемристори, както е показано на Фиг. 3.9.

Получената динамика на модела на РД е:

$$\frac{d u_j}{dt} = \frac{g_u(w_j^l)(u_{j-1} - u_j) + g_u(w_j^r)(u_{j+1} - u_j)}{\Delta x^2} + f_u(\cdot), \quad (3.16)$$

$$\frac{d v_j}{dt} = f_v(\cdot),$$

където $f_u(\cdot)$ е монотонно растяща функция, дефинирана по следния начин:

$$g_u(w_j^{l,r}) = g_{min} + (g_{max} - g_{min}) \frac{1}{1 + e^{-\beta w_j^{l,r}}} \quad (3.17)$$

с β обозначаваме ръста, g_{min} и g_{max} са минималните и максималните стойности на свързване, съответно, $w_j^{l,r}$ обозначава променливите за определяне на степента на свързване (l - ляво, r - дясно).

Накрая въвеждаме следната динамика на мемристора за $w_j^{l,r}$:

$$\tau \frac{dw_j^{l,r}}{dt} = g_u(w_j^{l,r}) \cdot \eta_1 \cdot (u_{j-1} - u_j), \quad (3.18)$$

където дясната страна представлява тока на мемристорите в (3.13), η_1 означава коефициента на полярност - $\eta_1 = +1 : w_j^l, \eta_1 = -1 : w_j^r$

3.4. Модел на ФицХю Нагумо

Системата на ФицХю Нагумо с две свързани частни диференциални уравнения и два дифузионни коефициента се получава като опростяване на модела на Ходжкин-Хъксли и описва контрола на електрическия потенциал в клетъчната мембрана чрез промяната на потока на йонните канали, но също така може да се използва за модел на електрически вълни в сърцето (Slavova, A., Zecca, P., Modeling natural phenomena via Cellular Nonlinear Networks, 2017).

Тук ще представим следната система на ФицХю Нагумо с два дифузионни члена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + d_1 \nabla^2 u, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + d_2 \nabla^2 v,$$

където

$$f_1(u, v) = -\frac{1}{\varepsilon} u(u-1) \left(u - \frac{b+v}{a} \right),$$

$$f_2(u, v) = f(u) - v, \quad (3.20)$$

$f(u)$ е монотонно не намаляваща функция

$$f(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{27u(u-1)^2}{4}, & \frac{1}{3} \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

Параметрите ε , a , b са физични параметри

Ще дискретизираме система (3.19) в пространството и получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{du_{ij}}{dt} &= f_1(u_{ij}, v_{ij}) + d_1(w^{l,r})(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij}) \\ \frac{dv_{ij}}{dt} &= f_2(u_{ij}, v_{ij}) + d_2(w^{l,r})(v_{i-1j} + v_{i+1j} + v_{ij-1} + v_{ij+1} - 4v_{ij}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

където $d_k(w^{l,r})$ е монотонно растяща функция, дефинирана като

$$d_k(w^{l,r}) = d_{min} + (d_{max} - d_{min}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\beta w_k^{l,r}}}, \quad k=1,2 \quad (3.22)$$

Тогава динамиката на мемристора е определена като в (3.18).

3.4.1. Ръб на хаоса в мемристорен модел на ФицХю Нагумо КНМ

Ще приложим конструктивния алгоритъм за определяне на ЕС региона за мемристорната ФицХю Нагумо система (3.21), (3.22):

$$\begin{aligned} \frac{du_{ij}}{dt} &= f_1(u_{ij}, v_{ij}) + d_1(w)(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij}) \\ \frac{dv_{ij}}{dt} &= f_2(u_{ij}, v_{ij}) + d_2(w)(v_{i-1j} + v_{i+1j} + v_{ij-1} + v_{ij+1} - 4v_{ij}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Намераме равновесните точки на (3.23). Според теорията на динамичните системи равновесните точки u^* , v^* са тези, за които:

$$\begin{aligned} f_1(u^*, v^*) &= 0 \\ f_2(u^*, v^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Системата (3.24) може да има един, два или три реални корена (u_1^*, v_1^*) , (u_2^*, v_2^*) , (u_3^*, v_3^*) . По принцип тези корени са функции на клетъчните параметри a , b , ε .

Изчисляваме четирите клетъчни коефициента на Якобиана на (3.24) около всяка равновесна точка на системата E_k^* , $k = 1,2,3$.

Тогава изчисляваме следа $Tr(E_k^*)$ и детерминанта $D(E_k^*)$ на Якобиана на (3.24) за всяка равновесна точка.

Определяме локално активната област за всяка равновесна точка E_k^* :

$$LAR(E_k^*): a_{22} > 0, \text{ or } 4a_{11}a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2$$

Допълнително условие за устойчивост в този случай е:

$$Tr(E_k^*) < 0 \text{ and } D(E_k^*) > 0$$

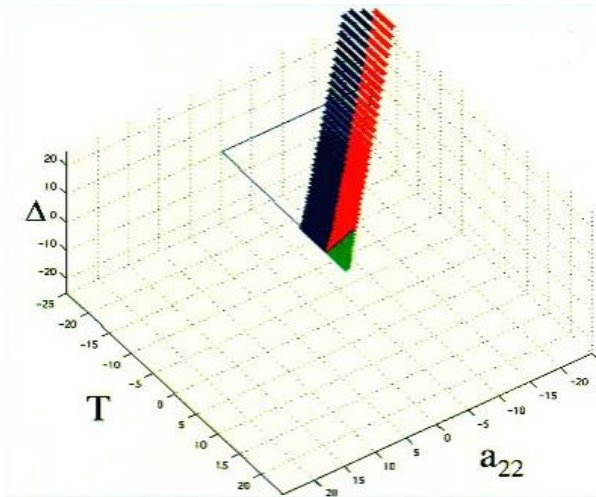
Може да се покаже, че това е единственият регион, който съответства на локално активни и асимптотично устойчиви равновесни точки на нашия модел. Така определяме устойчивия и локално активен регион $SLAR(E_k^*)$.

В нашия конкретен случай имаме три равновесни точки $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (1,1)$, $E_3 = (\frac{b+1}{a}, 1)$. Проверяваме условията за локална активност и устойчивост на равновесните точки. Резултатът е, че само равновесните точки E_1, E_2 отговарят на тези условия.

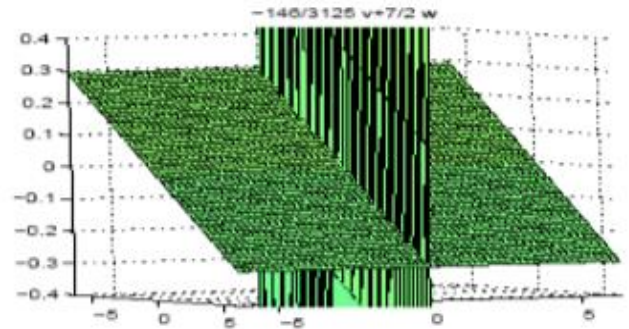
Тогава е в сила следната теорема:

Теорема 3.3. КНМ моделът на системата ФицХю Нагумо (3.19), (3.20) работи в края на режим на ръб на хаос, ако и само ако $\varepsilon \ll 1$, $\frac{a-b-1}{a} < 1$. За тези стойности на параметрите има най-малко една равновесна точка, която е локално активна и устойчива.

Направени са следните симулации на КНМ на ФицХю Нагумо за локално активната област и съответно за областта ръб на хаоса:



Фиг 3.11. а). (T, Δ, a_{22}) равнина
Пространствен изглед

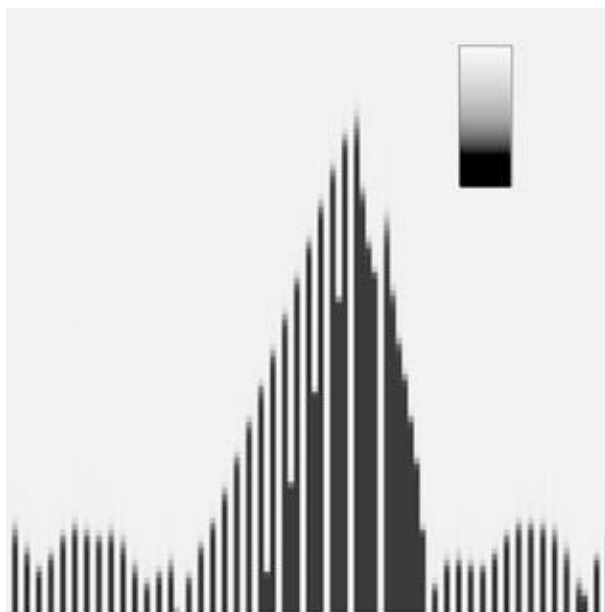


б). (a, b, ϵ) равнина
Ръб на хаоса

3.4.2. Дискусия на симулациите.

В симулациите по-горе можем да видим проекцията на клетъчните параметри върху равнината (T, Δ, a_{22}) . В червено е означен локално активния и устойчив субрегион; в синия субрегион равновесните точки са неустойчиви; зеления субрегион е така наречения ръб на хаос, в който имаме поне една точка на равновесие, която е едновременно устойчива и локално активна. На фиг. 3.11б можем да видим симулацията на ръб на хаоса в параметричната (a, b, ϵ) равнина.

Чрез обширни числени симулации получаваме, че в нашия КНМ модел могат да се генерират несиметрични пространствени шаблони, зависещи от началните условия- виж фиг.3.12 по-долу.



Фиг.3.12. Създаване на пространствени шаблони в КНМ с мемристорни синапси.

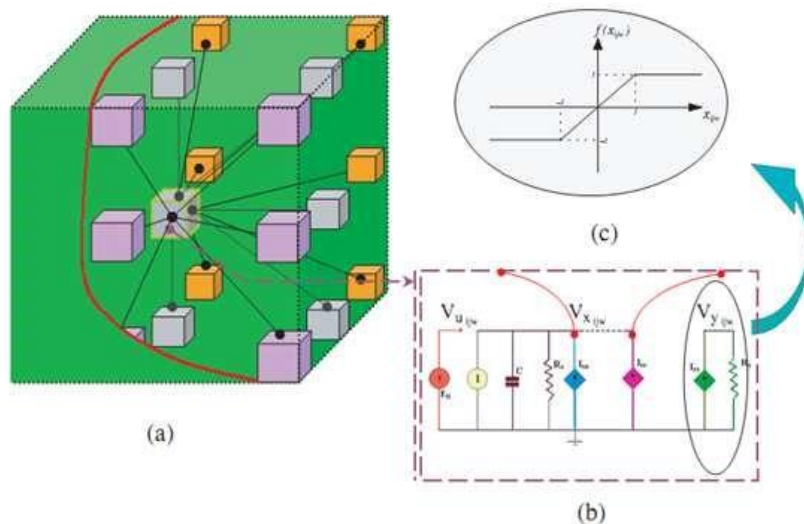
На Фиг. 3.12 може да се види, че вълната се разпространява асиметрично поради влиянието на мемристорите в модела.

ГЛАВА 4. КЛЕТЪЧНО НЕВРОННИ МРЕЖИ ВЪЗНИКВАЩИ В НАНО СТРУКТУРИТЕ

4.1. Моделиране с КНМ на пиезоелектричен материал.

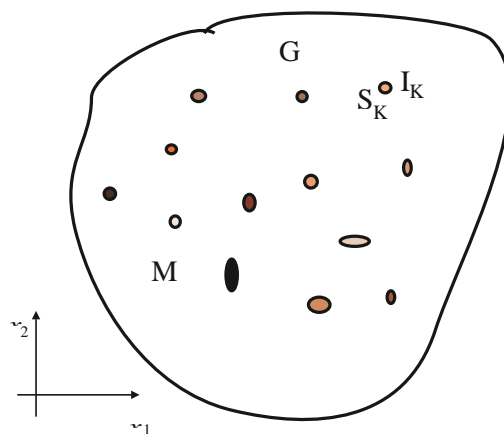
В тази Глава представяме динамиката на пиезоелектричния материал (ПЕМ) с нано нехомогенности (Dineva P., D. Gross, R. Muller, T. Rangelov, *Dynamic Fracture of Piezoelectric Materials. Solutions of Time-harmonic problems via VIEM*, 2014). Моделът се дефинира от система от две частни диференциални уравнения и гранични условия за обобщеното напрежение. Ще изследваме динамиката на Клетъчни Нано Невронни Мрежи (КННМ), моделиращи тази система чрез техниката на хармоничен баланс.

КННМ представят нов клас системи за обработка на информация, който показва важни потенциални приложения (фиг.4.1). КННМ са дефинирани като пространствено подредени, локално свързани динамични системи, клетки. КННМ динамиката се определя от динамичен закон на изолирана клетка, от законите на свързване между клетките и от гранични и начални условия. Динамичният закон и законите за свързване на клетката често се комбинират и описват от нелинейни обикновени диференциални уравнения (ОДУ), съответно, наричани уравнения на състоянието на клетките. Въпреки, че има компактно представяне, КННМ може да покаже сложна динамика като хаотично поведение, самоорганизация и формиране на образи или нелинейно колебание и разпространение на вълни. Освен това за моделиране на сложни системи се прилагат нелинейни клетъчни наноневронни мрежи на реакция дифузия (РД-КННМ). Тези мрежи не само представляват пример за сложност, но също така установяват нови подходи в обработката на информация чрез динамиката на сложни нелинейни системи.



Фиг. 4.1. а). КННМ архитектура; б). клетъчна верига; в). изходна функция на КННМ

Ще изследваме пиезоелектрически материал (ПЕМ) с нано нехомогенности (виж фигура 4.2). ПЕМ са анизотропни диелектрици, където електрическите, магнитните и еластичните полета са свързани. Търсенето на по-малки и по-бързи устройства насърчава технологичния напредък, което дава възможност за производството на нано мащабни електромеханични системи. С напредъка на синтеза на материали и възможностите за тяхната обработка, през последното десетилетие значението на разработването и разбирането на нано размерните инженерни устройства рязко се увеличава. Познаването както на разсеяното вълново поле, така и на динамичната концентрация на напрежение в близост до нано дефекти може да предостави полезна информация при повреда и счупване на тези материали и конструкции, направени от тях.



Фиг.4.2. ПЕМ с нано нехомогенности

4.2. КННМ моделиране на частни диференциални уравнения (ЧДУ).

Някои автономни КННМ представляват отлично приближение към нелинейния ЧДУ. Въпреки че уравненията на КННМ, описващи системи на реакция-дифузия, са с голям брой клетки, те могат да породят нови явления, които не могат да бъдат получени от ЧДУ. Това показва, че автономната КННМ в известен смисъл е по-обща от свързаното с нея нелинейно ЧДУ.

Ще представим извеждането на КННМ чрез пространствена дискретизация, което предлага методология за преобразуване на ЧДУ в темплети на КННМ и обратно. Решението на КННМ с ЧДУ има четири основни свойства:

- I) непрекъснато във времето;
- II) непрекъснато и ограничено по стойност;
- III) непрекъснато по параметрите на взаимодействие;
- IV) дискретно по пространство.

Ще покажем как автономна КННМ може да служи като обединяваща парадигма за активно разпространение на вълните чрез моделиране на няколко добре известни примера, избрани от различни дисциплини. Освен това ще покажем как трите основни типа ЧДУ: уравнението на дифузия, уравнението на Лаплас и вълновото уравнение могат да бъдат решени чрез КННМ.

Нека разгледаме добре познатото уравнение на топлопроводимостта от физиката:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{k} u_t \quad (4.1)$$

където k е константа, наречена топлопроводимост. Решението $u(x, y, t)$ на това уравнение е непрекъснатата функция на времето t и пространствените променливи x, y . Ако функцията $u(x, y, t)$ се апроксимира с множество от функции $u_{ij}(t)$, които са определени по следния начин

$$u_{ij}(t) = u(ih_x, jh_y, t), \quad (4.2)$$

където h_x и h_y са интервалите в координатите x и y , тогава частните производни на $u(x, y, t)$ по отношение на x и y могат да бъдат апроксимирани с:

$$u_{xx} + u_{yy} \approx \frac{1}{4} [u_{ij-1}(t) + u_{ij+1}(t) + u_{i-1j}(t) + u_{i+1j}(t)] - u_{ij}(t) \quad (4.3)$$

за всяко i, j .

По този начин уравнението на топлопроводимостта (4.1) може да бъде приблизително дискретизирано чрез набор от уравнения

$$\frac{1}{k} \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{4} [u_{ij-1}(t) + u_{ij+1}(t) + u_{i-1j}(t) + u_{i+1j}(t)] - u_{ij}(t) \quad (4.4)$$

за всяко i, j .

Чрез добавяне на кондензатор на изхода на обикновена клетка също могат да бъдат генерирани вълнови уравнения. Освен това при равновесието получаваме уравнението на Лаплас. Тези КННМ ще бъдат наречени КННМ на реакция-дифузия, тъй като са описани математически чрез дискретизирана версия на следната добре известна система от нелинейни ЧДУ - уравнения на реакция-дифузия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \nabla^2 u, \quad (4.5)$$

където $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^m$, D е диагонална матрица $m \times m$, чиито диагонални елементи D_i се наричат коефициенти на дифузия и

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.6)$$

е оператор на Лаплас в \mathbb{R}^2 .

Има няколко начина за приближаване на оператора на Лаплас (4.6) в дискретно пространство чрез синаптичен закон на КННМ с подходящ А-темплет. Например можем да имаме:

а) едномерен дискретизиран Лапласов темплет:

$$A_1 : (1, -2, 1); \quad (4.7)$$

б) двумерен дискретизиран Лапласов темплет:

$$A_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

който всъщност представлява приближението за уравнението на топлопроводимостта (4.1).

4.2.1. Едномерна КННМ и ЧДУ.

Нека разгледаме едномерна КННМ, описана от пространствено-инвариантния темплет $A=[r \ p \ s]$ без V -темплет и независим член ($I = 0$).

Следователно уравнението, описващо клетката C_i на такава КННМ, се представя от

$$u'_i = -u_i + rf(u_{i-1}) + pf(u_i) + sf(u_{i+1}) = -u_i + [r p s] * f(u_i), \quad (4.9)$$

където нелинейността $f(u)$ е частично линейна функция и символът $*$ обозначава дискретна пространствена конволюция. Ако $|u_i| \leq 1$, клетката C_i ще се нарича линейна клетка, докато, ако $|u_i| > 1$, ще се нарича наситена клетка. Темpletът $[r p s]$ може да бъде представен както следва

$$[r p s] = (p + s + r)[010] + (s + r)/2[1 - 21] + (s - r)[-1/201/2] \quad (4.10)$$

Забелязваме, че $[1-21]$ съответства на дискретната версия на втората пространствена производна, докато $[-1/201/2]$ е дискретната централна пространствена производна. Следователно уравнение (4.9) може да бъде записано в следната форма

$$u'_i = -u_i + (p + r + s)f(u_i) + (s + r)/2\delta^2 * f(u_i) + (s - r)\delta * f(u_i), \quad (4.11)$$

където $\delta = [-1/201/2]$ и $\delta^2 = [1 - 21]$. Уравнение (4.11) показва, че уравнение (4.9) е пространствено дискретен аналог на ЧДУ

$$\partial_t u(z, t) = -u + af(u(z, t)) + d\partial_z^2 f(u(z, t)) + c\partial_z f(u(z, t)), \quad (4.12)$$

където z е пространствената променлива, ∂_t , ∂_z са частните производни по отношение на t и z , и a , d , c са три константи. Трите последни члена от дясната страна на уравнение (4.12) са съответно членовете за активна реакция, дифузия и конвекция. Освен това, сравнявайки уравнения (4.11) и (4.12), може да се посочи следното съответствие между параметрите на двете уравнения:

$$(s + r)/2 \rightarrow d, (s - r) \rightarrow c, p + s + r \rightarrow a. \quad (4.13)$$

Съотношението (4.13) може да се използва за сравняване на качествената динамика на уравнение (4.9) с тази на уравнение (4.12). По-специално може да се посаже, че винаги, когато пространственият дискретен характер на КННМ няма критично влияние върху динамиката, ЧДУ са полезен инструмент за обяснение на свойства, доказани или просто показани с помощта на числени симулации за КННМ. Интересно е, че когато това е така, КННМ могат да се използват като аналогови симулатори на физически и биологични непрекъснати системи.

4.3. Извеждане на граничната задача за ПЕМ.

Нека $G \in \mathbb{R}^2$ е ограничена пиезоелектрична област с множество от нехомогенности $I = \cup I_k \in G$ (дупки, включения, нано дупки, нано включения), подложени на времево-хармонично натоварване на границата ∂G , виж фигура 4.2. Ще отбележим, че хетерогенностите са с макро размер, ако диаметърът им е по-голям от $10^{-6}m$, докато хетерогенностите са с нано размер, ако диаметърът им е по-малък от $10^{-7}m$.

Целта е да се намери полето във всяка точка на $M = G \setminus I$, I и да се оцени концентрацията на стрес около нехомогенностите.

Използвайки методите на непрекъснатата механика, задачата може да бъде формулирана като гранична задача за система от диференциални уравнения от втори ред:

$$\begin{cases} c_{44}^N \Delta u_3^N + e_{15}^N \Delta u_4^N - \rho^N u_{3,tt} = 0 \\ e_{15}^N \Delta u_3^N - \varepsilon_{15}^N \Delta u_4^N = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

където $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ е оператор на Лаплас, $N = M$ за $x \in M$ и $N = I$ за $x \in I$; u_3^N е механично изместване, u_4^N е електрически потенциал, ρ^N е плътността на масата, $c_{44}^N > 0$ е твърдостта на срязване, $e_{15}^N \neq 0$ е пиезоелектричната константа и $\varepsilon_{11}^N > 0$ е диелектричната пропускливост.

Да приемем, че интерфейсът между нано нехомогенността I и обкръжаващата я матрица M се счита за тънка повърхност на материала S , която притежава собствени механични параметри $c_{44}^I, e_{15}^I, \varepsilon_{11}^I$.

Ще считаме, че константите в I ще бъдат $c_{44}^I = 0, e_{15}^I = 0, \varepsilon_{11}^I = 0$ и приемаме граничните условия върху S да бъдат

$$t_j^M = \frac{\partial \sigma_{lj}^S}{\partial l} \text{ за } S \quad (4.15)$$

където σ_{lj}^S е обобщен стрес, $j = 3, 4$, l е тангенциалният вектор. Тогава ще изучаваме граничната задача (ГЗ) (4.14) с гранични условия (4.15).

Известни са малко числови резултати за динамично поведение на ограничена пиезоелектрична област с нано нехомогенности при противоравнинно натоварване. Например, валидиране е извършено за безкрайна пиезоелектрична равнина с отвор, за изотропно ограничена област с дупки и включената пиезоелектрична равнина с нано дупка или нано включване.

4.4. Гранични условия

Нека определим обобщения стрес σ_i^J , $i = 1, 2$; $J = 3, 4$ като

$$\begin{cases} \sigma_{i3}^N = c_{44}^N \frac{\partial u_3^N}{\partial x_i} + e_{15}^N \frac{\partial u_4^N}{\partial x_i} \\ \sigma_{i4}^N = e_{15}^N \frac{\partial u_3^N}{\partial x_i} + \varepsilon_{11}^N \frac{\partial u_4^N}{\partial x_i} \end{cases}$$

Обръщаме внимание, че σ_{13}^N се нарича механично напрежение, докато σ_{14}^N се нарича електрическо изместване (обичайното обозначаване в механиката е $D_i^N = \sigma_{14}^N, i = 1, 2$).

Обобщеното сцепление в точката x на линейния сегмент с нормален вектор $n = (n_1, n_2)$ се определя като

$$\begin{cases} t_3^N = \sigma_{13}^N n_1 + \sigma_{23}^N n_2 \\ t_4^N = \sigma_{14}^N n_1 + \sigma_{24}^N n_2 \end{cases}$$

Във всяка точка $x \in S = \partial I$ можем да определим нормален вектор n и единичен допирателен вектор l такъв, че (l, n) образува дясна координатна система.

На външната граница ∂G граничните условия са:

$$\begin{cases} t_j^{M_0} \text{ за } \partial G_t \\ u_j^{M_0} \text{ за } \partial G_u = \partial G \setminus \partial G_t \end{cases}$$

Тук векторите $t_j^{0M} = (t_3^{0M}, t_4^{0M})$ и $u_j^{0M} = (u_3^{0M}, u_4^{0M})$ при преместване се определят поотделно.

4.4.1. Гранични условия за хетерогенности в макромашаб

А) В случай, че I е дупка, формално можем да считаме, че константите в I са $c_{44}^I = 0, e_{15}^I = 0, \varepsilon_{11}^I = 0$, а граничните условия на S са

$$t_j^M = 0, \text{ за } S,$$

Тук векторите се определят като $t_j^M = (t_3^M, t_4^M)$

Б) В случай, че I е включение, константите в I са $c_{44}^I > 0, e_{15}^I \neq 0$,

$\varepsilon_{11}^I > \varepsilon_{11}^I > 0$; константи в M са $c_{44}^M > 0, e_{15}^M \neq 0, \varepsilon_{11}^M > 0$ и граничните условия върху S са

$$\begin{cases} u_j^M = u_j^I \\ t_j^I + t_j^M \end{cases}$$

Забелязваме, че $n_i^I = -n_i^M, i = 1, 2$, където n_i^I и n_i^M са компонентите на външния нормален вектор по протежение на S , считан съответно за граница на включението или матрицата. Освен това имаме това $t_j^M = (t_3^M, t_4^M), N = I, M$.

4.4.2. Гранични условия за нано хетерогенности

Да приемем, че интерфейсът между нано включението I и заобикалящата го матрица M се счита за тънка повърхност на материала S , която притежава собствени механични свойства $c_{44}^S, e_{15}^S, \varepsilon_{11}^S$ и повърхностно напрежение τ^0 . По-конкретно, τ^0 е остатъчното повърхностно напрежение при неограничени условия, което ще предизвика допълнителна статична деформация, но при динамичен анализ това често се игнорира, т.е. $\tau^0 = 0$.

В) В случай, че I е нано дупка, формално можем да считаме, че константите в I са $c_{44}^I = 0, e_{15}^I = 0, \varepsilon_{11}^I = 0$ и граничните условия на S са

$$t_j^M = \frac{\partial \sigma_{1j}^S}{\partial l}$$

Горните гранични условия могат да бъдат записани в следната форма за съответната механична и електрическа част:

$$t_3^M = \sigma_{n3}^M = \frac{\partial \sigma_{13}^S}{\partial l}, t_4^M = \sigma_{n4}^M = \frac{\partial \sigma_{14}^S}{\partial l}$$

Където t_3^M и t_4^M са нормалният компонент на механичното напрежение и електрическото изместване (уравнението $\frac{\partial \sigma_{14}^S}{\partial l} = \frac{\partial D_l^S}{\partial l}$ в матрицата е изпълнено, докато са тангенциални производни на тангенциални компоненти на напрежение σ_{13}^S и тангенциално електрическо изместване $\sigma_{14}^S = D_l^S$ по границата на нано дупката S).

Г) В случай, че I е нано включение, константите в I са $c_{44}^I > 0, e_{15}^I \neq 0, \varepsilon_{11}^I > 0$ константи в M са $c_{44}^M > 0, e_{15}^M \neq 0, \varepsilon_{11}^M > 0$

На границата на хетерогенност S, където са дефинирани константите, обобщеното тангенциално напрежение върху S се определя като:

$$\begin{cases} \sigma_{l3}^S = c_{44}^S \frac{\partial u_3^S}{\partial l} + e_{15}^S \frac{\partial u_4^S}{\partial l} \\ \sigma_{l4}^S = e_{15}^S \frac{\partial u_3^S}{\partial l} + \varepsilon_{11}^S \frac{\partial u_4^S}{\partial l} \end{cases}$$

Гранични условия върху S са:

$$\begin{cases} u_j^M = u_j^I \text{ за } S, \\ t_j^I + t_j^M = \frac{U_j}{\partial l} \end{cases}$$

Горните гранични условия могат да бъдат записани в следната форма за съответната механична и електрическа част:

$$t_3^I + t_3^M = \frac{\partial \sigma_{l3}^S}{\partial l}, t_4^I + t_4^M = \frac{\partial \sigma_{l4}^S}{\partial l}$$

Където $t_3^N + t_4^M$, $N = I, M$ са нормален компонент на механично напрежение и електрическо изместване в $\frac{\partial \sigma_{l3}^S}{\partial l} = \frac{\partial \sigma_{l4}^S}{\partial l} = \frac{\partial D_l^S}{\partial l}$ включването и в матрицата, докато и са тангенциални производни на тангенциални компоненти на напрежение σ_{l3}^S и тангенциално електрическо изместване $\sigma_{l4}^S = D_l^S$ по границата на границата на S. Тук, трябва да се има предвид, че $n_i^M = -n_i^I = -n_i$, $i = 1, 2$. Обръщаме внимание, че за механичното преместване u_3^N и за потенциала на електрическото поле $u_4^N = \phi$ са изпълнени условията за непрекъснатост.

4.5. КННМ модел на граничната задача и неговата динамика.

КННМ моделът на ГЗ (4.14), (4.15), който се състои от $n = L.L$ клетки, може да бъде записан в следната форма:

$$\begin{cases} c_{44}^N A_1 * u_{3i} + e_{15}^N A_1 * u_{4i} - \rho^N \frac{d^2 u_{3i}}{dt^2} = 0 \\ e_{15}^N A_1 * u_{3i} - \varepsilon_{11}^N A_1 * u_{4i} = 0, 1 \leq i \leq n, \end{cases} \quad (4.16)$$

където A_1 е едномерен дискретизиран темплет на Лаплас, * е конволюционен оператор, $1 \leq i \leq n$. Граничните условия (4.15) могат да бъдат записани по отношение на архитектурата на КННМ, както следва:

$$\begin{cases} t_j^M = \frac{\partial \sigma_{lij}^M}{\partial l}, j = 3, 4, \\ \sigma_{l3i}^M = c_{44}^M \frac{\partial u_{3i}^l}{\partial x_l} + e_{15}^M \frac{\partial u_{4i}^l}{\partial x_l}, \\ \sigma_{l4i}^M = e_{15}^M \frac{\partial u_{3i}^l}{\partial x_l} - \varepsilon_{11}^M \frac{\partial u_{4i}^l}{\partial x_l}, 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (4.17)$$

Изразяваме от второто уравнение на (4.16), $A_1 * u_{4i}$ и заместваме в първото уравнение. Така получаваме следното уравнение за u_{3i} :

$$\tilde{C} A_1 * u_{3i} - \rho^N \frac{d^2 u_{3i}}{dt^2} = 0, \quad (4.18)$$

където $\tilde{C} = c_{44}^N + \frac{(\epsilon_{15}^N)^2}{\epsilon_{11}}$

Ще разгледаме изхода на КННМ модела (4.17), (4.18) като частично линейна функция.

Ще приложим приблизителен метод, за да изучим динамиката на нашия модел КННМ (4.17), (4.18). Този метод се основава на специална трансформация на Фурие и е известен в електротехниката като техника на хармоничен баланс.

4.4.1. Техника на хармоничен баланс.

Методът за честотна характеристика е мощен инструмент за анализ и проектиране на линейни системи за управление. Той се основава на описване на линейна система чрез сложна функция, честотната характеристика, вместо чрез диференциално уравнение. Силата на метода идва от редица източници. Първо, графичните изображения могат да бъдат използвани за улесняване на анализа и проектирането. Второ, физическите наблюдения могат да се използват, тъй като функциите за честотна характеристика имат ясни физически значения. Анализът на честотната област обаче не може да бъде приложен директно към нелинейни системи, тъй като функциите за честотна характеристика не могат да бъдат определени за нелинейни системи.

За някои нелинейни системи може да се използва разширена версия на метода за честотна характеристика, наречен техника на хармоничен баланс (ТХБ), за приблизително анализиране и прогнозиране на нелинейно поведение. Основното приложение на ТХБ е за прогнозиране на гранични цикли в нелинейните системи, въпреки че методът има редица други приложения, като прогнозиране на суб-хармоници, явления на скокове и реакция на нелинейни системи на синусоидални входове.

Добре известно е, че наличието на гранични цикли в нелинейни автономни системи, които нямат пространствена зависимост, може да се изследва, като се прибягва до ТХБ. Тази техника се състои от две основни стъпки:

1. Сигналят, влизащ през нелинейния блок на схемата на Луре, се приближава с подходящ синусоидален член, чиято честота и амплитуда са неизвестни.
2. Хармониците от по-висок ред на изхода на нелинейния блок се пренебрегват, т.е. нелинейният блок се заменя с постоянен коефициент на усилване със същия вход, което свежда до минимум средната квадратична грешка.

Ще разгледаме основна схема на Луре, с L - линейна динамична система, инвариантна във времето и N - нелинейна статична и без памет система.

Блокът L може да бъде описан чрез неговата трансформационна функция

$$L(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (4.19)$$

където s е сложна променлива и $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ са полиномиални оператори, докато блок N е представен от нелинейната еднозначна функция $n(\cdot)$. Имаме следната система от диференциални уравнения

$$q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0$$

където D е диференциалният оператор.

Тъй като методите, представени в този параграф, се основават на първия хармоник, имаме

$$y_0(t) = A + B \cos \omega t, \quad B, \omega > 0 \quad (4.20)$$

и приемаме, че съответният нелинеен изход $n[y_0(t)]$ е развит в ред на Фурие като

$$n[y_0(t)] = N_0(A, B)A + N_1(A, B)B \cos \omega t + \dots \quad (4.21)$$

Нелинейната система N се характеризира в приближена форма, свързана с (стационарния) периодичен режим по следния начин

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)] d\omega t \quad (4.22)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \int_{-\pi}^{\pi} n[y_0(t)] \cos \omega t d\omega t \quad (4.23)$$

които са добре познатите описващи функции. Като разширение може да се дефинират сложни усилвания с по-висока честота $N_k(A, B)$, $k = 2, 3, \dots$, които описват останалите членове от (4.21).

Определение 4.1. Предсказани гранични цикли са приблизителните периодични решения $y_0(t)$ на системата, получени по ТХБ . Съгласно (4.21), (4.22) и (4.23) условията за предсказване на гранични цикли са:

$$A[1 + N_0(A,B)]L(0) = 0 \quad (4.24)$$

$$1 + N_1(A,B)L(j\omega) = 0. \quad (4.25)$$

Уравненията (4.24) и (4.25) трябва да бъдат решени по отношение на параметрите A , B и ω . Като цяло, когато B клони към нула, уравнението (4.25) изразява съществуване на бифуркация на Хопф и уравнението (4.24) води до стойност на отклонение $A = E_j$, което е E_j са равновесните точки, в които се получава бифуркация. Такава точка може да се разглежда като генератор на семейство периодични решения.

4.4.2. Динамика на КННМ модел (4.17), (4.18).

Следвайки гореописаната техника на хармоничния баланс, въвеждаме сведната двойна трансформация на Фурие:

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(-st) dt. \quad (4.26)$$

където $z = \exp(i\Omega)$, Ω е непрекъснатата пространствена честота, $s = i\omega$, ω е непрекъснатата времева честота.

Прилагаме горното преобразуване (4.26) на (4.18) и получаваме следната трансферна функция:

$$H(s, z) = \frac{p^N s^2}{\tilde{c}(z^{-1} - 2 + z)}. \quad (4.27)$$

Според техниката на хармоничния баланс ще търсим решението на (4.17), (4.18) в следната формата:

$$u_{3i} = U_3 \sin(\omega t + i\Omega),$$

$$u_{4i} = U_4 \sin(\omega t + i\Omega),$$

където U_3 , U_4 са амплитуди, като $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T е минималният период.

Изразяваме трансферната функция (4.27) по отношение на $s = i\omega$ и $z = \exp(i\Omega)$ и получаваме:

$$H_{\Omega}(\omega) = \frac{-\rho^N \omega^2}{\tilde{C}(2\cos\Omega - 2)}. \quad (4.28)$$

Техниката на хармоничен баланс налага следните ограничения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_{\Omega}(w)) &= \frac{U_3}{U_4} \\ \operatorname{Im}(H_{\Omega}(w)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Сега според ТХБ, ако за дадена стойност на Ω можем да намерим решение (ω, U_3, U_4) на (4.29), тогава можем да предвидим съществуването на периодични решения с амплитуди U_3, U_4 и период приблизително $T = \frac{2\pi}{w}$.

В сила е следното предложение:

Предложение 4.1. КННМ модел (4.17), (4.18), състоящ се от $n = L.L$ клетки има периодични решения u_{3i}, u_{4i} с ограничено множество от пространствени честоти Ω и период $T = \frac{2\pi}{w}$

Доказателство.

Следвайки техниката на хармоничния баланс, първо приближаваме изхода на нашия модел КННМ (4.17), (4.18) по следния начин:

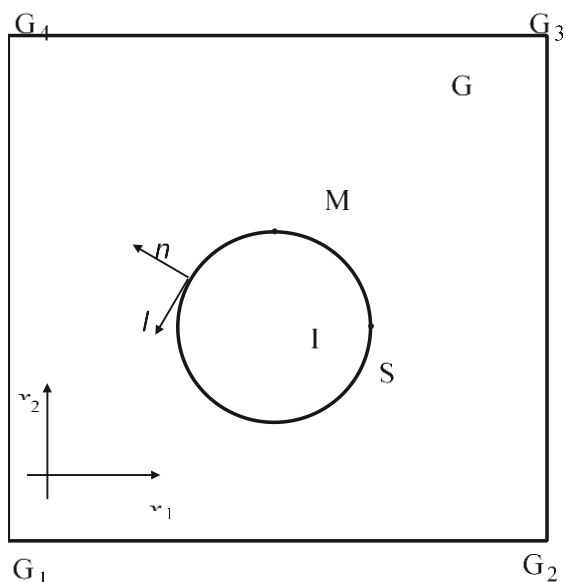
$$\begin{aligned} y &= Y \sin(\omega t + i\Omega) \\ Y &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(V \sin\psi) \sin\psi d\psi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тогава заместваем реалната и имагинерна част от трансферната функция $H_{\Omega}(\omega)$ (4.28) в (4.29) и получаваме система от алгебрични уравнения за неизвестните (ω, U_3, U_4) . След като решим тази система, намираме търсените неизвестни.

Забележка 4.1. За да осигурим необходимата точност на получените резултати, ние прилагаме възможни начални условия, от които мрежата ще достигне стационарно състояние, характеризиращо се с желаната стойност на Ω . В нашия случай предлагаме следните начални условия: $u_{ji}(0) = \sin(\Omega i)$, $j = 3, 4$, $1 \leq i \leq n$.

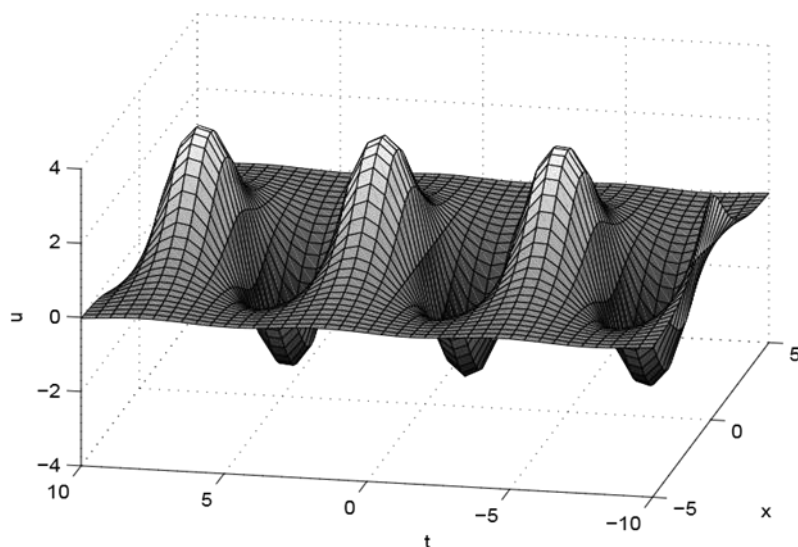
4.4.3. Симулации и валидиране.

Разглеждаме квадратната ПЕМ област $G_1G_2G_3G_4$ със страна a , съдържаща единична кръгова нехомогенност с радиус $r = \beta a$ и център в центъра на квадрата.



Фигура 4.3. Правоъгълна ПЕМ матрица с нехомогенност -кръг.

Обръщаме внимание, че ако $\beta < 0,05$ влиянието на външната граница G върху разтвора се очаква да бъде малка, докато, ако $\beta > 0,2$ се очаква значително по-голямо влияние. Направени са симулации на КННМ модел (4.17), (4.18) и е получено следното периодично решение предсказано в Предложение 4.1.



Фигура 4.4. Симулация на КННМ модел (4.17), (4.18).

Пространствената честота се определя като $\Omega = c \sqrt{\left(\frac{M}{c_{44}^M}\right)} w$.

Характеристиката, която представлява интерес за нано структурите, е нормализирано поле за концентрация на напрежение (σ / σ_0) и се изчислява по следната формула:

$$\sigma = -\sigma_{13}\sin(\varphi) + \sigma_{23}\cos(\varphi), \quad (4.31)$$

където φ е полярният ъгъл на наблюдаваната точка, σ_{ji} е напрежението близо до S.

Материалните параметри на матрицата за напречно изотропния пиезоелектричен материал ПЕМ са:

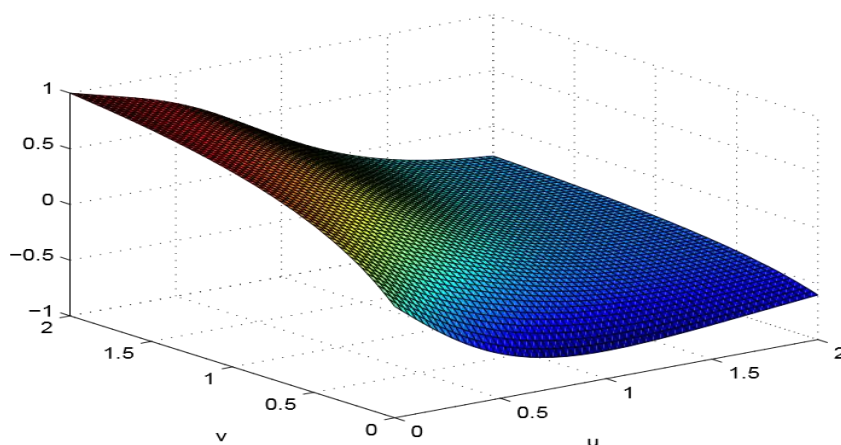
- Еластична коравина: $c_{44}^M = 2.56 \times 10^{10} N/m^2$;
- Пиезоелектрична константа: $e_{15}^M = 12.7 C/m^2$;
- Диелектрична константа: $\epsilon_{11}^M = 64.6 \times 10^{-10} C/Vm$;
- Плътност: $\rho^M = 7,5 \times 10^3 kg/m^3$.

Приложеното натоварване е хармонично едноосно по време на вертикална посока на равномерно механично сцепление с честота ω и амплитуда $\sigma_0 = 400$

$\times 10^6 N/m^2$ и електрическо изместване с амплитуда $D_0 = k \frac{\epsilon_{11}^M}{e_{15}^M} \sigma_0$. Това означава, че граничните условия са:

- на $G_1 G_2$: $t_3^M = -\sigma_0, t_4^M = -D_0$;
- на $G_2 G_3$: $t_3^M = t_4^M = 0$;
- на $G_3 G_4$: $t_3^M = 0, t_4^M = D_0$;
- на $G_4 G_1$: $t_3^M = t_4^M = 0$.

Валидирането на нашия модел е дадено по-долу на Фигура 4.4 за дадените по-горе параметри на конкретния материал PZT4:



Фигура 4.5. Валидиране - динамичен модел в наблюдаваната точка.

4.6. Решения от типа бягаща вълна за КННМ модел.

Ще изследваме структурата на решенията от типа бягаща вълна на модела КННМ, който се получава от разглежданата гранична задача по-горе:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = DA_2 * u_{ij} - C_1 \int_S G(u_{ij}) dt, 1 \leq i, j \leq n \quad (4.32)$$

Съществуват резултати в литературата за решения от типа бягащи вълни на пространствено дискретни или едновременно пространствени и времеви дискретни системи, но доколкото знаем, за КННМ няма резултати за решения от типа периодични бягащи вълни. Тук изучаваме структурата на решенията от типа бягаща вълна на модела КННМ (4.32), имащи формата:

$$u_{ij} = \Phi(icos\Theta + jsin\Theta - ct) \quad (4.33)$$

където Φ е непрекъснатата функция и нека $s = icos\Theta + jsin\Theta - ct$. Следователно разглеждаме решение $\Phi(s; c)$ на:

$$-c\Phi'(s; c) = DF(\Phi(s; c)) - \frac{c_1}{c} \int_S G(\Phi(s; c)) ds \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) се нарича бистабилно, защото има три пространствено хомогенни решения $\Phi(s) \equiv z^-, z^0, z^+$ удовлетворяващи $z^- < z^0 < z^+$.

Установено е, че (4.34) има единствени монотонни решения, отговарящи на граничните условия:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^- \text{ и } \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = z^+ \quad (4.35)$$

По-точно може да се докаже, че при някои предположения има единствено c^* такова, че (4.34) има монотонни решения, удовлетворяващи (4.35) ако $c = c^*$, като такова решение е единствено до изместване на фазата, ако $c = c^* \neq 0$.

Да предположим, че нашият КННМ модел (4.32) е ограничен масив от $L = N.N$ клетки.

За този случай имаме ограничено множество от честоти:

$$\Omega = \frac{2\pi k}{L}, 0 \leq k \leq L - 1 \quad (4.36)$$

В сила е следната теорема:

Теорема 4.1. Да предположим, че $u_{ij} = \Phi(icos\Theta + jsin\Theta - ct)u_{ij}$ е решение от типа бягаща вълна на модела КННМ (4.32) и $\Omega = \frac{2\pi k}{L}, 0 \leq k \leq L - 1$. Тогава съществуват константите $c_* < c^* < 0$ такива, че

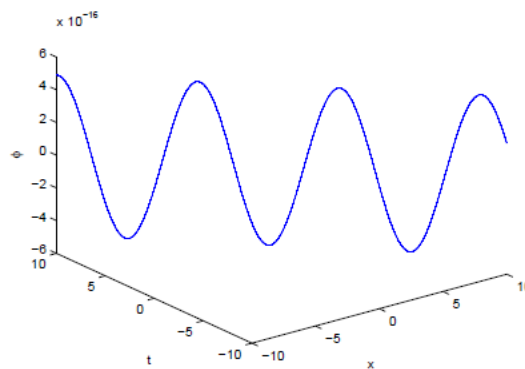
(1) ако $c \leq c_*$, тогава $\Phi(s; c)$ не намалява и удовлетворява

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^0 \text{ и } \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s) = z^+ \quad (4.37)$$

(2) ако $c = c^* > c_*$, тогава $\Phi(s; c)$ не намалява и удовлетворява (4.35);

(3) ако $c^* < c < 0$, то $\Phi(s; c)$ е не намаляващо и неограничено.

Симулациите на решението от типа бягаща вълна на КННМ модел (4.32) са дадени по-долу:



Фигура 4.6. Решение от типа бягаща вълна на КНМ модел (4.32).

Заклучение

В дисертацията е представена теорията на локалната активност от математическа гледна точка. Получени са точни неравенства за определяне на локално активната и устойчива област в параметричното пространство. Въз основа на това е разработен алгоритъм за определяне на областта, в която КНМ може да прояви по-сложно поведение – *ръб на хаоса*.

Изследвана е динамиката на хистерезисни КНМ с мемристорни синапси. Въвеждането на мемристори в уравнението на клетъчната динамика е нова и много актуална задача през последните 5 години. Това води до някои интересни приложения като обработката на ръбовете на образи и изчистване на шума в образите. Разработеният конструктивен алгоритъм се прилага за ХКНМ с мемристорни синапси, динамични памети и КНМ на реакция дифузия. Представени са много симулации на получената област – *ръб на хаос* за различните модели.

Разработен е модел на клетъчно нано невронна мрежа (КННМ) за решаване на гранична задача, възникваща в нано структурите. Разгледан е пиезоелектричен материал с нано нехомогенности и задачата е моделирана с КННМ. Изследвана е динамиката на КННМ модел с техниката на хармоничния баланс. Доказано е съществуване на периодични решения и са направени много симулации за конкретен материал PZT4, както и валидация на получените резултати. Намерени са и решения от типа бягаща вълна за задачата, възникваща в нано механиката.

Литература:

1. Albuquerque, E., Sollero, P., Fidelinski, P., Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures* 81, 17 2003, 1703–1713.
2. Agranovich G.,Litsyn E.,Slavova A.,Discrete continuous control for chaotic cellular neural networks, *C.R.Acad.Bulg.Sci*, 55:3, 2002.
3. Arena P., A mechatronic lampreycontrolled by analog circuits, *Proceedings 9th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Dubrovnik, Croatia, 2001.
4. Arena P., Fortuna L., Branciforte M., Realization of a reaction- diffusion CNN algorithm for locomotion control in an hexapode robot, *Journal of VLSI Signal Processing*, 23:267280, 1999.
5. Arena P., Fortuna L., Frasca M., Attitude control in walking hexapod robots:an analogic spatio-temporal approach, *Int.Journal on Circuit Theory and Applications*, 2002.
6. Arena P., Fortuna L., Occhipinti L., A CNN algorithm for real time analysis of DNA microarrays, *IEEE Trans. CAS, I:Fundamental theory and applications*,
7. Asai, T., Reaction-Diffusion Media with Excitable Oregonators Coupled by Memristors. In: *Memristor Networks* (Eds A. Adamatzky, L. Chua), Springer, 2014, 625–636.
8. Atherton D.P., *Nonlinear Control Engineering*, London:Van Nostrand Reinhold, 1975.
9. Atherton D.P., *Stability of Nonlinear Systems*,Letchworth, UK: Research Study Press (Wiley) , 1981.
10. Balya D., Roska B., Roska T., Werblin F., A CNN framework for modelling parallel processing in a mammalian retina, *Int. Journal on Circuit Theory and Applications*, 30:2, 2002.
11. Britton N.F., *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*, New York:Academic, 1986.

10. Chow S.-N., Mallet-Paret J. , Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems-part I, IEEE Trans. CASI, 42:10:746-751, 1995.
11. Chow S.-N., Mallet-Paret J. , Dynamics of lattice differential equations, Int.Journal of Bifurcations and Chaos, 6:9:16051621, 1996.
12. Chua L.O., CNN.A Paradigm for complexity, World Scientific Pub Co, 1998.
12. Chua L.O. , Dynamic nonlinear networks: state of the art, IEEE Trans. Circuits and Syst., 1980; CAS-27:1059-1087.
13. Chua L. O., Local activity is the origin of complexity, Int. J. of Bifurcations and Chaos, 15(11), 2005, 3435–3456.
14. Chua L. O., Memristor, Hodgkin-Huxley and Edge of Chaos, Nanotechnology, 24, 2013, 383001.
15. Chua, L.O., Kang, S.M., Memristive devices and systems, Proc. IEEE, v.64, N.2, pp.209-223, 1976.
16. Chua L.O., Hasler M., Moschytz G.S., Neirynsk J. , Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation, IEEE Trans. CAS-I, 1995; 42:10:559-577.
17. Chua L.O., Roska T., Cellular neural networks and visual computing - Foundations and Applications, Cambridge University Press, 2001.
18. Chua L.O. , Roska T. , The CNN paradigm, IEEE Trans. Circuits and Syst. , 1993; 40:147-156.
19. Chua L.O., Roska, T., Cellular Neural Networks with nonlinear and delay-type template elements and non-uniform grids , Int .J.Circuit Theory and Applicat., 1992; 20:449-451.
20. Chua L.O. , Wu C.W. , On the universe of stable CNN, Int. J. Circuit theory and Appl., 1992; 20:497-572.
21. Chua, L.O, Yang, L., Cellular neural networks: Theory, IEEE Trans. Circuits Syst. 1988; 35:1257-1272.
22. Chua, L.O, Yang, L., CNN: Applications, IEEE Trans. Circuits Syst., 1988; 35:1273 -1299.

23. CNN Software Library, Ver1.1, Analogical and Neural Computing Laboratory, Budapest, 2000.
24. Cohen M., Grossberg S., Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Trans. Syst., Man Cyber.* , 1983; SMC-13:815-826.
25. Coleman B.D. , Hodgdon M.L., A constitutive relation for rate- independent hysteresis in ferromagnetically soft materials, *Int .J .Engrg.Sci.*, 1986; 24:897-919.
26. Coleman B.D., Hodgdon M.L., On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis, *Arch.Rational Mech. Anal.*, 1987; 99:375-396.
27. Crouse K.R, Chua L.a., Thitan P., Set ti G., Characterization and dynamics of pat tern formation in CNNs, *Int. J. Of Bifurcation and Chaos* , 1996; 6:9:1703-1723.
28. Crouse K.R, Roska T., Chua L.a., Image halftoning with Cellular Neural Networks, *IEEE Trans. CAS-II* , 40:4:267-283, 1993.
29. Cruz J.M., Chua L.a. , A CNN chip for connected component detection, *IEEE Trans. Circuits and Syst.* , 1991; 38:812-817.
30. Desoer C.A., Vidyasagar , M., *Feedback Systems:Input-Output Properti es*, Academic, New York, 1975.
31. Desoer C.A., Wu F.F. , Nonlinear monotone networks, *SIAM J.Appl.Math.* , 1974; 26:313-333.
32. Dembo A., Farotimi O. , Kailath T. , High-order absolutely stable neural networks, *IEEE Trans. Circuits and Syst.* , 1991; CAS-38:57-65.
33. Dineva P., D. Gross, R. Muller, T. Rangelov, *Dynamic Fracture of Piezoelectric Materials. Solutions of Time-harmonic problems via BIEM*, *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 212, Springer Int. Publ., Switzerland, 2014.
34. Dominguez, J., Gallego, R., Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. *Int. J. Num. Methods Eng.*33, 3, 1992, 635–647.
35. Fang, X.Q., Liu, J.X, Dou, L.H., Chen, M.Z., Dynamic strength around two interactive piezoelectric nano-fibers with surfaces/interfaces in solid under electro-elastic wave. *Thin Solid Films* 520, 9, 2012, 3587–3592.

36. Garcia-Sanchez, F., Saez, A., Dominguez, J., Two-dimensional timeharmonic BEM for cracked anisotropic solids. *Engng. Anal. Bound. Elem.* 30, 2, 2006, 88–99.
37. Genesio R, Tesi A., A harmonic balance approach for chaos prediction: the Chua's circuit, *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 1992; 2:61-79.
38. Genesio R , Tesi A., Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems, *Automatica*, 1992; 28:531-548.
39. Genesio R , Tesi A., Villoresi F., A frequency approach for analyzing and controlling chaos in nonlinear circuits, *IEEE Trans. CAS-I* , 1993; 40:11: 819-827.
40. Guckenheimer, J ., Holmes , Ph. , *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer , 1983.
41. Gurtin, M.F., Murdoch, A.I., A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57, 4, 1975, 291–323.
42. Hanggi M., Moschytz G., *Cellular Neural Networks : Analysis, Design and Optimization*, Kluwer Academic Publishers Pub., 2000.
43. Hodgkin A.L., Huxley A.F. , A quantitative description of membrane current and its application to conduct ion and excitation in nerve, *J. Physiology*, 1952; 117:500-544.
44. Hopfield J.J. , Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1984; 81:3088-3092.
45. *Int.J.Circuit Theory and Applications*, Special issue on Cellular Neural Networks, vol. 20, 1992.
46. Itoh M., L. O. Chua, Star cellular neural networks for associative and dynamical memories, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 14, 2004, 1725–1772.
47. Jammes, M., Mogilevskaya, S.G., Crouch, S.L., Multiple circular nano-inhomogeneities and/or nano-pores in one of two joined isotropic halfplanes. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33, 2, 2009, 233–248.
48. Macki J., Nistri P., Zecca P., Mathematical models for hysteresis, *SIAM Review*, 1993; 53:1:94-123.

49. Mainzer K., L. O.Chua, Local Activity Principle: The Cause of Complexity and Symmetry Breaking, London: Imperial College Press, 2013.
50. Manganaro G., Arena P., Fortuna L., Cellular Neural Networks: Chaos, Complexity and VLSI Processing, Springer Verlag, 1999.
51. Mazumder, P., Li, S.-R., Ebong, I.E., Tunneling-based cellular nonlinear network architectures for image processing, IEEE Trans.Very Large Scale Integr. (VLSI) Syst., vol. 17, no. 4, pp. 487–495, Apr. 2009.
52. Perez-Munuzuri V. et . al., Nonlinear waves, patterns and spatio-temporal chaos in CNNs, Phil.Trans.R.Soc.Lond.A, 1995; 353:101-113.
53. Proceedings International Workshop CNN and their Appl., Budapest , Hungary, Dec. 1990.
54. Proceedings Int ernational Workshop CNN and their Appl. ,Munich, Germany, Oct. 1992.
55. Proceedings Int ernational Workshop CNN and their Appl. ,Rome, Italy, Dec. 1994.
56. Proceedings International Workshop CNN and their Appl., Sevilla, Spain, June 1996.
57. Procedings International Workshop CNN and t heir Appl.,London, U.K. , July 1998.
58. Proceedings Int ernational Workshop CNN and their Appl.,Catania, Italy, July 2000.
59. Roska T ., Chua L., Wolf D., Kozek T., Tetzl aff R., Puffer F., Simulating nonlinear waves and PDEs via CNN - Part I: Basic Techniques, Par t II : Typical Examples, IEEE Trans. Circuit and Syst. - I, 1995; 42:10: 809-820.
60. Roska T. , Rodriguez-Vazquez A., Toward the Visual Microprocessor-VLSI Design and the Use of Cellular Neural Network (CNN) Universal Machine Computers, London: J.Wiley, 2001.
61. Roska T ., Vandewalle J . (edit or), Cellular Neural Networks, Wiley, John & Sons, Incorporated Pub., 1994.

62. Shi B., Roska T., Chua L.O., Design of linear cellular neural networks for motion sensitive filtering, *IEEE Trans. Circuits and Syst.-II*, 1993; 40:320-331.
63. Slavova A., Dynamic properties of cellular neural networks, *J .Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 1993; 6:2:107-116.
64. Slavova A., Periodic solutions of nonlinear dynamical system describing Cellular Neural Networks , *Proc. of Neural, Parallel and Scientific Computations*, Atlanta, GA, vol. 1, 1995, 431-433.
65. Slavova, A., Cellular neural networks with nonlinear dynamics. *J. Neural, Parallel, and Scientific Computations.*, 1995, 3:3:369-379.
66. Slavova A., Stability analysis of CNN with hysteresis nonlinearity in the feedback system, *Proc. CNNA96*, Sevilla, Spain, 175-180, 1996.
67. Slavova A., Neural Networks with Hysteresis, *Proc. 15th IMACS, Wissenschaft und Technik Verlag*, vol. A, 265-271, 1997.
68. Slavova A., *Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
69. Slavova A., R. Tetzlaff, M. Markova, CNN computing of the interaction of fluxons, *IEEE Proceedings of the General Assembly of URSI*, Istanbul, 2011.
70. Slavova A., R. Tetzlaff, CNN computing of double Sine-Gordon equation with physical applications, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 67(1), 21–28, 2014.
71. Slavova, A., Zecca, P., Complex behavior of polynomial FitzHugh-Nagumo cellular neural network model. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 8, 4 (2007), 1331–1340.
72. Slavova, A., Zecca, P., *Modeling natural phenomena via Cellular Nonlinear Networks*, Cambridge Scholar Publishers, 2017.
73. Special issue on CNN, *Int.J. Circuit Theory and Appl.*, vol. 20, Sept . 1992.
74. Special issue on Chaos , *IEEE Trans.CAS-I*, vol. 42, 1995.
75. Thiran P., *Dynamics and Self-organization of Locally Coupled Neural Networks*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

76. Vidyasagar M., Nonlinear systems analysis, 2nd ed., Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
77. Visintin, A., Models of Hysteresis, Springer, 1993.
78. Visintin A., Differential Models of Hysteresis, Springer-Verlag, 1994.
79. Vladimirov, V., Equations of Mathematical Physics. New York, Marce Dekker, Inc., 1971.
80. Wu J., Symmetric functional differential equations and neural networks with memory, Trans. Am. Math. Soc., 350, 1998, 4799–4838.
81. Zou F. , Nossek J. , Bifurcation and chaos in CNN, IEEE Trans. CAS-I, 1993; 40:5:166-171.
82. Zou F. , Nossek J. , A chaotic attractor with CNN, IEEE Trans. CAS-I, 1991; 38:811-812.

Публикации по дисертацията

1. Slavova, A., Bobeva, G. Local Activity of CNN with Dynamic Memory Synapses. C.R.Bulg.Acad.Sci., 69, 11, BAS, 2016, ISSN:1310-1331, 1401-1406.
2. Slavova, A., Bobeva, G., Determination of edge of chaos in hysteresis CNN model with memristor synapses, IEEE Proc., ECCTD 2017, DOI:10.1109/ECCTD.2017.8093294, 1-4.
3. Litsyn, E., Slavova, A., Bobeva, G., Studying Integro-Differential CNN Model with Applications in Nano-Technology. QUALITDE, 2017, ISSN:1512-3391, 113-117.
4. Slavova, A., Bobeva, G., Edge of Chaos Regime for CNN with Dynamic Memory Synapses, Proc. ANNA 2018, 2018, VDE.
5. Slavova, A., Bobeva, G., On Cellular Nanoscale Network model arising in nanostructures, C.R.Bulg.Acad. Sc., 71:7, 2018, 955-961.
6. Slavova, A., Bobeva, G. Edge of chaos in reaction-diffusion CNN, Pliska Studia Mathematica, vol.29, 2018, 127-138.
7. Slavova, A., Bobeva G., Dynamics of PEM with nano-inhomogeneities via Cellular nanoscale Networks, Pliska Studia Mathematica, vol. 30, 2019, 157-170.

Научни приноси:

Приносите в дисертацията могат да се разделят на научни и научно приложни:

А. Научни приноси

1. Получена е конкретна математическа формулировка на метода на локалната активност за дискретни системи на реакция-дифузия.
2. Получени са точни математически условия за определяне на локална активност на клетка в КНМ. Дефинирана е подобластта на областта на локална активност, наречена „*ръб на хаоса*“, в която КНМ може да прояви сложно динамично поведение.
3. Разработен е алгоритъм за определяне на тази област от клетъчни параметри и е приложен за тримерна система на ФицХю Нагумо и Орегонатрна система.
4. Изучени са хистерезисни КНМ с мемристорни синапси. За пръв път е въведен модел на хистерезисни КНМ, в които оригиналният резистор се заменя с мемристор и работи в режим на релаксационен осцилатор.
5. Изведени са и модели на КНМ на реакция-дифузия, в които отново се въвеждат мемристорни вериги. Това води до разширяване на приложенията на тези нови модели в обработката на образи и сигнали. Динамиката им е изследвана като е приложен разработения в Глава 2 конструктивен алгоритъм за определяне на областта „*ръб на хаоса*“.

Б. Научно-приложни приноси

1. Представени са някои много актуални приложения на разглежданите модели на КНМ като извличане на ръбовете на изображения и изчистване на шума от изображения.

2. Получени са резултати за приложенията на хистерезисна КНМ за асоциативни паметни.

3. Разработен е КНМ на задача, възникваща в пиезоелектричен материал с нано нехомогенности – нано дупки, нано включения и др. Направени са симулации за конкретен материал PZT4 и те са валидирани.