

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Институт по Математика и Информатика

Зоя Владимировна Кичева – Зафирова

**Изследване динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи,
описващи уравнения на математическата физика**

Автореферат

на дисертация за

присъждане на образователна и научна степен „Доктор“

Област на висше образование 4. Природни науки математика и информатика

Професионално направление 4.5 Математика

Докторска програма

„Математическо моделиране и приложение на математиката“

Научен ръководител:

Проф. ДМН Анжела Славова

София

2021

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на научен семинар на секция “Диференциални уравнения и математическа физика” при Института по математика и информатика на БАН, състоял се на 30.09.2021 година.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика на БАН.

Автор: Зоя Владимировна Кичева- Зафирова

Научен ръководител

Проф.ДМН Анжела Славова

Съдържание

1	Основни характеристики на дисертацията	6
1.1	Актуалност на темата	6
1.2	Полезност и приложимост на получените резултати в дисертацията	7
1.3	Апробация на дисертацията	7
2	Съдържание на дисертацията	9
2.1	Съдържание на Глава 1:	9
2.1.1	Нелинейни Клетъчни Невронни Мрежи	9
2.1.1.1	Основни типове уравнения, описващи клетъчни невронни мрежи	11
2.1.1.2	Изследване на динамично поведение на НКНМ чрез метода на Ляпунов	14
2.1.1.3	Метод на хармоничния баланс	14
2.1.1.4	Приложение на МХБ за изследване на динамиката на НКНМ	15
2.2	Съдържание на Глава 2:	16
2.2.1	Изследване на динамиката на НКНМ на реакция-дифузия	16
2.2.2	Моделиране чрез метода на хармоничния баланс на решението интегро-диференциалното уравнение на Фиц Хю Нагумо с НКНМ на реакция дифузия и изследване на динамиката му	19
2.2.3	Динамично поведение на модела на интегро-диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо	20
2.3	Съдържание на Глава 3	22
2.3.1	Моделиране на флуксони и тяхното взаимодействие	22
2.3.2	Моделиране на вискоеластичното уравнение на Бургерс и изследване на неговата динамика	28
2.4	Съдържание на Глава 4:	32
2.4.1	Изследване на динамиката на хистерезисни НКНМ с мемристори	35
2.4.1.1	Приложение на метода на хармоничния баланс за намиране на периодични решения на хистерезисни НКНМ	39
2.5	Съдържание на Глава 5:	42
2.5.1	Модел на Мейнхардт - Гиерер	42
2.5.1.1	Метод на хармоничния баланс за изследване на динамиката на модела на Мейнхардт - Гиерер	44
3	Научни приноси в дисертационния труд	48

Списък на фигурите

2.1	[16]Схема на нелинейна клетъчна невронна мрежа и нейните елементи:	9
2.2	[1]Топология на клетъчна невронна мрежа: а) Линейна топология б) Двуразмерна топология в) Триразмерна топология	10
2.3	Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [-1, 1]$:	13
2.4	Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [0, 1]$:	13
2.5	Графика на нелинейна изходна функция:	13
2.6	Области на равновесие: SR - област на устойчивост; NR - област на неустойчивост; PSR - област на частична устойчивост	14
2.7	Динамично поведение на уравнението на Фиц Хю Нагумо	22
2.8	Взаимодействие на два флуксона	24
2.9	Взаимодействие на вълните флуксон - антифлуксон	25
2.10	Взаимодействие на двойка флуксони - breaddon	25
2.11	КНМ симулация на флуксон - антифлуксон	26
2.12	Взаимодействие на 4π "kink" вълни	27
2.13	Периодично решение на КНМ на 2.83 и 2.84	27
2.14	Графиката съответства на решение от тип пътуваща вълна (2.100)	31
2.15	Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите а). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 1.2$	32
2.16	Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите б). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.9$	32
2.17	Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите с). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.25$	32
2.18	Графика на различните видове хистерезис	33
2.19	Графика на активен хистерезис	34
2.20	Схема на хистерезисна клетъчна невронна мрежа	34
2.21	Симулация на нано-мемристорна клетъчна невронна мрежа която работи като релаксационен осцилатор	37
2.22	2D - схема на мемристор	37
2.23	Граница на хаоса в NM КНМ	38
2.24	Граница на хаоса в NM КНМ модел	39
2.25	Симулация на функцията v от Мейнхард - Гиерер модела на клетъчна невронна мрежа	47

Основни характеристики на дисертацията

1.1 Актуалност на темата

В дисертационния труд „Изследване динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи, описващи уравнения на математическата физика“ се изследва динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи, като се използва метода на хармоничния баланс. КНМ са въведени от Леон Чуа и Лин Янг (Chua, Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988). Всяка тяхна клетка е нелинейна динамична система и е свързана с най-близките си съседи чрез линейни връзки. Клетъчните нелинейни мрежи имат приложение в много области от разпознаване на образи до контрол на роботи. Те са организирани в една, две и три размерни топологии. Клетъчните невронни мрежи имат практическо приложение в много области като роботика, теория на динамичните системи, неврология, биология, обработка на изображения и др.

Актуалността на настоящото изследване се определя от уникалните възможности за фундаментални и приложни изследвания, които дават нелинейните клетъчни мрежи. При изучаване на устойчивостта на клетъчни невронни мрежи е важно предсказването на гранични цикли.

Съществуването на гранични цикли позволява сравнение между динамичното поведение на CNN Chua-Yang моделите и моделите "full-range" (виж Gilli, M. (1994) Stability of Cellular Neural Networks and Delayed Cellular Neural Networks with Nonpositive Templates and Nonmonotonic Output Functions, IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 41, no. 8, pp.518-528), където е доказано, че тези модели не са топологично еднакви чрез съществуването на периодични решения.

Във фокуса на съвременните теоретични и експериментални изследвания стои Ефектът на Джозефсон. Този ефект е квантово явление с широко приложение в нанотехнологиите. За целта в литературата са публикувани изследвания за джозефсонови контакти тип свръхпроводник - феромагнит-свръхпроводник в който е на лице връзка между магнитните моменти и джозефсоновия ток. Джозефсоновият контакт представлява сандвич от три слоя от които вътрешния е диелектрик, външните са свръхпроводници. При определени условия през този слой може да се наблюдава тунелен ефект на проникване на електрони. Математическият модел на това явление се описва с уравнението на син-Гордън, което принадлежи към т.н. група солитонно-поддържащи уравнения (soliton supporting dynamical systems). Специално за това уравнение солитонните решения е прието да се наричат флуксони. Особено важно при изучаването на клетъчни невронни мрежи е изучаването на решенията

от вида "бягащи вълни" за автономни КНМ.

Развитието на наноелектрониката е свързано с разработката на все по – бързодействащи устройства за запис и съхраняване на информацията с възможен презапис и ниска енергозависимост. При създаване на невронни мрежи от ново поколение се ползват мемристори – двуполусни устройства, съпротивлението на които се променя от протичащия през него заряд. Съществуването им е предсказано още от Чуа в далечната 1971 година, но за пръв път ефектът мемристивност е демонстриран през 2008 година за системи от вида метал-диелектрик – метал когато е открит подходящ материал за изработката им. Използването на мемристори като синапси позволява да се повиши изчислителната ефективност на невронните системи като се повишава плътността на логическите елементи и свързаността на невроните. Индустрията за обработка на изображения използва нано КНМ, като компютърните експерименти показват, че включването на променливи мемристори като синапси позволяват повече степени на свобода на мрежата.

Такива нано КНМ са представени от [4] и [71].

Както е показано в [8] и [6] такива клетъчни невронни мрежи работят в режим "граница на хаоса".

1.2 Полезност и приложимост на получените резултати в дисертацията

Уравненията на математическата физика са теоретичния апарат, чрез който се изучават механиката, теорията на колебанията, оптиката, електродинамиката, нелинейните вълнови процеси, теорията на потенциала, теорията за устойчивостта, преноса на частиците, физика на плазмата, квантовата механика, квантовата теория на полето, гравитацията, в наноелектрониката и свръхпроводящите нанотехнологии.

1.3 Аprobация на дисертацията

По темата на дисертационния труд са направени следните публикации:

1. CNN Modeling of a Class of Integro-Differential Equations, *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, Vol. 30, No 1, (2019), 171p-184p, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova, Pietro Zecca <http://hdl.handle.net/10525/3621>
2. Dynamic behavior of integro-differential CNN model, *AIP Conference Proceedings*, doi = 10.1063/1.5082117, 2018, Angela Slavova, Zoya Zafirova
3. Edge of Chaos in Nanoscale Memristor CNN, *IEEE International Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS)*, may 2019 doi = 10.1109/ISCAS.2019.8702436, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova, Ronald Tetzlaff.
4. Dynamics of viscoelastic Burgers' cellular neural networks model, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2159, doi = 10.1063/1.5127496, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova

5. Harmonic balance technique for studying CNN model of differential equations, AIP Conference Proceedings, 2019, doi = 10.1063/1.5133502, Angela Slavova, Zoya Zafirova
6. Modeling and Simulation of Interaction of Fluxons via CNN , Print ISBN: 978-3-8007-4756-6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8576708> <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=8576698>, Angela Slavova, Zoya Zafirova

Получените резултати са докладвани на следните форуми:

1. Семинара по диференциални уравнения в ИМИ, БАН през 2018 г
2. Fifth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences 18-21 June, 2018
3. 44 th international conference on application of mathematics in engineering and economics (AMEE'18)
4. International Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS), may 2019
5. 45 th international conference on application of mathematics in engineering and economics (AMEE'19)
6. Fifth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences July, 2019
7. Sixth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences July, 2019
8. Втори интердисциплинарен докторантски форум, Боровец, 2019
9. Семинар по Приложения на диференциалните уравнения в науките към Съюза на Учените в България 2021

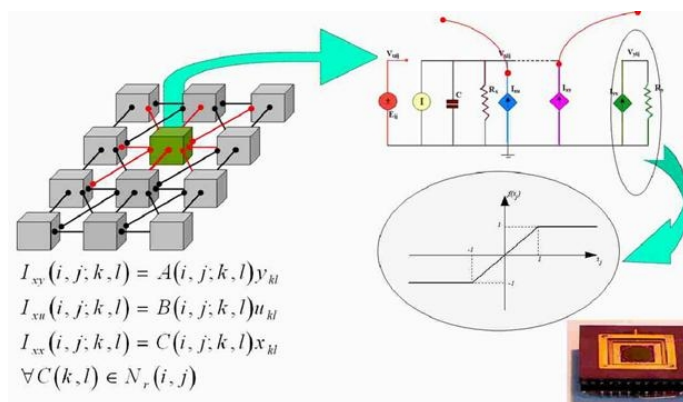
Съдържание на дисертацията

2.1 Съдържание на Глава 1:

2.1.1 Нелинейни Клетъчни Невронни Мрежи

Клетъчните невронни мрежи са въведени от Леон Чуа и Лин Янг.

Клетъчна невронна мрежа е математически модел на система за обработка на информация, организирана по подобие на анатомичното устройство на човешкия мозък. Математическият модел на биологичната невронна мрежа е изграден от множество взаимосвързани прости изчислителни елементи (неврони). Всеки неврон приема "сигнали" от предхождащите го в мрежата други неврони под формата на числа, извършва някакви аритметични действия, определени от неговата функция на активация (степен на възбуда) и резултатът се предава по изходящите връзки (синапси) към следващите неврони. Всяка връзка има тегло, което умножавайки се със сигнала определя неговата значимост (сила). Теглата на връзките са аналогични на силата на синаптичните импулси, предавани между биологичните неврони. Отрицателна стойност на теглото съответства на подтискащ импулс, а положителна – на възбуждащ. С други думи невронната мрежа е набор от математически модели, съставени от прости елементи по определени правила.

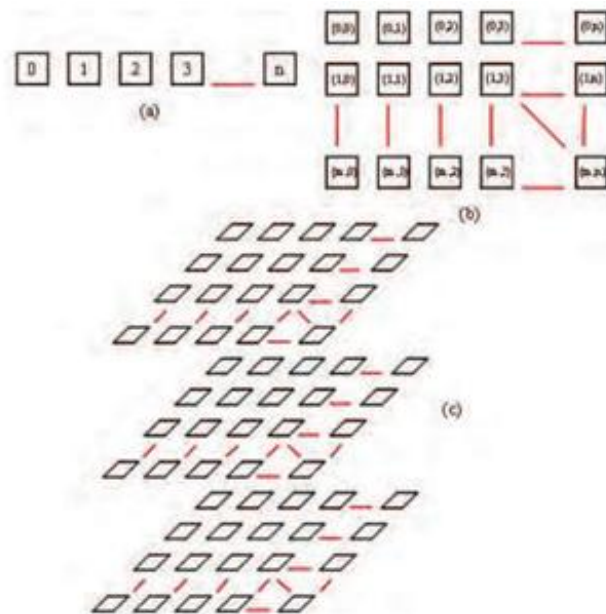


Фигура 2.1. [16]Схема на нелинейна клетъчна невронна мрежа и нейните елементи:

Клетките се дефинират в нормално двумерно пространство като мрежа. Те обаче не се ограничават до двуизмерни пространства, могат да бъдат определени в произволен брой размери и могат да имат квадратни, триъгълни, шестоъгълни или всякакви други пространствено непроменящи се подредения. Топологично, клетките могат да бъдат разположени на безкрайна равнина или на тороидално пространство. Клетъчната връзка е локална. Това означава, че всички връзки между клетките са в определен радиус (с

топологично измерено разстояние). Връзките също могат да бъдат забавени с времето, за да се позволи обработка във времевата област.

Архитектурата на клетъчните невронна мрежи е различна /виж.2.2/



Фигура 2.2. [1]Топология на клетъчна невронна мрежа: а) Линейна топология б) Двумерна топология в) Тримерна топология

Всеки модел има архитектура (принцип на построяване), структура и параметри.

Невронните мрежи се състоят от един, два или повече отделни слоя, които могат да бъдат организирани в различна топология. Всяка изкуствена невронна мрежа се състои от клетки, наречени изкуствени неврони.

Математически невронна мрежа е всеки изчислителен модел със следните елементи: състояние, функция за активирание, праг и топологията, определяща нейните невронни връзки. Стойността на състоянието се определя от линейна комбинация от стойностите на състоянията на съседните неврони. Коэффициентите на тази линейна комбинация се наричат тегла и определят влиянието на един неврон върху действието на друг. Влиянието на един неврон върху друг може да бъде непрекъснато, дискретно, ограничено и неограничено.

Характеристиките на невронната мрежа са: локалните връзки, уравнението, описващо динамиката на всяка клетка и изходната нелинейна функция на всяка клетка.

Приемаме следните означения:

$$I_{xy}(i, j; k, l) = A(i, j; k, l)y_{kl};$$

$$I_{xu}(i, j; k, l) = B(i, j; k, l)u_{kl};$$

$$I_{xx}(i, j; k, l) = C(i, j; k, l)x_{kl};$$

$N_r(i, j)$ е локална околност с радиус r , дефинирана по следния начин:

$$N_r(i, j) = \{C(i, j) | \max\{|k - i|, |l - j|\} \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N\}.$$

Коэффициентите за връзка $A(i, j; k, l)$ се наричат темплет за обратна връзка, а коэффициенти $B(i, j; k, l)$ се наричат контролен темплет.

В [73] са дадени следните определения за КНМ:

Определение 1 1. 2-, 3-, или n - мерен масив от идентични клетки

2. които имат следните две характеристики:
3. Всички връзки са локални с радиус r
4. Всички променливи на състоянието са променливи сигнали.

Определение 2 Една $M \times M$ Клетъчна невронна мрежа се дефинира математически чрез четири спецификации:

1. Клетъчна динамика
2. Синаптичен закон, определящ взаимодействието между две клетки:
3. Гранични условия
4. Начални условия

2.1.1.1 Основни типове уравнения, описващи клетъчни невронни мрежи

Динамичното поведение на клетъчно невронните процесори може да бъде изразено математически като серия от обикновени диференциални уравнения, където всяко уравнение представлява състоянието на отделна единица за обработка. Динамиката на една $M \times M$ двузмерна клетъчна невронна мрежа е описана в [2][53][30][73] със следната система уравнения:

Уравнения на състоянието

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{i,j}(t) = -x_{i,j} + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}_{ij,kl}(y_{k,l}(t), y_{i,j}(t)) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}_{ij,kl}(u_{k,l}(t), u_{i,j}(t)) + I_{ij} \\ y_{ij} = f(x_{ij}) = \frac{1}{2}(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \\ 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M \end{array} \right. \quad (2.1)$$

където $x_{i,j}$ е настоящето състояние, $y_{i,j}$ е настоящия изход, u_{ij} е входната променлива; $C(k, l) \in N_r(i, j)$ означава, че клетката $C(k, l)$ е съседна клетка на клетката $C(i, j)$ в околност с радиус r . \tilde{A} и \tilde{B} са нелинейни инвариантни клонинг темплети, в които са описани специфичните взаимодействия между всички клетки и техните съседни. В случаите, когато темплетите са пространствено инвариантни, всяка клетка се описва с прост клонинг темплет. Например матриците \tilde{A} и \tilde{B} , които се използват при клетъчни невронни мрежи с радиус на взаимодействие $r=1$ се описват със следните клонинг темплети:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}(ij, i-1, j-1) & \tilde{A}(ij, i-1, j) & \tilde{A}(ij, i-1, j+1) \\ \tilde{A}(ij, i, j-1) & \tilde{A}(ij, i, j) & \tilde{A}(ij, i, j+1) \\ \tilde{A}(ij, i+1, j-1) & \tilde{A}(ij, i+1, j) & \tilde{A}(ij, i+1, j+1) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}(ij, i-1, j-1) & \tilde{B}(ij, i-1, j) & \tilde{B}(ij, i-1, j+1) \\ \tilde{B}(ij, i, j-1) & \tilde{B}(ij, i, j) & \tilde{B}(ij, i, j+1) \\ \tilde{B}(ij, i+1, j-1) & \tilde{B}(ij, i+1, j) & \tilde{B}(ij, i+1, j+1) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

За да може да се запише удобно уравнението на състоянието на една клетъчна невронна мрежа с линейна топология и клонинг темплет A се дефинира конволюционен оператор по следния начин:

Определение 3 \forall клонинг темплет A ,

$$A * z_{ij} = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(k-i, l-j) z_{kl} \quad (2.4)$$

Тогава уравнението на състоянието се описва по следния начин:

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + A * y_{ij} + B * u_{ij} + I_{ij} \quad (2.5)$$

За да се осигури устойчивост на нелинейна клетъчна невронна мрежа в [13] темплетите \tilde{A} и \tilde{B} са изведени в по - обобщена форма:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 y_{kl} y_{ij} & 0 \\ c_2 e^{y_{kl}-1} & 2 & c_2 e^{y_{kl}-1} \\ 0 & c_1 y_{kl} y_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_3 (u_{kl} - u_{ij}) & 1 & c_3 (u_{kl} - u_{ij}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Темплетите \tilde{A} и \tilde{B} в [30] са наречени оператор за обратна връзка и контролен оператор.

И така, като ползваме определение 2, можем обобщено да запишем, че клетъчната динамика на КНМ се задава с уравнението:

$$\dot{x}_{ij} = -g(x_{ij}, u_{ij}, I_{ij}^s), \quad (2.8)$$

а синаптичния закон изразява в повечето случаи пространственото взаимодействие със съседната клетка $C(i+k, j+l)$

$$I_{ij}^s = A_{ij,kl} x_{i+k, j+l} + \tilde{A}_{ij,kl} * f_{kl}(x_{ij}, x_{i+k, j+l}) + \tilde{B}_{ij,kl} * u_{i+k, j+l}(t) \quad (2.9)$$

/виж [73] стр 14-15/

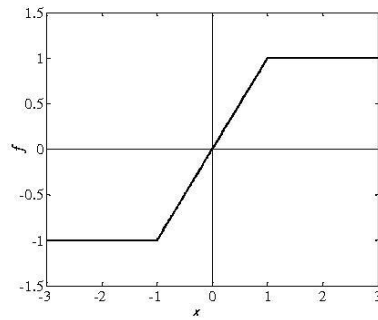
Исходни уравнения Обобщено: изходното уравнение (синаптичния закон) се задава с уравнението:

$$y_{ij} = f(x_{ij}(t)). \quad (2.10)$$

Някои от най- често използваните функции в изходната динамика на клетъчна невронна мрежа са:

1. Частично- линейна функция с изходни стойности $\in [-1,1]$:

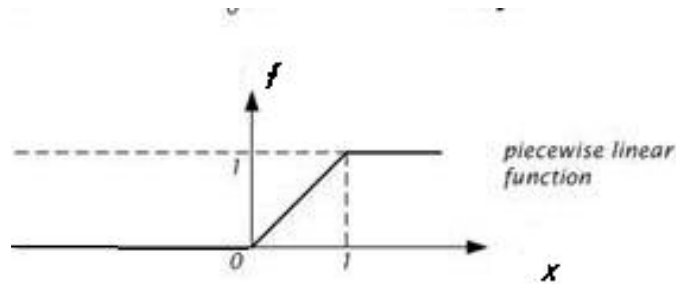
$$f_{ij} = \frac{1}{2} (|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \quad (2.11)$$



Фигура 2.3. Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [-1, 1]$:

2. Частично- линейна функция с изходни стойности $\in [0, 1]$:

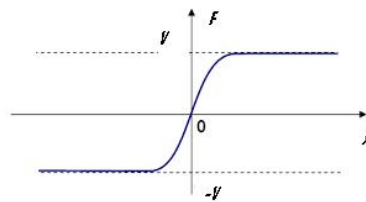
$$f_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{когато } x_{ij} \leq 0 \\ x_{ij} & \text{когато } 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\ 1 & \text{когато } x_{ij} \geq 1 \end{cases} \quad (2.12)$$



Фигура 2.4. Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [0, 1]$:

3. Нелинейна функция [5]

$$f_{ij} = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2V}x_{ij}\right) \quad (2.13)$$



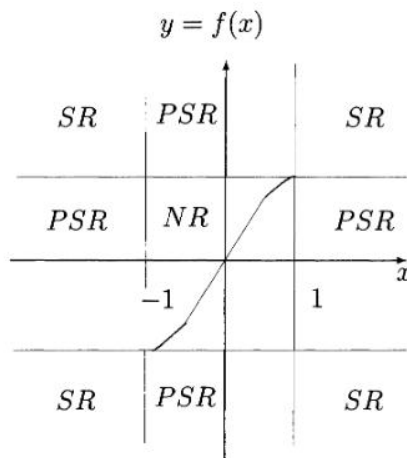
Фигура 2.5. Графика на нелинейна изходна функция:

4. В [13] [12] е разгледана по-обща изходна функция с нейна собствена динамика

$$\dot{y}_{ij} = -y_{ij} + f(x_{ij}) \quad (2.14)$$

В първа глава са дефинирани

Области на динамично поведение на клетъчни невронни мрежи, зададени с уравнението



Фигура 2.6. Области на равновесие: SR - област на устойчивост; NR - област на неустойчивост; PSR - област на частична устойчивост

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -x(t) + A(g(x)) + Bu + I \quad (2.15)$$

2.1.1.2 Изследване на динамично поведение на НКНМ чрез метода на Ляпунов

В първа глава е представен и един от ефективните методи за изследване на устойчивостта на клетъчна невронна мрежа - методът на Ляпунов.

За да се изследва КНМ е необходимо да се изследва поведението на една клетка и след това с глобален асимптотичен анализ да се направи анализ на устойчивостта на равновесните точки на системата.

2.1.1.3 Метод на хармоничния баланс

В глава първа е представен и метода на хармоничния баланс.

Този метод е предназначен за изследване на периодични процеси в нелинейни системи и може да се използва когато нелинейната система, описана с $\dot{x} = f(x, t)$ може да се представи чрез схемата на Луре.

В дисертацията е доказана следната теорема:

Теорема 1 *Всяка нелинейна динамична система, която е описана със системата уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ може да се представи в схемата на Лур.*

Описана е техника на изчисляване на коефициентите на хармоничния баланс и е изведено уравнението му.

$$qW_l(t)(j\omega) = -1 \quad (2.16)$$

2.1.1.4 Приложение на МХБ за изследване на динамиката на НКНМ

Математическия модел на една линейна клетъчна невронна мрежа се задава с

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -x_i(t) + sy_{i-1}(t) + py_i(t) + sy_{i+1}(t) \\ y_i &= f(x_i(t)), \\ 1 \leq i &\leq N, \end{aligned} \quad (2.17)$$

където $f(\cdot)$ е частично линейна функция и е изпълнено условието $s \geq \frac{p-1}{2}$

В термините на диференциалните оператори разглежданото уравнение се изразява чрез $q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0$ където D е диференциален оператор. Функцията

$$L(s) = \frac{p(s)}{q(s)}, \quad (2.18)$$

където s е комплексна променлива, $p(s)$, $q(s)$ са полиномни оператори се нарича трансферна функция [35, 36]. Използвания метод се основава на описания в [73] начин на изучаване на първия хармоник, получен на изхода на системата и имащ вида:

$$y_0 = A + B \cos(\omega t) \quad B, \omega > 0. \quad (2.19)$$

Целта е да се намери периодично решение във вида:

$$x_i = \xi(\Omega_0 j + \omega_0 t) \quad (2.20)$$

където $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. След като приложим непрекъснатата във времето дискретна трансформация на Фурие по формулата :

$$\tilde{X}_\Omega(\omega) = \tilde{X}_k(\omega) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t) e^{-j \frac{2k\pi}{N} + \omega t} dt \quad (2.21)$$

получаваме трансферната функция на системата

$$H(\omega_0, \Omega_0) = \frac{X(\omega_0, \Omega_0)}{Y(\omega_0, \Omega_0)} = \frac{se^{-j\Omega_0} + p + se^{j\Omega_0}}{1 + j\omega_0} \quad (2.22)$$

Която преобразуваме във вида:

$$H(\omega_0, \Omega_0) = \frac{p + 2ssin\Omega_0}{1 + \omega_0^2} + j \frac{2ssin\Omega_0 - p\omega_0}{1 + \omega_0^2} \quad (2.23)$$

Отбелязваме факта, че трансферната функция е реална функция,

$$\begin{aligned} Re[H(\omega_0, \Omega_0)] &= \frac{p + 2ssin\Omega_0}{1 + \omega_0^2} = \frac{X_{m_0}}{Y_{m_0}} \\ Im[H(\omega_0, \Omega_0)] &= \frac{2ssin\Omega_0 - p\omega_0}{1 + \omega_0^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Предполагаме, че променливата на състоянието и изходната променлива имат формата:

$$\begin{aligned}x_j(t) &= X_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \\y_i(t) &= Y_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0),\end{aligned}\tag{2.25}$$

където амплитудата X_{m_0} , времевата честота ω_0 и пространствената честота Ω_0 са неизвестни и трябва да се определят. Апроксимираме периодичния изход $y_i(t) = f(x_i(t))$ чрез основната компонента на неговия ред на Фурие. Y_{m_0} чрез формулата:

$$Y_{m_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X_{m_0} \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi\tag{2.26}$$

от (2.24) получаваме неизвестните:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{2s}{p} \sin\Omega_0 \\X_m &= \frac{2p}{\pi} [X_m \arcsin \frac{1}{X_m} + \sqrt{1 - \frac{1}{X_m^2}}]\end{aligned}\tag{2.27}$$

Системата (2.17) с $s > \frac{p-1}{2}$, има не по-малко от $\frac{n-1}{2}$ различни ненулеви нетривиални решения, чиято пространствена честота е $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}; 1 \leq N \leq \frac{n-1}{2}$.

В дисертацията подробно е описано поведението на двуклетъчна невронна мрежа в различните части от пространството, като е използван метода на Ляпунов.

2.2 Съдържание на Глава 2:

2.2.1 Изследване на динамиката на НКНМ на реакция-дифузия

В глава втора са разгледани уравнения на реакция дифузия. Подробно е разгледано уравнението на топлопроводността и е показано как то може да се изследва чрез клетъчни невронни мрежи. Описани са начините за апроксимиране на лапласовия оператор в дискретно пространство чрез синаптичен закон и подходящ А темплейт.

Например темплетите могат да бъдат:

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{темплет при едномерна дискретизация} \\A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{темплет при двумерна дискретизация}\end{aligned}$$

Разгледана е клетъчна невронна мрежа чието уравнение на състоянието е

$$\dot{u}_i(t) = -cu + Af(u_i) + I_i$$

и има пространствено инвариантен темплет $A = [r \quad p \quad s]$, няма В темплейт и независимия и член $I=0$. Тогава уравнението, което описва клетката c_i се задава чрез:

$$\dot{u}_i = -u_i + rf(u_{i-1}) + pf(u_i) + sf(u_{i+1}) = -u_i + [p \quad q \quad s] * f(u_i)\tag{2.28}$$

където $f(u_i)$ е частично линейна функция

$$f(u_i) = \frac{1}{2}(|u_i + 1| + |u_i - 1|)$$

* означава дискретна пространствена конволюция. Когато $|u_i| \leq 1$, клетката c_i се нарича линейна клетка, а когато $|u_i| \geq 1$ клетката ще се нарича клетка с насищане. Пространствено инвариантния темплет $= [r \ p \ s]$ може да се декомпозира по следния начин:

$$[r \ p \ s] = (p + r + s)[0 \ 1 \ 0] + \frac{(s + r)}{2}[1 \ -2 \ 1] + \frac{(s - r)}{2}[-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]$$

Темплета $[1 \ -2 \ 1]$ съответства на дискретизираната втора частна производна, а темплета $[-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]$ съответства на дискретизираната първа частна производна.

Тогава 2.28 може да се запише във вида:

$$\dot{u}_i = -u_i + (p + r + s)f(u_i) + \frac{(s + r)}{2}\hat{\partial}^2 * f(u_i) + (s - r)\hat{\partial}f(u_i) \quad (2.29)$$

където $\hat{\partial}^2 = [1 \ -2 \ 1]$, а $\hat{\partial} = [-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]$

Да разгледаме частното диференциално уравнение:

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + a.f(u(z, t)) + d.\partial_z^2 f(u(z, t)) + c.\partial_z f(u(z, t)) \quad (2.30)$$

където z е пространствена променлива, а ∂_t и ∂_z са частни производни по z и t , a, d, c са три константи. Тогава $a.f(u(z, t))$ изразява активната реакция, $d.\partial_z^2 f(u(z, t))$ изразява дифузията, $c.\partial_z f(u(z, t))$ изразява конвекцията

Като сравним коефициентите на 2.30 и 2.29 се получава, че

$$\begin{aligned} \frac{s+r}{2} &\rightarrow d \\ s - r &\rightarrow c \\ p + s + r &\rightarrow a \end{aligned} \quad (2.31)$$

Това показва, че пространствената дискретизация, използвана при проектиране на клетъчна невронна мрежа не оказва влияние при изследване на динамиката и.

Когато $r=p$ А темплета е симетричен и тогава 2.30 има вида:

$$\dot{u}_i = -u_i + (p + 2s)f(u_i) + s\hat{\partial}^2 * f(u_i) \quad (2.32)$$

което е дискретен аналог на уравнението от тип реакция дифузия

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + a.f(u(z, t)) + d\partial_z^2 f(u(z, t)) \quad (2.33)$$

подобно на

$$\partial_t u(z, t) = f_r(u(z, t)) + D\partial_z^2 u(z, t) \quad (2.34)$$

където $f_r(u(z, t))$ е кубична или квадратна функция.

Равновесната точка на уравнението 2.33 се получава като решение на нелинейното диференциално уравнение:

$$-u(z, t) + af(u(z, t)) + d\partial_z^2 f(u(z, t)) = 0 \quad (2.35)$$

в линеен интервал, където $|u| \leq 1$ с изключение на краен брой точки, където

$$|u_i| = 1.$$

От равновесните характеристики получаваме, че

$\partial_z f(u(z))|_{z \rightarrow z_0^-} = \partial_z f(u(z))|_{z \rightarrow z_0^+} = 0$, където z_0 е гранична точка в интервала, който е разделен на два интервала от точката на насищане.

При изследване на линейния интервал $[z_1, z_2]$ всяко малко смущаване $\delta u(z, t)$ около равновесната точка показва, че уравнението

$$\partial_t \delta u(z, t) = -\delta u(z, t) + au(z, t) + d\partial_z \delta u(z, t) \quad (2.36)$$

за $z \in [z_1, z_2]$ с гранични условия $\delta u(z = z_1, t) = \delta u(z = z_2, t)$ има собствено решение $\delta u(z, t) = e^{\lambda_n t + jk_n z}$, където $\lambda = a - 1 - (\frac{n\pi}{L})^2 d$, $n \in N$, $L = z_2 - z_1$, j е имагинерната единица. Точната характеристика на равновесието може да се потвърди чрез апроксимиращо спектрално приближение. Допускаме, че решението на линеаризираната версия на 2.33 е $u(z, t) = Ue^{jkz + \lambda t}$ и тогава получаваме за

$$\lambda_n = a - 1 - k_n^2 d \quad (2.37)$$

където редицата k_n^2 е образувана от собствените стойности на оператора ∂_z^2 в интервала $[0, L]$. От 2.37 получаваме, че за

$$k_c = \sqrt{\frac{a-1}{d}} \quad (2.38)$$

имаме осцилации, а за онези собствени решения, за които $k_n > k_c$ са отрязани някои пространствени честоти.

Един темплет е антисиметричен, когато има вида $[-s \quad p \quad s]$. Доказано е, че клетъчна невронна мрежа с антисиметрични темплети могат да имат решение от тип пътуваща вълна.

Да разгледаме уравнението

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + af(u(z, t)) + c\partial_z^2 f(u(z, t)) \quad (2.39)$$

Това уравнение също допуска разклоняващо се решение, като решението му от тип пътуваща вълна е напълно различно от онова, което може да възникне в системата

$$\partial_t u(z, t) = f_r(u(z, t)) + D\partial_z^2 u(z, t), \quad (2.40)$$

където асиметрията на активния член т.е. функцията $f_r(u(z, t))$ се свързва с ефекта на дифузия. Възниква пътуваща вълна с гладък вълнов фронт.

Изследваме 2.39 в краен интервал $[0, L]$ с циклични гранични условия, за да определим

как решението от тип пътуваща вълна се движи без да се отрази в границите. На практика това е обикновено устойчиво решение от тип пътуваща вълна на 2.39 с $a > 0$ и има вида:

$$u(z, t) = ag\left(z + \frac{ct}{a}\right), \quad (2.41)$$

където $g(\xi)$ е частично непрекъсната константна периодична функция с период L такава, че $|g(\xi)| = 1$ и има краен брой точки на прекъсване, където

$$g(\xi) = \begin{cases} +1 \\ -1, \end{cases} \quad (2.42)$$

т.е. подобно решение може да възникне в антисиметрична клетъчна невронна мрежа.

При проектиране на клетъчна невронна мрежа се взема предвид, че времето не може да нараства неограничено.

2.2.2 Моделиране чрез метода на хармоничния баланс на решението интегро - диференциалното уравнение на Фиц Хю Нагумо с НКНМ на реакция дифузия и изследване на динамиката му

В глава втора е представено моделирането на решението чрез метода на хармоничния баланс на интегро - диференциалното уравнение на Фиц Хю Нагумо с НКНМ на реакция дифузия, което е опростена форма на уравнението на модела Hodgkin-Huxley за разпространяване на импулсите в аксона. [74]:

$$u_t - u_{xx} = u(u - \Theta)(1 - u) - \int_0^t u(s, x) ds, \quad (2.43)$$

$$0 < x, t < 1, 0 < \Theta < 1/2,$$

u_t е първата частна производна на $u(t, x)$ по t ,

u_{xx} е втората частна производна по x ,

u е мембранный потенциал на аксона.

Състоянието $u = 0$ изразява състоянието на покой на нерва.

За да анализираме на уравнението на Фиц Хю Нагумо първо го трансформираме в система уравнения чрез въвеждане на нова променлива

$$w = \int_0^t u(s, x) ds \quad (2.44)$$

Получаваме системата:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u) - w + u_{xx} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= u \end{aligned} \quad (2.45)$$

Тук $f(u) = u(u - \theta)(1 - u)$,

u е мембранный потенциал на аксона,

w е помощна променлива.

Проектираме решението $u(x, t)$, $w(x, t)$ на системата (2.45) в слой на клетъчна невронна мрежа, така че напрежението в клетка (k,l) свързана с $u(kh, t)$, $h = \Delta x$ може да се изрази с:

$$u_{xx} \sim \frac{1}{h^2} ((u(x+h, t) - u(x, t)) - (u(x, t) - u(x-h, t))). \quad (2.46)$$

И може да бъде записано като:

$$u_{xx} \sim \frac{1}{h^2} (u_{k+1,l} - 2u_{k,l} + u_{k-1,l}). \quad (2.47)$$

За системата (2.45) клетъчната динамика се описва с:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= u_i(u_i - \theta)(1 - u_i) - w_i + u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} &= u_i \end{aligned} \quad (2.48)$$

И синаптичния закон е:

$$I_i^s = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (2.49)$$

2.2.3 Динамично поведение на модела на интегро-диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо

За да изследваме динамиката на (2.48) прилагаме дискретната трансформация на Фурие чрез използване на следната формула:

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-st} dt. \quad (2.50)$$

И получаваме системата:

$$\begin{aligned} sU - Uz^{-1} + (2 + \theta)U - Uz &= N(U) - W \\ sW &= U, \end{aligned} \quad (2.51)$$

където

$$N(U) = -U^3 + (1 + \theta)U^2. \quad (2.52)$$

Получаваме трансферната функция:

$$H(j, \Omega) = \frac{j\omega(1 - \omega^2) - \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)}{(1 + \omega^2)^2 - \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} \quad (2.53)$$

Разделяме реална от имагинерна част:

$$Re \ H(j, \Omega) = \frac{\omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = \frac{U_{m0}}{W_{m0}} \quad (2.54)$$

$$\text{Im } H(j, \Omega) = \frac{\omega(1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = 0 \quad (2.55)$$

Търсим периодично решение на нашия клетъчно-невронно мрежови модел (2.48) във вида::

$$u_i(t) = \xi(\Omega_0 i + \omega_0 t + k\omega_0 T), \forall k \in N \quad (2.56)$$

където $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ е минималния период на решението.

Като ползваме граничните условия: $u_0(t) \equiv u_N(t)$, $u_{N+1}(t) \equiv u_1(t)$ и (2.56) получаваме:

$$\Omega_0 N = k\omega_0 T \quad \Omega_0 = \frac{k\Omega_0 T_0}{N} = \frac{2k\pi}{N}. \quad (2.57)$$

Получаваме представяне за входния сигнал $u_i = U_{m_0} \sin(\psi)$.

Представянето за изходния сигнал е: $w_i(t) = W_{m_0} \sin(\psi)$.

В съответствие с метода на хармоничния баланс, можем да напишем формула за намиране на основните компоненти на трансформацията на Фурие:

$$W_{m_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.58)$$

откъдето получаваме: $W_{m_0} = -\frac{3}{4}U_{m_0}^3$ и

$$\frac{\omega^2(-2\cos(\Omega) + 2 + \theta)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = \frac{U_{m_0}}{-\frac{3}{4}U_{m_0}^3}, \quad (2.59)$$

Откъдето:

$$U_{m_0} = \sqrt{\frac{4(1 - \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos\Omega - 2 - \theta)^2}{3\omega^2(2 + \theta - 2\cos\Omega)}}. \quad (2.60)$$

или

$$U_{m_0} = \sqrt{\frac{4(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)}{3}}$$

В съответствие с метода на хармоничния баланс ако за дадена стойност на

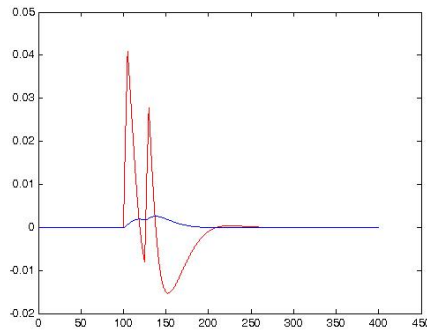
$$\Omega_0 = \frac{k\omega_0 T_0}{N} = \frac{2k\pi}{N}$$

може да се намери решение (ω_0, Ω_0) чрез решаване на уравненията описани с (2.54) и (2.55), тогава можем да предскажем съществуването на периодично решение с амплитуда U_{m_0} и период $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

По този начин доказахме следната теорема

Теорема 2 КНМ (2.48) с N клетки на интегро - диференциалното уравнение (2.43) има периодично решение $u_i(t)$ с крайно множество от пространствени честоти. $\Omega_0 = \frac{2k\pi}{N}$, $0 \leq k \leq N - 1$ и период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

За анализа на динамичното поведение на решението на уравнението от интегро – диференциален тип е разработена програма на Matlab, чрез която лесно се визуализират графично



Фигура 2.7. Динамично поведение на уравнението на Фиц Хю Нагумо

получените резултати.

На графиката 2.7 е показана реакцията на клетката в резултат на избухващото дразнение, което бързо намалява своята сила. Когато дразнението изчертано в червено достигне своята минимална стойност, решението т. е. реакцията на клетката / изчертано в синьо/ на интегро диференциалното уравнение получава своя максимум. След това се вижда как и дразнението и реакцията на клетката клони към нула.

2.3 Съдържание на Глава 3

В глава трета се прави изследване на някои НКНМ модели на уравнения на математическата физика Във фокуса на съвременните теоретични и експериментални изследвания стои Ефектът на Джозефсон. Този ефект е квантово явление с широко приложение в свръхпроводящите нанотехнологии. За целта в литературата са публикувани изследвания за джозевсонови контакти тип свръхпроводник феромагнит-свръхпроводник, в който е на лице връзка между магнитните моменти и джозефсоновия ток. Джозефсоновият контакт представлява сандвич от три слоя, от които външните са свръхпроводник, разделени от диелектрик (барьерен слой). При определени условия през този слой може да се наблюдава тунелен ефект на проникване на електрони. Математическият модел на това явление се описва с уравнението на синю-Гордън , което принадлежи към т.н. група солитонно-поддържащи уравнения (soliton supporting dynamical systems)

2.3.1 Моделиране на флуксони и тяхното взаимодействие

Определение: Флуксон е математическо понятие, съответстващо на вълните в магнитния поток в Джозефсоновия контакт или Джозефсоново съединение (JJ).

Уравненията, които описват флуксоните са следните:

$$I = I_0 \sin(\phi) \quad (2.61)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot v \quad (2.62)$$

където

I са загубите на супертока, който тече през JJ,

I_0 е максималната стойност на този ток, наречен критичен ток на JJ,

$\phi(t) = \theta_1 - \theta_2$ е разликата между фазите на функциите на сложните двойки вълни между двата полупроводници,

v е пада на напрежението в JJ,

$\Phi_0 = 2.027mVps$ е основна константа, наречена единичен флукс квант.

При изследване на флуксоните се използва уравнението на син - Гордон.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin(\phi) \quad (2.63)$$

Уравнението на 2.63 може да се запише така:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha(1 + \epsilon \cos(\phi)) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sin(\phi) - \gamma, \quad (2.64)$$

където $\gamma = \text{const} > 0$.

Ако $0 < \epsilon = \frac{G_1}{G_0} \ll 1, \alpha \in [10^{-2}, 10^{-4}]$.

Ако $\alpha \rightarrow 0$, то 2.64 е еквивалентно на 2.63.

Решенията на 2.64 наричаме флуксони.

Целта ни е да представим взаимодействието на флуксон- антифлуксон чрез клетъчно невронни мрежи.

За целта търсим решение от тип бягаща вълна $\phi(x, t) = \phi(x - ct)$ с постоянна скорост $c^2 < 1$.

Тогава 2.64 при $\epsilon = 0$ се представя във вида:

$$\frac{d^2 \phi}{d^2 \xi} - \alpha \frac{c^2}{1 - c^2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = \frac{\sin(\phi) - \gamma}{1 - c^2} \quad (2.65)$$

Като направим замествания и полагания получаваме решение от тип пътуваща вълна на модифицираното sin уравнение на Гордън:

$$\phi = \arcsin(\gamma_0) + 2 \arcsin\left(cn\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\Gamma c^2}}, (x - x_0), k\right)\right), \quad (2.66)$$

където

$$k = \sqrt{\frac{2\gamma_0}{\gamma + \gamma_0}} \quad (2.67)$$

$$\gamma_0 = \frac{2\Gamma c^2}{\sqrt{(1 - c)^2 + 4\Gamma^2 c^2}} \quad (2.68)$$

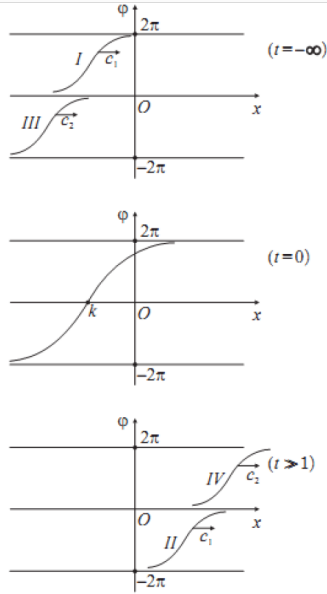
a е скоростта на пътуващата вълна.

Геометрически решението се изменя в интервала $(-\infty, \infty)$.

Положителния пик на решението, наречен флуксон се изменя в интервала $(0, 2\pi)$, а отрицателния пик, наречен антифлуксон се изменя в интервала $(-2\pi, 0)$.

Решението на моделираното уравнение можем да го представим във вида (ползвами сме [52]) $\psi = f(x).g(t) = \tan\left(\frac{\phi}{4}\right)$, където

$$f(x) = sh\left(\frac{ct}{\sqrt{1 - c^2}}\right), a \quad (2.69)$$



Фигура 2.8. Взаимодействие на два флуксона

$$g(t) = \frac{1}{ch\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)} \quad (2.70)$$

или

$$\phi = 4\text{arctg}(\psi) \quad (2.71)$$

Нека $c \in (0, 1)$.

Знаем, че

$$\text{sh } x \approx \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-x}, & x \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{2}e^x, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.72)$$

Тогава получаваме:

$$\psi_a \approx \frac{1}{c} \begin{cases} -e^{\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty \text{ IV} \\ e^{-\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty \text{ II} \end{cases} \quad (2.73)$$

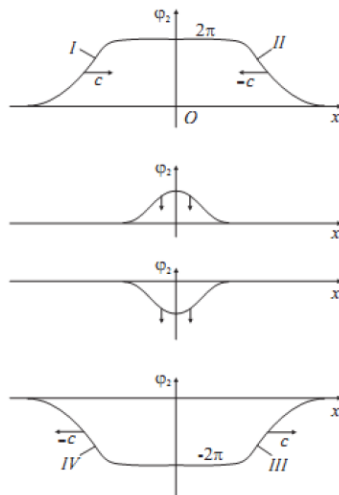
$$\psi_f \approx \frac{1}{c} \begin{cases} e^{\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty \text{ I} \\ -e^{-\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty \text{ III} \end{cases} \quad (2.74)$$

Антифлуксоните, отбелязани с 2.73 са монотонно намаляващи, а флуксоните, отбелязани с 2.74 са монотонно нарастващи.[67]

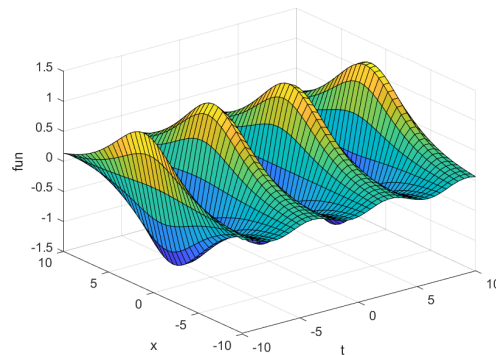
На фигура 2.8 е показано взаимодействието на двойка флуксони със скорости c_1 и c_2

Нека предположим, че $c_1 > c_2 > 0$. Тогава флуксон **I** има фаза x_1 и скорост c_1 , а флуксон **III** има фаза y_1 и същата скорост c_1 . След сблъсък с втори флуксон, първия, чиято скорост е c_1 започва да се движи назад. Скоростта, с която се е движил напред се забавя и започва да изостава от втория. По аналогичен начин получаваме взаимодействието между флуксони **II** и **IV**. Но сега след сблъсък с втори флуксон имаме придвижване напред и тогава по-бързия флуксон се придвижва допълнително напред със скорост $c_2 > c_1 > 0$.

Забележка 1 Бавният **I** и бързият **III** започват своето движение във време $t = \infty$. **III** е позициониран по-назад по отношение на **I**. Фазата на **I** е $\phi > 0$, а фазата на **III** $\phi < 0$



Фигура 2.9. Взаимодействие на вълните флуксон - антифлуксон



Фигура 2.10. Взаимодействие на двойка флуксони - breadon

Във време $t = 0$ **I** флуксон се съединява с **III** и се оформя конфигурацията на фигура 2.8. Получаваме $\phi(0, x) \rightarrow 2\pi$ за $x \rightarrow \infty$ и $\phi(0, x) \rightarrow -2\pi$ за $\phi(0, x) \rightarrow -\infty$.

Когато $t \ll 0$ двата флуксона се появяват отново със същите скорости c_1 и c_2 и същите профили. Те са означени с **IV** по бързия и **II** по бавния. Флуксон **IV** е по-напред по отношение на флуксон **II**.

Флуксон **IV** има фаза $\phi > 0$, а флуксон **II** има фаза $\phi < 0$.

На фигура 2.10 е показано взаимодействието на двойка флуксони.

Решението на

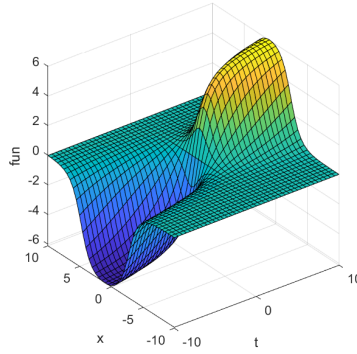
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha(1 + \epsilon \cos \phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sin \phi - \gamma \quad (2.75)$$

има вида, изведен в [67]

$$\phi = \arctan \frac{\tan x \sin(\cos \sigma t)}{\cosh(\sin \sigma t)} \quad (2.76)$$

където: σ е параметър и се знае, че $|\sigma| < \frac{\pi}{2}$

Моделиране чрез клетъчна невронна мрежа взаимодействието на флуксони
 Като използваме създадената от [30] и [31] клетъчна динамика правим дискретизация на уравнението 2.75 по следния начин:



Фигура 2.11. КНМ симулация на флуксон - антифлуксон

Конструираме фазата $\phi(x, t)$ върху слой на КНМ, така че статичното напрежение на клетъчна невронна мрежа клетката в точка от мрежата да е v_j .

Изследваме едноразмерна мрежа, чиито клетки имат паралелно свързан линеен капацитет и нелинеен индуктор, описан чрез:

$$i_j = f(v_j)_\alpha (1 + \epsilon \cos v_j) u_j - \sin v_j \quad (2.77)$$

и клетките са свързани една с друга с линейни индуктори (с индуктивност L).

Клетъчната динамика на мрежата се описва с уравнението:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{1}{c} [I_j - f(v_j)] \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= U_j, 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (2.78)$$

а синаптичния закон е :

$$I_j = i_{L_j} - i_{L_{j+1}} = \frac{1}{L} (v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) \quad (2.79)$$

където

$$v_j(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\tau) d\tau \quad (2.80)$$

е свързан с флуксона във възел j .

Синаптичния закон 2.79 представлява дискретизирания Лапласиан $A=[1, -2, 1]$ във възел v_j .

Компютърната симулация на флуксон- антифлуксон е дадена на фигура 2.11.

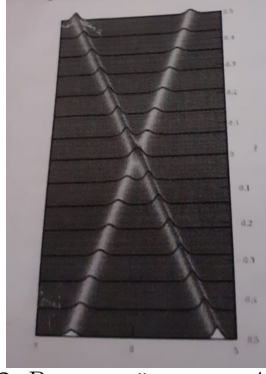
В [14] са описани различни типове на синус уравнението на Гордън.

Разглеждаме уравнението:

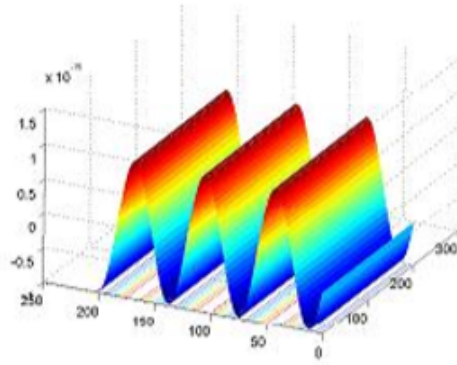
$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \pm \sin \phi + \frac{1}{2} \lambda \sin \frac{1}{2} \phi \quad (2.81)$$

В това уравнение в дясната страна има два пъти функцията синус. В [14] е доказано, че когато $\lambda = 1$ 2.81 е неустойчиво. Такъв тип неустойчивост описва разпространението на възбудането на усилвателя.

При 2.81 с отрицателен знак и $\lambda = 1$ взаимодействието на $(\pi - 2\delta)$ kink - antikink решения



Фигура 2.12. Взаимодействие на 4π "kink" вълни



Фигура 2.13. Периодично решение на КНМ на 2.83 и 2.84

известно количество енергия се губи и тогава ще се появи голяма вълна бредон.

Взаимодействието на вълни от тип кинк на 2.81 с отрицателен знак в дясно и $\lambda = 1$ са дадени на фигура 2.12.

Направен е КНМ на уравнението:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = -(\sin \phi + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \phi) - \gamma \omega \Omega_l^{-2} B_1 \sin(\omega \Omega_l^{-1} t) \quad (2.82)$$

Клетъчната динамика [73] се описва с уравненията:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{1}{c} [I_j - g(v_j)] \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= u_j, 1 \leq j \leq N \\ g(v_j) &= -(\sin v_j + \frac{1}{2} \sin v_j) - \gamma \omega \Omega_l^{-2} B_1 \sin(\omega \Omega_l^{-1} t) \end{aligned} \quad (2.83)$$

и синаптичния закон е:

$$I_j = i_{L_j} - i_{L_{j+1}} = \frac{1}{L} (v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) \quad (2.84)$$

Правим двойна трансформация на Фурие за този модел клетъчна невронна мрежа.

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-st} \quad (2.85)$$

$$s = i\omega$$

$$z = e^{i\Omega}$$

ω е времева честота, а Ω е пространствената честота.

Като приложим метода на хармоничния баланс [73], получаваме, че $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, $0 \leq K \leq N-1$ когато масива е кръгов и има краен брой пространствени честоти. T е минималния период.

След направена симулация на КНМ получаваме графиката 2.13.

Така доказахме че КНМ описан с 2.83 и синаптичен закон 2.84 на кръгов масив с N идентични клетки, които са индуктивно свързани Джозефсонови съединения (JJ) имат периодични решения $(u_j(t), v_j(t))$ с краен брой пространствени честоти.

Разгледано е следното синус уравнение на Гордън:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin \phi + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3} \phi + \frac{2}{3} \sin \frac{2}{3} \phi \quad (2.86)$$

След направена симулация получаваме, че решението изглежда като на фигура 2.10.

2.3.2 Моделиране на вискоеластичното уравнение на Бургерс и изследване на неговата динамика

Най-простият модел, който показва нелинейната връзка между движението на молекули във флуиди/конвекция/ и появата на устойчиво състояние, възникнало в неравновесна среда в резултат на разсейването на енергия, постъпваща в дадена система е добре известно като уравнение на Бургерс. То има вида:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}. \quad (2.87)$$

Това уравнение е въведено от Бургерс [25] като математически модел на турбуленция.

Ще покажем как добавянето на вискоеластичност влияе на решенията от тип пътуваща вълна.

Нека да изследваме уравненията:

$$u_t + uu_x = v_x, \quad (2.88)$$

$$v_t + uv_x - vu_x = \alpha u_x - \beta v. \quad (2.89)$$

В уравнението 2.89 времето за релаксация е $\lambda = \beta^{-1}$, и $\alpha = \mu\lambda^{-1}$ и може да се интерпретира като еластичност на материалите когато няма възстановяване при въздействие ($\beta = 0$). В противоположния случай имаме мигновено възстановяване от въздействието ($\lambda \rightarrow 0$), и тогава 2.89 се редуцира до

$$v = \mu u_x \quad (2.90)$$

и системата уравнения 2.88 и 2.89 е еквивалентна на уравнението на Бургерс с вискозитет $\mu = \varepsilon$.

Модела на Максвел е най-простия модел изразяващ вискоеластичността на материалите.

Изследвана е пружина закачена в единия край с коефициент на разтягане k и коефициент на затихване μ . Въздействието върху пружината означаваме с v ,

$$\lambda \dot{v} + v = \mu \dot{\varepsilon}, \quad (2.91)$$

където ε е напрежението в елемента и $\lambda = k/\mu$ е времето за релаксация. Тогава линейния модел на уравнението на Максвел е

$$\lambda v_t + v = 2\mu D, \quad (2.92)$$

където $2\mu D$ е опъването на пружината при въздействие.

Понякога 2.92 не изразява закона за разтягане, защото не е инвариантен във времето. Референтната рамка на разтягането е изследвана чрез използване на подходящи производни по времето, близки до производните, изразяващи скоростта на промяна на материалите.

$$\bar{S} = S_t + u \cdot \nabla S - \nabla u S - S \nabla u^T. \quad (2.93)$$

Като заместим в 2.92 частната производна по времето със съответната производна изразяваща конвекцията, получаваме уравнението на Максвел (УКМ)

$$\lambda \bar{v} + v = 2\mu D. \quad (2.94)$$

Елемента (i, j) в 2.94 можем да изразим чрез

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_{kj} - v_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \\ + v_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (2.95)$$

Където сумирането е по индекса \mathbf{k} . Съществуват различни инвариантни представяния за производните.

Тук е разгледана едномерната версия на уравнението на конвекцията на Максвел (УКМ), чието уравнение е:

$$\lambda(v_t + uv_x - vu_x) + v = \mu u_x. \quad (2.96)$$

Уравнението 2.96 е еквивалентно на 2.89.

Разделяме двете страни на 2.96 на коефициента λ и получаваме.

$$v_t + uv_x - vu_x = \alpha u_x - \beta v, \quad (2.97)$$

където

$$\alpha = \mu \lambda^{-1}, \quad (2.98)$$

$$\beta = \lambda^{-1}. \quad (2.99)$$

Тук параметъра α е коефициент на еластичност на материалите ако няма възстановяване

след налягане ($\beta = 0$). Това е така, защото закона за еластичността се изразява чрез времето за възстановяване (λ) и вискозитета (μ) или чрез модула на еластичност α и скоростта на разпадане β

Забележка 2 *Получено е решение на изследваното уравнение във вид на пътуваща вълна, която има два пика във вълновия профил. Когато в решението има, два пика възниква въпроса какво определя профила на удара на вълната? Как се определя формата на решението между два профила на вълната? Защо има решение с два профила на вълната?*

В търсене на отговор на тези въпроси е приложен метода на RTD-базиранни невронни мрежи .

RTD-клетъчни невронни мрежи

КНМ [30] са сложни нелинейни динамични системи и следователно може да се очакват интересни явления като бифуркации и хаос в такива мрежи. Доказано е, че когато коефициентите на обратната връзка са променени до критична стойност, клетъчна невронна мрежа, която има темплейт с противоположен знак може да промени състоянието на мрежата от стабилно до нестабилно. Това е явлението, при което се губи стабилност и се раждат гранични цикли. По време на изследването са приложени едномерни RTD - базирани клетъчни невронни мрежи без входни и прагови условия [26]. Тогава уравнението на клетъчна невронна мрежа (RTD), с която е изследвано уравнението на Burger (2.88 и 2.89) е следното:

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} + u_j A_1 * u_j &= A_1 * v_j \\ \frac{dv_j}{dt} + u_j A_1 * v_j - v_j A_1 * u_j &= \\ &= \alpha A_1 * u_j - \beta v_j, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$1 \leq j \leq M$, където $A_1=(1, -2,1)$ е едномерен темплейт на клетъчно невронна мрежа, а $*$ е конволюционен CNN оператор [30]

Решението от тип пътуваща вълна на избраната RTD КНМ 2.100 има следната структура:

$$\begin{aligned} u_j &= \Phi(j - ct), \\ v_j &= \Psi(j - ct), \end{aligned} \quad (2.101)$$

където Φ, Ψ са непрекъснати функции. Нека заместим (2.101) в (2.100).

Търсим решение $\Phi(s; c)$, $s = j - ct$: След направени замествания и пресмятания получаваме:

$$\begin{aligned} -c\Phi'(s; c) + G_1(\Phi(s; c)) &= 0, \\ -c\Psi'(s; c) + G_2(\Psi(s; c)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

където $G_1(\Phi), G_2(\Psi) \in \mathbf{R}^1$. Изследваме решенията от тип пътуваща вълна защото съответстват на хетероклинични свързвания между две равновесни точки в безкрайността.

Равновесните точки на системата (2.102) съответстват на състоянията при които $\Psi = 0$. Така приемаме следните асимптотични гранични условия:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s; c) = u_l, \quad (2.103)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s; c) = u_r,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Psi(s; c) = 0, \quad (2.104)$$

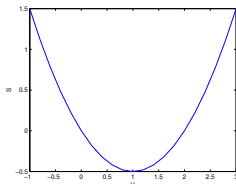
$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi(s; c) = 0,$$

за някое $c > 0$.

В глава трета е доказан следния резултат:

Теорема 3 Нека $u_j(t) = \Phi(j - ct)$ и $v_j = \Psi(j - ct)$ са решения от тип пътуваща вълна на модела на клетъчно невронна мрежа (2.100) на системата от уравнения на Бургер (2.88 и 2.89). Тогава съществува $c = \frac{u_l + u_r}{2} > 0$, такова, че

1. за $\alpha > \frac{d^2}{4}$, $d = u_l - u_r$ съществува гладко решение от тип пътуваща вълна на 2.100
2. за $\frac{d^2}{8} < \alpha < \frac{d^2}{4}$ съществува частично гладка функция с два скока.
3. за $\alpha < \frac{d^2}{8}$ съществува решение от тип пътуваща вълна с единичен пик.



Фигура 2.14. Графиката съответства на решение от тип пътуваща вълна (2.100)

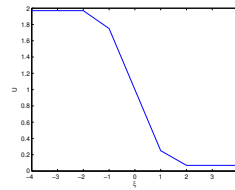
Изведена е формула за профила на вълната:

$$\Phi'(s; c) = \frac{-\beta(\Phi(s; c) - u_l)(\Phi(s; c) - u_r)}{(\Phi(s; c) - u_l)(\Phi(s; c) - u_r) + 2\left(\left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2 - \alpha\right)}. \quad (2.105)$$

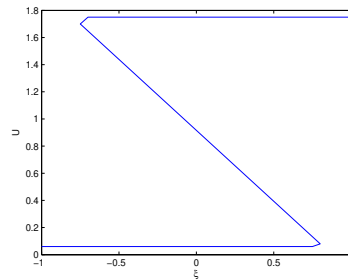
От 2.105 става ясно, че имаме следните възможни случаи: Решението от тип пътуваща вълна от (2.100) съществува тогава и само ако

1. $u_l > u_r$ когато $\alpha > \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
2. $u_l < u_r$ когато $2\alpha < \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
3. $u_l > u_r$ когато $\alpha > \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
4. $u_l < u_r$ когато $2\alpha < \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
5. няма пътуваща вълна ако $\left(\frac{u_l - u_r}{8}\right)^2 \leq \alpha \leq \left(\frac{u_l - u_r}{4}\right)^2$.

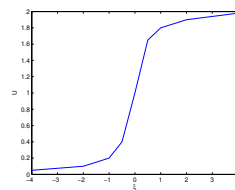
На фигури 2.15, 2.16 и 2.17 са представени симулации на RTD КНМ на 2.100 за различни стойности на параметрите



Фигура 2.15. Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите а).
 $u_l = 2$, $u_r = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 1.2$



Фигура 2.16. Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите б).
 $u_l = 2$, $u_r = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 0.9$



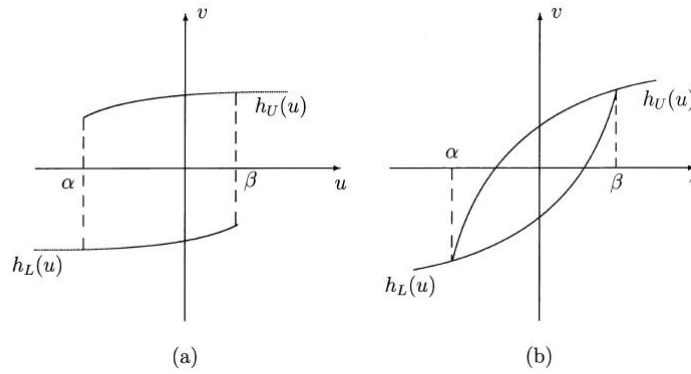
Фигура 2.17. Профил на вълната на КНМ 2.100 за различни стойности на параметрите с).
 $u_l = 2$, $u_r = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 0.25$

2.4 Съдържание на Глава 4:

В глава четвърта е изследвана на динамиката на НКНМ с хистерезис

Хистерезиса се дефинира в научната литература зависимост с памет между входния $v(t)$ и изходния сигнал $u(t)$. Зависимостта на входа се определя от двойка прагови стойности $\alpha < \beta$.

Математически хистерезиса се описва, като се използва хистерезисен оператор и тогава математическия модел на съответната динамична система съдържа диференциални уравнения, свързани с един или няколко хистерезисни оператора и зависят от началните и граничните условия.



Фигура 2.18. Графика на различните видове хистерезис

На фигура 2.18 са показани възможните случаи на движение (на хистерезис) на двойката $(u(t), v(t))$.

Например уравнението на осцилатор с възстановяващата сила на хистерезиса има вида :

$$x''(t) + F[x](t) = f(t), \quad (2.106)$$

където $F[x]$ е хистерезисен оператор.

Има два типа хистерезисни отношения:

1. **Пасивен**, при който графиката на $(u(t), v(t))$, където изходът $v(t) = F[u](t)$ описва дадена непрекъсната частично монотонна функция $u(t)$ върху две фиксирани изходни криви h_U и h_L , които са дефинирани в интервалите $[\alpha, \infty)$ и $(-\infty; \beta]$, като $\alpha < \beta$ виж фигура 2.18.

В [59] са описани математическите модели на хистерезиса. Пасивния хистерезис се описва по следния начин:

$$F[u(t)] = \begin{cases} h_L(u(t)) & \text{ako } u(t) \leq \alpha \\ h_U(u(t)) & \text{ako } u(t) \geq \beta \\ h_L(u(t)) & \text{ako } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \alpha \\ h_U(u(t)) & \text{ako } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \beta, \end{cases} \quad (2.107)$$

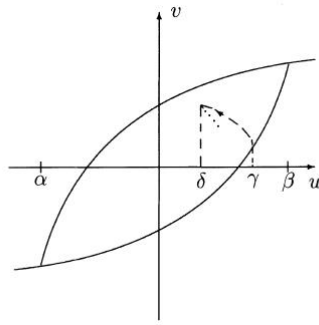
където $\tau(t) = \sup\{s | s \leq t, v(s) = \alpha \text{ или } v(s) = \beta\}$. Тоест $\tau(t)$ е времето, когато е достигнат последния праг. $\tau(t)$ е дефиниран \forall непрекъснат вход $u(t)$, така че може да се счита, че $F \in C[0, \infty)$.

2. **Активен** хистерезис, позволяващ траектории вътре в хистерезисната област.

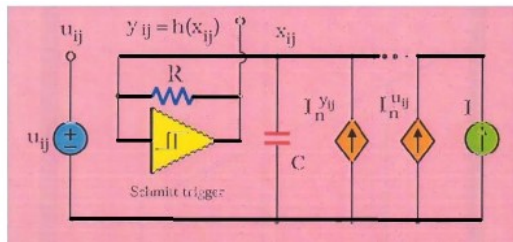
$$H = \{U, v | \alpha < u < \beta, H_L < H_U\} \quad (2.108)$$

Ако при частично монотонен вход $u(t) = \gamma$ графиката на $(u(t), v(t))$ се движи вътре в хистерезисната област (виж фигура 2.19)

Ако входа продължава да намалява до δ , тогава графиката на функцията расте и се движи вътре в хистерезисната област. Характерното тук е това, че от скоростта, с която



Фигура 2.19. Графика на активен хистерезис



Фигура 2.20. Схема на хистерезисна клетъчна невронна мрежа

се подава сигнал на входа не зависи скоростта на изхода и той винаги е в хистерезисната област. Математическите модели за активния и пасивния хистерезис, дефинирани по-горе са достатъчно различни, макар, че тяхното базирано на памет поведение е подобно.

Входовете на двете функции се описват чрез частично монитонна функция, но активния хистерезис има тази особеност, че лесно се дефинира за непрекъснати входове чрез използване на гранични процеси [59].

Определение: Хистерезиса се дефинира чрез две характеристики:

1. Памет във всяка точка на времето, т.е. стойността на изхода $v(t)$ може да зависи не само от входа $u(t)$, но и от предишното състояние на $u(t)$.
2. Изхода е инвариантен по отношение на времето.

Когато е изпълнено 1, ще казваме, че имаме оператор с памет, който се дефинира така:

$$F : \text{DOM}(F) \subset C^0([0, T]) \times RC^0([0, T]) \quad (2.109)$$

Развитието на наноелектрониката е свързано с разработката на все по – бързодействащи устройства за запис и съхраняване на информацията с възможен презапис и с ниска енергозависимост. При създаване на невронни мрежи от ново поколение се ползват мемристори – двуполусни устройства, съпротивлението на които се променя от протичащия през него заряд. Съществуването им е предсказано още от Чуа в далечната 1971 година, но за пръв път ефектът мемристивност е демонстриран през 2008 година за системи от вида метал-диелектрик –метал, когато е открит подходящ материал за изработката им. Използването на мемристори като синапси позволява да се повиши изчислителната ефективност на невронните системи, като се повишава плътността на логическите елементи и свързаността на невроните. Чрез мемристори се реализира явлението хистерезис.

2.4.1 Изследване на динамиката на хистерезисни НКНМ с мемристори

Мемристорите се използват в хистерезисни КМН, (2.20).

Те участват и при разработването на методи, позволяващи определянето на параметрите на динамичната система, която се изследва. Индустрията за обработка на изображения използва нано КНМ, като компютърните експерименти показват, че включването на променливи мемристори като синапси позволяват повече степени на свобода на мрежата, като по този начин те превъзхождат познатите типове като синапси. Такива нано КНМ са представени от [4] и [71].

Както е показано в [8] и [6] такива клетъчни невронни мрежи работят в режим "граница на хаоса имат изчислителна сложност и ще се ползват за в бъдеще в изчислителните системи.

Нано елементите ще играят голяма роля в бъдещето на КНМ УМ (CNN УМ- клетъчни невронни мрежи - универсални машини) при реализацията им като чип, които са изследвани като синаптична връзка за пръв път в [7] . В бъдеще CNN УМ ще имат голямо приложение при сензорни обработващи системи.

В дисертацията е представен NiO_2 нимобиев диоксид Mott мемристор, който е вграден в релаксационен осцилатор, който периодично преминава в осцилиращи хаотични движения.

Квази статичното напрежение в мемристора показва област на контролиран чрез ток отрицателно диференциално съпротивление (NDR) и има възпроизвеждащ се хистерезис при по високи токове.

В [71] динамичното поведение на тези мемристори се получава експериментално чрез изграждане на експериментален осцилатор. Направените там динамични измервания съвпадат със статичните такива. Пак там е показано, че включването на мемристори в Хопфийлд изчислителна мрежа може да подобри ефективността и точността на решението при изчислително сложни проблеми.

Показано е изследване на NiO_2 Mott мемристор, като вграден в хистерезисна клетъчна невронна мрежа, работеща във възстановяващ режим. На практика за хистерезисните клетъчни невронни мрежи [9] и [11] може да се определи областта на клетъчни параметри за локално активните клетки. Изучена е динамиката на получения модел чрез теорията за локалната активност. Определена е и границата на областта на хаоса, в която клетъчна невронна мрежа има сложно поведение.

Разглежданата хистерезисна клетъчна невронна мрежа е направена от един ред клетки с хистерезисни превключватели. Модела работи в хистерезисната област и така има много приложения.

Когато клетъчна невронна мрежа работи като релаксационен осцилатор, тогава могат да се генерират различни модели нелинейни вълни.

Асоциативната и динамичната памет могат да са производни на хистерезисна клетъчна невронна мрежа.

NDR - Negative Differential Resistance може да се моделира чрез използване на строго нелинейни транспортни връзки, при които температурата се повишава.

NiO_2 Mott мемристора има следния закон на охлаждане:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i_m v_m}{c_{th}} - \frac{x - T_{amb}}{c_{th} R_{th}(x)}, \quad (2.110)$$

където: $T_{amb} = 300K$ е температурата на околната среда;

$c_{th} = 10^{-16} W_s K^{-1}$ е термичен капацитет;

R_{th} е коефициент, зависещ от температурата на устройството.

Основните изисквания за хаотични осцилации в електронни вериги с постоянно напрежение са големината на тока, който показва локална активност, още три динамични променливи на състоянието, които са свързани като осцилатор [6].

Уравнението на модела на мемристора е :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{i,j}}{dt} &= -x_{i,j} + M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}, t) - 2h(x_{i,j}), \\ y_{i,j} &= G(x_{i,j}, u_{i,j})u_{i,j} \end{aligned}, \quad \text{където:} \quad (2.111)$$

$x_{i,j}$ е променливата на състоянието;

$y_{i,j}$ е i_m ;

$u_{i,j}$ е v_m ;

$h(x_{i,j})$ е следната динамична хистерезисна функция дефинирана в [11].

$$h(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{за } x(t) > -1, f(x(t_-)) = 1 \\ -1 & \text{за } x(t) = -1 \\ -1 & \text{за } x(t) < 1, f(x(t_-)) = -1 \\ 1 & \text{за } x(t) = 1 \end{cases} \quad (2.112)$$

$t_- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t - \epsilon), \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}) &= \frac{y_{i,j} u_{i,j}}{c_{th}} - \frac{x_{i,j} - T_{amb}}{c_{th} R_{th}} \\ G(x_{i,j}, u_{i,j}) &= A(x_{i,j})(B_1^2(x_{i,j}) + (1 + (\frac{\sqrt{u_{i,j}}}{B_1(x_{i,j})} - 1) \cdot e^{\frac{\sqrt{u_{i,j}}}{B_1(x_{i,j})}}) + \frac{1}{2d}) \end{aligned} \quad (2.113)$$

където

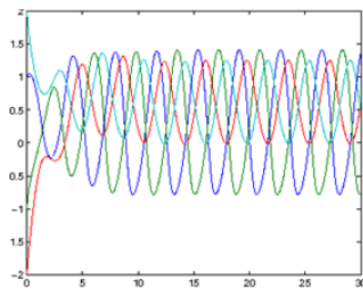
$$\begin{aligned} A_1(x_{i,j}) &= \sigma_0 \cdot e^{\frac{0.301}{2k_b \cdot x_{i,j}^A}} \\ A &\text{ е странична зона на устойчивост} \\ B_1(x_{i,j}) &= \frac{k_b \cdot x_{i,j}}{\omega}, \\ k_b &= 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ е константата на Болцман} \\ \omega \text{ и } \sigma_0 &\text{ са реални константи, } d \text{ е коефициент на гъвкавост} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Модела на NbO_2 Mott мемристор 2.111, който е наречен нано мащабен мемристор CNN (NM CNN) е система, състояща се от диференциални уравнения от висока степен и алгебрични уравнения.

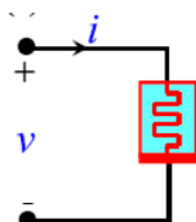
Направената симулация на този модел показва хаотични осцилации 2.21.

Приложена е теорията на локалната активност, за да определим границата на хаоса, в който модела 2.111 показва сложно поведение.

Теорията за локалната активност предлага конструктивно - аналитичен метод за опреде-



Фигура 2.21. Симулация на нано-мемристорна клетъчна невронна мрежа която работи като релаксационен осцилатор



Фигура 2.22. 2D - схема на мемристор

ляне на клетъчните параметри на хистерезисна КНМ [9].

На фигура 2.22 е показана схема на мемристор.

Предполага се, че всяка клетка оперира близо до равновесната си точка.

Ако съществува точно една равновесна точка, то мрежовия модел от активни клетки прилича на източник на слаб силов сигнал, както е описано в [6], т.е ако клетките са способни да поглъщат малките сигнали, тогава се казва, че клетките са локално активни.

В теорията за локалната активност може да се обясни възникващата сложност чрез точни математически критерии, дадени за идентифициране на относително малка локално активна област от локално активни параметри, наречена граница на хаоса.

Кинетичното уравнение за локално активната клетка може да покаже комплексно динамично поведение, като гранични цикли или хаос дори ако клетките не са свързани една с друга (т. е всички дифузни коефициенти са 0)

В свързаните клетки могат да се зародят сложни пространствени и времеви явления, като превъртане на вълни и пространствено- времеви хаос.

В дисертацията е описан алгоритъм за определяне на границата на хаоса за нано КНМ модел 2.111.

Прилагаме го за нано КНМ модела 2.111.

Равновесните точки се получават чрез решаване на системата.

$$\begin{aligned} 0 &= -x_{i,j} + M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}, t) - 2h(x_{i,j}) \\ 0 &= G(x_{i,j}, u_{i,j})u_{i,j} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Тази система може да има три реални корена като функция на клетъчните параметри.

Тогава изчисляваме клетъчните коефициенти $a_{11}(E_r), a_{12}(E_r), a_{21}(E_r), a_{22}(E_r)$

за всяка равновесна точка $r=1,2,3$ от якобиан матрицата във всяка равновесна точка.

Определение 4 *Както в [8]. Дискретна система от уравнения се нарича **локално активна** тогава и само тогава, когато нейните асоциирани клетки са локално активни на*

някоя тязна равновесна точка, в останалите точки са локално пасивни.

Определение 5 Една точка се намира и в устойчивия и в локално активната област на равновесната си точка r , за модела 2.111 когато $a_{22} > 0$ или $4a_{11}.a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2$ и е изпълнено $Tr(E_r) < 0$ и $\Delta(E_r) > 0$

Тази област от параметри се нарича $SLAR(E_r)$ (Small Local Activ Region)

Съществуващите дефиниции за граница на хаоса са дадени въз основа на практическия опит с динамични системи.

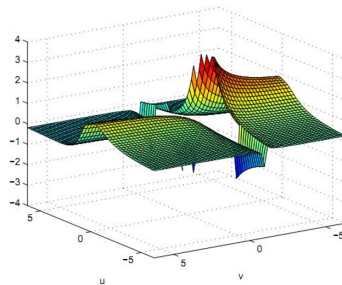
Определение 6 Една NM CNN работи в границата на хаоса тогава и само тогава, когато съществува поне една равновесна нейна точка, която е и локално активна и устойчива.

Доказана е и следната теорема:

Теорема 4 NM CNN модела 2.111 оперира в областта граница на хаоса тогава и само тогава, когато са изпълнени следните условия:

$$\begin{aligned} c_{tr}.R_{tr} &< 1 \\ \frac{4}{c_{tr}.R_{tr}} &< \left(\frac{K-r}{2d} + \frac{2K_r.K_b}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

Направена е симулация, основана на алгоритъма за определяне граница на хаоса чрез МАТЛАБ , като е ползван алгоритъм на Ойлер с право разпространение на грешката и времева стъпка $t=0.01$



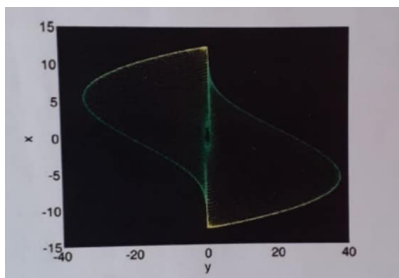
Фигура 2.23. Граница на хаоса в NM КНМ

Хистерезисната функция е програмирана както следва:

$$h(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{за } x(t_n) > -1, f(x(t_{n-1})) = 1 \\ -1 & \text{за } x(t_n) = -1 \\ -1 & \text{за } x(t_n) < 1, f(x(t_{n-1})) = -1 \\ 1 & \text{за } x(t_n) = 1 \end{cases} \quad (2.117)$$

където $t_n = n\Delta t, n = 1, 2$.

Теоретичните резултати се потвърждават и от направената симулация 2.24



Фигура 2.24. Граница на хаоса в NM KHM модел

2.4.1.1 Приложение на метода на хармоничния баланс за намиране на периодични решения на хистерезисни НКНМ

Представен е клас квазилинейни хиперболични уравнения, в които има оператор за памет от следния вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + F(u) = 0 \text{ в множеството } Q = [a, b] \times [0, T] \quad (2.118)$$

Ще търсим периодично решение на 2.118, което води до изучаването на обикновени диференциални уравнения с хистерезис. Ще приложим метода на нелинейните клетъчно невронни мрежи. За целта е необходимо да направим пространствена дискретизация. Уравнението 2.118 ще се трансформира в система от обикновени диференциални уравнения, които се идентифицират като статични уравнения на клетъчна невронна мрежа с подходящи темплейти. Пространствената дискретизация правим по следния начин: проектираме $u(x, t)$ в слой на клетъчна невронна мрежа така, че производната $\frac{\partial u}{\partial x}$ да се запише като $\frac{u_{j+1} - u_j}{h}$, където $h = \Delta x$ е дискретната стъпка. Тогава уравнението 2.118 може да се запише със следната система от обикновени диференциални уравнения:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{(u_{j+1} - u_j)}{h} - F(u_j), 1 \leq j \leq M \quad (2.119)$$

Да разгледаме линейна клетъчна невронна мрежа с $M \times M$ клетки, и да ставим 2.119 със статичното уравнение на автономна клетъчна невронна мрежа. Получаваме следните темплейти:

$$\begin{aligned} A &= [0, 1, \frac{1}{2h}][u_j] \\ \tilde{A} &= [0, -F(u_j), 0], 1 \leq j \leq M = N.N \end{aligned} \quad (2.120)$$

Нека $F(u_j)$ да е реален функционал, дефиниран с "горна" функция F_U и "долна" функция F_L виж фигура ??.

Функциите F_U и F_L са реални, непрекъснати, частично диференцируеми, като $F_U(u_j) = -F_L(u_j)$. Нека изходната функция f на нашия модел е стандартна сигмоидална функция. Разглеждаме периодични гранични условия, които правят нашата клетъчна невронна мрежа кръгова:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_n \\ u_n + 1 &= u_1 \end{aligned} \quad (2.121)$$

Нека хистерезисния функционал е: $F(u_j) = \frac{u_j^3}{3} - u_j$.

Тогава модела на клетъчна невронна мрежа на 2.118, когато $F(u_j) = \frac{u_j^3}{3} - u_j$ има вида:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{(u_{j+1} - u_j)}{h} - \left(\frac{u_j^3}{3} - u_j\right), 1 \leq j \leq M = N.N \quad (2.122)$$

или след извършване на поределени пресмятания 2.122 придобива вида:

$$\frac{du_j}{dt} = u_j - \frac{u_{j+1}}{h} + \frac{u_j}{h} + n(u_j), \quad (2.123)$$

където $n(u_j) = \frac{u_j^3}{3}$

Ще изучим динамичното поведение на 2.123 с метода на хармоничния баланс. За целта ще приложим следната трансформация :

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-st} dt \quad (2.124)$$

към 2.123. Тогава получаваме:

$$sU(s, z) = U(s, z) + \frac{1}{h}U(s, z) - \frac{z}{h}U(s, z) + N(U(s, z)), \quad (2.125)$$

където $N(U(s, z))$ е подложената на трансформацията 2.124 функция $n(u_j)$. След направени преобразования получаваме, че:

$$U(s, z) = \frac{h}{sh + z - h - 1} N(U(s, z)). \quad (2.126)$$

Така получаваме, че динамичната система може да се преобразува в схемата на Лур, в която трансферната функция е:

$$H(s, z) = \frac{h}{sh + z - h - 1} \quad (2.127)$$

В получения израз заместваме $s = i\omega_0$ и $z = e^{i\Omega_0}$, където ω_0 е времевата честота, а Ω_0 е пространствената честота и получаваме, че трансферната функция може да се представи като функция на ω_0 и Ω_0 т.е:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{U_{\Omega_0}(\omega_0)}{V_{\Omega_0}(\omega_0)}, \quad (2.128)$$

където U е входната, а V е изходната променлива според съответната схема на Луре.

За да намерим периодични решения, ще трябва входната променлива в системата да е във вида:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (2.129)$$

а изходната променлива да е във вида:

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (2.130)$$

Според метода на хармоничния баланс се разглеждат първите хармоници, които се получават при $j=0$:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.131)$$

и

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.132)$$

Амплитудата V_{m_0} на изходната променлива се изчислява по формулата:

$$V_{m_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(u_{m_0} \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi \quad (2.133)$$

Като вземем под внимание, че $N(U_{m_0} \sin(\psi)) = -\frac{U_{m_0} \sin \psi}{3} \sin(\psi)$ и като приложим формулата 2.133 получаваме:

$$V_{m_0} = -\frac{U_{m_0}^3}{4} \quad (2.134)$$

Като ползваме 2.131, 2.132 и 2.134 получаваме:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{U_{\Omega_0}(\omega_0)}{V_{\Omega_0}(\omega_0)} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \quad (2.135)$$

Трансферната функция 2.126 има вида:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{h}{ih\omega_0 + \cos(\Omega_0) + isin(\Omega_0) - h - 1} \quad (2.136)$$

Получената функция рационализираме и отделяме реалната от имагинерната част и получаваме:

$$Re(H_{\Omega_0}(\omega_0)) = \frac{h(\cos(\Omega_0) - 1 - h)}{(\cos(\omega_0) - 1 - h)^2 + (h\omega_0 + \sin(\Omega_0))^2} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} = -\frac{4}{U_{m_0}^2} \quad (2.137)$$

$$Im((H_{\Omega_0}(\omega_0))) = \frac{-h(h\omega_0 + \sin(\Omega_0))}{(\cos(\omega_0) - 1 - h)^2 + (h\omega_0 + \sin(\Omega_0))^2} = 0$$

Нашия модел на клетъчна невронна мрежа на 2.123 е крайна кръгова мрежа от M клетки. Тогава ще имаме крайно множество от честоти:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{M}, 0 \leq k \leq M \quad (2.138)$$

Според метода на хармоничния баланс ако при дадена стойност на Ω_0 от 2.138 можем да намерим ω_0 и U_{m_0} от 2.137. Тогава можем да предскажем съществуване на периодични решения на нашия модел на клетъчна невронна мрежа за хиперболичното уравнение 2.123. От 2.137 след извършване на съответните опростявания получаваме, че

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\frac{\sin(\Omega_0)}{h} \\ U_{m_0} &= 2\sqrt{\frac{h+1-\cos(\Omega_0)}{h}} \end{aligned} \quad (2.139)$$

Така доказахме, че е в сила следната теорема:

Теорема 5 *Модела на клетъчна невронна мрежа на 2.123 на хиперболичното уравнение с*

хистерезис 2.118 с кръгова мрежа от $M=N.N$ клетки и периодични гранични условия:

$$\begin{aligned}u_0(t) &= u_M(t) \\ u_{M+1} &= u_1(t)\end{aligned}\tag{2.140}$$

има периодично решение с период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и амплитуда U_{m_0} за всички $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{M}$, $0 \leq k \leq M-1$ за всички M , както и тези решения са устойчиви.

2.5 Съдържание на Глава 5:

В глава 5 се изследва динамиката на системата на Мейнхард - Гиерер

2.5.1 Модел на Мейнхардт - Гиерер

Разпределените математически модели, които демонстрират промяна на количеството на едно или няколко вещества като резултат от два процеса: взаимодействие между компоненти (реакция) и дифузия се наричат модел от тип реакция дифузия и имат следния вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial}{\partial r} \sum D_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial r},\tag{2.141}$$

Където $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са нелинейни функции описващи компонентите на системата; $D_{i,j}$ са съответните коефициенти на дифузия. В първоначално еднородна система протича химична реакция между различни вещества, на които скоростта на дифузия им е недостатъчна за пълна реакция и може да загуби устойчивост при определена дължина на вълната. Тук неустойчивостта предизвиква дифузия, като разрушава първоначално устойчивото състояние и предизвиква преход в ново състояние, което е пространствено нееднородно.

Прехода на системата към пространствено нееднородно състояние служи като предпоставка към различно поведение на клетките, които вече са в нова среда.

Анализирайки модела на реакция дифузия, Тюринг е получил, че еднородното разпределение на реагиращите и дифузиращите вещества е неустойчиво, т.е. в системата трябва да има и авто катализа. Следователно коефициентите, описващи дифузията на различните вещества трябва да са различни. Тук дифузионната неустойчивост е известна като неустойчивост на Тюринг и води до образуване на периодични в пространството и стационарни във времето концентрични структури.

При анализа на линейни модели от тип реакция дифузия се получава и друг тип дифузионна неустойчивост, която се нарича вълнова неустойчивост. При нея се образуват периодични в пространството и времето вълни или структури. При много актове на морфогенеза единното поле на зародиша се разделя на множество морфогенетически полета. Всеки морфогенетичен акт включва генериране на пространствена информация, която след това се запазва при деление на клетката.

Разработения модел от Мейнхардт(1982) - Гиерер (1981) е модел от Тюрингов тип и описва процеса на морфогенеза. то и системата в по- детайлен вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{u^2}{v} - \mu \cdot u D_u \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^2 - \mu_v \cdot v \cdot D_v \nabla^2 v \end{array} \right. , \quad (2.142)$$

където:

u - е активатор;

v - е инхибитор;

ρ е способността на клетките да изпълняват автокаталитични реакции;

μ_u, μ_v са коефициенти на намаляването на веществата.

По детайлно е изследвана следната три компонентна система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v, w) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = G(u, v, w) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = H(u, v, w) + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial r^2} \end{array} \right. , \quad (2.143)$$

Тук F, G, H са нелинейни функции, описващи взаимодействието на променливите, D_i са коефициенти на дифузия.

След линеаризация около стационарната точка е получено уравнение за пресмятаме на собствените стойности на якобиан матрицата:

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0 \quad (2.144)$$

където:

$$\begin{aligned} A &= \sigma - k^2(D_1 + D_2 + D_3) \\ B &= \Sigma - k^2(D_1(a_{2,2} + a_{3,3}) + D_2(a_{1,1} + a_{3,3}) + D_3(a_{1,1} + a_{2,2})) + k^4(D_1D_2 + D_1D_3 + D_2D_3) \\ C &= \Delta - k^2 \sum_{i=1}^3 D_i \Theta_i + k^4(D_1D_2a_{3,3} + D_1D_3a_{2,2} + D_2D_3a_{1,1}) - k^6 D_1D_2D_3 \end{aligned} \quad (2.145)$$

където

$$\begin{aligned} \sigma &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} \\ \Delta &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\ \Sigma &= \sum_{i=1}^3 \Theta_i \text{ където } \Theta_i = a_{j,j}a_{l,l} - a_{j,l}a_{l,j}, i \neq j \neq l \end{aligned} \quad (2.146)$$

Уравнението 2.144 е от трета степен с реални коефициенти и и нека корените му са $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Между коефициентите на 2.144 и колелите му $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ съществува следната зависимост:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ AB - C = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1) \end{array} \right. \quad (2.147)$$

Състоянието е устойчиво, когато $Re \lambda_i < 0, i = 1, 2, 3$

Следователно хомогенното уравнение е устойчиво тогава и само тогава, когато е изпълнено:

$$\begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \\ C < 0 \\ AB - C < 0 \end{cases} \quad (2.148)$$

Когато дифузия липсва ($k^2 = 0$), състоянието на хомогенната система е устойчиво и неравенствата 2.148 приемат вида:

$$\begin{cases} \sigma < 0 \\ \Sigma > 0 \\ \Delta < 0 \\ \sigma\Sigma - \Delta < 0 \end{cases} \quad (2.149)$$

Търсим онези стойности на параметрите, при които равновесното състояние е неустойчиво. с други думи съществува $k \neq 0$, такова че за поне едно $\lambda_i(k^2), i = 1, 2, 3, Re(\lambda_i(k^2)) > 0$. Когато поне едно от 2.148 е нарушено, това означава, че в системата е възникнала бифуркация-те еднородното състояние е изгубило устойчивостта си. Поради условията 2.149 $A < 0 \forall k$.

Второто неравенство в 2.148 не може да бъде нарушено, ако са изпълнени всички други условия. По този начин или условието $C < 0$ е нарушено, което по силата на съотношения 2.147 означава появата на реална положителна собствена стойност в системата, което съответства на бифуркация на Тюринг, или условието $AB - C < 0$ е нарушено и тогава съществува двойка комплексно спрегнати собствени стойности с положителна реална част, което означава че имаме вълнова бифуркация.

Подробно е изследвано при какви стойности на параметрите ще се получи Тюпингова неустойчивост, и при какви - вълнова неустойчивост.

2.5.1.1 Метод на хармоничния баланс за изследване на динамиката на модела ма Мейнхард - Гиерер

В тази глава е описан метода на хармоничния баланс за решаване на уравнението на Майнхардт-Гирер. Описаният модел се използва за моделиране на регенерацията на главата на хидра или на многоклетъчни организми, съставени от няколко клетъчни типа. Неговата динамика се дава от следната нелинейна система от диференциални уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = au^2(t,x,y)\frac{1}{v(t,x,y)} - \beta u(t,x,y) + D_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial v(t,x,y)}{\partial t} = au^2(t,x,y) - \gamma v(t,x,y) + D_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \quad (2.150)$$

Първото уравнение описва промяната на концентрацията на активатора, където

$u(t, x, y)$ е автокаталитично вещество с малък обхват;

$v(t, x, y)$ е антагонист с далечен обхват, т.е инхибитор;

$\frac{\partial u}{\partial t}$ описва промяната на концентрацията на активатора $u(t, x, y)$ за единица време;

u^2 - описва скоростта на производство на активатора, която зависи нелинейно от неговата

концентрация;

$\frac{1}{v}$ - Показва факта, че производството на активатора се улавя от инхибитора.

β - е коефициент , показващ степента на инхибиране на активаторните молекули. Обменът на молекули се осъществява чрез дифузия; γ е фактор на натоварване на инхибитора.

Проектираме решението $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ на уравненията (2.150) върху слой на клетъчна невронна мрежа, така, че статичното напрежение на клетка от клетъчна невронна мрежа $x_{kl}(t)$ да е в точка от мрежата (k,l) .

$h_x = \Delta x, h_y = \Delta y$. Предполагаме, че $h_x = h_y = h$. Тогава

$$u_{xx} + u_{yy} \approx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}((u(t, x + h, y) - u(t, x, y)) - (u(t, x, y) - u(t, x - h, y)) + (u(t, x, y + h) - u(t, x, y)) - \\ - (u(t, x, y) - u(t, x, y - h))) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Което може да се напише като:

$$u_{xx} + u_{yy} \sim \frac{1}{h^2}(u_{k+1,l} - 4u_{k,l} + u_{k,l-1} + u_{k-1,l} + u_{k,l+1}) \quad (2.152)$$

Тогава динамиката на (2.150) може да се опише като:

$$\begin{cases} \dot{u}_{i,j} = \alpha \frac{u_{i,j}^2}{v_{i,j}} - \beta u_{i,j} + D_1(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) \\ \dot{v}_{i,j} = \alpha u_{i,j}^2 - \gamma v_{i,j} + D_2(v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1} - 4v_{i,j}) \end{cases} \quad (2.153)$$

Прилагаме трансформацията на Фурие към (2.153):

$$F(s, z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z_1^{-k} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} z_2^{-l} \int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}(t) e^{-st} dt \quad (2.154)$$

Тогава за Meinhardt - Gierer модела на клетъчно невронна мрежа получаваме:

$$\begin{cases} sU = \alpha \frac{U^2}{V} - \beta U + D_1(z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1^1 + z_2^1 - 4)U \\ sV = \alpha U^2 - \gamma V + D_2(z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1^1 + z_2^1 - 4)U \end{cases} \quad (2.155)$$

или

$$\begin{cases} U = \frac{1}{(s+\beta-D_1T)} N_1(U, V) \\ V = \frac{1}{(s+\gamma-D_2T)} N_2(U, V) \end{cases} \quad (2.156)$$

Където $T = z_1^{-1} + z_1 + z_2^{-1} + z_2 - 4 = 2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4$, $N_1(U, V) = \alpha \frac{U^2}{V}$, $N_2(U, V) = \alpha U^2$

$$\frac{U}{V} = \frac{s + \gamma - D_2 T}{s + \beta - D_1 T} N \quad (2.157)$$

като $N = \frac{N_1(U,V)}{N_2(U,V)}$.

Това означава че системата диференциални уравнения на Мейнхард - Гierer може да се

представи в схемата на Лур с трансферна функция $H(s, z_1, z_2) = \frac{s + \gamma - D_2T}{s + \beta - D_1T}$.

Ще търсим решение във вида:

$$\begin{cases} u_{ij}(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) = U_{m_0} \sin(\psi) \\ v_{ij}(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) = V_{m_0} \sin(\psi) \end{cases} \quad (2.158)$$

където $\psi = \omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, where $T_0 > 0$ е минималния период. Взимаме периодични гранични решения за нашия модел (2.153) и предполагаме, че $s = j\omega_0$, $z_2 = e^{j\Omega_2}$ и $z_1 = e^{j\Omega_1}$, където ω_0 е времева честота, Ω_1, Ω_2 са пространствени честоти и $\Omega_1 + \Omega_2 = \frac{2k\pi}{n}$, където $0 < k \leq n - 1$.

Заместваме s, z_1 и z_2 в (2.157) и получаваме:

$$H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2T)(\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} + j \frac{(\gamma - D_2T) - (\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} \omega_0 \quad (2.159)$$

Трансферната функция е реална функция. Тогава

$$\begin{cases} Re(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) = \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2T)(\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \\ Im(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) = \frac{(\gamma - D_2T) - (\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} \omega_0 = 0 \end{cases} \quad (2.160)$$

В съответствие с [35] и метода на хармоничния баланс предполагаме, че съответната нелинейност N_{ij} се развива в ред на Фурие като $N_{ij} = N_0(U_{m_0})U_{m_0} + N_1(U_{m_0})U_{m_0} \sin \psi + \dots$

Коефициентите могат да се пресметнат по формулите:

$$\begin{aligned} N_0(U_{m_0}) &= \frac{1}{2\pi U_{m_0}} \int_{-\pi}^{\pi} N(U_{m_0} \sin \psi) d\psi = 0 \\ N_1(U_{m_0}) &= \frac{1}{\pi U_{m_0}} \int_{-\pi}^{\pi} N(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{U_{m_0} V_{m_0}} \end{aligned} \quad (2.161)$$

Тогава в съответствие с [36] и метода на хармоничния баланс съществува периодично решение на (2.153) изразено чрез:

$$\begin{aligned} U_{m_0} [1 + N_0(U_{m_0})H(0, \Omega_1, \Omega_2)] &= 0 \\ 1 + N_1(U_{m_0})H(j\omega_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.162)$$

От където получаваме:

$$\gamma - D_2T - (\beta - D_1T) = 0 \quad (2.163)$$

Тогава:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1} \\
T &= e^{-j\Omega_1} + e^{j\Omega_1} + e^{-j\Omega_2} + e^{j\Omega_2} - 4 \\
T &= 2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4 \\
2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4 &= \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1} \\
2 \cos \frac{k\pi}{n} \cos \left(\frac{2\Omega_1 - \frac{2k\pi}{n}}{2} \right) &= \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1} \\
\cos \left(\Omega_1 - \frac{k\pi}{n} \right) &= \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n} (D_2 - D_1)} \\
\Omega_1 &= \frac{k\pi}{n} + \arccos \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n} (D_2 - D_1)} \\
\Omega_2 &= \frac{k\pi}{n} - \arccos \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n} (D_2 - D_1)}
\end{aligned} \tag{2.164}$$

Можем да апроксимираме изхода $\frac{U}{V}$ от схемата на Лур с

$$\frac{U}{V} \sim \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) \tag{2.165}$$

$$\frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{V_{m_0}} \tag{2.166}$$

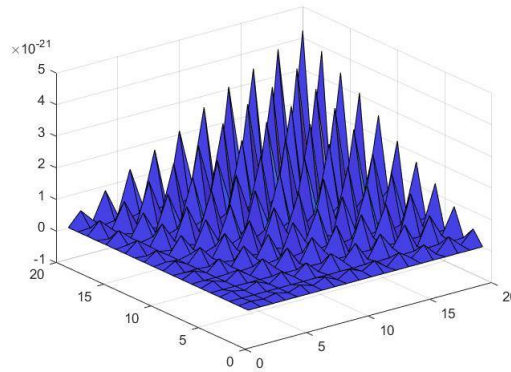
Когато пресметнем (2.166) ще получим че $U_{m_0} = 2$

Така получихме

$$\begin{aligned}
Re(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) &= \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2 T)(\beta - D_1 T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1 T)^2} = \frac{U_{m_0}}{(V_{m_0})} = \frac{2}{V_{m_0}} \\
V_{m_0} &= \frac{(\omega_0^2 + (\gamma - D_2(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4))^2)}{2(\omega_0^2 + (\gamma - D_2(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4))(\beta - D_1(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4)))} \\
U_{m_0} &= 2
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Извод 1 Чрез използване на метода на хармоничния баланс доказваме следната теорема за модела на Мейнхард - Гиерер:

Теорема 6 Модела на Мейнхард - Гиерер (2.153) с кръгов масв с $n = M \times M$ клетки има периодично решение $u_j(t)$ и $v_j(t)$ с период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и амплитуда $U_{m_0} \forall \Omega_0 + \Omega_2 = \frac{2\pi k}{n}, 0 \leq k \leq n - 1$



Фигура 2.25. Симулация на функцията v от Мейнхард - Гиерер модела на клетъчна невронна мрежа

Научни приноси в дисертационния труд

Приносите в дисертацията условно могат да се разделят на научни и научно-приложни.

1. Научни приноси

- (а) Доказано е , че всяко нелинейно диференциално уравнение може да се изследва с метода на хармоничния баланс.
- (б) Изведено е уравнението на хармоничния баланс за нелинейни системи.
- (в) Представен е КНМ алгоритъм за изследване на уравнения на реакция дифузия.
- (г) Дефинирани са флуксони от математическа гледна точка.
- (д) Моделирано е взаимодействието флуксон- антифлуксон с КНМ.

2. Научно - приложни приноси

- (а) Представени са приложения на КНМ в биологията, физиката, механиката, свръх-проводящите нанотехнологии.
- (б) Изучени са решения от тип пътуваща вълна на чстни диференциални уравнения и на динамични системи.
- (в) Изучено е явлението хистерезис в КМН с мемристорни синапси.
- (г) Получени са строги математически неравенства за определяне на областта, наречена „ръб на хаоса”.
- (д) Изследвана е системата на Мейнхард – Гиерер, като изведени условията при които се получават Тюрингова и вълнова неустойчивост.

Публикации по темата на дисертацията:

По темата на дисертацията са направени следните публикации:

1. CNN Modeling of a Class of Integro-Differential Equations, Pliska Studia Mathematica Bulgarica, Vol. 30, No 1, (2019), 171p-184p, 2019, <http://hdl.handle.net/10525/3621>, Angela Slavova, Zoya Zafirova, Pietro Zecca
2. Dynamic behavior of integro-differential CNN model , AIP Conference Proceedings, doi = 10.1063/1.5082117, 2018, Angela Slavova, Zoya Zafirova
3. Edge of Chaos in Nanoscale Memristor CNN, IEEE International Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS), may 2019 doi = 10.1109/ISCAS.2019.8702436, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova, Ronald Tetzlaff.
4. Dynamics of viscoelastic Burgers' cellular neural networks model , AIP Conference Proceedings, Vol. 2159, doi = 10.1063/1.5127496, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova
5. Harmonic balance technique for studying CNN model of differential equations, AIP Conference Proceedings, 2019, doi = 10.1063/1.5133502, Angela Slavova, Zoya Zafirova
6. Modeling and Simulation of Interaction of Fluxons via CNN , Print ISBN: 978-3-8007-4756-6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8576708> <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=8576698>, Angela Slavova, Zoya Zafirova

Публикациите са направени в сборниците на:

1. Pliska Studia Mathematica Bulgarica, Vol. 30, No 1, (2019), 171p-184p, 2019
2. AIP Conference Proceedings, doi = 10.1063/1.5082117, 2018
3. IEEE, doi = 10.1109/ISCAS.2019.8702436, 2019
4. AIP Conference Proceedings, Vol. 2159, doi = 10.1063/1.5127496, 2019
5. AIP Conference Proceedings, 2019, doi = 10.1063/1.5133502
6. Modeling and Simulation of Interaction of Fluxons via CNN , Print ISBN: 978-3-8007-4756-6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8576708> <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=8576698>

Получените резултати са представени на

1. Fifth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences 18-21 June, 2018
2. 44 th international conference on application of mathematics in engineering and economics(AMEE'18) nternational Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS), may 2019
3. 45 th international conference on application of mathematics in engineering and economics(AMEE'19)
4. Fifth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences July, 2018
5. Sixth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences July, 2019
6. Втори интердисциплинарен докторантски форум, Боровец 2019
7. Семинар по диференциални уравнения при Съюза на учените в България

За получаване на числените резултати е ползвана системата MatLab.

Част от получените резултати са направени по проект TE257/25-1.

Библиография

- [1] Cellular Non-linear Networks as a New Paradigm for Evolutionary Robotics. <http://cdn.intechweb.org/pdfs/847.pdf>. Accessed: 2018-07-31.
- [2] Chua L. A paradigm for complexity,. *Circuit Theory Applications*, 10:201–229, 1982.
- [3] D.B. Stukov, G.S. Sinder, D. R. Stewart and R.S. Williams. The missing memristor found. *Nature Letters*, 453-DOI 10.1038/nature06932:3435– 3456, 2005.
- [4] G. Gibson, S. Musunuru, J, Zhang, K. Vanderberge, J.Lee, Ch.HeisD.Henze, Z.Li, S.Williams. An accurate locally active memristor model for s - type negative resistance in niO_2 . *Appl.Phys. Letter*, 108:–, 2016.
- [5] Guzelis C., and Chua L. Stability analysis of generalized cnn. *Circuit Theory and App.*, 21:1–33, 1993.
- [6] K. Mainzer, L.O. Chua. Local activity principle. *Imperial college Press*, pages 1257–, 1988.
- [7] L.O. Chua. Memristor: the missing circuit element. *IEEE Trans. On circuit theory*, 18-5:507–519, 1971.
- [8] L.O. Chua. Local activity is the origin complexity. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 15:3435–3456, 2005.
- [9] L.O. Chua. Memristor hodgkin huxley and edge of chaos. *Nanotechnology*, 24:–, 2013.
- [10] L.O. Chua, L. Yang. Cellular neural network - theory and applications. *IEEE trans. CAS*, 35:3435– 3456, 2005.
- [11] M.Itoh, L.O. Chua. Cellular neural networks for associative and dynamical memristories. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 14:1725– 1772, 2004.
- [12] Roska T., and Chua L. and Wu C.W. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay - type templates. *IEEE Trans. Circuit Syst.*, 40:270–271, 1993.
- [13] Slavova A. Cellular neural networks with nonlinear dynamics. *Neural, Parallel, and Scientific Computations*, 3:3:369–379, 1995.
- [14] Slavova A. R.Tetzlaff. Cnn computing of double sin- gordon equation with physical applications. *C.R. Bulg.Acad.Sci.*, 67:21–28, 2014.
- [15] A.Mees. *Dynamics of Feedback Systems*. Wiley, London, 1981.
- [16] Patane L. Arena P. Cellular nonlinear network.
- [17] Eleonora Bilotta and Pietro Pantano. Cellular Non-Linear Networks as a New Paradigm for Evolutionary Robotics, *Frontiers in Evolutionary Robotics* year = 2008,.
- [18] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F., (2007a). A gallery of chua’s attractors - part i,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 1:1–60, 2007.
- [19] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007b), . A gallery of chua’s attractors - part ii,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 2:293–380, 2007.
- [20] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007c), . A gallery of chua’s attractors - part iii,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 3:657–734, 2007.
- [21] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007d), . A gallery of chua’s attractors - part iv,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 4:1007–10078, 2007.

- [22] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007e), . A gallery of chua’s attractors - part v., *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 5:1383–1511, 2007.
- [23] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007f), . A gallery of chua’s attractors - part vi., *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 1:1801–1910, 2007.
- [24] Steffen Borms. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. <https://www.informatik.uni-kiel.de/sb/data/NumPDE.pdf>, pages =, 2019.
- [25] J.M. Burgers. *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Academic Press in Advances in Applied Mechanics, New York, 1948.
- [26] C.-H.Hsu and S.-Y. Yang, . Wave propagation in rtd-based cellular neural networks. *Diff.Eq.*, 204:339–379, 2004.
- [27] L. Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing*. Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [28] L. Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing*. Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [29] Chua L. and Roska T., . The cnn paradigm. *IEEE Trans. Circuit Syst.*, 40:147–156, 1993.
- [30] Chua L., Yang L. Cellular neural networks: Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35:1257–1272, 1988.
- [31] Chua L., Yang L. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35:1273–1290, 1988.
- [32] C. Cuzelis and L. Chua. *Stability analysis of generalized CNN*. Circuit theory and applications, U.K., 1993.
- [33] Manfred Eigen. Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. *Naturwissenschaften*, 58(10):465–523, 1971.
- [34] The gnats and gnus document preparation system. *G-Animal’s Journal*, 41(7), July 1986. The entire issue is devoted to gnats and gnus (this entry is a cross-referenced ARTICLE (journal)).
- [35] Genesio R.,and Tesi A., . The cnn paradigm a harmonic balance approach for chaos prediction:the chua’s circuit. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 2:61–79, 1992.
- [36] Genesio R.,and Tesi A., . Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica*, 28:531–531, 1992.
- [37] M. Gilli. Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 41(8):518–528, 1994.
- [38] M. Gilli. Design of stable cellular neural network templates,. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 36(12):986–987, 1999.
- [39] M. Gilli. Comparison between the dynamic behavior of chua-yand and full-range cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 31:423–441, 2003.
- [40] Volker John. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2013.
- [41] T. J. Sullivan Mark Girolami Jon Cockayne, Chris J. Oates. *Probabilistic Numerical Methods for PartialDifferential Equations and Bayesian InverseProblems*. <https://arxiv.org/pdf/1605.07811.pdf>, pages =, 2017.
- [42] Donald E Knuth. Semantics of context-free languages. *Mathematical Systems Theory*, 2(2):127–145, 1968.
- [43] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Four volumes. Addison-Wesley, 1968–90. Seven volumes planned (this is a cross-referenced set of BOOKs).
- [44] Donald E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, chapter 1.2. Addison-Wesley, 1973.

- [45] Donald E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*, section 1.2, pages 10–119. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 10 January 1973. This is a full INBOOK entry.
- [46] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 1981.
- [47] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*, volume 2 of *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 10 January 1981. This is a full BOOK entry.
- [48] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*. Volume 2 of *The Art of Computer Programming* [43], second edition, 1981. This is a cross-referencing BOOK entry.
- [49] The programming of computer art.
- [50] Jill C. Knuth. The programming of computer art. Vernier Art Center, Stanford, California, February 1988. This is a full BOOKLET entry.
- [51] D.F. Mayers K.W. Morton. *Numerical Solution of Partial Differential Equations ISBN-13 987-0-5II-III62-4*. Cambridge University Press, U.K., 2005.
- [52] Lamb, G. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.*, 43:99–124, 1971.
- [53] L.Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing*. Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [54] Daniel D. Lincoll. Semigroups of recurrences. In *High Speed Computer and Algorithm Organization*. Academic Press, 1977.
- [55] Daniel D. Lincoll. Semigroups of recurrences. In David J. Lipcoll, D. H. Lawrie, and A. H. Sameh, editors, *High Speed Computer and Algorithm Organization*, number 23 in *Fast Computers*, part 3, pages 179–183. Academic Press, New York, third edition, September 1977. This is a full INCOLLECTION entry.
- [56] Daniel D. Lincoll. Semigroups of recurrences. In Lipcoll et al. [57], pages 179–183. This is a cross-referencing INCOLLECTION entry.
- [57] David J. Lipcoll, D. H. Lawrie, and A. H. Sameh, editors. *High Speed Computer and Algorithm Organization*. Number 23 in *Fast Computers*. Academic Press, New York, third edition, September 1977. This is a cross-referenced BOOK (collection) entry.
- [58] Scott A. Ets. Lonngren, K. *Solitons in action*. Academic Press., 1978.
- [59] Macki J., Nistri P., Zecca P. . Mathematical models for hysteresis. *SIAM*, 53:94–112), 1993.
- [60] M.Itoh, P.Julian, and L.O. Chua. "rtd-based cellular neural networks with multiple steady states?". *Int.J.Bifurcat.Cahos*, 11:2913–2959, 2001.
- [61] Alfred V. Oaho, Jeffrey D. Ullman, and Mihalis Yannakakis. On notions of information transfer in VLSI circuits. In *Proc. Fifteenth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 1983.
- [62] Alfred V. Oaho, Jeffrey D. Ullman, and Mihalis Yannakakis. On notions of information transfer in VLSI circuits. In Wizard V. Oz and Mihalis Yannakakis, editors, *Proc. Fifteenth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, number 17 in *All ACM Conferences*, pages 133–139, Boston, March 1983. The OX Association for Computing Machinery, Academic Press.
- [63] Louise Olsen-Kettle. *Numerical solution of partial differentiale quations*. <http://researchers.uq.edu.au/researcher/768> ISBN 978-1-74272-149-1, 2011.
- [64] The OX Association for Computing Machinery. *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, Boston, 1983. This is a cross-referenced PROCEEDINGS.
- [65] *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, 1983.
- [66] Wizard V. Oz and Mihalis Yannakakis, editors. *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, number 17 in *All ACM Conferences*, Boston, March 1983. The OX Association for Computing Machinery, Academic Press. This is a full PROCEEDINGS entry.

- [67] A. Slawowa P. Popivanov. *Nonlinear Waves. An Introduction*. World Scientific, Singapore, 2011.
- [68] P. Popivanov and A. Slavova. *Nonlinear waves An introduction*. World Scientific, Singapoure., 2011.
- [69] P. Popivanov and A. Slavova. *Peakons, cuspons, compactons, solitons, kinks and periodic solutions of several third order PDE and their CNN realization*. Springer, 2009.
- [70] G. E. Roska, T. and Paziienza. Cellular neural network. *Scholarpedia*, 4(12):1519, 2009. revision #136670.
- [71] S. Kummar, J.P. Starchan, S. Williams. Chaotic dynamic in nanoscale nio_2 mott memristor for analog computing. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 548 - 23307:-, 2017.
- [72] Thiran P. Hasler M. Setti, G. An approach to information propagation in 1-d cellular neural networks- part i: Local diffusion. *IEEE Trans. Circuits Systems I*, 45(8):790–811, 1998.
- [73] A. Slavova. *Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling*. Springer Science + Business Media, B.V ISBN 978-90-481-6254-3, 2005.
- [74] Slavova A., and Zecca P., . Cnn model for studying fitzhugh-nagumo equation. *Comp.R.Bulg.Acad.Sci.*, 52:6:31–34, 2000.
- [75] EITAN TADMOR. *A REVIEW OF NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. <https://www.ams.org/journals/bull/2012-49-04/S0273-0979-2012-01379-4/S0273-0979-2012-01379-4.pdf>, 2012.
- [76] Tom Terrific. An $O(n \log n / \log \log n)$ sorting algorithm. Technical report, Fanstord University, 1988.
- [77] Tom T errific. An $O(n \log n / \log \log n)$ sorting algorithm. Wishful Research Result 7, Fanstord University, Computer Science Department, Fanstord, California, October 1988. This is a full TECHREPORT entry.
- [78] Ulrich  underwood, Ned  net, and Paul  pot. Lower bounds for wishful research results. Talk at Fanstord University (this is a minimal UNPUBLISHED entry).
- [79] Ulrich  underwood, Ned  net, and Paul  pot. Lower bounds for wishful research results. Talk at Fanstord University (this is a full UNPUBLISHED entry), November, December 1988.
- [80] A. Visintin. *Models of Hysteresis*. Springer, 1993.
- [81] Nossek J.A Zou, F. Bifurcation and chaos in cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 40(3):166–173, 1993.
- [82] Первозванский А. А. *Курс теории автоматического управления*. Наука, Москва, 1986.
- [83] Б.Р. Андриевски and А. Л. Фрадков. *Избрание главы теории автоматического управления*. Наука ISBN 5-02-024873-8, 2000.
- [84] Патерно Дж Байрон, А. *Эффект Джозефсона: физика и применения*. Мир, Москва, 1984.
- [85] В.Е.МИЗОНОВ. *УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*. Иваново, 2001.
- [86] Ковалев А.С. Косевич А.М., Иванов Б.А. *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*. Наук. Думка, Москва, 1983.
- [87] и други Кошляков Н., С. *Уравнения в частных производных математической физики*. Вышшая школа, Москва, 1970.
- [88] Смирнов М. М. Кошляков Н.С. *УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*. Висшая школа Москва, 1970.
- [89] Mirela Serra. *Dynamics of two neuron Cellular Neural Network*. PhD dissertation, Universitat Ramon Lull, Department Electronica.
- [90] Егоров Р. Ф. Панов Ю.Д. *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*. Екатеринбург, 2005.

- [91] Л. С. Понтрягин. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Наука, 1974.
- [92] Е.А. Рындин. *МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*. 2012.
- [93] Жан-Пиер Сарман. *Энциклопедический словарь по физике ISBN 954-598-041-9*. Мартилен, София, 1995.
- [94] А. Л. Фрадков. *Синтез адаптивных систем стабилизации линейного динамического объекта*. Автоматизация и телемеханика № 12, 1974.
- [95] под редакцией А. Л. Фрадкова. *Основы математического моделирования*. БГТУ, 1996.
- [96] Шамсутдинов Д.М. Бризер уравнения синус-Гордон с высшей дисперсией. *В кн.: Университетская наука - Республике Башкортостан*, Том.1, 2004.