

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по Математика и Информатика

Зоя Владимирова Кичева – Зафирова

**Изследване динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи,
описващи уравнения на математическата физика**

ДИСЕРТАЦИЯ

за

присъждане на образователна и научна степен „Доктор“

Област на висше образование 4. Природни науки математика и информатика

Професионално направление 4.5 Математика

Докторска програма

„Математическо моделиране и приложение на математиката“

Научен ръководител:

Проф. ДМН Анжела Славова Попиванова

София

2021

Докторант Зоя Владимировна Кичева - Зафирова

Благодарности

Благодаря на Бог, че ме срещна с хората, с помощта на които тази работа стана реалност.

Съдържание

1	Нелинейни Клетъчни Невронни Мрежи (НКНМ)	17
1.1	Дефиниция и уравнения на НКНМ	17
1.2	Динамично поведение на НКНМ	23
1.3	Метод на хармоничния баланс (МХБ)	48
1.4	Приложение на МХБ за изследване на динамиката на НКНМ	56
1.5	Изводи	58
2	Изследване на динамиката на НКНМ на реакция-дифузия	60
2.1	НКНМ на реакция-дифузия	60
2.2	Моделиране на интегро - диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо с НКНМ на реакция - дифузия	65
2.3	Динамично поведение на модела на интегро-диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо	66
2.4	Изводи	69
3	Изследване на някои НКНМ модели на уравнения на математическата физика	70
3.1	Моделиране на флуксони и тяхното взаимодействие	70
3.2	Моделиране на вискоеластичното уравнение на Бургерс и изследване на неговата динамика	78
3.3	Решения от типа бягаща вълна за НКНМ модел на уравнението на Бургерс	84
3.4	Изводи	93
4	Изследване на динамиката на НКНМ с хистерезис	95
4.1	НКНМ с хистерезис	95
4.1.1	Клетъчна невронна мрежа с хистерезис в системата за обратна връзка	100
4.2	Изследване на динамиката на хистерезисни НКНМ с мемристори	102

4.3	Приложение на метода на хармоничния баланс за намиране на периодични решения на хистерезисни НКНМ	108
4.4	Изводи	111
5	Изследване динамиката на КНМ на Мейнхард - Гиерер	113
5.1	Модел на Мейнхардт - Гиерер	113
5.1.1	Бифуркация на Тюринг	117
5.1.2	Вълнова бифуркация	118
5.2	Метод на хармоничния баланс за изследване на динамиката на КНМ на Мейнхард - Гиерер	119
5.3	Изводи	123
6	Приноси в дисертационния труд:	125
A	Програмен код на симулацията на уравнението на Фиц Хю Нагумо	126

Списък на фигурите

1.1	[2]Схема на нелинейна клетъчна невронна мрежа и нейните елементи:	18
1.2	[1]Топология на клетъчни невронни мрежи: а) Линейна топология б) Двумерна топология в) Тримерна топология	19
1.3	Схема на изкуствен неврон	19
1.4	Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [-1, 1]$:	22
1.5	Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [0, 1]$:	23
1.6	Графика на нелинейна изходна функция:	23
1.7	Области на равновесие: SR - област на устойчивост; NR - област на неустойчивост; PSR - област на частична устойчивост	33
1.8	Сигмоидална и частично линейна функции	39
1.9	Различни области на динамично поведение	39
1.10	Схема на на Луре	50
1.11	Състояния на равновесие на нелинейни системи. В ляво - устойчиво равновесие, x- неустойчиво равновесие. В дясно равновесие от тип интервал на покой	51
1.12	Схема на входните и изходните сигнали в нелинейния блок	53
1.13	Обобщена схема на Луре	57
2.1	Динамично поведение на уравнението на Фиц Хю Нагумо	68
3.1	Взаимодействие на два флюксона	73
3.2	Взаимодействие на вълните флюксон - антифлюксон	74
3.3	Взаимодействие на двойка флюксони - breaddon	75
3.4	Симулация на флюксон - антифлюксон	76
3.5	Взаимодействие на 4π "kink" вълни	76
3.6	Периодично решение на клетъчно невронен модел на 3.26 и 3.27	77
3.7	Графиката съответства на решение от тип бягаща вълна (3.43)	82
3.8	Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите а). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 1.2$	82

3.9	Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите b). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.9$	83
3.10	Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите c). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.25$	83
4.1	Графика на явлението хистерезис	96
4.2	Графика на различните видове хистерезис	96
4.3	Графика на активен хистерезис	97
4.4	Графика на хистерезисна нелинейност.	100
4.5	SR - област на устойчивост; PSR- област на частична устойчивост; HR - област с хистерезис.	101
4.6	2D - схема на мемристор	103
4.7	Схема на хистерезисна клетъчна невронна мрежа	103
4.8	Симулация на нано-мемристорна клетъчна невронна мрежа която работи като релаксационен осцилатор	105
4.9	Релаксационен осцилатор	105
4.10	Граница на хаоса в нано КНМ модел	107
4.11	Граница на хаоса в NM КНМ модел	108
5.1	Симулация на функцията v от Мейнхард- Гиерер КНМ	123

Използвани съкращения

Термини на български език	Термини на английски език	Използвано съкращение
Нелинейна клетъчна невронна мрежа	Nonlinear Cellular neural network	HKHM
Клетъчна невронна мрежа	Cellular neural network	KHM
Метод на хармоничния баланс	Harmonic balance technique	MXБ
Отрицателно диференциално съпротивление	negative differential resistance	NDR
Клетъчно невронна мрежа – универсална машина	Celullar nonlinear network universal mashine	CNN UM
Наноскейл клетъчно невронна мрежа	Nanoscale CNN	NM CNN
Област на локална активност на клетките в KHM	Stability Locally Active Region	SLAR

ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ

Аз, долуподписаният/ата Зоя Владимирова Кичева- Зафирова, докторант по докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“ в ИМИ БАН, с научен ръководител професор Анжела Славова,

ДЕКЛАРИРАМ

със собственоръчния си подпис, че съм автор на настоящата дисертация на тема

„Изследване динамичното поведение на нелинейни клетъчни мрежи, решаващи уравнения на математическата физика“

Настоящата дисертация не е представяна за получаване на научна степен в друг научен институт или висше училище.

Дата.....

подпис.....

Увод

В дисертационния труд „Изследване динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи, описващи уравнения на математическата физика“ се изследва динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи, като се използва метода на хармоничния баланс.

Клетъчните невронни мрежи (КНМ) са въведени от Leon Chua and Lin Yang (Chua, Yang, Cellular Neural Network: Theory and Applications, 1988). Всяка тяхна клетка е нелинейна динамична система. Всяка клетка е свързана с най-близките си съседи чрез линейни връзки. Клетъчните нелинейни мрежи имат приложение в много области от разпознаване на образи до контрол на роботи. Те са организирани в една, две и три размерни топологии. КНМ имат практическо приложение в много дисциплини, като роботиката, теорията на динамичните системи, неврологията, биологията, обработката на изображения и др.

Актуалността на настоящото изследване се определя от уникалните възможности за фундаментални и приложни изследвания, които дават нелинейните клетъчни мрежи.

При изучаване на устойчивостта на клетъчни невронни мрежи е важно предсказването на гранични цикли. В (Zou, F., Nossek, J.A, Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Networks, 1993, IEEE Trans. Circuits Syst. I.) е изследвана двуклетъчна автономна система, като са намерени бифуркации, подобни на бифуркациите на Хопф, чието асимптотично поведение се определя от асимптотично устойчиво до периодично.

В (Setti, G., Thiran, P., Hasler, M. (1998) An Approach to Information Propagation in 1-D Cellular Neural Networks- Part I: Part II, Local Diffusion, IEEE Trans. Circuits Systems I, vol. 45, n. 8, pp. 777-811) се изучава как и кога глобалното разпространение на информацията е възможно чрез 1D КНМ чрез сигурни връзки между невроните. Намерена е периодична функция, която е решение на КНМ.

Съществуването на гранични цикли позволява сравнение между динамичното поведение на КНМ на Чуа-Янг моделите и моделите "full-range" (виж Gilli, M. (1994) Stability of Cellular Neural Networks and Delayed Cellular Neural Networks with Nonpositive Templates and Nonmonotonic Output Functions, IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 41, no. 8, pp.518-528), където е

доказано, че тези модели не са топологично еднакви чрез съществуването на периодични решения.

В публикации виж (Roska T., Chai W., Chua L., Stability of CNN with dominant nonlinear and delay-type templates, IEEE, Trans., CAS-I 1999;40:4:270-272) е разгледан модел на КНМ описващ уравнения на реакция дифузия. В статията е описан начина на конструиране на КНМ чрез извършване на пространствена дискретизация и е предложена методология за превръщане на PDE в КНМ т.е получаването на нелинейните темлети.

В друга публикация (Roska T., Chua L., Wolf D., Kozek T., Tetzlaff R., Ruffer F., Simulating nonlinear waves and PPES via CNN part I and Basic techniques part II: Typical examples IEE trans. circuit and syst - | 1995 42:10:808:820) е показано как уравнението на топлопроводността $u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{k} u_t$ може да се апроксимира чрез крайна пространствена мрежа чрез КНМ с прости клетки и клонинг темлети.

В същата публикация е показано, че една КНМ клетка може да генерира решения на уравнения от вълнов тип чрез добавяне на капацитет на изхода на клетката. Показано е също, че в равновесната точка КНМ се получава решение на уравнението на Лаплас.

Такива КНМ се наричат КНМ на реакция-дифузия и се описват чрез:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \cdot \nabla^2 u; u \in R^m; f \in R^m.$$

Във фокуса на съвременните теоретични и експериментални изследвания стои Ефектът на Джозефсон. Този ефект е квантово явление с широко приложение в свръхпроводящите нанотехнологии. За целта в литературата са публикувани изследвания за джозефсонови контакти тип свръхпроводник феромагнит-свръхпроводник, в който е на лице връзка между магнитните моменти и джозефсоновия ток.

Джозефсоновият контакт представлява сандвич от три слоя, от които външните са свръхпроводник, разделени от диелектрик (бариерен слой). При определени условия през този слой може да се наблюдава тунелен ефект на проникване на електрони. Математическият модел на това явление се описва с уравнението на синус-Гордън, което принадлежи към т.н. група солитонно-поддържащи уравнения (soliton supporting dynamical systems).

Специално за това уравнение солитонните решения е прието да се наричат флуксони.

Особено важно при изучаването клетъчни невронни мрежи е изучаването на решенията от вида “бягащи вълни” за автономни КНМ.

Различни автори са изучавали такива решения на дискретни в пространството и на едновременно дискретни в пространството и времето системи (Mallet-Paret, *Spatial patterns, spatial chaos and travelling waves in lattice of differential equations*, in: *Stochastic and Spatial Structure of Dynamical Systems.*, 1996), (Hsu & Lin, 1998).

Развитието на наноелектрониката е свързано с разработката на все по – бързодействащи устройства за запис и съхраняване на информацията с възможен презапис и с ниска енергозависимост. При създаване на невронни мрежи от ново поколение се ползват мемристори – двуполусни устройства, съпротивлението на които се променя от протичащия през него заряд. Съществуването им е предсказано още от Чуа в далечната 1971 година, но за пръв път ефектът мемристивност е демонстриран през 2008 година за системи от вида метал-диелектрик – метал, когато е открит подходящ материал за изработката им.

Използването на мемристори като синапси позволява да се повиши изчислителната ефективност на невронните системи, като се повишава плътността на логическите елементи и свързаността на невроните.

Чрез мемристори се реализира явлението хистерезис, което е изучено в дисертацията.

Целта на дисертацията е изследване динамичното поведение на клетъчно нелинейни мрежи, описващи уравнения на математическата физика.

Основен метод на изследването е метода на хармоничния баланс, като е ползван и метода на локалната активност.

Предмет на изследването са следните уравнения:

1. Уравнението, на Фиц Хю Нагумо, което е обобщена форма на уравнението на модела Hodgkin-Huxley за разпространяване на импулсите в аксона.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = u(u - \theta)(1 - u) - \int_0^t u(s, t) ds$$

2. Уравнения на син - Гордън

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \pm \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \varphi\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \sin(\varphi) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \varphi\right) + \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \varphi\right)$$

3. Уравнението на Бургер - най-простият модел, който показва нелинейната връзка между движението на молекули във флуиди/конвекция/ и появата на устойчиво състояние, възникнало в неравновесна среда в резултат на разсейването на енергия, постъпваща в дадена система .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + F \quad \text{нелинейното уравнение на Бургер.}$$

4. Модела на Мейнхард - Гиерер

Дисертационния труд се състои от увод, шест глави и приложение.

В глава първа е разгледан математическия модел на клетъчна невронна мрежа, като са описани основните типове уравнения, описващи клетъчни невронни мрежи, клонинг темплетите, чрез които се осигурява устойчивост на клетъчната невронна мрежа, и е направен теоретичен анализ на динамичното поведение на мрежата, като е използван методът на Ляпунов. Описани са различните области на динамично поведение.

Като пример е изследван теоретично модел на двуклетъчна мрежа. Доказани теореми за ограниченост на състоянието на мрежата. Изведена е формула за получаване на решението на мрежата. Изследването е проведено чрез метода на функцията на Ляпунов. Описани са различните случаи на състояние на клетката на мрежата.

Подробно е описан метода на хармоничния баланс, като представител на аналитичните приближени методи за изследване на клетъчните невронни мрежи.

Доказано е, че всяка нелинейна динамична система може да се изследва с метода на хармоничния баланс. Изведено е уравнението на хармоничния баланс и е доказано необходимо условие за съществуване на незатихващи осцилации.

Използван е метода на хармоничния баланс за изследване на динамиката на нелинейна клетъчно невронна мрежа.

В глава втора е построен модел на нелинейна клетъчно невронна мрежа на реакция – дифузия $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \cdot \nabla^2 u; u \in R^m; f \in R^m$. Конструирани са темплети в едномерния и двумерния случай. Чрез метода на хармоничния баланс е изследвана динамиката на мрежата.

Представено е моделиране на интродиференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо с Нелинейна клетъчна невронна мрежа на реакция дифузия. Изследвана е динамиката на така конструираната КНМ.

В глава трета са изследвани някои модели на уравнения на математическата физика.

Изследвани са солитонните решения на уравненията син- Гордън

$$a. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \sin(\varphi)$$

$$b. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \pm \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \varphi\right)$$

$$c. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = \sin(\varphi) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \varphi\right) + \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \varphi\right)$$

наречени флуксони.

Моделирано е вискоеластичното уравнение на Бургерс и е изследвана неговата динамика.

Изучени са решенията от тип бягаща вълна.

В глава 4 са изучени явлениято хистерезис и НКНМ с хистерезис. Направено е изследване на динамиката на хистерезисни НКНМ чрез използване на мемристори.

Приложен е метода на хармоничния баланс за намиране на периодични решения на хистерезисни НКНМ.

В глава 5 е представена системата на Мейнхардт- Гиерер.

Направен е теоретичен анализ на динамичната система и анализ чрез метода на хармоничния баланс.

Дисертационния труд съдържа на 134 страници, 36 фигури и програмен код .

Апробация

По темата на дисертационния труд са направени следните публикации:

1. CNN Modeling of a Class of Integro-Differential Equations, Pliska Studia Mathematica Bulgarica, Vol. 30, No 1, (2019), 171p-184p,2019, <http://hdl.handle.net/10525/3621>; Angela Slavova, Zoya Zafirova, Pietro Zecca
2. Dynamic behavior of integro-differential CNN model , AIP Conference Proceedings, doi = {10.1063/1.5082117}, 2018, Angela Slavova, Zoya Zafirova
3. Edge of Chaos in Nanoscale Memristor CNN, IEEE International Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS), may 2019 doi = {10.1109/ISCAS.2019.8702436}, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova, Ronald Tetzlaff.
4. Dynamics of viscoelastic Burgers' cellular neural networks model , AIP Conference Proceedings, Vol. 2159, doi = {10.1063/1.5127496}, 2019, Angela Slavova, Zoya Zafirova.
5. Harmonic balance technique for studying CNN model of differential equations, AIP Conference Proceedings, 2019, doi = {10.1063/1.5133502}, Angela Slavova, Zoya Zafirova
6. Modeling and Simulation of Interaction of Fluxons via CNN ,
Print ISBN: 978-3-8007-4756-6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8576708>
<https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=8576698>, Angela Slavova, Zoya Zafirova.

Получените резултати са публикувани в сборниците на :

1. Pliska Studia Mathematica Bulgarica, Vol. 30, No 1, (2019), 171p-184p,2019, c
2. AIP Conference Proceedings, doi = {10.1063/1.5082117}, 2018
3. IEEE, doi = {10.1109/ISCAS.2019.8702436}, 2019
4. AIP Conference Proceedings, Vol. 2159, doi = {10.1063/1.5127496}, 2019
5. AIP Conference Proceedings, 2019, doi = {10.1063/1.5133502}
6. Modeling and Simulation of Interaction of Fluxons via CNN ,
Print ISBN: 978-3-8007-4756-6, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8576708>
<https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=8576698>

Получените резултати са представени на

1. Fifth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences
18-21 June, 2018
2. 44 th international conference on application of mathematics in engineering and economics(AMEE'18)
3. International Simpozium on Circuits and Systems (ISCAS), may 2019
4. 45 th international conference on application of mathematics in engineering and economics(AMEE'19)
5. Sixth International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences
Juju, 2019
6. Втори интердисциплинарен докторантски форум 150 години БАН

За получаване на числените резултати е ползвана системата MatLab.

Част от получените резултати са направени по проект TE257/25-1.

Глава 1

Нелинейни Клетъчни Невронни Мрежи (НКНМ)

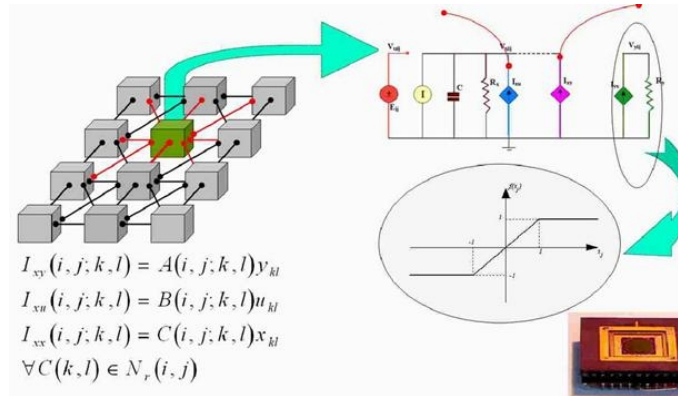
Клетъчните невронни мрежи са въведени от Леон Чуа и Лин Янг през 1988 година. Те са динамични системи. Имат приложение във много области от разпознаване на образи до контрол на работи. Те са организирани в една, две и три размерни топологии. КНМ имат практическо приложение в много дисциплини, като роботиката, теорията на динамичните системи, невро психологията, биологията, обработката на изображения и др.

Клетъчните невронни мрежи са математически модел на система за обработка на информация, организирана по подобие на анатомичното устройство на човешкия мозък. Математическият модел на биологичната невронна мрежа е изграден от множество от взаимно свързани прости изчислителни елементи (неврони). Всеки неврон приема "сигнали" от предхождащите го в мрежата други неврони под формата на числа, извършва някакви аритметични действия, определени от неговата функция на активация (степен на възбуда) и резултатът се предава по изходящите връзки (синапсите) към следващите неврони. Всяка връзка има тегло, което умножавайки се със сигнала, определя неговата значимост (сила). Теглата на връзките са аналогични на силата на синаптичните импулси, предавани между биологичните неврони. Отрицателна стойност на теглото съответства на подтискащ импулс, а положителна – на възбуждащ. С други думи невронната мрежа е набор от математически модели, съставени от прости елементи по определени правила.

1.1 Дефиниция и уравнения на НКНМ

Математическият модел на клетъчна невронна мрежа е дефиниран като е прието, че клетъчната невронна мрежа е динамична система, за която е известно, че:

1. Е обширна нелинейна аналогова верига, която произвежда сигнали в реално време.[33][34]
2. Изразява паралелна компютърна парадигма, но комуникацията е разрешена само между съседни единици. [83]



Фигура 1.1. [2]Схема на нелинейна клетъчна невронна мрежа и нейните елементи:

Клетките се дефинират в нормално двумерно пространство като мрежа. Клетките обаче не се ограничават до двуизмерни пространства; те могат да бъдат определени в произволен брой размери и могат да имат квадратни, триъгълни, шестоъгълни или всякакви други пространствено непроменящи се подреждания. Топологично, клетките могат да бъдат разположени на безкрайна равнина или на тороидално пространство. Клетъчната връзка е локална, което означава, че всички връзки между клетките са в определен радиус (с топологично измерено разстояние). Връзките също могат да бъдат забавени с времето, за да се позволи обработка във времевата област.

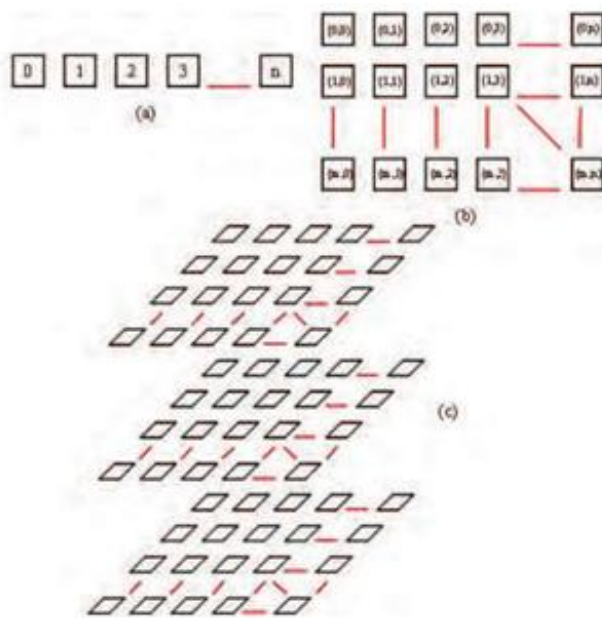
Всеки модел КНМ има архитектура (принцип на построяване), структура и параметри.

Невронните мрежи се състоят от един, два или повече отделни слоя, които могат да бъдат организирани в различна топология. Всяка изкуствена невронна мрежа се състои от клетки, наречени изкуствени неврони.

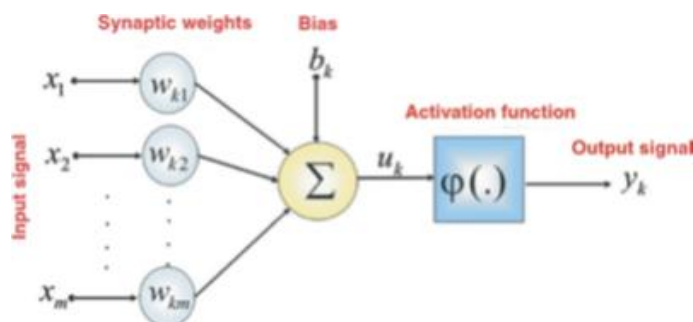
Изкуствен неврон

Аналог на биологичния неврон. На входовете x_1, x_2, \dots, x_m се подават сигнали с входни тегла $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$. Сигналите са фиксирани и бинарни. Те могат да бъдат възбудителни или забранителни, външни или сигнали от изходите на другите неврони. Сигналът на входа на всеки неврон се моделира със суматор по формулата:

$$u_k = \sum_{k=k_1}^{k_m} w_k x_k + b_k \quad (1.1)$$



Фигура 1.2. [1]Топология на клетъчни невронни мрежи: а) Линейна топология б) Двумерна топология в) Тримерна топология



Фигура 1.3. Схема на изкуствен неврон

Изходът от неврона се изчислява по формулата:

$$y_{ijw} = f(x_{ijw}) = \frac{1}{2}(|x_{ijw} + 1| - |x_{ijw} - 1|) \quad (1.2)$$

Математически невронна мрежа е всеки изчислителен модел със следните елементи: състояние, функция за активиране, праг и топология, определяща нейните невронни връзки. Състоянието $x_i(t)$ се нарича променлива на вътрешното състояние на неврона. Нейната стойност се определя от линейна комбинация от стойностите на състоянията на съседните неврони. Коефициентите на тази линейна комбинация се наричат тегла, които определят влиянието на един неврон върху действието на друг. Влиянието на един неврон върху друг може да бъде непрекъснато, дискретно, ограничено и неограничено.

Характеристиките на невронната мрежа са: локалните връзки, уравнението, описващо динамиката на всяка клетка, и изходната нелинейна функция на всяка клетка.

Приемаме следните означения: $I_{xy}(i, j; k, l) = A(i, j; k, l)y_{kl}$;

$I_{xu}(i, j; k, l) = B(i, j; k, l)u_{kl}$;

$I_{xx}(i, j; k, l) = C(i, j; k, l)x_{kl}$;

$N_r(i, j)$ е локална околност с радиус r , дефинирана по следния начин:

$N_r(i, j) = \{C(i, j) | \max\{|k - i|, |l - j|\} \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N\}$.

Коефициентите за връзка $A(i, j; k, l)$ се наричат темплет за обратна връзка, а коефициентите $B(i, j; k, l)$ се наричат контролен темплет. В [87] са дадени следните определения за КНМ:

Определение 1 1. 2-, 3-, или n - мерен масив от идентични клетки

2. които имат следните две характеристики:

3. Всички връзки са локални с радиус r , и

4. Всички променливи на състоянието са променливи сигнали.

Определение 2 Една $M \times M$ Клетъчна невронна мрежа се дефинира математически чрез четири спецификации:

1. Клетъчна динамика

2. Синаптичен закон, определящ взаимодействието между две клетки:

3. Гранични условия

4. Начални условия

Основни типове уравнения, описващи клетъчни невронни мрежи

Динамичното поведение процесорите на клетъчните невронни мрежи може да бъде изразено математически като система от обикновени диференциални уравнения, където всяко уравнение представлява състоянието на отделна единица за обработка. Динамиката на една $M \times M$ двуразмерна клетъчна невронна мрежа е описана в [3][58][33][87] със следната система уравнения:

Уравнения на състоянието

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{i,j}(t) = -x_{i,j} + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{A}_{ij,kl}(y_{k,l}(t), y_{i,j}(t)) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} \tilde{B}_{ij,kl}(u_{k,l}(t), u_{i,j}(t)) + I_{ij} \\ y_{ij} = f(x_{ij}) = \frac{1}{2}(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \\ 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M \end{array} \right. \quad (1.3)$$

където $x_{i,j}$ е настоящето състояние, $y_{i,j}$ е настоящия изход, $u_{i,j}$ е входната променлива; $C(k, l) \in N_r(i, j)$ означава, че клетката $C(k, l)$ е съседна клетка на клетката $C(i, j)$ в околност с

радиус r . \tilde{A} и \tilde{B} са нелинейни инвариантни клонинг темплети, в които са описани специфичните взаимодействия между всички клетки и техните съседни. В случаите, когато темплетите са пространствено инвариантни, всяка клетка се описва с прост клонинг темплет. Например матриците \tilde{A} и \tilde{B} , които се използват при клетъчни невронни мрежи с радиус на взаимодействие $r=1$ се описват със следните клонинг темплети:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}(ij, i-1, j-1) & \tilde{A}(ij, i-1, j) & \tilde{A}(ij, i-1, j+1) \\ \tilde{A}(ij, i, j-1) & \tilde{A}(ij, i, j) & \tilde{A}(ij, i, j+1) \\ \tilde{A}(ij, i+1, j-1) & \tilde{A}(ij, i+1, j) & \tilde{A}(ij, i+1, j+1) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}(ij, i-1, j-1) & \tilde{B}(ij, i-1, j) & \tilde{B}(ij, i-1, j+1) \\ \tilde{B}(ij, i, j-1) & \tilde{B}(ij, i, j) & \tilde{B}(ij, i, j+1) \\ \tilde{B}(ij, i+1, j-1) & \tilde{B}(ij, i+1, j) & \tilde{B}(ij, i+1, j+1) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

За да може да се запише удобно уравнението на състоянието на една клетъчна невронна мрежа с линейна топология и клонинг темплет A се дефинира конволюционен оператор по следния начин:

Определение 3 \forall клонинг темплет A ,

$$A * z_{ij} = \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(k-i, l-j) z_{kl} \quad (1.6)$$

Тогава уравнението на състоянието се описва по следния начин:

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + A * y_{ij} + B * u_{ij} + I_{ij} \quad (1.7)$$

За да се осигури устойчивост на нелинейна клетъчна невронна мрежа в [14] темплетите \tilde{A} и \tilde{B} за нелинейни клетъчни невронни мрежа са изведени в по-обобщена форма:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 y_{kl} y_{ij} & 0 \\ c_2 e^{y_{kl}-1} & 2 & c_2 e^{y_{kl}-1} \\ 0 & c_1 y_{kl} y_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_3 (u_{kl} - u_{ij}) & 1 & c_3 (u_{kl} - u_{ij}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Темплетите \tilde{A} и \tilde{B} в [33] са наречени оператор за обратна връзка и контролен оператор.

И така като ползваме определение 2 можем обобщено да запишем, че клетъчната динамика

на една клетъчна невронна мрежа се задава с уравнението:

$$\dot{x}_{ij} = -g(x_{ij}, u_{ij}, I_{ij}^s), \quad (1.10)$$

а синаптичния закон изразява в повечето случаи пространственото взаимодействие със съседната клетка $C(i+k, j+l)$

$$I_{ij}^s = A_{ij,kl}x_{i+k,j+l} + \tilde{A}_{ij,kl} * f_{kl}(x_{ij}, x_{i+k,j+l}) + \tilde{B}_{ij,kl} * u_{i+k,j+l}(t) \quad (1.11)$$

/виж [87] стр 14-15/

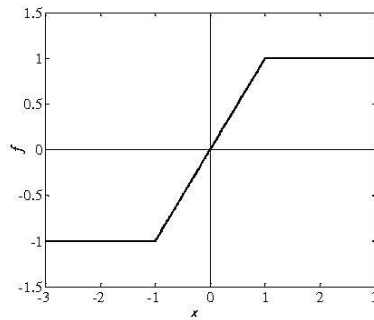
Исходни уравнения Обобщено: изходното уравнение (синаптичния закон) се задава с уравнението:

$$y_{ij} = f(x_{ij}(t)). \quad (1.12)$$

Някои от най- често използваните функции в изходната динамика на клетъчна невронна мрежа са:

1. Частично- линейна функция с изходни стойности $\in [-1,1]$:

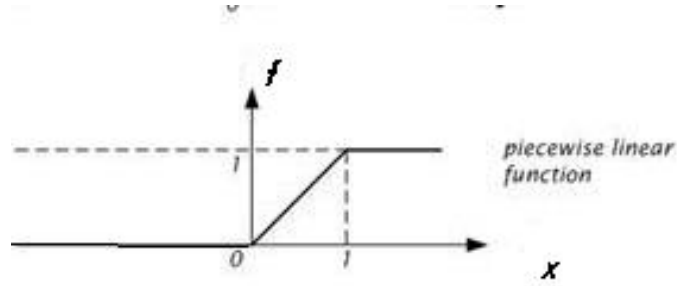
$$f_{ij} = \frac{1}{2}(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) \quad (1.13)$$



Фигура 1.4. Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [-1, 1]$:

2. Частично- линейна функция с изходни стойности $\in [0,1]$:

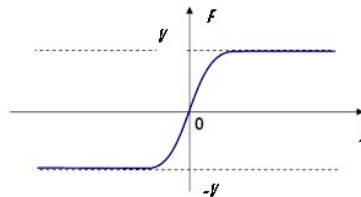
$$f_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{когато } x_{ij} \leq 0 \\ x_{ij} & \text{когато } 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\ 1 & \text{когато } x_{ij} \geq 1 \end{cases} \quad (1.14)$$



Фигура 1.5. Графика на частично линейна функция с изходни стойности $\in [0, 1]$:

3. Нелинейна функция [6]

$$f_{ij} = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2V} x_{ij}\right) \quad (1.15)$$



Фигура 1.6. Графика на нелинейна изходна функция:

4. В [14] [13] е разгледана по-обща изходна функция с нейна собствена динамика

$$\dot{y}_{ij} = -y_{ij} + f(x_{ij}) \quad (1.16)$$

1.2 Динамично поведение на НКНМ

Основните научни трудове в областта на невронните мрежи [32][3][58][33][34][87] имат за цел да намерят условия, при които всяка траектория на мрежата клони към равновесна точка. Когато клетъчна невронна мрежа се използва за решаване на частно диференциално уравнение е необходимо да се знае дали при зададените начални условия съответното частно диференциално уравнение има решение или не. Съществуването на такова решение е свързано с устойчивостта на нелинейна клетъчна невронна мрежа.

Един от ефективните методи за изследване на устойчивостта на клетъчна невронна мрежа е методът на Ляпунов. За изследването е необходимо да се изследва поведението на една

клетка, а след това с глобален асимптотичен анализ да се направи анализ на устойчивостта на равновесните точки на системата.

Метода на Ляпунов може да се приложи за операторни уравнения от вида:

$$V = LF(v, t, \mu) \quad (1.17)$$

Функцията $F(v, t, \mu) \in C(t); F(v, t, \mu) \in C(\mu)$, тя е диференцируема, т.е. удовлетворява условието на Липшиц по отношение на v в дадена област. Оператора L е линеен и ограничен и следователно е непрекъснат. Нека функцията $F(v, t, \mu)$, удовлетворява следните начално и гранично условия:

$$\left| \begin{array}{l} F(0, t, 0) = 0 \\ \frac{\partial F(0, t, 0)}{\partial v} = 0 \end{array} \right. \quad (1.18)$$

- Тогава конструираме неравенствата, изразяващи факта, че оператора L е ограничен:

$$\| L\phi(t) \| \leq \lambda q;$$

$$\| \phi(t) \| \leq q$$

- Намираме Ляпуновата мажоранта - функция $\Phi(\alpha, \mu)$ за функцията $F(v, t, \mu)$ и записваме мажориращото уравнение във формата: $\alpha = \lambda\Phi(\lambda, \mu)$, където $\| v(t, \mu) \| \leq \alpha(\mu)$
- Конструираме исканото решение на операторното уравнение във всяка точка на дефиниционната област на параметъра μ чрез използване на следната апроксимация:

$$\left| \begin{array}{l} v_s = LF(v_{s-1}, t, \mu), s = 1, 2, \dots \\ v_0 = 0 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Тогава е в сила следната теорема:

Теорема 1 Ако системата $\alpha = \lambda\Phi(\lambda, \mu)$, има решение $\alpha(\mu) \in C[0, \mu^*]$, когато $\mu \in [0, \mu^*]$ и е изпълнено:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha(\mu) \geq 0 \\ \mu \geq 0 \\ \alpha(0) = 0 \\ \| \alpha(\mu^*) \| \leq R \end{array} \right.$$

Тогава редицата, дефинирана чрез (1.19) дефинира приближение към търсеното решение $v(t, \mu)$ на операторното уравнение $v = LF(v, t, \mu)$ при $\mu \in [0, \mu^*]$ и $t \rightarrow \infty$.

Доказателство 1 Всяка клетка на една клетъчна невронна мрежа се описва със системата диференциални уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Dx(t) + Ew(t) \\ z(t) = Cx(t) + Hw(t) \\ y(t) = f(z) \\ w(t) = Ay(t) + Bu + I, \end{cases} \quad (1.20)$$

където $x(t) \in R^n$, $n=MxM$ е вектор на състоянието на клетката, $u \in R^n$ е входен вектор, I е константен вход в началото, D е $n \times n$ матрица от константи, E, C, H са константни вектори. Според теорията на диференциалните уравнения системата (1.47) има същото динамично поведение като линеаризираната система около равновесната точка на (1.47). Ако означим $x_k = x_{ij}$, където $i = (k-1)divM+1$, $j = (k-1)modM+1$. Функцията, активираща неврона е

$$\begin{aligned} f_k(z_k) &= \frac{2v}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2v}z_k\right) \\ f_k(z_k) &\in [0, v] \\ v &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Нека $f_k(0) = 0$. Ще казваме, че функцията $f_k(z_k) \in (v_1, v_2)$ ако $\forall z_k \neq 0$ $v_1 z_k^2 \leq z_k f_k(z_k) \leq v_2 z_k^2$. С други думи $f_k(z_k) \in (v_1, v_2)$, където $v_1 = -v, v_2 = v$. Нека заместим израза за $w(t)$ от (1.47) в горните две уравнения на (1.47). След като направим полаганията:

$$\begin{cases} A_1 = E.H; B_1 = E.B; C_1 = E; A_2 = H.A; B_2 = H.B; C_2 = H \\ \phi(t, u) = A_1 y(t) + B_1 u + EI \\ \psi(t, u) = A_2 y(t) + B_2 u + C_2 I, \end{cases}$$

където $y = f(z) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2v}z\right)$ системата (1.47) можем да запишем във вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = -Dx + \phi(t, u) = F_1(x, z, t, u) \\ z = Cx + \psi(t, u) = F_2(x, z, t, u) \end{cases} \quad (1.22)$$

Решението на уравнението

$$\dot{x} + Dx = \phi(t, u)$$

се задава с формулата:

$$x(t) = \exp^{-\int D dx} [C + \int \exp^{\int D dx} \cdot \phi(x, u) dx],$$

откъдето за решение на (1.22) в [87] е получено:

$$x(t) = (\exp^{DT} - I_d)^{-1} \left[\int_t^{t+T} \exp^{-D(t-s)} \cdot \phi(s, u) ds \right]. \quad (1.23)$$

Тогаво решението на (1.22) може да се запише във вида:

$$\begin{cases} x = L_1\phi(t, u) \\ z = L_2\psi(t, u), \end{cases}$$

където L_1, L_2 са линейни ограничени оператори. Тогава \exists константи $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$, така, че да е изпълнено

Определение 4 Една нелинейна функция $f(\cdot)$, за която $f_k(0) = 0$ изпълнява условието за промяна на поведението си ако $\exists v_1 \in R$ и $v_2 \in R$, v_1, v_2 са константи $v_2 \geq v_1$, за които са изпълнени условията:

$$\begin{cases} \|L_1\phi(t, u)\| \leq \|\phi(t, u)\| \\ \|L_2\psi(t, u)\| \leq \|\psi(t, u)\| \\ t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.24)$$

и

$$v_1(\xi'_k - \xi''_k)^2 \leq (\xi'_k - \xi''_k)(f_k(\xi'_k) - f_k(\xi''_k)) \leq v_2(\xi'_k - \xi''_k)^2 \quad \forall \xi'_k, \xi''_k \in R \quad (1.25)$$

Функцията $f_k(\cdot)$ е

- Равномерно монотонна растяща за $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \infty$
- Монотонно растяща за $0 = v_1 \leq v_2 \leq \infty$
- Строго равномерно растяща ако $0 \leq v_1 \leq v_2 < \infty$

Една функция $f_k(\cdot)$, която удовлетворява условията за разклоняване с крайни константи v_1, v_2 е непрекъсната с Липшицова константа $\frac{1}{2}(|v_2 - v_1| - |v_2 + v_1|)$ т.е.

$$|f_k(\xi'_k) - f_k(\xi''_k)| \leq \frac{1}{2}(|v_2 - v_1| - |v_2 + v_1|) |\xi'_k - \xi''_k| \quad (1.26)$$

Но ако $f_k(\cdot)$ е диференцируема, тогава:

$$v_1 \leq \frac{df_k(\xi_k)}{d\xi_k} \leq v_2 \quad (1.27)$$

С това доказваме съществуването на функциите $F_1(x, z, t, u)$ и $F_2(x, z, t, u)$ и тогава системата

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1 \\ z = F_2 \end{cases} \quad (1.28)$$

има решение, което се получава така:

$$\begin{cases} x = \tilde{L}_1 F_1(x, z, t, u) \\ z = \tilde{L}_2 F_2(x, z, t, u) \end{cases} \quad (1.29)$$

и става възможно да се конструират Ляпуновите мажорирани уравнения в ограничен интервал от време $t \in [0, T]$ и $u \in [0, u^*]$

$$\begin{cases} \alpha(u) = \tilde{\rho}_1 \Phi(\alpha, \beta, u) \\ \beta(u) = \tilde{\rho}_2 \Psi(\alpha, \beta, u), \end{cases} \quad (1.30)$$

където $\Phi(\alpha, \beta, u)$ и $\Psi(\alpha, \beta, u)$ са Ляпуновите мажоранти на F_1 и F_2 и е изпълнено:

$$\begin{aligned} |x| &\leq \alpha \\ |z| &\leq \beta. \end{aligned}$$

Тогава в съответствие с предходната теорема е в сила следната теорема:

Теорема 2 Системата мажорирани уравнения

$$\begin{cases} \alpha(u) = \tilde{\rho}_1 \Phi(\alpha, \beta, u) \\ \beta(u) = \tilde{\rho}_2 \Psi(\alpha, \beta, u), \end{cases} \quad (1.31)$$

за $t \in [0, T]$, $u \in [0, u^*]$ има решение

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(u) \\ \beta = \beta(u), \end{cases} \quad (1.32)$$

такова, че :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} > 0 \quad (1.33)$$

и

$$\begin{cases} \|\alpha(u^*)\| \leq V \\ \|\beta(u^*)\| \leq V \end{cases}$$

Тогава системата:

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, z, t, u) \\ z = F_2(x, z, t, u), \end{cases} \quad (1.34)$$

има единствено решение $(x(t, u), z(t, u)) \in C(t)$, $(x(t, u), z(t, u)) \in C(u)$ за $u \in [0, u^*]$ и може да се намери чрез следните сходими итерации:

$$\begin{cases} x_s = \tilde{L}_1 F_1(x_{s-1}, z_{s-1}, t, u) \\ z_s = \tilde{L}_2 F_2(x_{s-1}, z_{s-1}, t, u) \\ x_0 \equiv x(0) \\ z_0 \equiv z(0) \end{cases} \quad (1.35)$$

Доказателство 2 В [33] е доказано, че за $t \rightarrow \infty$ една клетъчна невронна мрежа винаги се стреми към устойчиво равновесно състояние (x^*, z^*) , зададено със:

$$\begin{cases} x^* = \tilde{L}_1 F_1(x^*, z^*, u^*, t_0) \\ z^* = \tilde{L}_2 F_2(x^*, z^*, u^*, t_0). \end{cases} \quad (1.36)$$

Определение 5 *Една система, описана със система диференциални уравнения $\dot{x}(t) = F(x(t))$ е глобално асимптотично устойчива ако всяко нейно решение клони към единствено равновесно състояние.*

Като използваме определението за глобална асимптотична устойчивост ще докажем асимптотична устойчивост на динамичната система, описана с (1.22).

Теорема 3 *Нека разгледаме една многосвързана мрежа, описана с (1.47). Да разгледаме променливите, свързани с една клетка. Тогава нелинейността на тази клетка $f_k(\cdot)$ удовлетворява условието на Липшиц с константи $v_1 = -v$, $v_2 = v$ и $D > 0$. Тогава \forall константен вход $u = u^*$ клетката е глобално асимптотично устойчива в равновесната точка, която е единствено решение на (1.22) ако са изпълнени следните условия:*

$$\begin{cases} |x(0)| \leq v \\ |z(0)| \leq v \\ |u| \leq v \end{cases} \quad (1.37)$$

и системата от мажориращите Ляпунови уравнения (1.30) има положително решение и са изпълнени неравенствата

$$\begin{cases} \|x(u, t)\| \leq \alpha(u) \\ \|z(u, t)\| \leq \beta(u) \end{cases} \quad (1.38)$$

Доказателство 3 *Ще разгледаме клетка с нулев вход. Тогава равновесната точка x_i^* е глобално асимптотично устойчива \iff когато равновесната точка $(0,0)$ е глобално асимптотично устойчива.*

Нека

$$\begin{pmatrix} x_k^* \\ z_k^* \end{pmatrix}$$

е решение на (1.36). Чрез смяна на променливите системата (1.47) се преобразува в системата:

$$\begin{cases} \bar{x}_k = -D_k x_k(t) + E_k w_k(t) \\ \bar{z}_k(t) = C_k \bar{x}(t) + H_k \bar{w}_k(t) \\ \bar{y}(t) = G_k(\bar{z}_k(t)) = f_k(\bar{z}_k(t) + z_k^*) - f_k(z_k^*) \\ \bar{w}(t) = A_k y(t) + B u^* + I, \end{cases} \quad (1.39)$$

където:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_k = x_k(t) - x_k^* \\ \bar{z}_k(t) = z_k(t) - z_k^* \\ y_k^*(t) = f_k(z_k^*(t)) \\ \bar{w}_k = w_k(t) - w^*, \end{array} \right. \quad (1.40)$$

В трансформираната клетка наблюдаваме нелинейността $G_K(\cdot) \in [v_1, v_2]$.

Тъй като $G_k(0) = f_k(z_k^*) - f_k(z_k^*) = 0$ и за

$$\left\{ \begin{array}{l} z_k' = \bar{z}_k + z_k^* \\ z_k'' = z_k^* \end{array} \right. \quad (1.41)$$

имаме:

$$v_1 \bar{z}_k^2 \leq \bar{z}_k^2 G_k(\bar{z}_k) \leq v_2 \bar{z}_k^2 \quad (1.42)$$

Първото уравнение от (1.39) еквивалентно на интегралното уравнение:

$$\bar{x}_k(t) = e^{D_k t} \bar{x}_k(0) + \int_0^t e^{-D_k(t-s)} E_k \bar{w}_k(s) ds \quad (1.43)$$

След като заместим (1.43) във второто уравнение на (1.39)

$$\bar{z}_k(t) = C_k^T e^{D_k t} \bar{x}_k(0) + \int_0^t C_k^T e^{-D_k(t-s)} E_k \bar{w}_k(s) ds + H_k \bar{w}_k(t) \quad (1.44)$$

Тогава на (1.43) и (1.44) съответства следната операторна система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_k = \bar{L}_1[\bar{w}_k(t)] \\ \bar{z}_k = \bar{L}_2[\bar{w}_k(t)] \end{array} \right. \quad (1.45)$$

В съответствие с условието (1.38) и теоремата за Ляпуновите мажоранти следва, че:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_k(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_k(t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.46)$$

за $u = 0$. С това теоремата е доказана.

Математически една клетка от клетъчна невронна мрежа се описва със системата уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -Dx(t) + Ew(t) \\ z(t) = Cx(t) + Hw(t) \\ y(t) = f(z) \\ w(t) = Ay(t) + Bu + I, \end{array} \right. \quad (1.47)$$

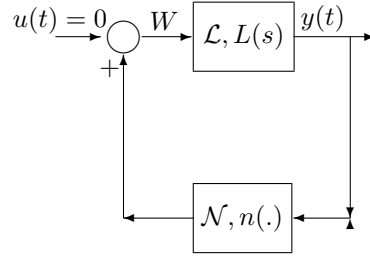
където $x(t) \in R^n$, $n=M \times M$ е вектор на състоянието на клетката.

$u \in R^n$ е входен вектор, I е константен вход в началото,

D е $n \times n$ матрица от константи,

E, C, H са константни вектори.

За да може даден процес да бъде изследван чрез методологията на клетъчните невронни мрежи е необходимо уравнението, което го моделира да може да се представи чрез [19] схемата на Луре, където \mathcal{L} - линейна независеща от времето динамична система и \mathcal{N} - нелинейна независеща от времето система без памет.



Нека системата \mathcal{L} е описана математически чрез :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u^1(t) \\ y^1 = C_1 x^1 \end{cases} \quad (1.48)$$

а системата \mathcal{N} е описана математически чрез

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 u^2(t) \\ y^2 = C_2 x^2 \end{cases} \quad (1.49)$$

Тогава еквивалентната система, на системата, представена чрез схемата на Луре се описва така:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x^2 \\ \dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1 \\ y = C_1 x^1 \end{cases} \quad (1.50)$$

А записана в матричен вид има вида:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.51)$$

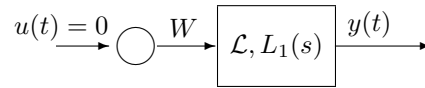
Следователно новата система има вида:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases} \quad (1.52)$$

където

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.53)$$

След като сме превърнали една система с обратна връзка в система от вида



Трансферната/предавателната/ функция е $L_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, където $Y(s)$ и $U(s)$ са полиноми. Корените на $U(s)$ се наричат полюси на системата, а корените на $Y(s)$ се наричат нули на системата. Предавателната функция $L_1(s)$ може да представи като произведение от множители от видовете: $\frac{1}{T_s}$ - наречен интегриращо звено $\frac{1}{T_s+1}$ наречен апериодично звено $\frac{1}{T^2 s^2 + 2T s + 1}$ наречен колебателно звено. Колебателното звено може да се представи във вида $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, където $\frac{1}{T} = \omega_n^2$. Тук ω_n е естествената системна честота, а $\xi = \frac{1}{2\omega_n T}$

Корените на знаменателя на колебателното звено се представят като

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (1.54)$$

означаваме $\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_d$, а ω_d се нарича заглушаваща честота. Корените λ_i са реални и

различни когато $\xi > 1$

Когато $\xi = 1$ получаваме критичен случай. В този случай имаме двоен корен:

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \quad (1.55)$$

Тогава ако предавателната функция се състои от единствено колебателно звено, то тя може да се запише така:

$$L_1(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (1.56)$$

Когато $\xi < 1$ имаме два различни комплексно спрегнати корени

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.57)$$

Изменението на вектора на състоянието X се състои от два компонента:

Първият е свободно движение което се извършва тогава, когато няма външно въздействие и началните условия са ненулеви и се определя като решение на хомогенната система уравнения, съответстваща на изходното уравнение:

$$\left| \dot{X} = AX \right. \quad (1.58)$$

Вторият компонент е принудително движение, което представлява реакцията на системата на външно въздействие U при нулеви начални условия. При многомерните системи, каквато е и (1.52) векторите на състоянието и на изхода се определят по формулите:

$$\left| \begin{aligned} X(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \\ Y(t) &= C(t)\Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \right. \quad (1.59)$$

Матрицата $\Phi(t, t)$ се нарича матрица на прехода или матрица на Коши, която е решение на уравнението (1.58)

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau) \quad (1.60)$$

с начално условие $\Phi(\tau, \tau) = E$

Първите членове в изразите 1.59 описват свободното движение на системата, а вторите описват принудителното и движение.

За многомерните динамични системи, описани с 1.52 поведението на вектора на състоянието и вектора на изхода се дава с формулите:

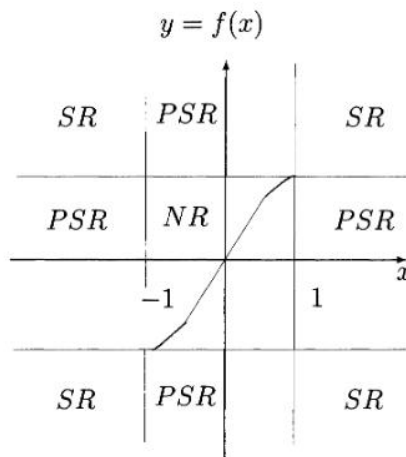
$$\begin{cases} X(t) = \Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \\ Y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{cases} \quad (1.61)$$

Където $\Phi(t-\tau)$ е матрица на прехода на стационарната система. Решението на 1.60 има вида:

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t-\tau).e^{A(t-\tau)} \quad (1.62)$$

Поради еднаквите нелинейности във всяка клетка на клетъчна невронна мрежа n - мерното пространство се разделя на различни типове области, в които КНМ има различно поведение:

Области на динамично поведение на клетъчни невронни мрежи



Фигура 1.7. Области на равновесие: SR - област на устойчивост; NR - област на неустойчивост; PSR - област на частична устойчивост

Нека клетъчна невронна мрежа е дефинирана с уравнението на състоянието:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -x(t) + A(g(x)) + Bu + I \quad (1.63)$$

Определение 6 Устойчива област за 1.74 наричаме онази, в която променливите на състоянието удовлетворяват

$$SR = \{x \in R^n; |x_i| \geq 1, \text{ за } i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.64)$$

и всяка променлива на състоянието има един и същи знак в тази област, т.е. ако $x_1, x_2 \in SR$ то $f(x_1) - f(x_2) = 0$.

Определение 7 Частично устойчива област за 1.74 наричаме онази, в която променливите

на състоянието удовлетворяват

$$PSR = \{x \in R^n; |x_i| \geq 1, |x_j| \leq 1, \text{ за } i \in P, j \in Q\} \quad (1.65)$$

където $N = \{1, 2, \dots, n\}, P \subset N, Q = N/P, P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset$

Определение 8 Неустойчива област за 1.74 наричаме онази, в която променливите на състоянието удовлетворяват

$$NR = \{x \in R^n; |x_i| \leq 1, \text{ за } i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.66)$$

Пространството на състоянията се разделя на 3^n части, където n е размера на пространството; броя на устойчивите области е 2^n , поради факта, че x_i може да има и отрицателни стойности. Броя на частично устойчивите области е $3^n - 2^n - 1$.

Изучаването на динамичното поведение на клетъчна невронна мрежа е свързано с изучаване на устойчивостта на диференциалните уравнения, които я описват. В основата на изучаване на устойчивостта е теорията на Ляпунов. Тя позволява да се определи устойчивостта на система диференциални уравнения (т.е. на една клетъчна невронна мрежа), като се измери разсейването на енергията на системата. Ако тази енергия може да се измери, тогава решаването на системата не е необходимо за изследване на устойчивостта.

Изследване на клетъчна невронна мрежа състояща се от две клетки /неврона/

Математическия модел на двуклетъчна невронна мрежа се задава с:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -x_0 + sy_0 + p_+y_1 + b_0u_0 + b_+u_1 + I \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + sy_1 + p_-y_0 + b_-u_0 + b_0u_1 + I \end{aligned} \quad (1.67)$$

Теорема 4 [33] Всички състояния $x_i = 0, 1$ в една клетъчна невронна мрежа са ограничени когато $t > 0$ и границата $x_{max} = 1 + |s| + \max|p_+|, |p_-| + \sum |b_{ij}| + |I|$

Доказателство 4 Нека уравненията на двуклетъчната мрежа се задават чрез

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -x_0 + sy_0 + p_+y_1 + b_0u_0 + b_+u_1 + I \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + sy_1 + p_-y_0 + b_-u_0 + b_0u_1 + I \end{aligned} \quad (1.68)$$

Означаваме

$$\begin{aligned}f_0 &= sy_0 + p_+ y_1 \\f_1 &= sy_1 + p_- y_0 \\g_0 &= b_0 u_0 + b_+ u_1 \\g_1 &= b_- u_0 + b_0 u_1\end{aligned}$$

Тогава уравнението на двуклетъчната невронна мрежа се задава чрез системата:

$$\dot{x}_i = -x_i + f_i + g_i + I, i=0,1 \quad (1.69)$$

което е линейно диференциално уравнение от първи ред.

След като положим $Q_i = f_i + g_i + I$, неговото решение получаваме по формулата:

$$x_i(t) = e^{-\int 1 dt} [C + \int e^{\int 1 dt} \cdot Q_i(t) dt], \quad (1.70)$$

Означаваме $I(t) = \int e^t \cdot Q_i(t) dt$ и заместим $t = 0$ получаваме:

$$x_i(0) = e^0 [C + I(0)], \quad (1.71)$$

откъдето получаваме

$$C = x_i(0) - I(0). \quad (1.72)$$

$$\Rightarrow x_i(t) = x_i(0)e^{-t} + e^{-t}(I(t) - I(0))$$

Тогава решението на диференциалното уравнение е:

$$x_i(t) = e^{-t}[x_i(0) - I(0) + I(t)]$$

или

$$x_i(t) = e^{-t} \cdot x_i(0) + e^{-t}(I(t) - I(0))$$

$$x_i(t) = e^{-t} \cdot x_i(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [f_i(\tau) + g_i(u) + I] d\tau$$

откъдето:

$$\begin{aligned}|x_i(t)| &= |e^{-t} \cdot x_i(0)| + \left| \int_0^t e^{-(t-\tau)} [f_i(\tau) + g_i(u) + I] d\tau \right| \leq \\&\leq |e^{-t} \cdot x_i(0)| + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [|f_i(\tau)| + |g(u)| + |I|] d\tau \leq \\&\leq e^{-t} |x_i(0)| + [F_i + G_i + |I|] \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau\end{aligned}$$

$$\text{но } \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-t+\tau} d\tau = e^{-t+\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = e^{-t+t} - e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

откъдето се получава

$$|x_i(0)| \cdot e^{-t} + [F_i + G_i + |I|](1 - e^{-t}) \leq |x_i(0)| + [F_i + G_i + |I|]$$

където

$$F_i(t) = \max |f_i(t)| \leq |s| + \max\{|p_+|, |p_-|\},$$

Поради факта, че $|y_i(t)| \leq 1$, /т.к. е дефинирана като частично линейна функция/

$$G_i(t) = \max |g_i(u)|$$

като вземем предвид, че $|x_i(0)| \leq 1 \forall t$ и $|u_i| \leq 1$

получаваме окончателно:

$$\max |x_i(t)| \leq 1 + |s| + \max\{|p_+|, |p_-| + \sum_{j=0}^1 |b_{ij}| + I\}$$

◇

Функцията на Ляпунов за такава клетъчна невронна мрежа се дефинира като приемем, че коефициентите за обратна връзка $p_+ = p_- = p$ са симетрични,

по следния начин:

Определение 9 Дефинираме функцията:

$$\begin{aligned} L(t) &= -\frac{1}{2}(sy_0^2 + py_0y_1 + py_1y_0 + sy_1^2) + \frac{1}{2}(y_0^2 + y_1^2) - u'_0y_0 - u'_1y_1 = \\ &= -py_0y_1 - \frac{s}{2}(y_0^2 + y_1^2) - u'_0y_0 - u'_1y_1 \end{aligned} \quad (1.73)$$

където

$$S = s + 1, u_i = b_{ii}u_i + b_{ij}u_j + I \text{ за } i=0,1$$

Както е показано в [33] $L(t)$ има всички свойства да бъде функция на Ляпунов, и са в сила следните теореми:

Теорема 5 Функцията 1.73 е ограничена отдолу.

Доказателство 5

$$\begin{aligned} |L(t)| &= | -py_0y_1 - \frac{s}{2}(y_0^2 + y_1^2) - u'_0y_0 - u'_1y_1 | \leq \\ &\leq |p||y_0||y_1| + \frac{s}{2}(|y_0|^2 + |y_1|^2) + (|b_{00}||u_0| + |b_{01}||u_1| + I)y_0 + (|b_{10}||u_0| + |b_{11}||u_1| + I)y_1 \end{aligned}$$

използваме, че:

$$|u_i| \leq 1 \text{ и че } |y_i| \leq 1 \text{ за } i=0,1 \text{ и получаваме, че:}$$

$$\leq |p| + \frac{s}{2}(1 + 1) + \sum_{ij=0}^1 |b_{ij}| + 2|I| = |p| + |S| + \sum_{ij=0}^1 |b_{ij}| + 2I$$

◇

Теорема 6 Функцията 1.73 е монотонно намаляваща и $\dot{L}(t) < 0$

Доказателство 6 За да докажем исканото първо ще изучим изходите на мрежата, които се определят от частично линейната функция, която не е диференцируема в двете си точки

на прекъсване. За да избегнем този проблем дефинираме

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \begin{cases} 1, & \text{ако } |x_i| < 1 \\ 0, & \text{ако } |x_i| > 1; \end{cases}$$

Намираме производната $\dot{L}(t)$:

$$L(t) = -py_0y_1 - \frac{S}{2}(y_0^2 + y_1^2) - u'_0y_0 - u'_1y_1$$

$$\dot{L}(t) = -p(\dot{y}_0y_1 + y_0\dot{y}_1) - \frac{S}{2}(2y_0\dot{y}_0 + 2y_1\dot{y}_1) - u'_0\dot{y}_0 - u'_1\dot{y}_1$$

$$\dot{L}(t) = -p\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\dot{x}_0y_1 + y_0\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dot{x}_1\right) - S\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\dot{x}_0y_0 + y_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dot{x}_1\right) - u'_0\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 - u'_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dot{x}_1$$

откъдето

$$\dot{L}(t) = -p\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\dot{x}_0y_1 + y_0\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dot{x}_1\right) - S\sum_{i=0}^1\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\dot{x}_iy_i - \sum_{i=0}^1u'_i\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\dot{x}_i$$

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} 0, & \text{когато } |x_i| \geq 1, i = 0, 1; \\ -p(y_0) - Sx_1y_1 - u'_1\dot{x}_1, & \text{когато } |x_0| \geq 1, |x_1| \leq 1; \\ -p(\dot{x}_0y_1) - Sx_0y_0 - u'_0\dot{x}_0, & \text{когато } |x_0| \leq 1, |x_1| \geq 1; \\ -p(\dot{x}_0y_1 + x_1\dot{y}_0) - S(\dot{x}_0x_0 + x_1\dot{x}_1) - u'_0\dot{x}_0 - u'_1\dot{x}_1, & \text{когато } |x_i| \leq 1, i = 0, 1; \end{cases}$$

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} 0, & \text{когато } |x_i| \geq 1, i = 0, 1; \\ -x_1(py_0 - Sy_1 - u'_1), & \text{когато } |x_0| \geq 1, |x_1| \leq 1; \\ -x_0(py_1 - Sy_0 - u'_0), & \text{когато } |x_0| \leq 1, |x_1| \geq 1; \\ -x_0(py_1 + Su_0 + u'_0) - x_1(py_0 + Sx_1 + u'_1), & \text{когато } |x_i| \leq 1, i = 0, 1; \end{cases}$$

Като използваме 1.67 получаваме:

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} 0, & \text{когато } |x_i| \geq 1, i = 0, 1; \\ -x_1^2, & \text{когато } |x_0| \geq 1, |x_1| \leq 1; \\ -x_0^2, & \text{когато } |x_0| \leq 1, |x_1| \geq 1; \\ -x_0^2 - x_1^2, & \text{когато } |x_i| \leq 1, i = 0, 1; \end{cases}$$

Следователно $\dot{L}(t) \leq 0$ за всички възможни случаи.

◇

Теорема 7 За всеки вход u_0, u_1 и всяко начално състояние x_0, x_1 на клетъчна невронна мрежа имаме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \text{const}$$

Доказателство 7 От доказаните теореми 1,2,3 имаме, че функцията $L(t)$ е ограничена,

монотонно намаляваща функция на t . Следователно е изпълнено $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = k \in R$, откъдето

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dL(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dk}{dt} = 0$$

◇

Извод 1 Дефинираната с 1.73 функция е функция на Ляпунов и клетъчна невронна мрежа, зададена за 1.67 е устойчива по Ляпунов.

Възможни са три случая, описващи състоянията на клетките:

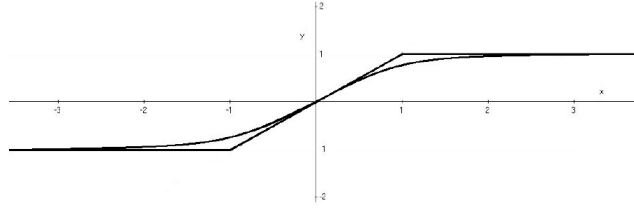
1. Първи случай: Ако състоянията на мрежата са ограничени $|x_i| \leq 1$, тогава $y_i = x_i$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dL(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_1^2 + x_0^2) = 0$. Тогава клетъчната невронна мрежа клони към фиксирана изолирана точка вътре в единичния квадрат.
2. Втори случай: Ако $|x_i| \geq 1$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dL(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_i)^2 = 0$. Тогава $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i = 0$. Следователно състоянията на мрежата са извън единичния квадрат и изхода на клетъчната невронна мрежа е $y_i = \pm 1$ поради частично линейната изходна функция.
3. Трети случай: ко $|x_i| \geq 1$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dL(t)}{dt} \neq 0$, тогава x_i може да е периодична или неперодична ограничена функция, както е показано в теорема 4.

При изучаване на устойчивостта на клетъчни невронни мрежи е важно предсказването на гранични цикли. В [96] е изследвана двуклетъчна автономна система, като са намерени бифуркации, подобни на бифуркациите на Хопф, чието асимптотично поведение се определя от асимптотично устойчиво до периодично. В [85] се изучава как и кога глобалното разпространение на информацията е възможно чрез 1D клетъчна невронна мрежа чрез сигурни връзки между невроните. Намерена е периодична функция, която е решение на клетъчната невронна мрежа. Съществуването на гранични цикли позволява сравнение между динамичното поведение на клетъчна невронна мрежа на Chua-Yang моделите и моделите "full-range"[41], където е доказано, че тези модели не са топологично еднакви чрез съществуването на периодични решения. Интересни са статиите на Gilli [40],[42].

Оригиналният модел на клетъчна невронна мрежа, въведен от Chua-Yang използва като функция за активация частично линейна функция, която е недиференцируема в точките $x = \pm 1$ и не е биективна. За да се избегнат тези трудности при теоретичните и практическите изследвания много автори [33],[3],[87] използват сигмоидална функция. Двете функции имат подобно поведение, както е видно на фиг.1.8

Нека клетъчна невронна мрежа е дефинирана с уравнението на състоянието:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = -\mathbf{x}(t) + A(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + B\mathbf{u} + I, \quad (1.74)$$



Фигура 1.8. Сигмоидална и частично линейна функции

където

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} s & p_+ \\ p_- & s \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_0 = f(x_0) \\ y_1 = f(x_1) \end{pmatrix}, \quad (1.75)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 & b_+ \\ b_- & b_0 \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

където $x_i \in [-1, +1]$ са вътрешните състояния на невроните, $y_i = f(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)$ са изходите от невроните, дефинирани чрез изходната частично линейна функция $f(x)$.

Външните входове в невроните са u_i и те са константни във времето.

За да опростим анализа и записванията полагаме $\mathbf{u} = B\mathbf{u} + I$. Тогава матричната форма на клетъчна невронна мрежа системата от уравнения изглежда така:

$$\dot{x}_k = A_k x_k + u_k, \text{ за } k=0,1 \quad (1.77)$$

За да докажем устойчивост на клетъчна невронна мрежа трябва да докажем, че всичките и състояния са ограничени.

	x1		
R5 Външна област	R1	R1 Средна област	R6 Външна област
R4	R0 Централна област	R0	R2
Средна област R4	R0	R0	R2 Средна област
R8 Външна област	R3	R3 Средна област	R7 Външна област
			x0

Фигура 1.9. Различни области на динамично поведение

Поради еднаквите нелинейности във всяка клетка на клетъчна невронна мрежа двумерното пространство се разделя на различни типове области 1.9:

Във всяка една област R_i системата 1.77 има различна матрица A_i .

Означаваме равновесната точка в съответната област R_i с $P_i(m_i, k_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Нека първо разгледаме областта R_0 .

В нея $|x_0| < 1$ и $|x_1| < 1$. Тогава $y_i = f(x_i) = x_i$ и системата 1.77 има вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -x_0 + sx_0 + p_+x_1 + u'_0 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + sx_1 + p_-x_0 + u'_1 \end{aligned} \quad (1.78)$$

или записана в матричен вид има вида:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & p_+ \\ p_- & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Нека да разгледаме случая, в който $p_- = p_+ = p$ Тогава, според теорията координатите на равновесната точка удовлетворяват уравненията:

$$\begin{aligned} (-1+s)x_0 + px_1 &= 0 \\ px_0 + (-1+s)x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

Тогава

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & p \\ p & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Нека равновесната точка в областта е $P_0(m_0, k_0)$, където $m_0 = \frac{(1-s)u'_0 - pu'_1}{p^2 - (1-s)^2}$, $k_0 = \frac{(1-s)u'_1 - pu'_0}{p^2 - (1-s)^2}$

Линеаризираме системата чрез направа на смяната:

$$x_0 = X_0 + m_0$$

$$y_0 = Y_0 + k_0$$

Собствените стойности на системата се получават от:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} s-1-\lambda & p \\ p & s-1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

т.е. собствените стойности и съответните им собствени вектори са

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (s-1) + p, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ \lambda_1 &= (s-1) - p, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Тогава решението на линеаризираната система се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(s-1+p)t} \\ C_1 e^{(s-1-p)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи и решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_0 e^{(s-1+p)t} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 e^{(s-1-p)t} \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_0 e^{(s-1+p)t} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 e^{(s-1-p)t} \end{aligned}$$

Вида на равновесните точки се определят в зависимост от стойностите на собствените стойности:

1. $\lambda_0 \neq \lambda_1$, т.е. $s-1-p \neq s-1+p \Rightarrow p \neq 0$

- $p < -(s-1)$ или $s-1 < -p$, тогава равновесната точка е устойчив фокус.
- $-(s-1) < p < s-1$, откъдето $\Rightarrow -p < s-1 < p$. Тогава решението избухва и при $t \rightarrow \pm\infty$ се допира до правите линии свързани с собствените стойности. равновесната точка е седлова точка.
- $s-1 > p$, Тогава решението на клетъчната невронна мрежа избухва и се допира до линията, свързана с по-голямата собствена стойност. Равновесната точка е отблъскващ фокус
- $s-1 = \pm p$, тогава системата собствени стойности $\lambda = 0, \lambda = 2(s-1)$. в този случай съществува линия от равновесни точки.
 - $s < 1$, графиката на решението клони към линията от равновесни точки
 - ако $s > 1$ графиката на решението се отдалечава от графиката на линията от равновесни точки.
- Ако $\lambda_0 = \lambda_1 \in R \Rightarrow p = 0$, тогава матрицата на клетъчната невронна мрежа е диагонална.
 - $s < 1$, решенията/с изключение на равновесната точка/ са прави линии, доближаващи се до равновесната точка.
 - $s > 1$, решенията клонят към безкрайност във всяка посока.

В случая, когато в клетките няма входни сигнали т.е. $u_0 = u_1 = 0$, получаваме, че когато $\frac{-p^2+1-2s+s^2}{-1+s} \neq 0$ равновесната точка на клетъчна невронна мрежа в R_0 е $P_0(0,0)$.

За областта R_2 :

$$|x_0| > 1, |x_1| < 1$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = 1 \\ y_1 &= f(x_1) = x_1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 + s1 + p.x_1 + u'_0 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + s.x + 1 + p1 + u'_1 \end{aligned} \tag{1.82}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ 0 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+u'_0 \\ p+u'_1 \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

Тогава равновесната точка P_2 в областта R_2 има координати $P_2(m_2 = -\frac{p(p+u'_1)}{s-1} + s + u'_0, k_2 = -\frac{p+u'_1}{s-1})$, а когато няма входни въздействия координатите на равновесната точка са $P_2(\frac{p^2}{-1+s} + s, \frac{p}{-1+s})$.

Линеаризираме системата чрез направа на смяната:

$$x_0 = X_0 + m_2$$

$$y_0 = Y_0 + k_2$$

Собствените стойности на системата се получават от:

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & p \\ 0 & s-1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Така получихме, че собствените стойности и съответните им собствени вектори са

$$\lambda_0 = -1, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = s-1, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix},$$

Тогава решението на линеаризираната система се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(-1)t} \\ C_1 e^{(s-1)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи и решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$x_0 = C_0 e^{(-1)t} + p C_1 e^{(s-1)t} + m_2$$

$$x_1 = C_1 s e^{(s-1)t} + k_2$$

Вида на равновесните точки се определя в зависимост от стойностите на собствените стойности:

1. $\lambda_0 \neq \lambda_1$,

- $-1 < s-1 < 0 \Rightarrow 0 < s < 1$, тогава равновесната точка е привличащ възел
- $-1 < 0 < -1$, откъдето $\Rightarrow s > 1$. Тогава равновесната точка е седлова точка.
- $-1 = s-1$, Тогава $s = 0$ е привличащ възел
- $-1 < s-1 > 0$, тогава равновесната точка е седлова точка.

В случая, когато в клетките няма входни сигнали т.е $u_0' = u_1' = 0$, получаваме, равновесната точка на клетъчна невронна мрежа в R_2 е $P_2(s + u'_0 - \frac{p(p+u'_1)}{s-1}, -\frac{p+u'_1}{s-1})$.

В областта R_1 имаме: $|x_0| < 1, |x_1| > 1$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = x_0 \\ y_1 &= f(x_1) = 1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 + sx_0 + p \cdot 1 + u'_0 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + s \cdot 1 + px_0 + u'_1 \end{aligned} \tag{1.84}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + u'_0 \\ s + u'_1 \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

Тогава равновесната точка $P_1(m_1, k_1)$ в областта R_1 има координати $P_1(-\frac{p+u'_0}{s-1}, s + u'_1 - \frac{p(p+u'_0)}{s-1})$, а когато в мрежата няма входно въздействие координатите на равновесната точка са

$$P_1(\frac{-p}{s-1}, \frac{-p^2}{-1+s} + s) \text{ при } -1 + s \neq 0.$$

Линеаризираме системата чрез направа на смяната:

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0 + m_1 \\ y_0 &= Y_0 + k_1 \end{aligned}$$

Собствените стойности на системата се получават от:

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} s-1-\lambda & 0 \\ p & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

т.е. собствените стойности и съответните им собствени вектори са

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -1, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1 &= (s-1), \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Тогава решението на системата се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(-1)t} \\ C_1 e^{(s-1)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи. Тогава решението на системата се задава с

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 e^{(s-1)t} + m_1 \\ x_1 &= C_0 e^{(-1)t} + C_1 p e^{(s-1)t} + k_1 \end{aligned}$$

Равновесната точка $P_1(m_1, k_1)$ се определя като привличаща или отблъскваща в зависимост

от стойностите на собствените числа: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = s - 1$

1. $\lambda_0 \neq \lambda_1$, т.е. $-1 \neq s - 1 \Rightarrow s \neq 0$

- $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ т. е $-1 < (s - 1) < 0$ или $0 < s < 1$, тогава равновесната точка е привличаща.
- $-1 < 0 < s - 1$, откъдето $\Rightarrow s > 1$. Тогава имаме седлова точка.
- $\lambda_0 = \lambda_1$ т.е. $s - 1 = 1$, или $s = 0$. Тогава равновесната точка е привличащ възел.
- $s = 1$, тогава системата има собствени стойности $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -1$. В този случай съществува линия от равновесни точки и решението клони към тази линия от равновесни точки, като е успоредна собствения вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

—

В областта R_3 имаме:

$$|x_0| < 1, x_1 < -1$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = x_0 \\ y_1 &= f(x_1) = -1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 + sx_0 - p.1 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 - s.1 + px_0 \end{aligned} \tag{1.86}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p \\ -s \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

Тогава равновесната точка P_3 в областта R_3 има координати $P_3(\frac{p}{s-1}, \frac{p^2}{s-1} - s)$ при $-1 + s \neq 0$.

Линеаризираме системата чрез направа на смяната:

$$x_0 = X_0 + m_3$$

$$y_0 = Y_0 + k_3$$

Собствените стойности на системата се получават от:

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} s-1-\lambda & 0 \\ p & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

т.е. собствените стойности и съответните им собствени вектори са

$$\lambda_0 = -1, \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = (s-1), \text{ собствен вектор } \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix},$$

Тогава решението на системата се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(-1)t} \\ C_1 e^{(s-1)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи. Тогава решението на клетъчна невронна мрежа се задава с

$$x_0 = C_1 e^{(s-1)t} + m_3$$

$$x_1 = C_0 e^{(-1)t} + C_1 p e^{(s-1)t} + k_3$$

Равновесната точка $P_3(m_3, k_3)$ се определя като привличаща или отблъскваща в зависимост от стойностите на собствените числа: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = s - 1$

1. $\lambda_0 \neq \lambda_1$, т.е. $-1 \neq s - 1 \Rightarrow s \neq 0$

- $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ т.е. $-1 < (s - 1) < 0$ или $0 < s < 1$, тогава равновесната точка е привличаща.
- $-1 < 0 < s - 1$, откъдето $\Rightarrow s > 1$. Тогава имаме седлова точка.
- $\lambda_0 = \lambda_1$ т.е. $s - 1 = 1$, или $s = 0$ Тогава равновесната точка е привличащ възел.
- $s = 1$, тогава системата има собствени стойности $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -1$. В този случай съществува линия от равновесни точки и решението клони към тази линия от равновесни точки, като е успоредна собствения вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

=====

В областта R_4 имаме:

$$x_0 < -1, |x_1| < 1$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = x_0 \\ y_1 &= f(x_1) = -1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 + s x_0 - p \cdot 1 + u'_0 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 - s \cdot 1 + p x_0 + u'_1 \end{aligned} \tag{1.88}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p + u'_0 \\ -s + u'_1 \end{pmatrix} \tag{1.89}$$

Тогава равновесната точка P_4 в областта R_4 има координати $P_4(-s + \frac{p^2}{s-1}, \frac{p}{s-1})$ при $-1 + s \neq 0$.

Собствените стойности и собствените вектори на системата са същите като в R_2 . Тогава

решението на линеаризираната система се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(-1)t} \\ C_1 e^{(s-1)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи и решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$\begin{aligned}x_0 &= C_0 e^{(-1)t} + p C_1 e^{(s-1)t} + m_4 \\x_1 &= C_1 s e^{(s-1)t} + k_4\end{aligned}$$

В областта R_5 имаме:

$$x_0 < -1, x_1 > 1$$

$$\begin{aligned}y_0 &= f(x_0) = -1 \\y_1 &= f(x_1) = 1 \text{ или} \\x'_0 &= -x_0 - s + p.1 \\x'_1 &= -x_1 + s.1 - p\end{aligned}\tag{1.90}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p-s \\ -s-p \end{pmatrix}\tag{1.91}$$

Тогава равновесната точка P_5 в областта R_5 има координати $P_5(p-s, s-p)$. Собствените стойности са: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$, а съответните им собствени вектори са:

за $\lambda_0 = -1$, собствен вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

за $\lambda_1 = (-1)$, собствен вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Тогава решението на системата се задава с:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 e^{(-1)t} \\ C_1 e^{(-1)t} \end{pmatrix}$$

където C_0, C_1 са константи. Тогава решението на клетъчна невронна мрежа се задава с:

$$\begin{aligned}x_0 &= C_0 e^{(-1)t} + m_5 \\x_1 &= C_1 e^{(-1)t} + k_5\end{aligned}$$

Равновесната точка P_5 е привличащ фокус.

В областта R_6 имаме: $x_0 > 1, x_1 > 1$

$$\begin{aligned}y_0 &= f(x_0) = 1 \\y_1 &= f(x_1) = 1 \text{ или} \\x'_0 &= -x_0 + s + p.1 \\x'_1 &= -x_1 + s.1 + p\end{aligned}\tag{1.92}$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + s \\ +s + p \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

Тогава равновесната точка P_6 в областта R_6 има координати $P_6(p + s, s + p)$. Собствените стойности и собствените вектори са като в област R_5 . Решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$x_0 = C_0 e^{(-1)t} + m_6$$

$$x_1 = C_1 e^{(-1)t} + k_6$$

Равновесната точка R_6 е привличащ фокус

В областта R_7 имаме:

$$x_0 > 1, x_1 < -1$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = 1 \\ y_1 &= f(x_1) = -1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 + s - p.1 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 - s.1 + p \end{aligned} \quad (1.94)$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p + s \\ -s + p \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

Тогава равновесната точка P_7 в областта R_7 има координати $P_7(-p + s, -s + p)$. Собствените стойности и собствените вектори са като в област R_7 . Решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$x_0 = C_0 e^{(-1)t} + m_7$$

$$x_1 = C_1 e^{(-1)t} + k_7$$

Равновесната точка R_7 е привличащ фокус.

В областта R_8 имаме: $x_0 < -1, x_1 < -1$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = -1 \\ y_1 &= f(x_1) = -1 \text{ или} \\ \dot{x}_0 &= -x_0 - s - p.1 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 - s.1 - p \end{aligned} \quad (1.96)$$

В матричен вид системата се записва така:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p - s \\ -s - p \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

Тогава равновесната точка P_8 в областта R_8 има координати $P_8(-s-p, -s-p)$. Собствените стойности и собствените вектори са като в област R_5 . Решението на клетъчна невронна мрежа е:

$$x_0 = C_0 e^{(-1)t} + m_8$$

$$x_1 = C_1 e^{(-1)t} + k_8$$

Равновесната точка R_8 е привличащ фокус

1.3 Метод на хармоничния баланс (МХБ)

Известни са много методи за изследване на ЧДУ, които се класифицират като **Числови** с представители

1. Метод на Синк- Галеркин.
2. Метод на факторизациите- при него се откриват решения от тип бягаща вълна частни диференциални уравнения, имащи нелинейност от тип полином.
3. Наар Wavelet метод
4. Метод на кубичните В сплайни
5. Рунге - Кута метод
6. Метод на крайните разлики

Аналитични точни с представители

1. Методи на фазовото пространство
 - (а) Метод на фазовата равнина,
 - (б) Метод на точковите изображения
2. Метод на функцията на Ляпунов

Аналитични приближени с представители

1. Метод на първото приближение
2. Метод на хармоничната линеаризация (или метод на хармоничния баланс)

Метод на хармоничната линеаризация или метод на хармоничния баланс

Този метод е предназначен за изследване на периодични процеси в нелинейни системи и може да се използва когато нелинейната система, описана с $\dot{x} = f(x, t)$ може да се представи в схемата на Луре. В сила е следната теорема:

Теорема 8 *Всяка нелинейна динамична система, която е описана със системата уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ може да се представи в схемата на Луре.*

Доказателство 8 *Всяка нелинейна динамична система може да бъде разделена на части, като всяка част има различна функция - едната част е самата система, а другата е контролираща система, наречена регулатор. Такова представяне се нарича представяне чрез схемата на Луре. Характерното при нея е това, че има обособени линейна и нелинейна част, като динамиката на системата се определя от линейната част, а нелинейната част е статична.*

Нека линейната част на системата се описва с уравненията:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)\xi(t) + r(t) \\ \sigma(t) &= C(t)x(t) + D(t)\xi(t)\end{aligned}\tag{1.98}$$

а нелинейната част се описва с

$$\xi(t) = \phi(\sigma(t))\tag{1.99}$$

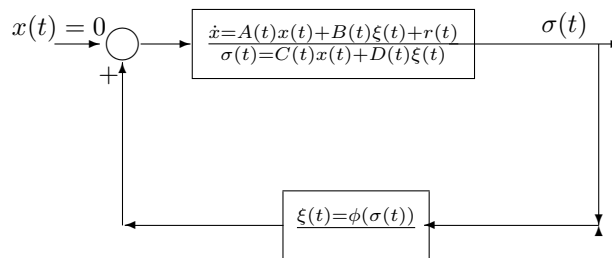
Тук $x(t) \in R^n$ е вектор на състоянието на линейната част на системата, и на цялата нелинейна система, $\sigma(t) \in R^l$ е вектор на изхода от линейната част от системата, $\xi(t) \in R^m$ е вектор на изхода от нелинейната част на системата.

Векторната функция $r(t) \in R^n$ и зависимостта $\phi(\cdot)$ от 1.98 и 1.99 да се отчете влиянието на външни въздействия върху системата 1.98.

Ако се положи в 1.98 и 1.99 $A(t) \equiv B(t) \equiv C(t) \equiv I_n$, $D(t) \equiv 0_{n \times n}$, всичките изходи от линейната част на системата образуват вектора $\sigma(t)$, а на входа на всеки от изходите постъпват компонентите на вектора $\xi(t)$. Като положим $\phi(t) \equiv f(x, t)$, ще получим, че към схемата на Луре се привеждат общите уравнения на нелинейната и нестационарната система $\dot{x} = f(x, t)$.

Ако в схемата на Луре има един нелинеен блок със скаларен изход $\xi(t) \in R$, тогава линейната част на системата в стационарния случай може да се опише с предавателната функция $W_l(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, която дава връзката между входа на линейната част ξ и изхода σ . Така получаваме система с обратна връзка, като в този случай обратната връзка е нелинейна.

Важно е да се отбележи, че можем да считаме, че изхода от нелинейния блок се изразява така $\xi(t) = -\phi(\sigma, t)$.



Фигура 1.10. Схема на на Луре

Собствените движения на всяка нелинейна система имат различен характер, затова при анализа на устойчивостта не се разглежда околност на равновесното състояние, а се разглеждат възможните области от пространството на състоянията.

За някои системи съществуват периодични процеси с период T , такива че $x(t) = x(t + T)$ съответстващите им фазови траектории са затворени криви. За стационарните линейни системи е известно, че периодични движения има тогава, когато характеристичния полином $A(s) = 0$. Тогава периода е $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Това означава, че малко отклонение на стойностите на параметрите от началните може да е причина за изчезване на периодичното движение. Но малко изменение в началните стойности на параметрите води до промяна в амплитудата на колебателните движения,

Определение 10 *Граничен цикъл наричаме периодично решение $x(t)$ ако то е изолирано решение. Това означава да $\exists \rho > 0$, такава, че за всяка точка $x' \in X$, която е на разстояние от кривата по малко от ρ , минаващото през нея решение не е периодично.*

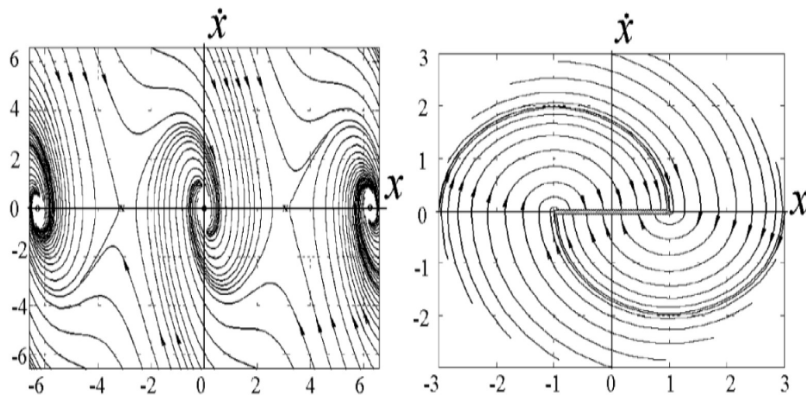
Определение 11 *Автоколебание се нарича устойчив граничен цикъл.*

Нелинейните системи имат не само периодични собствени процеси. Те притежават и квазипериодични режими, съответстващи на осцилиращи движения с несъизмерими честоти. Възможно е да възникнат хаотични колебателни процеси с непрекъснат спектър на честотите и следователно нелинейните системи имат и свойства, характерни за случайните процеси.

Определение 12 *Едно решение $x(t), \sigma(t)$ на системата 1.98 е осцилиращо ако са изпълнени следните условия:*

1. $\|x(t)\| < const$
2. Функцията $\sigma(t)$ променя знака си безкраен брой пъти в интервала $t \in [0, \infty)$

Определение 13 *Равновесно състояние на нелинейна система наричаме състояние в което вектора на фазовата скорост е равен на нула. Това означава, че равновесното състояние на системата x^* трябва да удовлетворява $f(x^*) = 0$*



Фигура 1.11. Състояния на равновесие на нелинейни системи. В ляво - устойчиво равновесие, x -неустойчиво равновесие. В дясно равновесие от тип интервал на покой

В зависимост от десните части на $\dot{x}(t) = f(x, t)$ Множеството от равновесни състояния може да има сложна структура. То може да се състои от отделни точки, но точките могат да образуват отсечка или да се намират върху част от равнина или да имат друга форма.

Разглеждайки всяка клетка на клетъчна невронна мрежа като нелинейна система, която извършва обмяна на информация със съседни клетки чрез електрически сигнали, стигаме до извода, че метода на хармоничната линеаризация /метод на хармоничния баланс / е много удобен за изследване на динамиката и на клетъчни невронни мрежи.

Нека предавателната функция на линейната част от системата е:

$$W_l(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Да означим оператор $p = \frac{d}{dt}$

Тогава системата от уравнения 1.98 и 1.99 може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} A(p)\sigma(t) &= -B(p)\xi(t) \\ \xi(t) &= \phi(\sigma(t)) \end{aligned} \tag{1.100}$$

Тук коефициентите на операторните многочлени $A(p)$ и $B(p)$ съвпадат с коефициентите на $A(s)$ и $B(s)$ на предавателната функция. Допускаме, че в 1.100 има периодичен процес с честота ω и период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Важни въпроси са как да определим честотата и амплитудата на процеса и как да анализираме устойчивостта му.

Нека да разгледаме периодичните сигнали:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma(t + T) \\ \xi(t) &= \xi(t + T) \end{aligned} \tag{1.101}$$

Дефинираме амплитудно-честотна хатактеристика на линейната част на системата като

$$H(\omega) = |W_l(j\omega)|$$

Тогава трябва да е изпълнено: $H(\omega) \gg H(k\omega), k = 2, 3, \dots$

/Коефициента на предаване на линейната част на системата на основната честота е много по-голям от коефициента на предаване на по-големите честоти/.

Следователно на изхода сигналите с по-големи честоти могат да се пренебрегнат и да остане само един хармоничен сигнал с честота ω . Този сигнал влиза в нелинейната част и на изхода и се появяват всички честоти. Поради факта, че по високите хармоници не предизвикват съществени реакции на изхода на линейната част, то ще считаме, че те не оказват влияние на затворената система. Извода е, че и входа и изхода на нелинейния блок са хармонични колебания с еднаква честота. Нека входния сигнал има честота

$$\sigma(t) = A \sin \omega t \quad (1.102)$$

Тогава $\sin \omega t = \frac{\sigma(t)}{A}$. Заместваме в изходния сигнал $\xi(t) = A_1 \sin \omega t$ и получаваме:

$\xi(t) = \frac{A_1}{A} \sigma(t)$. Означаваме

$$q = \frac{A_1}{A} \quad (1.103)$$

Следователно нелинейния блок има поведението на линеен блок с коефициент на предаване q .

Нека допуснем, че на изхода на нелинейния блок сигнала има вида

$$\xi(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t. \quad (1.104)$$

Като диференцираме входния сигнал получаваме $\dot{\sigma}(t) = \omega A \cos \omega t$. Заместваме този израз в 1.104 и получаваме:

$$\xi(t) = \frac{A_1 \omega A \sin \omega t}{A \omega} + \frac{B_1 \dot{\sigma}(t)}{A \omega} \quad (1.105)$$

Като използваме 1.102, 1.103 и означението $q' = \frac{B_1}{A}$ получаваме,

$$\xi(t) = q \sigma(t) + \frac{q'}{\omega} \dot{\sigma}(t). \quad (1.106)$$

Тук q и q' наричаме коефициенти на хармоничната линеаризация на нелинейното звено. Получения израз съответства на предавателната функция на нелинейната част:

$$W_{nonlinear} = q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} \cdot \sigma \quad (1.107)$$

Техника на изчисляване на коефициентите на хармонична линеаризация.

Нека $\sigma(t) = A \sin(t)$.

Поради факта, че висшите хармоници не се разглеждат изходящия процес $\xi(t)$ го предста-



Фигура 1.12. Схема на входните и изходните сигнали в нелинейния блок

вяме в ред на Фурие по следния начин:

$\xi(t) = \phi(\sigma(t)) = \phi(A \sin(\omega t)) = A_0 + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$, където:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(A \sin(\psi)) d\psi \\ A_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(A \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi \\ B_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(A \sin(\psi)) \cos(\psi) d\psi \end{aligned} \quad (1.108)$$

Заместваме 1.108 в 1.107 и получаваме:

$$\begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} \phi(A \sin(\psi)) d\psi \\ q'(A, \omega) &= \frac{B_1}{A} = \frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} \phi(A \sin(\psi)) \cos(\psi) d\psi \end{aligned} \quad (1.109)$$

Преди да започнем изследване на гранични цикли в нелинейна система, представяме нелинейната система в операторен вид:

$$A(p)\sigma(t) = -B(p)\xi(t) \quad (1.110)$$

Ще намерим частно решение на това уравнение при $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$, $\lambda \in C$.

Решението ще търсим във вида $\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda t}$.

Като заместим $\xi(t), \sigma(t)$ в 1.110 получаваме:

$$A(p)\sigma_0 e^{\lambda t} = -B(p)\xi_0 e^{\lambda t} \quad (1.111)$$

Ако $A(s)$ е полином $s \in C$, коефициентите на който съвпадат с коефициентите на операторния многочлен $A(p)$, и $A(\lambda) \neq 0$, функцията $\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda t}$ е решение на операторното уравнение,

като $\sigma_0 = -\frac{B_1(\lambda)}{A(\lambda)}\xi_0$. Но $W_l = \frac{B_1(\lambda)}{A(\lambda)}$. Тогава $\sigma(t) = -W_l(\lambda)\xi(t)$, където $W_l(\lambda) = W_l(s)|_{s=\lambda}$. Тук $W_l(s)$ е предавателната функция на 1.110. Полагаме $\lambda = j\omega$ и получаваме

$$\sigma(t) = -W_l(j\omega)\xi(t), \quad (1.112)$$

където $W_l(j\omega)$ е честотна предавателна функция на 1.110, когато $A(\lambda) \neq 0$ в системата липсва резонанс.

$$\text{Нека } \xi(t) = \xi_0 \cos \omega t = \xi_0 \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Като го заместим в 1.112 получаваме

$$\sigma(t) = -\frac{\xi_0}{2}(W_l(j\omega)e^{j\omega t} + W_l(-j\omega)e^{-j\omega t}) \quad (1.113)$$

Полагаме $W_l(j\omega) = H(\omega)e^{j\psi(\omega)}$, където $H(\omega) = |W_l(j\omega)|$ е амплитудно-честотната характеристика, а $\psi(\omega) = \arg(W_l(j\omega))$ е фазочестотната характеристика на линейната част на системата. Тогава получаваме:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -\frac{\xi_0}{2}(H(\omega)e^{j\psi(\omega)}e^{j\omega t} + H(\omega)e^{j\psi(\omega)}e^{-j\omega t}) = \\ &= -\frac{\xi_0}{2}(H(\omega) \cos(\omega t + \psi\omega)) \end{aligned} \quad (1.114)$$

Като разгледаме затворена система с линейна обратна връзка и положим $\xi(t) = q\sigma(t)$ и $\xi(t) = \xi_0 e^{j\omega t}$ ще получим системата уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -W_l(j\omega)\xi(t) \\ \xi(t) &= q\sigma(t) \end{aligned} \quad (1.115)$$

откъдето следва, че системата има решение ако $\forall t$ е

$$qW_l(j\omega) = -1 \quad (1.116)$$

Изразът 1.116 се явява уравнението на хармоничния баланс за нелинейни системи.

Извод 2 *Необходимото условие за съществуване на незатихващи осцилации в автономна линейна система с предавателна функция $W_l(s)$, е при определена стойност на ω графиката на амплитудно-фазовата характеристика на линейната част $W_l(j\omega)$ да минава през точката с координати $(-q, 0) \in C$.*

От 1.116 не може да се определят амплитудите на колебанията ξ_0, σ_0 . Така стигаме до:

Извод 3 *В линейните системи няма изолирани затворени траектории, т.е няма гранични цикли.*

Изследване на периодични решения в нелинейни системи. Ще предположим, че нелинейната част в затворената с обратна връзка система е заменена със съответния и линеаризиран израз:

$$\begin{aligned} A(p)\sigma(t) &= -B(p)\xi(t) \\ \xi(t) &= q(A, \omega)\sigma(t) + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega}\dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (1.117)$$

където коефициентите $q(a, \Omega)$, $q'(a, \Omega)$ са получени по формулите 1.109.

Нека да предположим, че решението се търси във вида $\xi(t) = \xi_0 e^{j\Omega t}$. От 1.117 получаваме, че:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \xi_0 W_l(j\Omega) e^{j\Omega t} \\ \dot{\sigma}(t) &= -j\Omega \xi_0 W_l(j\Omega) e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (1.118)$$

От второто уравнение на 1.117 имаме:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= q(A, \Omega)\sigma(t) + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega}\dot{\sigma}(t) = \\ &= \xi_0 e^{j\Omega t} W_l(j\Omega) (q(A, \Omega) + jq'(A, \Omega)) \end{aligned} \quad (1.119)$$

Като ползваме, че $\xi(t) = \xi_0 e^{j\Omega t}$ получаваме

уравнението на хармоничния баланс за нелинейна система

$$(q(A, \Omega) + jq'(A, \omega))W_l(j\Omega) = -1 \quad (1.120)$$

Извод 4 Изразът 1.120 позволява да се открие съществуването на гранични цикли в нелинейни системи. Този израз е еквивалентен на два израза:

$$\begin{aligned} q(A, \Omega)W_l(j\Omega) &= -1 \\ q'(A, \omega)W_l(j\Omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.121)$$

Неизвестните са A и ω .

Уравнението на хармоничния баланс може да се запише по няколко начина:

1. $A(j, \omega) + ((q(A, \omega) + jq'(A, \omega))B(j\omega)) = 0$

2. Ако дефинираме

$D(s) = A(s) + (q(a, \Omega) + s \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega})B(s)$, тогава $D(j\Omega) = 0$ това означава, че амплитудно-фазовата характеристика преминава през началото на координатната система, т.е $D(j\Omega) = 0$.

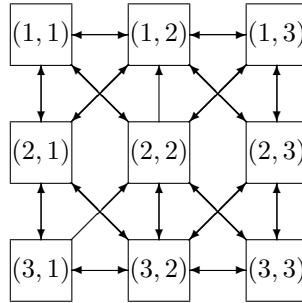
3. $W_l(j\omega) = -\frac{1}{q(A, \omega) + jq'(A, \omega)}$ - Този метод се използва, когато коефициентите на хармоничната линеаризация не зависят явно от честотата. Пресечната точка на графиките на

функциите от двете страни на равенството съответстват на уравнението на хармоничния баланс.

1.4 Приложение на МХБ за изследване на динамиката на НКНМ

Една $M \times M$ Клетъчна невронна мрежа се дефинира чрез:

1. клетъчна динамика; клетъчен синаптичен закон, който представя взаимодействието между съседните клетки.
2. Гранични условия;
3. Начални условия.



3 × 3 Клетъчна невронна мрежа.

Всяка клетка $C(ij)$ на една обобщена клетъчна невронна мрежа, /чиито клетки са направени от независещи от времето елементи (time-invariant circuit)/ се описва с уравнение от вида:

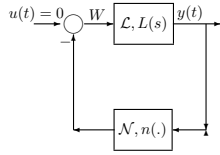
$$\dot{x}_{ij} = -g(x_{ij}, u_{ij}, I_{ij}^s), \quad (1.122)$$

където $x_{ij} \in \mathbf{R}^m$, u_{ij} обикновено е скалар. Взаимодействията със съседните клетки $C(i+k, j+l)$ са определени от синаптичния закон:

$$\begin{aligned} I_{ij}^s &= A_{ij,kl} x_{i+k,j+l} + \\ &+ \tilde{A}_{ij,kl} * f_{kl}(x_{ij}, x_{i+k,j+l}) + \\ &+ \tilde{B}_{ij,kl} * u_{i+k,j+l}(t). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Първият член $A_{ij,kl} x_{i+k,j+l}$ на (1.123) е просто линейна обратна връзка на състоянията, втория член осигурява нелинейно свързване, а третия изразява влиянието на външните входове за всяка съседна клетка, намираща се в N_r околност.

Един от основните методи за изследване на клетъчни невронни мрежи е метода на хармоничния



Фигура 1.13. Обобщена схема на Луре

баланс. За да приложим този метод трябва разглежданите уравнения се представят като система, наречена схема на Луре чрез подходяща трансформация.

Метода на хармоничния баланс има две стъпки:

1. Входния сигнал в нелинейния блок описан в схемата на Луре [19] се апроксимира чрез подходящ синусоидален сигнал, чиято честота и амплитуда са неизвестни.

2. По високите хармоници на изхода на нелинейния блок се пренебрегват.

Математическия модел на една линейна клетъчна невронна мрежа се задава с

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -x_i(t) + sy_{i-1}(t) + py_i(t) + sy_{i+1}(t) \\ y_i &= f(x_i(t)), \\ 1 \leq i &\leq N, \end{aligned} \tag{1.124}$$

където $f(\cdot)$ е частично линейна функция и е изпълнено условието $s \geq \frac{p-1}{2}$

В Термините на диференциалните оператори разглежданото уравнение се изразява чрез $q(D)y(t) + p(D)n[y(t)] = 0$ където D е диференциален оператор. Функцията

$$L(s) = \frac{p(s)}{q(s)}, \tag{1.125}$$

където s е комплексна променлива, $p(s)$, $q(s)$ са полиномни оператори се нарича трансферна функция [38, 39]. Използвания метод се основава на описания в [87] начин на изучаване на първия хармоник, получен на изхода на системата и имащ вида:

$$y_0 = A + B \cos(\omega t) \quad B, \omega > 0. \tag{1.126}$$

Целта е да се намери периодично решение във вида:

$$x_i = \xi(\Omega_0 j + \omega_0 t) \tag{1.127}$$

където $\xi : R \rightarrow R$ и $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ След като приложим непрекъснатата във времето дискретна трансформация на Фурие по формулата :

$$\tilde{X}_\Omega(\omega) = \tilde{X}_k(\omega) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t) e^{-j\frac{2k\pi}{N} + \omega t} dt \quad (1.128)$$

получаваме трансферната функция на системата

$$H(\omega_0, \Omega_0) = \frac{X(\omega_0, \Omega_0)}{Y(\omega_0, \Omega_0)} = \frac{se^{-j\Omega_0} + p + se^{j\Omega_0}}{1 + j\omega_0} \quad (1.129)$$

Която преобразуваме във вида:

$$H(\omega_0, \Omega_0) = \frac{p + 2s\sin\Omega_0}{1 + \omega_0^2} + j \frac{2s\sin\Omega_0 - p\omega_0}{1 + \omega_0^2} \quad (1.130)$$

Отбелязваме факта, че трансферната функция е реална функция,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(\omega_0, \Omega_0)] &= \frac{p + 2s\sin\Omega_0}{1 + \omega_0^2} = \frac{X_{m_0}}{Y_{m_0}} \\ \operatorname{Im}[H(\omega_0, \Omega_0)] &= \frac{2s\sin\Omega_0 - p\omega_0}{1 + \omega_0^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

Предполагаме, че променливата на състоянието и изходната променлива имат формата:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= X_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \\ y_i(t) &= Y_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0), \end{aligned} \quad (1.132)$$

където амплитудата X_{m_0} , времевата честота ω_0 и пространствената честота Ω_0 са неизвестни и трябва да се определят. Апроксимираме периодичния изход $y_i(t) = f(x_i(t))$ чрез основната компонента на неговия ред на Фурие. Y_{m_0} чрез формулата:

$$Y_{m_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X_{m_0} \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi \quad (1.133)$$

от (1.131) получаваме неизвестните:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2s}{p} \sin\Omega_0 \\ X_m &= \frac{2p}{\pi} [X_m \arcsin \frac{1}{X_m} + \sqrt{1 - \frac{1}{X_m^2}}] \end{aligned} \quad (1.134)$$

Системата (1.124) с $s > \frac{p-1}{2}$, има не по-малко от $\frac{n-1}{2}$ различни ненулеви нетривиални решения, чиято пространствена честота е $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$; $1 \leq N \leq \frac{n-1}{2}$.

1.5 Изводи

В настоящата глава са изложени теоретичните основи на математическото моделиране на процеси и явления чрез апарата на клетъчните невронни мрежи. Описани са теоретично методите за изследване на клетъчни невронни мрежи:

1. Метода на функцията на Ляпунов, който е приложен за изследване на клетъчна невронна мрежа, състояща се от две клетки.
2. Метода на хармоничния баланс, който е приложен за изследване на линейна клетъчна невронна мрежа.

Доказан е факта, че всяка нелинейна динамична система, която се описва с $\dot{x} = f(x, t)$ може да се изследва с метода на хармоничния баланс.

Показано е, че клетъчна невронна мрежа има в пространството на състоянията си области с различни траектории.

Изведени са:

1. Уравнението на хармоничния баланс
2. Необходими условия за съществуване на незатихващи осцилации.

Глава 2

Изследване на динамиката на НКНМ на реакция-дифузия

Уравненията на математическата физика са теоретичния апарат, чрез който се изучават механиката, теорията на колебанията, оптиката, електродинамиката, нелинейните вълнови процеси, теорията на потенциала, теорията за устойчивостта, преноса на частиците, физика на плазмата, квантовата механика, квантовата теория на полето, гравитацията. Чрез уравнения на математическата физика се моделират и изучават физическите закони на биологическо ниво.

2.1 НКНМ на реакция-дифузия

В статията на (Roska T., Chai W., Chua L., Stability of CNN with dominant nonlinear and delay-type templates, IEEE, Trans., CAS-I 1993;40:4:270-272) е разгледан модел на клетъчна невронна мрежа описващ уравнения на реакция дифузия. Този модел има по-голям брой клетки и в него се показва ново явление, в сравнение с модела, описващ ЧДУ. В статията е описан начина на конструиране на клетъчна невронна мрежа чрез извършване на пространствена дискретизация и е предложена методология за превръщане на частно диференциално уравнение в клетъчна невронна мрежа т.е. получаването на нелинейните темплетти. Това представяне на частно диференциално уравнение чрез клетъчна невронна мрежа е възможно, поради факта, че ЧДУ и клетъчна невронна мрежа имат общи характеристики а именно:

1. Те са непрекъснати във времето
2. Те са ограничени по стойност
3. Непрекъснати по отношение на параметрите
4. Дискретни в пространството.

В статията (Roska T., Chua L., Wolf D., Kozek T., Tetzlaff R., Ruffer F., Simulating nonlinear waves and PPES via клетъчна невронна мрежа part | and Basic techniques part||: Typical examples IEEE trans. circuit and syst - | 1995 42:10:808:820) е показано как уравнението на топлопроводността

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{k}u_t \quad (2.1)$$

може да се апроксимира чрез крайна пространствена мрежа чрез клетъчна невронна мрежа с прости клетки и клонинг темлети. Тук k - е константа на топлопроводност.

Решението $u(x, y, t)$ на уравнението на топлопроводността е непрекъснатата функция на времето и на пространствените променливи x, y . Ако функцията се апроксимира чрез множество от функции $u_{i,j}(t)$, които са дефинирани като $u_{i,j} = u(ih_x, jh_y, t)$ h_x, h_y са пространствени интервали на x и y координатите. Тогава

$$u_{xx} + u_{yy} \approx \frac{1}{4}[u_{i,j-1}(t) + u_{i,j+1}(t) + u_{i-1,j}(t) + u_{i+1,j}(t)] - u_{i,j}(t) \quad (2.2)$$

Тогава уравнението (2.2) може да се апроксимира чрез системата уравнения, зададена чрез:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}[u_{i,j-1}(t) + u_{i,j+1}(t) + u_{i-1,j}(t) + u_{i+1,j}(t)] - u_{i,j}(t) \quad (2.3)$$

В същата статия е показано, че една клетка от клетъчна невронна мрежа може да генерира решения на уравнения от вълнови тип чрез добавяне на капацитет на изхода на клетката. Показано е също, че в равновесната точка клетъчна невронна мрежа се получава решение на уравнението на Лаплас. Такива клетъчно невронни мрежи се наричат клетъчно невронни мрежи на реакция-дифузия и се описват чрез:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u) + D \nabla^2 u \\ u &\in R^m \\ f &\in R^m, \end{aligned}$$

D е диагонална матрица, чиито диагонални елементи $D_{i,i}$ са наречени коефициенти на дифузия, и

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, i = 1 \dots m \quad (2.4)$$

е Лапласов оператор в R^2 .

Съществуват няколко начина за апроксимиране на Лапласовия оператор (2.4) в дискретно пространство чрез клетъчна невронна мрежа със синаптичен закон и подходящ A темплет.

Например темплетите могат да бъдат:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{темплет при едномерна дискретизация} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{темплет при двумерна дискретизация}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Да разгледаме клетъчна невронна мрежа чието уравнение на състоянието е

$$\dot{u}_i(t) = -cu + Af(u_i) + I_i \tag{2.6}$$

и има пространствено инвариантен темплет $A = [r \ p \ s]$, няма B темплейт и независимия член $I=0$. Тогава уравнението, което описва клетката c_i се задава чрез:

$$\dot{u}_i = -u_i + rf(u_{i-1}) + pf(u_i) + sf(u_{i+1}) = -u_i + [p \ q \ s] * f(u_i), \tag{2.7}$$

където $f(u_i)$ е частично линейна функция

$$f(u_i) = \frac{1}{2}(|u_i + 1| + |u_i - 1|) \tag{2.8}$$

* означава дискретна пространствена конволюция. Когато $|u_i| \leq 1$, клетката c_i се нарича линейна клетка, а когато $|u_i| \geq 1$ клетката ще се нарича клетка с насищане. Пространствено инвариантния темплет $= [r \ p \ s]$ може да се декомпозира по следния начин:

$$[r \ p \ s] = (p + r + s)[0 \ 1 \ 0] + \frac{(s + r)}{2}[1 \ -2 \ 1] + \frac{(s - r)}{2}[-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}] \tag{2.9}$$

Темплета $[1 \ -2 \ 1]$ съответства на дискретизираната втора частна производна, а темплета $[-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]$ съответства на дискретизираната първа частна производна.

Тогава 2.7 може да се запише във вида:

$$\dot{u}_i = -u_i + (p + r + s)f(u_i) + \frac{(s + r)}{2}\hat{\partial}^2 * f(u_i) + (s - r)\hat{\partial}f(u_i) \tag{2.10}$$

където $\hat{\partial}^2 = [1 \ -2 \ 1]$, а $\hat{\partial} = [-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}]$

Да разгледаме частното диференциално уравнение:

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + a.f(u(z, t)) + d.\partial_z^2 f(u(z, t)) + c.\partial_z f(u(z, t)) \tag{2.11}$$

където z е пространствена променлива, а ∂_t и ∂_z са частни производни по z и t , a, d, c са три константи. Тогава $a f(u(z, t))$ изразява активната реакция, $d \partial_z^2 f(u(z, t))$ изразява дифузията,

$c\partial_z f(u(z, t))$ изразява конвекцията

Като сравним коефициентите на 2.11 и 2.10 се получава, че

$$\begin{aligned}\frac{s+r}{2} &\rightarrow d \\ s - r &\rightarrow c \\ p + s + r &\rightarrow a\end{aligned}\tag{2.12}$$

Това показва, че пространствената дискретизация, използвана при проектиране на клетъчна невронна мрежа не оказва влияние при изследване на динамиката и.

Когато $r=p$ А темплата е симетричен и тогава 2.11 има вида:

$$\dot{u}_i = -u_i + (p + 2s)f(u_i) + s\hat{\partial}^2 * f(u_i)\tag{2.13}$$

което е дискретен аналог на уравнението от тип реакция дифузия

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + af(u(z, t)) + d\partial_z^2 f(u(z, t))\tag{2.14}$$

подобно на

$$\partial_t u(z, t) = f_r(u(z, t)) + D\partial_z^2 u(z, t)\tag{2.15}$$

където $f_r(u(z, t))$ е кубична или квадратна функция.

Уравнението 2.15 се използва много в инженерните науки, биологията и физиката.

Равновесната точка на уравнението 2.14 се получава като решение на нелинейното диференциално уравнение:

$$-u(z, t) + af(u(z, t)) + d\partial_z^2 f(u(z, t)) = 0\tag{2.16}$$

в линеен интервал, където $|u| \leq 1$ с изключение на краен брой точки, където $|u_i| = 1$. Уравнението 2.16 се редуцира до хармонично осцилиращо обикновено диференциално уравнение с ъглова честота $k_c = \sqrt{\frac{a-1}{d}}$, чието решение е синусоидна функция на t . Там, където $|u| \geq 1$, които интервали наричаме интервали на насищане, решението на 2.16 се редуцира до $u=a$ и $u=-a$. Върху граничните точки между насищането и линейния интервал $u(z)$ може да има скоково прекъсване. От равновесните характеристики получаваме, че $\partial_z f(u(z))|_z \rightarrow z_0^- = \partial_z f(u(z))|_z \rightarrow z_0^+ = 0$, където z_0 е гранична точка в интервала, който е разделен на два интервала от точката на насищане. При изследване на линейния интервал $[z_1, z_2]$ всяко малко смущаване $\delta u(z, t)$ около равновесната точка показва, че уравнението

$$\partial_t \delta u(z, t) = -\delta u(z, t) + a\delta u(z, t) + d\partial_z^2 \delta u(z, t)\tag{2.17}$$

За $z \in [z_1, z_2]$ с гранични условия $\delta u(z = z_1, t) = \delta u(z = z_2, t)$. Уравнението 2.17 има

собствено решение $\delta u(z, t) = e^{\lambda_n t + j k_n z}$, където $\lambda = a - 1 - (\frac{n\pi}{L})^2 d$, $n \in N$, $L = z_2 - z_1$, j е имагинерната единица. Точната характеристика на равновесието може да се потвърди чрез апроксимиращо спектрално приближение. Допускаме, че решението на линеаризираната версия на 2.14 е $u(z, t) = U e^{j k z + \lambda t}$ и тогава получаваме за

$$\lambda_n = a - 1 - k_n^2 d \quad (2.18)$$

където редицата k_n^2 е образувана от собствените стойности на оператора ∂_z^2 в интервала $[0, L]$. От 2.18 получаваме, че за

$$k_c = \sqrt{\frac{a-1}{d}} \quad (2.19)$$

имаме осцилации, а за онези собствени решения, за които $k_n > k_c$ са отрязани някои пространствени честоти.

Един темплет е антисиметричен, когато има вида $[-s \quad p \quad s]$. Доказано е, че клетъчна невронна мрежа с антисиметрични темплети могат да имат решение от тип бягаща вълна.

Да разгледаме уравнението

$$\partial_t u(z, t) = -u(z, t) + a f(u(z, t)) + c \partial_z^2 f(u(z, t)) \quad (2.20)$$

Това уравнение също допуска разклоняващо се решение, като решението му от тип бягаща вълна е напълно различно от онова, което може да възникне в системата

$$\partial_t u(z, t) = f_r(u(z, t)) + D \partial_z^2 u(z, t), \quad (2.21)$$

където асиметрията на активния член т.е. функцията $f_r(u(z, t))$ се свързва с ефекта на дифузия. Възниква бягаща вълна с гладък вълнов фронт.

Да изследваме 2.20 в краен интервал $[0, L]$ с циклични гранични условия, за да определим как решението от тип пътуваща вълна се движи без да се отрази в границите. На практика това е обикновено устойчиво решение от тип пътуваща вълна на 2.20 с $a > 0$ и има вида:

$$u(z, t) = a g(z + \frac{ct}{a}), \quad (2.22)$$

където $g(\xi)$ е частично непрекъснатата константна периодична функция с период L такава, че $|g(\xi)| = 1$ и има краен брой точки на прекъсване, където

$$g(\xi) = \begin{cases} +1 \\ -1, \end{cases} \quad (2.23)$$

т.е. подобно решение може да възникне в антисиметрична клетъчна невронна мрежа.

2.2 Моделиране на интегро - диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо с НКНМ на реакция - дифузия

Тук е представено изследване на уравнението, на Фиц Хю Нагумо, което е опростена форма на уравнението на модела Hodgkin-Huxley за разпространяване на импулсите в аксона. [88]:

$$u_t - u_{xx} = u(u - \Theta)(1 - u) - \int_0^t u(s, x) ds, \quad (2.24)$$

$$0 < x, t < 1, 0 < \Theta < 1/2.$$

u_t е първата частна производна на $u(t, x)$ по t ,

u_{xx} е втората частна производна по x ,

u е мембрания потенциал на аксона.

Състоянието $u = 0$ изразява състоянието на покой на нерва.

Въвеждаме нова променлива

$$w = \int_0^t u(s, x) ds \quad (2.25)$$

и получаваме системата:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u) - w + u_{xx} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= u \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тук $f(u) = u(u - \theta)(1 - u)$,

u е мембрания потенциал на аксона,

w е помощна променлива.

В случая, когато $u = 0 = w$, състоянието на покой на нерва се представя чрез отговора /решението/ на системата. Ще предполагаме, че $w = 0$.

Проектираме решението $u(x, t)$, $w(x, t)$ на системата (2.26) в слой на клетъчна невронна мрежа, така че напрежението в клетка (k, l) свързана с $u(kh, t)$, $h = \Delta x$

може да се изрази с:

$$u_{xx} \sim \frac{1}{h^2} ((u(x+h, t) - u(x, t)) - (u(x, t) - u(x-h, t))). \quad (2.27)$$

И може да бъде записано като:

$$u_{xx} \sim \frac{1}{h^2} (u_{k+1, l} - 2u_{k, l} + u_{k-1, l}). \quad (2.28)$$

За системата (2.26) клетъчната динамика се описва с:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= u_i(u_i - \theta)(1 - u_i) - w_i + u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} &= u_i\end{aligned}\quad (2.29)$$

И синаптичния закон е:

$$I_i^s = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (2.30)$$

2.3 Динамично поведение на модела на интегро-диференциално уравнение на Фиц Хю Нагумо

За да изследваме динамиката на (2.29) прилагаме дискретната трансформация на Фурие чрез използване на следната формула:

$$F(s, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-sp}. \quad (2.31)$$

И получаваме системата:

$$\begin{aligned}sU - Uz^{-1} + (2 + \theta)U - Uz &= N(U) - W \\ sW &= U,\end{aligned}\quad (2.32)$$

където

$$N(U) = -U^3 + (1 + \theta)U^2. \quad (2.33)$$

изразяваме $W = \frac{U}{s}$ и заместваме в първото уравнение (2.32). След известни математически преобразования получаваме:

$$U = \frac{s}{s^2 - sz^{-1} + s(2 + \theta) - sz + 1} N(U). \quad (2.34)$$

Означаваме $A = z^{-1} - (2 + \theta) + z$ и го заместваме в (2.34) и получаваме:

$$U = \frac{s}{s^2 - sA + 1} N(U). \quad (2.35)$$

Така системата (2.32) може да се представи чрез схемата на Луре.

След като заместим $s = j\omega$ и $z = e^{j\Omega}$ получаваме:

$$H(j, \Omega) = \frac{j\omega(1 - \omega^2) - \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)}{(1 + \omega^2)^2 - \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} \quad (2.36)$$

Разделяме реална от имагинерна част:

$$\operatorname{Re} H(j, \Omega) = \frac{\omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = \frac{U_{m0}}{W_{m0}} \quad (2.37)$$

$$\operatorname{Im} H(j, \Omega) = \frac{\omega(1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = 0 \quad (2.38)$$

Търсим периодично решение на нашия КНМ модел (2.29) във вида:

$$u_i(t) = \xi(\Omega_0 i + \omega_0 t + k\omega_0 T), \forall k \in N \quad (2.39)$$

където $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ е минималния период на решението.

От граничните условия: $u_0(t) \equiv u_N(t)$, $u_{N+1}(t) \equiv u_1(t)$ и (2.39) получаваме:

$$u_{N+1}(t) = \xi(\Omega_0(N+1) + \omega_0 t) = \xi(\Omega_0 + \omega_0 t) \quad (2.40)$$

и тогава от (2.39) получаваме:

$$\Omega_0 N = k\omega_0 T \quad \Omega_0 = \frac{k\Omega_0 T_0}{N} = \frac{2k\pi}{N}. \quad (2.41)$$

или

$$u_i(t) = U_{m0} \sin(\Omega_0 i + \omega_0 t). \quad (2.42)$$

Заместваме $\psi = \Omega_0 i + \omega_0 t$ и получаваме $u_i = U_{m0} \sin(\psi)$.

Това е представянето за входния сигнал. Правим аналогични разсъждения за изходния сигнал и получаваме, че $w_i(t) = W_{m0} \sin(\psi)$.

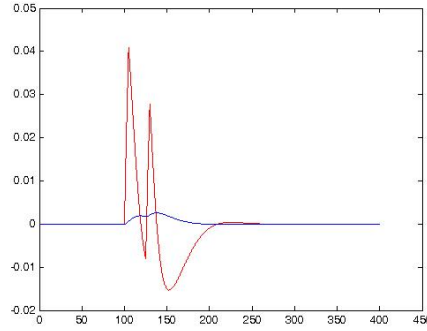
Формулата за намиране на основните компоненти на трансформацията на Фурие:

$$W_{m0} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(U_{m0} \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.43)$$

Като решим (2.43) получаваме: $W_{m0} = -\frac{3}{4}U_{m0}^3$, което заместваме в (2.37) и получаваме

$$\frac{\omega^2(-2\cos(\Omega) + 2 + \theta)}{(1 + \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos(\Omega) - 2 - \theta)^2} = \frac{U_{m0}}{-\frac{3}{4}U_{m0}^3}, \quad (2.44)$$

$$U_{m0} = \sqrt{\frac{4(1 - \omega^2)^2 + \omega^2(2\cos\Omega - 2 - \theta)^2}{3\omega^2(2 + \theta - 2\cos\Omega)}}. \quad (2.45)$$



Фигура 2.1. Динамично поведение на уравнението на Фиц Хю Нагумо

Като решим като система (2.43) и (2.38) получаваме:

$$U_{m_0} = \sqrt{\frac{4(2 \cos(\Omega) - 2 - \theta)}{3}}$$

В съответствие с метода на хармоничния баланс, ако за дадена стойност на

$$\Omega_0 = \frac{k\omega_0 T_0}{N} = \frac{2k\pi}{N}$$

може да се намери решение (ω_0, Ω_0) чрез решаване на уравненията описани с (2.37) и (2.38), тогава можем да предскажем съществуването на периодично решение с амплитуда U_{m_0} и период $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

По този начин доказахме следната теорема

Теорема 9 *Модела на клетъчно невронна мрежа (2.29) с N клетки на интегро диференциалното уравнение (2.24) има периодично решение $u_i(t)$ с крайно множество от пространствени честоти. $\Omega_0 = \frac{2k\pi}{N}$, $0 \leq k \leq N - 1$ и период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.*

За анализа на динамичното поведение на решението на уравнението от интегро – диференциален тип е разработена програма на Matlab, чрез която лесно се визуализират графично получените резултати.

Разработената програма е за единична клетка в която се реализират скокообразни промени . Използван е метода на Ойлер за изчисляване на всяка променлива във всяка точка от времето. Използвани са нулеви начални условия на Dirihle и симулирано малко дразнение около 100 времева стъпка.

На графиката, е показана реакцията на клетката в резултат на избухващото дразнение, което бързо намалява своята сила. Когато дразнението (изчертано в червено) достигне своята минимална стойност, решението т. е. реакцията на клетката (изчертано в синьо) получава своя максимум. След това се вижда как и дразнението и реакцията на клетката клонят към нула.

2.4 Изводи

В тази глава е направен теоретичния анализ на клетъчни невронни мрежи на реакция - дифузия. Подробно е представено изследване на интегро - диференциалното уравнение на Фиц Хю Нагумо, което е математически модел за разпространение на нервни импулси по аксона. Анализирани са динамиката му.

Глава 3

Изследване на някои НКНМ модели на уравнения на математическата физика

За математическите методи за решаване на частните диференциални уравнения и числените методи за тяхното решаване може да се прочете в [89], [45],[27], [76], [56] и online на адреси:

https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE_FUB/num_pde_fub.pdf

https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE_FUB/num_pde_fub.pdf

3.1 Моделиране на флуksони и тяхното взаимодействие

Във фокуса на съвременните теоретични и експериментални изследвания стои Ефектът на Джозефсон. Този ефект е квантово явление с широко приложение в свръхпроводящите нанотехнологии. За целта в литературата са публикувани изследвания за джозевсонови контакти тип свръхпроводник феромагнит-свръхпроводник, в който е на лице връзка между магнитните моменти и джозефсоновия ток. Джозефсоновият контакт представлява сандвич от три слоя, от които външните са свръхпроводник, разделени от диелектрик (барьерен слой). При определени условия през този слой може да се наблюдава тунелен ефект на проникване на електрони. Математическият модел на това явление се описва с уравнението на син-Гордън, което принадлежи към т.н. група солитонно-поддържащи уравнения (soliton supporting dynamical systems)

Определение 14 *Флуksон е математическо понятие, съответстващо на вълнитв в маг-*

нитния поток в Джозефсоновия контакт или Джозефсоново съединение (JJ). Размерите им са малки, а времето за образуване е 10с. Удобни са за използване като битове във компактни и високоскоростни системи за информация. Уравненията, които описват флуксоните са следните:

$$I = I_0 \sin(\phi) \quad (3.1)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot v \quad (3.2)$$

където

I са загубите на супертока, който тече през JJ,

I_0 е максималната стойност на този ток, наречен критичен ток на JJ,

$\phi(t) = \theta_1 - \theta_2$ е разликата между фазите на функциите на сложните двойки вълни между двата полупроводници

v е пада на напрежението в JJ

$\Phi_0 = 2.027mV.ps$ е основна константа, наречена единичен флукс квант.

При изследване на флуксоните се използва уравнението на син - Гордон

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin(\phi) \quad (3.3)$$

Уравнението 3.3 се среща в много области на физиката: във физиката на магнетизма, в нелинейната оптика, в теорията на свъх проводимостта и др.

През последните години в [111], са намерени нови многосолитонни решения на уравнението на син - Гордън.

Тук изследваме обобщената форма на 3.1,

$$I = I_0 \sin(\phi) + [G_0(v) + G_1(v) \cos(\phi)] \cdot v, \quad (3.4)$$

и при моделирането на процеса се интересуваме от решенията му където:

G_0 и G_1 са комплексни функции на напрежението и температурата. За опростяване на разсъжденията ще ги считаме за константи.

Тогава уравнение 3.3 може да се запише така:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha(1 + \epsilon \cos(\phi)) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sin(\phi) - \gamma, \quad (3.5)$$

където $\gamma = \text{const} > 0$.

Ако $0 < \epsilon = \frac{G_1}{G_0} \ll 1$, $\alpha \in [10^{-2}, 10^{-4}]$.

Ако $\alpha \rightarrow 0$, то 3.5 е еквивалентно на 3.3.

Решенията на 3.5 наричаме флуксони.

Целта ни е да представим взаимодействието на флуксон- антифлуксон чрез клетъчно невронни мрежи.

В [64] е показано, че уравнение 3.5 има две различни решения:

1. плазмена вълна, съответстваща на амплитудата на люлеене на махало и
2. флуксон вълна, съответстваща на въртенето на махалото.

Търсим решение от тип бягаща вълна $\phi(x, t) = \phi(x - ct)$ с постоянна скорост $c^2 < 1$.

Тогава 3.5 при $\epsilon = 0$ се представя във вида:

$$\frac{d^2\phi}{d^2\xi} - \alpha \frac{c^2}{1-c^2} \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = \frac{\sin(\phi) - \gamma}{1-c^2} \quad (3.6)$$

Правим смяна на променливите в 3.5, като правим полагането $\frac{d\phi}{d\xi} = p(\phi)$.

Тогава получаваме уравнението:

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{d\phi} - \alpha \frac{c^2}{1-c^2} p^2 = \frac{\sin(\phi) - \gamma}{1-c^2} \quad (3.7)$$

Чрез няколко замествания и полагания получаваме решение от тип бягаща вълна на модифицираното уравнение на син - Гордън

$$\phi = \arcsin(\gamma_0) + 2 \arcsin\left(\text{cn}\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\Gamma c^2}}, (x - x_0), k\right)\right), \quad (3.8)$$

където

$$k = \sqrt{\frac{2\gamma_0}{\gamma + \gamma_0}} \quad (3.9)$$

$$\gamma_0 = \frac{2\Gamma c^2}{\sqrt{(1-c)^2 + 4\Gamma^2 c^2}} \quad (3.10)$$

а c е скоростта на пътуващата вълна.

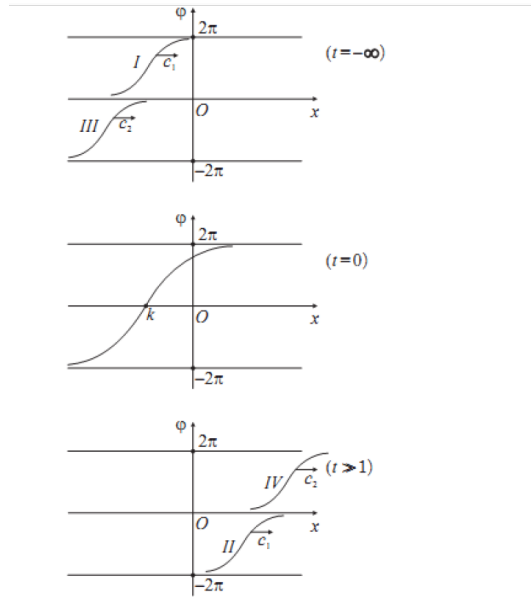
Геометрически решението се изменя в интервала $(-\infty, \infty)$

Положителния пик на решението, наречен флуксон се изменя в интервала $(0, 2\pi)$, а отрицателния пик, наречен антифлуксон се изменя в интервала $(-2\pi, 0)$.

Решението на моделираното уравнение можем да го представим във вида (ползвами сме [57])

$\psi = f(x).g(t) = \tan\left(\frac{\phi}{4}\right)$, където

$$f(x) = \text{sh}\left(\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}\right), a \quad (3.11)$$



Фигура 3.1. Взаимодействие на два флуksона

$$g(t) = \frac{1}{ch\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)} \quad (3.12)$$

или

$$\phi = 4arctg(\psi) \quad (3.13)$$

Нека $c \in (0, 1)$.

Знаем, че

$$sh x \approx \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-x}, & x \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{2}e^x, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.14)$$

Тогава получаваме:

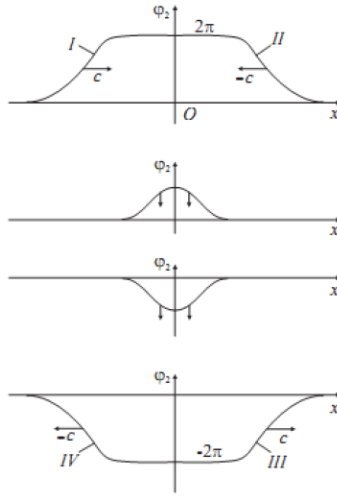
$$\psi_a \approx \frac{1}{c} \begin{cases} -e^{\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty \text{ IV} \\ e^{-\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty \text{ II} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\psi_f \approx \frac{1}{c} \begin{cases} e^{\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow -\infty \text{ I} \\ -e^{-\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}}, & x \rightarrow \infty \text{ III} \end{cases} \quad (3.16)$$

Антифлуksоните, отбелязани с 3.15 са монотонно намаляващи, а флуksоните, отбелязани с 3.16 са монотонно нарастващи.[80]

На фигура 3.1 е показано взаимодействието на двойка флуksони със скорости c_1 и c_2

Нека предположим, че $c_2 > c_1 > 0$. Тогава флуksон **I** има фаза x_1 и скорост c_1 , а флуksон **III** има фаза y_1 и същата скорост c_1 . След сблъсък с втори флуksон, първия, чиято скорост е c_1 започва да се движи назад. Скоростта, с която се е движил напред се забавя и започва да изостава от втория. По аналогичен начин получаваме взаимодействието между



Фигура 3.2. Взаимодействие на вълните флуксон - антифлуксон

флуксони **II** и **IV**. Но сега след сблъсък с втори флуксон имаме придвижване напред и тогава по-бързия флуксон се придвижва допълнително напред със скорост $c_2 > c_1 > 0$.

Забележка 1 Бавният **I** и бързият **III** започват своето движение във време $t = \infty$. **III** е позициониран по-назад по отношение на **I**. Фазата на **I** е $\phi > 0$, а фазата на **III** $\phi < 0$

Във време $t = 0$ **I** флуксон се съединява с **III** и се оформя конфигурацията на фигура 3.1. Получаваме $\phi(0, x) \rightarrow 2\pi$ за $x \rightarrow \infty$ и $\phi(0, x) \rightarrow -2\pi$ за $\phi(0, x) \rightarrow -\infty$.

Когато $t \ll 0$ двата флуксона се появяват отново със същите скорости c_1 и c_2 и същите профили. Те са означени с **IV** по бързия и **II** по бавния. Флуксон **IV** е по-напред по отношение на флуксон **II**.

Флуксон **IV** има фаза $\phi > 0$, а флуксон **II** има фаза $\phi < 0$.

Така изглежда вълновия профил, който в литературата се нарича бреатон.

Решението на

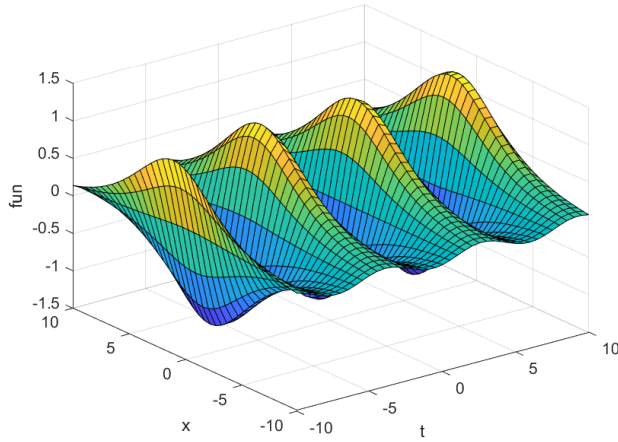
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha(1 + \epsilon \cos \phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sin \phi - \gamma \quad (3.17)$$

е представен във вида, изведен в [80]

$$\phi = \arctan \frac{\tan x \sin(\cos \sigma t)}{\cosh(\sin \sigma t)} \quad (3.18)$$

където: σ е параметър и се знае, че $|\sigma| < \frac{\pi}{2}$

Ще представим чрез клетъчна невронна мрежа взаимодействието на флуксоните. Като използваме създадената от [33] и [34] клетъчна динамика правим дискретизация на уравнението 3.17 по следния начин:



Фигура 3.3. Взаимодействие на двойка флуksони - breaddon

Конструираме фазата $\phi(x, t)$ върху слой на клетъчна невронна мрежа, така че статичното напрежение на клетката от клетъчната невронна мрежа да е v_j .

Изследваме едноразмерна мрежа, чиито клетки имат паралелно свързан линеен капацитет и нелинеен индуктор, описан чрез:

$$i_j = f(v_j)_\alpha (1 + \epsilon \cos v_j) u_j - \sin v_j \quad (3.19)$$

и клетките са свързани една с друга с линейни индуктори (с индуктивност L).

Клетъчната динамика на мрежата се описва с уравнението:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{1}{c} [I_j - f(v_j)] \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= U_j, 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (3.20)$$

а синаптичния закон е :

$$I_j = i_{L_j} - i_{L_{j+1}} = \frac{1}{L} (v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) \quad (3.21)$$

където

$$v_j(t) = \int_{-\infty}^t u_i(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

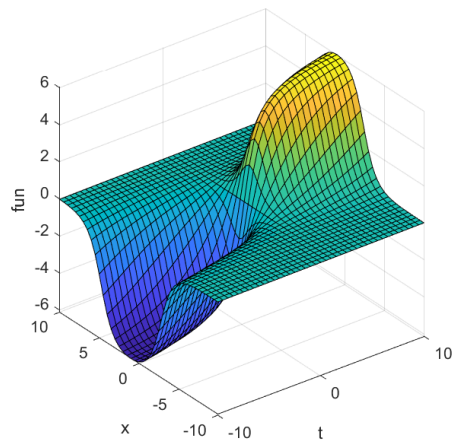
е свързан с флуksона във възел j .

Синаптичния закон 3.21 представлява дискретизирания Лапласиан $A = [1, -2, 1]$ във възел v_j .

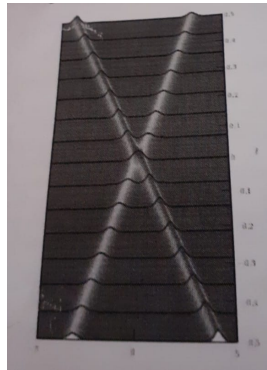
Компютърната симулация на Флуksон- антифлуksон е дадена на фигура

3.4. В [15] са описани различни видове уравнения на син Гордън.

Ще разгледаме уравнението:



Фигура 3.4. Симулация на флуксон - антифлуксон



Фигура 3.5. Взаимодействие на 4π "kink" вълни

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \pm \sin \phi + \frac{1}{2} \lambda \sin \frac{1}{2} \phi \quad (3.23)$$

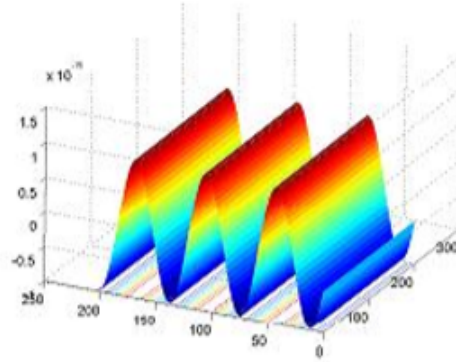
В това уравнение в дясната страна има два пъти функцията синус. В [15] е доказано, че когато $\lambda = 1$ 3.23 е неустойчиво. Такъв тип неустойчивост описва разпространението на възбудането на усилвателя.

Взаимодействието на вълни от тип кинк на 3.23 с отрицателен знак в дясно и $\lambda = 1$ са дадени на фигура 3.5.

Като разгледаме и друг вид уравнение на син - Гордън уравнение - с три синуса в дясната част.

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin \phi + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3} \phi + \frac{2}{3} \sin \frac{2}{3} \phi \quad (3.24)$$

и направим симулация получаваме, че решението изглежда като на фигура 3.3.



Фигура 3.6. Периодично решение на клетъчно невронен модел на 3.26 и 3.27

Уравнението, в чието решение се появява бредон, описано в [15] има вида:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = -(\sin \phi + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \phi) - \gamma \omega \Omega_l^{-2} B_1 \sin(\omega \Omega_l^{-1} t) \quad (3.25)$$

Изследван е клетъчно невронен мрежови модел на уравнението на син - Гордън с много синуси в дясно [87].

Клетъчно - невронната динамика се описва с уравненията:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{1}{c} [I_j - g(v_j)] \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= u_j, 1 \leq j \leq N \\ g(v_j) &= -(\sin v_j + \frac{1}{2} \sin v_j) - \gamma \omega \Omega_l^{-2} B_1 \sin(\omega \Omega_l^{-1} t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

и синаптичния закон е:

$$I_j = i_{L_j} - i_{L_{j+1}} = \frac{1}{L} (v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) \quad (3.27)$$

Правим двойна трансформация на Фурие за този модел клетъчна невронна мрежа.

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-sp} \quad (3.28)$$

$s = i\omega$ $z = e^{i\Omega}$ ω е времева честота, а Ω е пространствената честота. Като приложим метода на хармоничния баланс [87], получаваме че $\Omega = \frac{2\pi K}{T}$,

$0 \leq K \leq N - 1$ при кръгов масива с краен брой пространствени честоти.

T е минималния период.

Така доказахме, че клетъчно - невронния модел, описан с 3.26 и синаптичен закон 3.27 на

кръгов масив с N идентични клетки, които са индуктивно свързани Джозефсонови съединения (JJ) имат периодични решения $(u_j(t), v_j(t))$ с краен брой пространствени честоти.

В направената симулация са взети следните начални условия: $v_j = \sin \Omega_j$, $j=1,2,3,\dots,N$

Получена е следната графика (виж 3.6) на решението на 3.26 и 3.27

3.2 Моделиране на вискоеластичното уравнение на Бургерс и изследване на неговата динамика

Най-простият модел, който показва нелинейната връзка между движението на молекули във флуиди/конвекция/ и появата на устойчиво състояние, възникнало в неравновесна среда в резултат на разсейването на енергия, постъпваща в дадена система е добре известно като уравнение на Бургерс.

Уравнението на Бургерс е уравнение в частни производни, което се използва в различни области на приложната математика, като механика на флуидите, нелинейната акустика, газова динамика, транспортен поток.

То има вида:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}. \quad (3.29)$$

Това уравнение е въведено от Бургерс [28] като математически модел на турбуленция.

Уравнение 3.29 и съответното му хомогенно уравнение

$$u_t + uu_x = 0, \quad (3.30)$$

се изучават, защото при тях се появяват решения от различен тип и има разработени методи за численото им решаване [82].

Ще покажем как добавянето на вискоеластичност влияе на решенията от тип пътуваща вълна. Нека да изследваме уравненията:

$$u_t + uu_x = v_x, \quad (3.31)$$

$$v_t + uv_x - vv_x = \alpha u_x - \beta v. \quad (3.32)$$

В уравнението 3.32 времето за релаксация е $\lambda = \beta^{-1}$, и $\alpha = \mu\lambda^{-1}$ и може да се интерпретира като еластичност на материалите когато няма възстановяване при въздействие ($\beta = 0$). В противоположния случай имаме мигновено възстановяване от въздействието ($\lambda \rightarrow 0$), и тогава

3.32 се редуцира до

$$v = \mu u_x \quad (3.33)$$

и системата уравнения 3.31 и 3.32 е еквивалентна на уравнението на Бургерс с вискозитет $\mu = \varepsilon$.

Модела на Максвел е най- протия модел изразяващ вискоеластичността на материалите. Изследвана е пружина закачена в единия край с коефициент на разтягане k и коефициент на затихване μ . Въздействието върху пружината означаваме с v ,

$$\lambda \dot{v} + v = \mu \dot{\varepsilon}, \quad (3.34)$$

където ε е напрежението в елемента и $\lambda = k/\mu$ е времето за релаксация. Тогава линейния модел на уравнението на Максвел е

$$\lambda v_t + v = 2\mu D, \quad (3.35)$$

където $2\mu D$ е опъването на пружината при въздействие.

Понякога 3.35 не изразява закона за разтягане, защото не е инвариантен във времето. Референтната рамка на разтягането е изследвана чрез използване на подходящи производни по времето, близки до производните, изразяващи скоростта на промяна на материалите.

$$\bar{S} = S_t + u \cdot \nabla S - \nabla u S - S \nabla u^T. \quad (3.36)$$

Като заместим в 3.35 частната производна по времето със съответната производна изразяваща конвекцията, получаваме уравнението на Максвел (УКМ)

$$\lambda \bar{v} + v = 2\mu D. \quad (3.37)$$

Елемента (i, j) в 3.37 можем да изразим чрез

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_{kj} - v_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \\ + v_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

Където сумирането е по индекса \mathbf{k} . Съществуват различни инвариантни представления за производните. Тук е разгледана едномерната версия на уравнението на конвекцията на Максвел (УКМ), чието уравнение е:

$$\lambda(v_t + uv_x - vu_x) + v = \mu u_x. \quad (3.39)$$

Уравнението 3.39 е еквивалентно на 3.32.

Разделяме на двете страни на 3.39 на коефициента λ и получаваме.

$$v_t + uv_x - vu_x = \alpha u_x - \beta v, \quad (3.40)$$

където

$$\alpha = \mu\lambda^{-1}, \quad (3.41)$$

$$\beta = \lambda^{-1}. \quad (3.42)$$

Тук параметъра α е коефициент на еластичност на материалите ако няма възстановяване след напъгане ($\beta = 0$). Това е така, защото закона за еластичността се изразява чрез времето за възстановяване (λ) и вискозитета (μ) или чрез модула на еластичност α и скоростта на разпадане β .

Забележка 2 *За да намерим отговор на въпросите как се определя формата на решението между два профила на вълната и защо има решение с два профила на вълната, прилагаме метода на RTD -базирани невронни мрежи.*

RTD-клетъчни невронни мрежи

Клетъчните невронни мрежи (CNN) [33] са сложни нелинейни динамични системи и следователно може да се очакват интересни явления като бифуркации и хаос в такива мрежи. Доказано е, че когато коефициентите на обратната връзка са променени до критична стойност, клетъчна невронна мрежа, която има темплейт с противоположен знак може да промени състоянието на мрежата от стабилно до нестабилно. Това е явлението, при което се губи стабилност и се раждат гранични цикли. По време на изследването са приложени едномерни RTD - базирани клетъчни невронни мрежи без входни и прагови условия.[29] Тогава уравнението на клетъчна невронна мрежа (RTD), с която са изследвани уравненията на Burger (3.31 и 3.32) е следното:

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} + u_j A_1 * u_j &= A_1 * v_j \\ \frac{dv_j}{dt} + u_j A_1 * v_j - v_j A_1 * u_j &= \\ &= \alpha A_1 * u_j - \beta v_j, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$1 \leq j \leq M$, където $A_1 = (1, -2, 1)$ е едномерен темплейт, а $*$ е конволюционен оператор [33]

Структурата бягащата вълна на решението на избраната RTD CNN 3.43 е следното:

$$\begin{aligned} u_j &= \Phi(j - ct), \\ v_j &= \Psi(j - ct), \end{aligned} \quad (3.44)$$

където Φ, Ψ са непрекъснати функции. Нека заместим (3.44) в (3.43).

Търсим решение $\Phi(s; c), s = j - ct$: След направени замествания и пресмятания получаваме:

$$\begin{aligned} -c\Phi'(s; c) + G_1(\Phi(s; c)) &= 0, \\ -c\Psi'(s; c) + G_2(\Psi(s; c)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

където $G_1(\Phi), G_2(\Psi) \in \mathbf{R}^1$. Изследваме решенията от тип бягаща вълна защото съответстват на хетероклинични свързвания между две равновесни точки в безкрайността. Равновесните точки на системата (3.45) съответстват на състоянията при които $\Psi = 0$.

Приемаме следните асимптотични гранични условия

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s; c) &= u_l, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s; c) &= u_r, \end{aligned} \quad (3.46)$$

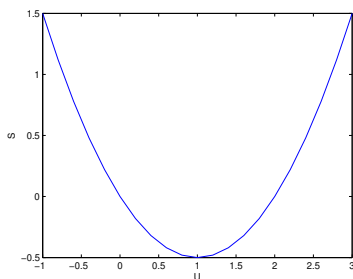
$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \Psi(s; c) &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \Psi(s; c) &= 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

за някое $c > 0$.

Получен е следния резултат:

Теорема 10 *Предполагаме, че $u_j(t) = \Phi(j - ct)$ и $v_j = \Psi(j - ct)$ са решения от тип бягаща вълна на модела на клеточно - невронна мрежа (3.43) на системата от уравнения на Бургер (3.31 и 3.32). Тогава съществува $c = \frac{u_l + u_r}{2} > 0$, такова, че*

1. за $\alpha > \frac{d^2}{4}$, $d = u_l - u_r$ съществува гладко решение от тип пътуваща вълна на 3.43
2. за $\frac{d^2}{8} < \alpha < \frac{d^2}{4}$ съществува частично гладка функция с два скока.
3. за $\alpha < \frac{d^2}{8}$ съществува решение от тип пътуваща вълна с единичен пик.



Фигура 3.7. Графиката съответства на решение от тип бягаща вълна (3.43)

Доказателство 9 Нека фиксираме $\beta = 1$. Равновесните точки на системата 3.45 с граничните условия 3.46 и 3.47 са $E_1 = (u_l, 0)$ и $E_2 = (u_r, 0)$. Търсим решение от тип бягаща вълна на RTD клетъчно невронния модел на 3.43

Това е хетероклинична орбита, свързваща две равновесни точки E_1 и E_2 (виж фигура 3.7). След интегриране на системата 3.45 при условията 3.46 и 3.47 се получава:

$$\Psi(s; c) = \frac{\Phi(s; c)^2}{2} - c\Phi(s; c) + R, \quad (3.48)$$

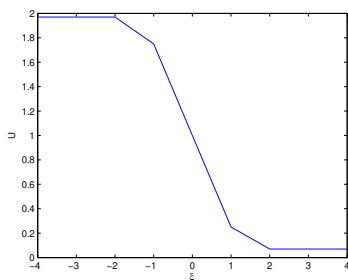
където $c = \frac{u_l + u_r}{2}$ и $R = \frac{u_l u_r}{2}$. Като заместим 3.48 в 3.45 получаваме профила $\Phi'(s; c)$ на вълната $\Phi(s; c)$:

$$\Phi'(s; c) = \frac{-\beta(\Phi(s; c) - u_l)(\Phi(s; c) - u_r)}{(\Phi(s; c) - u_l)(\Phi(s; c) - u_r) + 2\left(\left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2 - \alpha\right)} \quad (3.49)$$

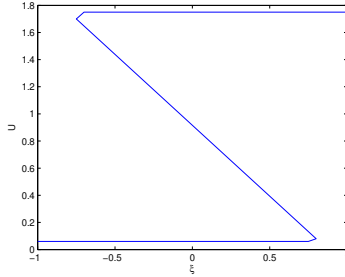
От 3.49 става ясно, че имаме следните възможни случаи: Решението за пътуваща вълна от (3.43) съществува тогава и само ако

1. $u_l > u_r$ когато $\alpha > \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
2. $u_l < u_r$ когато $2\alpha < \left(\frac{u_l - u_r}{2}\right)^2$;
3. няма пътуваща вълна ако $\left(\frac{u_l - u_r}{8}\right)^2 \leq \alpha \leq \left(\frac{u_l - u_r}{4}\right)^2$.

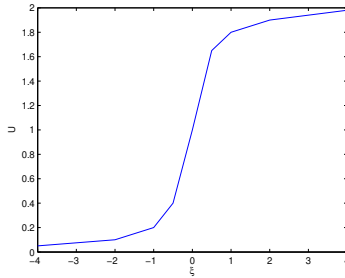
На фигури 3.8, 3.9 и 3.10 са представени симулации на RTD клетъчно невронния модел на 3.43 за различни стойности на параметрите



Фигура 3.8. Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите а). $u_l = 2$, $u_r = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 1.2$



Фигура 3.9. Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите b). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.9$



Фигура 3.10. Профил на вълната на RTD клетъчно невронния модел 3.43 за различни стойности на параметрите c). $u_l = 2, u_r = 0, \beta = 1, \alpha = 0.25$

Забележка 3 За стойностите на параметрите дадени на фигура 3.8, пътуваща вълна съществува когато когато $\alpha \geq 1$; когато α приближава 1, профила на пътуващата вълна приближава частично - линейната функция (фигура 3.9); когато α намалява, кривата изобразяваща вълната става многозначна и асимптотичните и стойности не са по големи от очакваните (фигура 3.10). Когато α намалява още решението отново е еднозначно, но вече не е решение от тип пътуваща вълна с дадените асимптотични граници. Това се получава, когато $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{u_l - u_r}{2} \right)^2$.

Ще моделираме чрез клетъчна невронна мрежа уравнението на Burger:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + F(x, t) \quad (3.50)$$

Когато $F(x, t) = 0$ съществува аналитичен израз на решението на (3.50)

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-y) e^{\frac{R}{4t}(x-y)^2 - \frac{R}{2} \int_0^y u(y', 0) dy'} dy}{t \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{R}{4t}(x-y)^2 - \frac{R}{2} \int_0^y u(y', 0) dy'} dy} \quad (3.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y, 0) dy < 0$$

За решаването на (3.50) създаваме дискретна мрежа по x и заместваем производните на

различните членове с:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u(x_i, t) \\ F_i(t) &= F(x_i, t) \\ \Delta x &= x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

Тогава уравнението на Бургер може да се апроксимира със система обикновени диференциални уравнения:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{(\Delta x)^2} - u_i(t) \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2\Delta x} + F_i(t), i = 1 \dots M - 1 \quad (3.53)$$

M - е броя клетки на клетъчна невронна мрежа

Като използваме началното условие $u_0(t) = u_M(t) = 0$ и ако допуснем, че $u(x, y) \equiv 0$ извън интервала $[x_0, x_M]$. Чрез сравняване на коефициентите на (3.53) с уравнението на състоянието на нелинейната система с клетъчната невронна мрежа се намират следните темплейти:

$$A_{lin} = \left(\frac{1}{R(\Delta x)^2}, \frac{1}{R_c} - \frac{2}{R(\Delta x)^2}, \frac{1}{R(\Delta x)^2} \right) \quad (3.54)$$

$$A_{nlin} = \left(\frac{1}{2(\Delta x)}, 0, \frac{1}{2(\Delta x)} \right) \quad (3.55)$$

Тогава темплата за обратна връзка има вида $\tilde{A} = A_{lin} + A_{nlin}$, т.е. е разделен на линейна и нелинейна част.

Решението на уравнението на Бургер може да бъде изчислено чрез клетъчна невронна мрежа за различни стойности на R и Δx и за различни начални условия $u(x, 0)$. Средната грешка при изчисление по традиционния начин чрез формулата 3.51 и клетъчна невронна мрежа се задава чрез:

$$e_i^{rel} = \left| \frac{u_i^{CNN} - u_i^*}{u_i^*} \right| \quad (3.56)$$

u_i^* е решението, получен от 3.51, а u_i е решението на уравнението на Бургер, получено чрез клетъчна невронна мрежа.

3.3 Решения от типа бягаща вълна за НКНМ модел на уравнението на Бургерс

Особено важно при изучаването клетъчни невронни мрежи е изучаването на решенията от вида “бягащи вълни” за автономни КНМ. Различни автори са изучавали такива решения на дискретни в пространството и на едновременно дискретни в пространството и времето системи (Mallet-Paret, Spatial patterns, spatial chaos and travelling waves in lattice of differential equations,

in: Stochastic and Spatial Structure of Dynamical Systems., 1996), (Hsu Lin, 1998).

Нека разгледаме следния модел на клетъчна невронна мрежа, зададен със системата ДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \alpha f_\epsilon(x_i) + \beta f_\epsilon(x_{i+1}), i \in Z \quad (3.57)$$

където α и β са константи, а $f(x)$ е активираща функция от вида:

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x > \epsilon \\ \frac{x}{\epsilon} & |x| \leq \epsilon \\ -1 & x \leq -\epsilon \end{cases}, \text{където} \quad (3.58)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta > 1.$$

Тогава, когато 3.57 има три пространствено хомогенни стационарни решения $x^- < x^0 < x^+$, където

$$\begin{aligned} x^+ &= \alpha + \beta \\ x^0 &= 0 \\ x^- &= -\alpha - \beta \end{aligned} \quad (3.59)$$

невронната мрежа е нестабилна.

Нека решението на (3.57) от тип бягаща вълна има вида:

$$x_i(t) = \Phi(i - ct, c), \Phi \in C^1(R^1, R^1) \quad (3.60)$$

и активиращата функция е

$$f_\epsilon(x) = f_1(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \frac{x}{1} & |x| \leq 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases}, \text{където} \quad (3.61)$$

или $f(x) = f_0(x)$, където

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \in [-1, 1] & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad (3.62)$$

Като заместим (3.60) в (3.57) и положим, че $s = i - ct$ получаваме че:

$$-c\Phi'(s; c) = -\Phi(s; c) + \alpha f(\Phi(s; c)) + \beta f(\Phi(s + 1; c)) \quad (3.63)$$

Ще изследваме основните характеристики на решението (3.63), когато $c < 0$

и $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s; c) = x^+$

Ще докажем следната лема:

Лема 1 за всяко $c < 0$ общия вид на решението на (3.63) е :

$$\Phi(s; c) = (1 - \alpha - \beta)e^{\frac{1}{c}s} + \alpha + \beta \quad (3.64)$$

Доказателство 10 заместваме 3.65 в 3.63, откъдето получаваме, че това е общият вид на решението на 3.63.

Ще предполагаме, че $c < 0$ и общия вид на решението за $s \in [0, \infty]$ е дадено чрез формулата:

$$\Phi(s; c) = (1 - \alpha - \beta)e^{\frac{1}{c}s} + \alpha + \beta \quad (3.65)$$

Решението 3.65 може да се нормализира, така че $\Phi(0; c) = 1$.

Дефиниция: Ще казваме, че $\Phi(s; c)$ е монотонна ако тя е намаляваща или нарастваща. В сила е следната

Лема 2 Ако съществува $s_0 < 0$, така, че $1 \leq \Phi(s; c) \leq x^+$ или $x^- \leq \Phi(s; c) \leq -1$ за $s \in [s_0 - 1, 0]$, тогава $\Phi(s; c) \in [s_0 - 1, 0]$ не е монотонна за $s \in [s_0 - 1, 0]$ и е периодична за $s < 0$.

Доказателство 11 За да опростим означенията ще означим $\Phi(s; c) = \Phi(s)$

Първи случай: Нека $1 < \Phi(s) \leq x^+$ за $s \in [s_0 - 1, s_0]$ и за произволно $s_0 < 0$ имаме $\Phi(0) = 1$ и $\Phi'(0) = \frac{1}{c}(1 - \alpha - \beta) > 0$.

Ще имаме $\Phi(-s) < 1$ за $0 < s < 1$ и тогава $\Phi(s)$ не е монотонна за $s \in [s_0 - 1, 0]$.

Означаваме $\Phi'(0) = \frac{1}{c}(1 - \alpha - \beta) > 0$, тогава $\forall s_1 < s_0 - 1$ за което $\Phi(s) \geq 1$ за $s \in [s_1, s_0 - 1]$ получаваме $\Phi'(s) \geq \frac{1}{c}(\Phi(s_0 - 1) - \alpha - \beta) > 0$. Това предполага, че $\exists s_2 < s_0 - 1$, такова, че $\Phi(s_2) = 1$ и $s_1 < \Phi(s) < x^+$ за $s \in [s_2, s_0]$.

Ще докажем, че $\Phi(s) = \Phi(s - s_2)$.

За целта означаваме $\Psi(s) = \Phi(s - s_2)$.

Тогава $\Psi(s_2) = \Phi(s_2)$.

Тогава

$$\Psi'(s + 1) = f(\Phi(s + 1)) = 1 \text{ за } s \in [s_2 - 1, s_2]. \quad (3.66)$$

От 3.63 получаваме:

$$\Psi'(s) = \frac{1}{c}[\Psi(s) - \alpha f(\Psi(s)) - \beta f(\Psi(s + 1))] \quad (3.67)$$

$$\Phi'(s) = \frac{1}{c}[\Phi(s) - \alpha f(\Phi(s)) - \beta f(\Phi(s + 1))] \quad (3.68)$$

От , 3.66, 3.67 и 3.68 получаваме, че

$$\Psi(s) = \Phi(s) \text{ за } s \in [s_2 - 1, s_2]. \quad (3.69)$$

От 3.67, 3.68 и 3.69 получаваме, че

$$\Psi(s) = \Phi(s) \text{ за } s \in [s_2 - 2, s_2 - 1]. \quad (3.70)$$

Продължаваме аналогично нататък и получаваме, че:

$$\Psi(s) = \Phi(s) = \Phi(s - s_2) \text{ за } s \leq s_2. \quad (3.71)$$

Втори случай: $x^- < \Phi(s) \leq -1$ за $s \in [s_0 - 1, s_0]$ и $s_0 < 0$.

Докато $\Phi'(0) = \frac{1}{c}(1 - \alpha - \beta) > 0$ и

$$\Phi(s_0 - 1) = \frac{1}{c}(\Phi(s_0 - 1) + \alpha + \beta) < 0 \text{ и ,}$$

функцията $\Phi(s)$ не е монотонна за $s \in [s_0 - 1, 0]$. следователно $\exists s_2 < s_0 - 1$, такова, че

$$\Phi(s_2) = -1 \text{ и } x^- < \Phi(s) < -1 \text{ за } s \in [s_2, s_0]. \quad (3.72)$$

Нека $\Psi(s) = -\Phi(s - s_2)$. Тогава имаме $\Phi(s_2) = \Psi(s_2)$ и $f(\Psi(s + 1)) = f(\Phi(s + 1))$.

В случай 1 $\Phi(s) = \Psi(s)$ за всички $s \leq s_2$. Това предполага, че

$$\Phi(s) = \Phi(s - 2s_2) \text{ за } s \leq 2s_2.$$

С други думи функцията $\Phi(s)$ е периодична с период $\omega = -2s_2$ за $s \leq 0$

Лема 3 Предполагаме, че съществува $s_* < 0$ такова, че $\Phi(s_*; c) \leq x^-$ и $\Phi(s; c) > x^-$ и $\Phi(s_*; c)$ е монотонна за $s > s_*$. Тогава $s_* \geq s_* - 1$, където $s > s_*$ е същото като $\Phi(s_*; c) = 1$. Освен това $\Phi(s; c) = x^-$ за $s \leq s_*$. Ако $s_* = s^* - 1$ и $\Phi(s; c)$ е монотонна и неограничена ако $s_* > s^* - 1$.

Доказателство 12 За простота означаваме $\Phi(s; c) = \Phi(s)$. Означаваме, че $x^- < \Phi(s) \leq -1$ за $s_* < s < s^*$. Ако $s_* < s^* - 1$, тогава от лема 2 получаваме, че $\Phi(s)$ е немонотонна в $(s_*, 0)$.

Но тя е монотонна в този интервал. Оттук правим извода, че $s_* \geq s^* - 1$.

От $\{s > s_* : \Phi'(s) = 0\} < \infty$ следва, че ако $s_* > s^* - 1$,

тогава $\Phi'(s_*) = \frac{1}{c}(x^- + \alpha - \beta f(\Phi(s_* + 1))) > \frac{1}{c}(x^- + \alpha + \beta) = 0$. Оттук правим извода, че

$$\Phi' = \frac{1}{c}(\Phi(s) - \alpha f(\Phi(s)) - \beta f(\Phi(s + 1))) \geq \frac{1}{c}(\Phi(s) + \alpha + \beta) > \frac{1}{c}(x^- + \alpha + \beta).$$

Следователно $\Phi(s)$ е монотонна и неограничена за $s < 0$. Тогава ако $s_* = s^*$ се вижда, че $\Phi(s) = x^-$ за $s < s_*$

Лема 4 Ако $\exists s_0 < 0$, такова, че $\Phi(s; c)$ е немонотонна за $s_0 < s < 0$. Тогава $\Phi(s; c)$ минава през точката (s^-, x^+)

Доказателство 13 Означаваме $\Phi(s; c) = \Phi(s)$. Поради факта, че $\Phi(s)$ е растяща за $s \in [-\delta, 0]$,

$0 < \delta < 1$, следва, че $\exists s_1$, такова, че $s_0 < s_1 < 0$, такова, че $\Phi(s)$ е намаляваща за $s \in [s_1, 0]$, но е немонотонна за $s \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta)$, $\forall \delta > 0$.

Поставяме изискването за $x^- < \Phi(s_1) < 0$.

Ако $\Phi(s_1) \geq 0$, тогава $\{s \in [s_1, 0] : \Phi'(s) = 0\} < \infty$.

Оттук $0 = \Phi'(s_1) = \frac{1}{c}((1-\alpha)\Phi(s_1) - \beta f(\Phi(s_1+1))) > \frac{1}{c}((1-\alpha)\Phi(s_1) - \beta\Phi(s_1))$.

Получихме противоречие. Ако $\Phi(s_1) < x^-$, тогава $\exists s_1 < s_* < s^*$, такава, че $\Phi(s_*) = x^-$ и $\Phi(s^*) = 1$ и $\Phi(s) > x^-$ за $s > s_*$. От лема 3 следва, че $\Phi(s)$ е монотонна $\forall s < 0$, което е противоречие. Следователно трябва да имаме $x^- < f(s_1) < 0$.

От тук следва че:

$$x^- < \Phi(s_1) \leq \Phi(s) < 1 \text{ за } s_1 \leq s < 0 \quad (3.73)$$

$$S = \{s \in (s_1 - \delta, 0); \Phi'(s) = 0\} \quad (3.74)$$

е крайно множество $0 < \delta \ll 1$. Ще докажем, че

$$\Phi(s_1) \leq \Phi(s) \leq -\Phi(s_1) \text{ за } s < s_1 \quad (3.75)$$

За да направим това нека $\tilde{S}_1 > s_1$, така, че

$\Phi(\tilde{S}_1) = -\Phi(s_1)$ и $s_2 < s_1 < \tilde{S}_2 < \tilde{S}_1$ са такива, че $\Phi(s_2) = \Phi(\tilde{S}_2) > \Phi(s_1)$ и $\Phi(s)$ е намаляваща за $s_2 < s < s_1$.

Оттук:

$$\Phi(s_1) < \Phi(s) < -\Phi(s_1) \text{ за } s_2 < s < s_1 \quad (3.76)$$

Нека $\bar{S} = \text{MIN}\{1, \tilde{S}_1 - s_1, \tilde{S}_2 - s_2\}$. Дефинираме функция $\Psi(s) = -\Phi(s)$ за $s \in R$. Тогава имаме:

$$\Phi(s) > \Psi(s + \tilde{S}_1 - s_1) \text{ за } s > s_1 \quad (3.77)$$

и

$$\Phi(s) \leq \Phi(s + \tilde{S}_2 - s_1) \text{ за } s > s_2 \quad (3.78)$$

Ще изискваме да са изпълнени следните условия:

$$\Phi(s) \leq \Psi(s + \tilde{S}_1 - s_1) \leq -\Phi(s_1) \text{ за } s_1 - \bar{S} < s < s_1 \quad (3.79)$$

и

$$\Phi(s) \geq \Phi(s + \tilde{S}_2 - s_2) \geq \Phi(s_1) \text{ за } s_2 - \bar{S} < s < s_2 \quad (3.80)$$

Нека $\eta_1(s) = \Phi(s)$ и $\eta_2(s) = \Psi(s + \tilde{S}_1 - s_1)$ и $\eta_3(s) = \Phi(s + \tilde{S}_2 - s_2)$. От 3.63 т.е от

$$-c\Phi'(s; c) = -\Phi(s; c) + \alpha f(\Phi(s; c)) + \beta f(\Phi(s+1; c))$$

получаваме

$$\dot{\eta}_1(s) = \frac{1}{c}[\eta_1(s) - \alpha f(\eta_1(s)) - \beta f(\Phi(s+1))] \quad (3.81)$$

и

$$\dot{\eta}_2(s) = \frac{1}{c}[\eta_2(s) - \alpha f(\eta_2(s)) - \beta f(\Psi(s+1 + \tilde{S}_1 - s_1))] \quad (3.82)$$

и

$$\dot{\eta}_3(s) = \frac{1}{c}[\eta_3(s) - \alpha f(\eta_3(s)) - \beta f(\Phi(s+1 + \tilde{S}_2 - s_2))] \quad (3.83)$$

Означаваме

$$\eta_1(s_1) = \eta_2(s_1)$$

$$\eta_1(s_2) = \eta_3(s_2).$$

от (3.77) и (3.78) Получаваме, че

$$-\frac{\beta}{c}f(\Phi(s+1)) \geq -\frac{\beta}{c}f(\Psi(s+1 + \tilde{S}_1 - s_1)) \text{ за } s > s_1 - \bar{S} \quad (3.84)$$

и

$$-\frac{\beta}{c}f(\Phi(s+1)) \leq -\frac{\beta}{c}f(\Phi(s+1 + \tilde{S}_2 - s_2)) \text{ за } s > s_2 - \bar{S} \quad (3.85)$$

Като сравним аргументите на обикновените диференциални уравнения получаваме

$$\eta_1(s) \leq \eta_2(s) \leq -\Phi(s_1) \text{ за } s_1 - \bar{S} < s < s_1 \quad (3.86)$$

и

$$\eta_1(s) \geq \eta_3(s) \geq -\Phi(s_1) \text{ за } s_2 - \bar{S} < s < s_2 \quad (3.87)$$

Така, че (3.79) и (3.80) да са изпълнени. Следователно от (3.79) и (3.80) имаме, че

$$\tilde{s}_3 \in [\tilde{s}_1 - \bar{S}, \infty] \text{ и } \tilde{s}_4 \in [\tilde{s}_2 - \bar{S}, \infty], \text{ така, че } \Phi(s_1 - \bar{S}) = \Psi(s_3), \Phi(s_2 - \bar{S}) = \Phi\tilde{s}_4.$$

Искаме, да е вярно

$$\Phi(s) \geq \Psi(s + \tilde{S}_3 - s_1 + \bar{S}) \text{ за } s \geq s_1 - \bar{S} \quad (3.88)$$

и

$$\Phi(s) \leq \Psi(s + \tilde{S}_4 - s_2 + \bar{S}) \text{ за } s \geq s_2 - \bar{S} \quad (3.89)$$

и

$$\Phi(s) \leq \Psi(s + \tilde{S}_3 - s_1 + \bar{S}) \leq \Phi(s_1) \leq \text{ за } s_1 - 2\bar{S} < s \leq s_1 - \bar{S} \quad (3.90)$$

и

$$\Phi(s) \geq \Psi(s + \tilde{S}_4 - s_2 + \bar{S}) > \Phi(s_1) \text{ за } s_2 - 2\bar{S} < s \leq s_2 - \bar{S} \quad (3.91)$$

Нека $\eta_1(s) = \Psi(s + \tilde{s}_3 - s_1 + \bar{S})$ и $\eta_5(s) = \Phi(s + \tilde{s}_4 - s - 2 + \bar{S})$, тогава

$$\eta_4'(s) = \frac{1}{c}(\eta_4(s) - \alpha f(\eta_4(s)) - \beta f(\Psi(s + 1 + s_3 - \tilde{s}_3 + \bar{S}))) \quad (3.92)$$

и

$$\eta_5'(s) = \frac{1}{c}(\eta_5(s) - \alpha f(\eta_5(s)) - \beta f(\Psi(s + 1 + \tilde{s}_4 - s_2 + \bar{S}))) \quad (3.93)$$

Означаваме $\eta_4(s_1 - \bar{S}) = \Phi(s_1 - \bar{S})$ и $\eta_5(s_2 - \bar{S}) = \Phi(s_2 - \bar{S})$

Докато е изпълнено $\tilde{s}_3 > \tilde{s}_1 - \bar{S}$ и $\tilde{s}_4 > \tilde{s}_2 - \bar{S}$ От (3.77) и (3.78) следва, че

$$-\frac{\beta}{c}(f(\Phi(s + 1))) \geq -\frac{\beta}{c}(f(\Psi(s + 1 + \tilde{s}_3 - s_1 + \bar{S}))) \text{ за } s > s_1 - \bar{S} \quad (3.94)$$

и

$$-\frac{\beta}{c}(f(\Phi(s + 1))) \leq -\frac{\beta}{c}(f(\Phi(s + 1 + \tilde{s}_4 - s_2 + \bar{S}))) \text{ за } s > s_2 - \bar{S} \quad (3.95)$$

Отново следвайки метода на сравняване на аргументите на скаларни обикновени диференциални уравнения получаваме: $\eta_1(s) \geq \eta_4(s)$ за $s > s_1 - \bar{S}$ и $\eta_1(s) \geq \eta_5(s)$ за $s > s_2 - \bar{S}$.

така, че да са изпълнени (3.88) и (3.89). Неравенствата 3.90 и 3.91 следват от сравняването на аргументите с 3.79 и 3.80 Продължаваме процеса, описан по горе и получаваме:

$$\Phi(s) \leq -\Phi(s_1) \text{ за } s < s_1 \quad (3.96)$$

$$\Phi(s) \geq -\Phi(s_1) \text{ за } s < s_2 \quad (3.97)$$

Уравнението 3.75 следва от 3.76, 3.96 и 3.97, а лемата следва от 3.73 и 3.75

Следствия

1. Ако $f(s_*; c) = x^-$ за $s_* < 0$ тогава $f(s; c)$ е монотонна.
2. $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s; c) = x^-$ ако $\exists s_* < 0$ така, че $f(s; c) = x^-$ за $x < s_*$
3. ако $f(s; c)$ е немонотонна за $c < 0$, тогава $\Phi(s; c)$ е немонотонна за $s \in (-\infty, \infty)$ с всяко $s_0 < 0$ или $|\Phi(s; c)| \leq 1$ за $s \ll -1$

В сила са следните лемии

Лема 5 Ако $|\Phi(s; c)| \leq 1$ за $s \ll -1$ и $-c\sigma = -1 + \alpha + \beta e^\sigma$ има неположителни корени σ , тогава

$\Phi(s, c)$ е немонотонна за $s \in (-\infty, s_0) \forall s_0 < 0$ и

$$\{s | \Phi(s; c) = 0, s < 0\} = \infty \quad (3.98)$$

Лема 6 Предполагаме, че $\alpha < 1 + \beta$. Ако $\exists c_* < 0$, такава че $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s; c) = x^-$ тогава $x^- < \Phi(s; c) < x^+ \forall c < 0$ и $c < c^* \Phi(s; c)$ е ненамаляваща и неограничена за $c^* < c < 0$

Доказателство 14 От Следствията следва, че функцията $\Phi(s, c^*)$ е монотонна и $\exists s^* < 0$ такава, че $\Phi(s^*; c^*) = x^- \forall s < s^*$.

Случай 1:

Предполагаме, че $c^* < c < 0$. Ще докажем, че $\Phi(s; c)$ е неограничена.

Очевидно е, че $\Phi(s; c) < x^-$ за някое $c < 0$. Нека $c = 0$. От Лема 1 имаме, че:

$$\Phi(s; c) > \Phi(s^-, c^*) \text{ за } s > s_0 \quad (3.99)$$

И искаме да докажем, че

$$\Phi(s; c) < \Phi(s; c^*) \text{ за } s_0 - 1 < s < s_0 \quad (3.100)$$

Означаваме $\Phi(0; c) = \Phi(0, c^*) = 1$ и $\Phi'(0; c) = \frac{1}{c}(1 - \alpha - \beta) > \frac{1}{c^*}(1 - \alpha - \beta) = \Phi'(0; c^*)$

От тук ако 3.100 не е изпълнено, тогава $\exists s_0 < \tilde{S} < s_0$ такава, че $\Phi(s; c) < \Phi(s; c) \forall \tilde{S} < s < s_0$ и $\Phi(\tilde{S}; c) = \Phi(\tilde{S}; c^*)$

Следователно $\Phi'(\tilde{S}; c) \leq \Phi'(\tilde{S}; c^*)$

Докато $f(\Phi(\tilde{S} + 1; c)) = f(\Phi(\tilde{S}; c^*))$ и $\alpha < 1 + \beta$ имаме

$$\Phi(\tilde{S}; c) - \alpha f(\Phi(\tilde{S}; c)) - \beta f(\Phi(\tilde{S} + 1; c)) = \Phi(\tilde{S}; c^*) - \alpha f(\Phi(\tilde{S}; c^*)) - \beta f(\Phi(\tilde{S} + 1; c^*)) < 0 \quad (3.101)$$

оттук имаме

$$\Phi'(\tilde{S}; c) = \frac{1}{c}(\Phi(\tilde{S}; c) - \alpha f(\Phi(\tilde{S}; c)) - \beta f(\Phi(\tilde{S} + 1; c))) = \frac{1}{c^*}(\Phi(\tilde{S}; c^*) - \alpha f(\Phi(\tilde{S}; c^*)) - \beta f(\Phi(\tilde{S} + 1; c^*))) = \Phi'(\tilde{S}; c) \quad (3.102)$$

Получихме противоречие. Следователно 3.100 е доказано.

Сега ако $\Phi(s_0 - 1; c^*) = x^-$

тогава $\Phi(s_0 - 1; c) < x^-$ и лемата е доказана.

В противен случай нека $s_1 = s_0 - 1$ и $s_0 - 1 < \tilde{S}_1 < s_0$ да е такава, че $\Phi(\tilde{S}_1; c) = \Phi(S_1; c^*)$

Твърдим, че са изпълнени:

$$\Phi'(\tilde{S}_1; c) > \Phi'(\tilde{S}_1; c^*) \quad (3.103)$$

$$\Phi(s - S_1 - \bar{S}_1; c) > \Phi(s; c^*) \quad \forall s > s_1 \quad (3.104)$$

и

$$\Phi(s - S_1 + \bar{S}_1; c) < \Phi(s; c^*) \quad \forall s_1 - 1 < s < s_1 \quad (3.105)$$

В действителност $-1 < f(\Phi(\bar{S}_1 + 1; c^*)) \leq 1$.

Ако $f(\Phi(\bar{S}_1 + 1; c)) = 1$ тогава от 3.99 следва

$$\Phi(\bar{S}_1; c) - \alpha f(\Phi(\bar{S}_1; c)) - \beta f(\Phi(\bar{S}_1 + 1; c)) \leq \Phi(\bar{S}_1; c^*) - \alpha f(\Phi(\bar{S}_1; c^*)) - \beta f(\Phi(\bar{S}_1 + 1; c^*)) \leq 0 \quad (3.106)$$

от където следва 3.103

Ако 3.104 не е вярно от 3.103 имаме, че $\tilde{S} > S_1$ така, че $\Phi(s - s_1 + \bar{S}_1; c) > \Phi(s; c^*)$ за $S_1 < s < \tilde{s}$ и $\Phi(\tilde{s} - S_1 + \bar{S}_1; c) = \Phi(\tilde{s}; c^*)$.

Тогава $\Phi'(\tilde{s} - S_1 + \bar{S}_1; c) < \Phi'(\tilde{s}; c^*)$.

От сходните аргументи на 3.103 имаме $\Phi'(\tilde{s} - S_1 + \bar{S}_1; c) > \Phi'(\tilde{s}; c^*)$, което е противоречие.

Следователно 3.104 е вярно.

Аналогично ако 3.105 не е изпълнено тогава съществува $s_1 - 1 < \tilde{S} < s_1$, такава че

$\Phi(s - s_1 + \bar{S}_1; c) < \Phi(s; c^*)$ за $\tilde{S} < s < s_1$ и $\Phi(\tilde{S} - s_1 + \bar{S}_1; c) = \Phi(\tilde{S}; c^*)$

Оттук следва, че $\Phi'(\tilde{S} - s_1 + \bar{S}_1; c) \leq \Phi'(\tilde{S}; c)$

Но от 3.104 и сравняването на аргументите с 3.103 имаме

$\Phi'(\tilde{S} - s_1 + \bar{S}_1; c) > \Phi'(\tilde{S}; c)$, което е противоречие. Следователно 3.105 също е вярно.

Отново ако $\Phi(s_1 - 1; c) = x^-$, тогава $\Phi(\bar{s}_1 - 1; c) < x^-$ и $s_1 - 1 < \bar{S}_2 < s_1$ е такава, че $\Phi(s - s_2 + \bar{S}_2 - s_1 + \bar{S}_1; c) = \Phi(s_2; c^*)$.

Като сравним аргументите като по - горе получаваме:

$$\Phi(s - s_2 + \bar{s}_2 - s_1 + \bar{s}_1; c) > \phi(s; c^*) \quad \text{за } s > s_2 \quad (3.107)$$

и

$$\Phi(s - s_2 + \bar{s}_2 - s_1 + \bar{s}_1; c) < \phi(s; c^*) \quad \text{за } s_2 < s < s_2 \quad (3.108)$$

Като продължим горния процес виждаме, че $\exists \tilde{S}$ такава, че $\Phi(\tilde{S}; c) < x^- = \Phi(s_*; c^*)$ С това лемата е доказана.

Случай 2: Предполагаме, че $c < c^*$. Ако $\exists \tilde{S}$ такава, че $\Phi(\tilde{S}; c) = x^-$. От следствията следва, че $\Phi(s; c)$ е монотонна. Тогава от сходството на аргументите, както в случай 1 $\exists \tilde{S}_*$ такава, че $\Phi(\tilde{S}_*; c) < x^-$, което е противоречие. От тук следва, че $\Phi(s; c) > x^-$ за $s < 0$. От лема 5 имаме, че: $x^- < \Phi(s; c) < x^+$ за $s < 0$.

Следствие:

Предполагаме, че $\alpha < 1 + \beta$. Тогава $\exists c^* < 0$, такава че $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s; c^*) = x^-$

Нека разгледаме 3.57 и 3.63 с активираща функция 3.62.

Определение:

Ако $f(x) = f(0)$, както в 3.62, тогава $\Phi(s; c)$ се нарича решение на 3.63 ако то е абсолютно непрекъснато и е изпълнено: $-cf' \in -\Phi(s; c) + \alpha f(\Phi(s; c)) + \beta f(\Phi(s; c)) \quad \forall s \in R$.

Можем да направим следната

Класификация на граничните решения на 3.63**Определения:**

1. Едно гранично решение на $\Phi(s; c)$ се нарича осцилиращо, ако $\Phi(s; c)$ е немонотонна $\forall s \in (-\infty, s_0)$ за всяко $s_0 < 0$. Ако $\Phi(s; c)$ е осцилиращо, тогава се казва, че е осцилиращо решение от тип **бягаща вълна**.
2. Едно осцилиращо решение от тип бягаща вълна, ако $\exists s \in R^1$, такава че $\Phi(s; c)$ е периодично $\forall s < s_0$
3. Ако решението $\Phi(s; c)$ на 3.63 е периодично, тогава $x_i(y) = \Phi(i - ct; c)$ на 3.57 се нарича периодично решение от тип бягаща вълна.

3.4 Изводи

В глава 3 са конструирани КНМ на:

1. Различни уравнения на син-Гордон.
2. Дефинирани са флуксони от математическа и физична гледна точка.
3. Моделирано е взаимодействието флуксон- антифлуксон
4. Намерено е решение от тип "4 kink"
5. Представена е симулация чрез клетъчно невронна мрежа на взаимодействие на флуксони
6. Изучени са синус уравнения на Гордон с много синуси в дясната страна.
7. Показана е връзката между Джозефсоновия контакт (JJ) и флуксоните, както и връзката между JJ и клетъчна невронна мрежа.
8. Изучени са решения от тип бягаща вълна на чстни диференциални уравнения и на динамични системи.

9. Изучени са вълновите профили на решения от тип бягаща вълна на вискоеластичното уравнение на Бюргер
10. Приложени са RTD CNN с едноразмерна целочислена решетка.

Глава 4

Изследване на динамиката на НКНМ с хистерезис

Според [108] хистерезис (на гръцки: – изоставащ) това е свойство, което се проявява при една физическа, биологическа или друга система. Характерно за хистерезиса е, че състоянието на системата зависят не само от параметрите, които я описват а и от предисторията на процеса. За хистерезиса е характерно явлението насищане и затворената крива отразява хистерезисния цикъл за дадената система

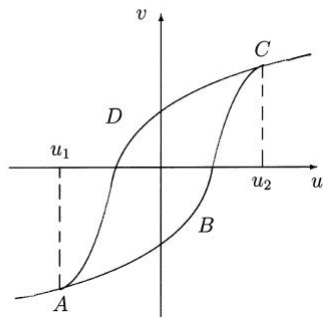
С други думи хистерезиса се дефинира в научната литература като зависимост с памет между входния $v(t)$ и изходния сигнал $u(t)$. Зависимостта на входа се определя от двойка прагови стойности $\alpha < \beta$.

4.1 НКНМ с хистерезис

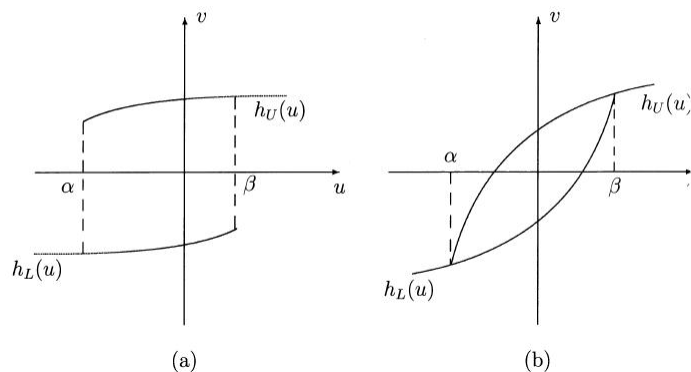
Нека разгледаме една система, чието състояние се харктеризира с две скаларни променливи U и V , които зависят непрекъснато от времето t . В терминологията на клетъчните невронни мрежи те се наричат вход и изход или контрол на състоянието. Да разгледаме графиката на хистрезиса 4.1

Ако u се увеличи от u_1 до u_2 , тогава свързаните чрез времето (u, v) се движат по кривата ABC, а когато u се намали от u_2 до u_1 , тогава свързаните чрез времето (u, v) се движат по кривата CDA.

Свързаните в двойка (u, v) могат да имат стойност във всяка точка на фигурата $S = ABCDA$. Отбелязваме, че когато $u_1 < u < u_2$, стойността на v не се определя само от стойността на u , а се определя и от предходното състояние, дължащо се на таа наречения ефект на паметта, както и от началното положение на системата. Изисква се пътя на $(u(t), v(t))$ да



Фигура 4.1. Графика на явлението хистерезис



Фигура 4.2. Графика на различните видове хистерезис

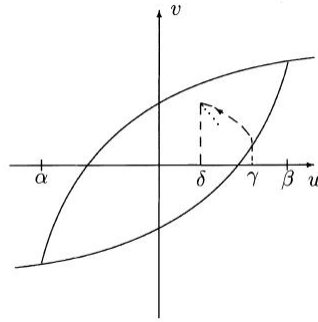
бъде инвариантен по отношение на всяко движение от точка u_1 до точка u_2 . Това означава, че $v(t)$ зависи само от областта на движение на $u(t)$. Тук движението на $(u(t), v(t))$ не зависи от производната на $u(t)$, която може и да не съществува. Това условие е основно за графичното представяне на хистерезиса в равнината (u, v) . На фигура 4.2 са показани възможните случаи на движение (на хистерезис) на двойката $(u(t), v(y))$.

Математически хистерезиса се описва, като се използва хистерезисен оператор и тогава математическият модел на съответната динамична система съдържа диференциални уравнения, свързани с един или няколко хистерезисни оператора и зависят от началните и граничните условия.

Свързвайки хистерезисен оператор (т.е. независими от времето нелинейни връзки) с диференциално уравнение се изразяват математически закони в механиката като законите за запазването на масата, импулса и вътрешната енергия.

Има два типа хистерезисни отношения:

1. **Пасивен**, при който графиката на $(u(t), v(t))$, където изходът $v(t) = F[u](t)$ описва дадена непрекъсната частично монотонна функция $u(t)$ върху две фиксирани изходни криви h_U и h_L , които са дефинирани в интервалите $[\alpha, \infty)$ и $(-\infty, \beta]$, като $\alpha < \beta$ виж фигура 4.2. В [65] са описани математическите модели на хистерезиса. Пасивния хистерезис се



Фигура 4.3. Графика на активен хистерезис

описва по следния начин:

$$F[u(t)] = \begin{cases} h_L(u(t)) \text{ ако } u(t) \leq \alpha \\ h_U(u(t)) \text{ ако } u(t) \geq \beta \\ h_L(u(t)) \text{ ако } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \alpha \\ h_U(u(t)) \text{ ако } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и } v(\tau(t)) = \beta, \end{cases} \quad (4.1)$$

където $\tau(t) = \sup\{s | s \leq t, v(s) = \alpha \text{ или } v(s) = \beta\}$. Тоест $\tau(t)$ е времето, когато е достигнат последния праг. $\tau(t)$ е дефиниран \forall непрекъснат вход $u(t)$, така че може да се счита, че $F \in C[0, \infty)$

2. **Активен** хистерезис, позволяващ траектории вътре в хистерезисната област.

$$H = \{(U, v) \alpha < u < \beta, H_L < H_U\} \quad (4.2)$$

Ако при частично монотонен вход $u(t) = \gamma$ графиката на $(u(t), v(t))$ се движи вътре в хистерезисната област (виж фигура 4.3)

Ако входа продължава да намалява до δ , тогава графиката на функцията расте и се движи вътре в хистерезисната област. Характерното тук е това, че от скоростта, с която се подава сигнал на входа не зависи скоростта на изхода и той винаги е в хистерезисната област. Математическите модели за активния и пасивния хистерезис, дефинирани по-горе са достатъчно различни, макар, че тяхното базирано на памет поведение е подобно. Входовете на двете функции се описват чрез частично монотонна функция, но активния хистерезис има тази особеност, че лесно се дефинира за непрекъснати входове чрез използване на гранични процеси [65].

Определение: Хистерезиса се дефинира чрез две характеристики:

- (а) памет във всяка точка на времето, т.е. стойността на изхода $v(t)$ може да зависи не само от входа $u(t)$, но и от предишното състояние на $u(t)$.

(б) изхода е инвариантен по отношение на времето.

Когато е изпълнено а, ще казваме, че имаме оператор с памет, който се дефинира така:

$$F : \text{DOM}(F) \subset C^0([0, T]) \times \mathbb{R} \rightarrow C^0([0, T]) \quad (4.3)$$

Ще конструираме оператора с памет, така, че да зависи от $\alpha = 0$ и от началното състояние на системата $u(0)$. Обикновено началното състояние $(u(0), v(0))$ на системата се ограничава до хистерезисната област S . Тогава съществуват две възможности: първо Да се изчисли $(u(0), v^0) \in S$ и тогава да се изчисли $[F(u, v^0)](0) = v^0$ и второ да няма ограничения върху $(u(0), v^0) \cap S$ и тогава началните условия не са в същата форма. В този случай стойностите на началните условия са в интервала $(u(0) \times \mathbb{R}) \cap S$

Ще дефинираме характеристиките на хистерезисния оператор F , както в [94].

1. Зависими характеристики

$$\begin{cases} \forall (u_1, v^0) \in \text{DOM}(F), \forall t \in [0, T] \\ \text{ако } u_1 = u_2 \in [0, T], [F(u_1, v^0)](t) = F[u_2, v^0](t) \end{cases} \quad (4.4)$$

2. Независими характеристики

$$\begin{cases} \forall (u, v^0) \in \text{DOM}(F) \forall t \in [0, T] \\ \text{ако } s : [0, T] \rightarrow [0, T] \text{ е нарастващ хомеоморфизъм, тогава } [F(u \circ s, v^0)](t) = [F(u, v^0)](s(t)) \end{cases} \quad (4.5)$$

3. Характеристики на полугрупа

$$\begin{cases} \forall (u, v^0) \in D(F) \forall [t_1, t_2] \subset [0, T] \in [0, T] \\ \text{Настройваме } v(t) = [F(u, v^0)](t_1) \text{ тогава } [F(u, v^0)](t_2) = [F(u(t_1 + \dots), v(t_1))](t_2 - t_1) \end{cases} \quad (4.6)$$

Когато състоянието на системата не е напълно характеризирано от двойката $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, предполагаме, че състоянието на системата е описано чрез произволна променлива ξ от същото метрично пространство. Така имаме $v(t) = [F(u, \xi_0)](t)$, където променливата ξ , съдържа цялата информация за началното състояние.

Тогава полугруповите характеристики е възможно да не могат да се опишат във вида 4.6.

Тогава хомеоморфизма може да действа по следния начин:

Стойността на променливата на състоянието $\xi_0(t)$ се оценява в зависимост от входовете $u[0, t]$ и ξ_0 , тогава $\xi(t)$ се трансформира в изходната стойност $v(t)$.

$$\begin{cases} v(t) = [F(u, \xi)](t) \text{ е еквивалентно на} \\ \xi(t) = [\Phi(u, \xi_0)](t) \text{ и } v(t) = \tau(\xi(t)), \end{cases} \quad (4.7)$$

където $\Phi(t)$ е хистерезисния оператор : $C^0([0, T]) \times X \rightarrow X$, а $\tau(t) : X \rightarrow R$ е изходната трансформация бз памет.

Така $F : DOM(F) \subset C^0 \times X \rightarrow C^0([0, T])$ можем да предположим, че F изпълнява модифицираните характеристики на полугрупа.

$$\begin{cases} \forall (u, \xi^0) \in DOM(F) \forall [t_1, t_2] \subset [0, T] \in [0, T] \\ \text{характеристиката } \xi(t_1) = [\Phi(u, \xi^0)](t_1) \text{ тогава } [F(u, \xi^0)](t_2) = [F(u(t_1 + \dots), \xi(t_1))](t_2 - t_1) \end{cases} \quad (4.8)$$

4. Монотонни характеристики:

Нека да разгледаме непрекъснатия хистерезисен оператор 4.3. Тогава монотонността в L^2 се определя така:

$$\begin{cases} \exists u_1, u_2 \in C^0([0, T]), \exists v_0 \in R : v_i = F(u_i, v^0) \\ \int_0^T (v_2 - v_1)(u_1 - u_2) dt < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Дефинираме частична монотонност така:

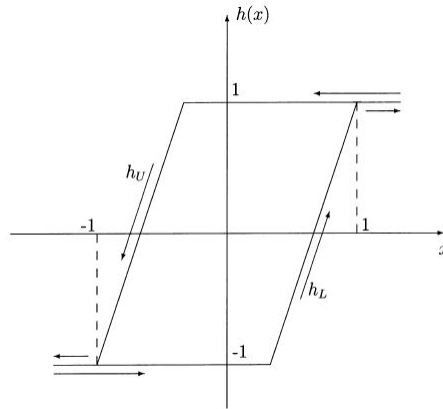
$$\begin{cases} \forall (u, v_0) \in Dom(F), \forall [t_1, t_2] \subset [0, T], \\ \text{ако } u \text{ е винаги ненамаляваща или нарастваща в } [t_1, t_2], \text{ тогава такава е и } F(u, v^0) \end{cases} \quad (4.10)$$

така, че :

$$\begin{cases} \text{ако } (u, F(u, v_0)) \in W^{1,1}(0, T) \\ \text{тогава } \frac{du}{dt} \frac{dF(u, v^0)}{dt} > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Това е естествена характеристика поради независимостта на оператора F, но съществуват и зависими от скоростта оператори, които са непрекъснати в $C^0([0, T])$.

Въпроса за поведението на клетъчните невронни мрежи с хистерезис е изучаван от различни учени.



Фигура 4.4. Графика на хистерезисна нелинейност.

4.1.1 Клетъчна невронна мрежа с хистерезис в системата за обратна връзка

Както знаем хистерезисът се определя като независим от скоростта ефект на паметта.

От математическа гледна точка особено интересни са ситуацияите, при които нелинейността е в системата за обратна връзка и хистерезисът се появява именно там.

Да разгледаме математическия модел на такава система:

$$\frac{dx_{i,j}}{dt} = -x_{i,j} + \sum_{c(k,l) \in N_r(i,j)} A_{i,j,kl} h(x_{kl}) + \sum_{c(k,l) \in N_r(i,j)} B_{i,j,kl} u_{kl}, \quad (4.12)$$

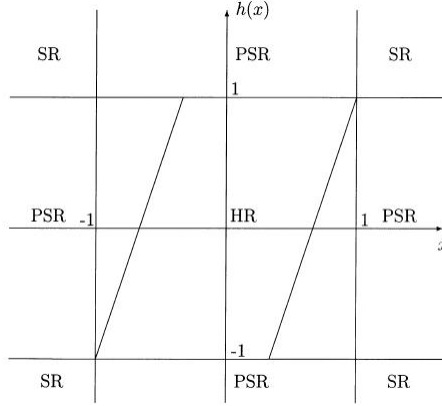
където $1 \leq i, j \leq 1$ и x, y и u определят състоянието, изхода и входния волтаж на всяка клетка $C_{i,j}$. A и B са наречени оператор за обратна връзка и оператор за контрол. Те са матрици с определена структура и съдържат коефициенти на определено произволно място. Хистерезисът $h_{i,j}$ е реален функционал, определен от една "горна" функция h_U и една "долна" функция h_L (виж фигура 4.4.)

Дадени са и някои ограничения: $|x_{i,j}(0)| \leq 1$ и $|u_{i,j}| \leq 1$ и $1 \leq i \leq M$ $1 \leq j \leq M$ В една типична клетъчна невронна мрежа изходната функция е частично-линейна функция:

$$y_{i,j} = \frac{1}{2}(|x_{i,j} + 1| - |x_{i,j} - 1|) \quad (4.13)$$

има двоичен изход, което е достатъчно за много приложения. Изследвайки клетъчна невронна мрежа с хистерезис очакваме поява на интересно поведение на мрежата, което е породено от факта, че поведението на мрежата в различните области на динамично поведение и сложността на връзките между отделните клетки са независими от броя на обработващите клетки т.е винаги дава резултат.

Важна стъпка при анализа на динамиката на клетъчна невронна мрежа 4.12 е как да разпознаем топологично различните типове поведение, което може да има системата. Анализа



Фигура 4.5. SR - област на устойчивост; PSR- област на частична устойчивост; HR - област с хистерезис.

на устойчивостта на системата започваме с определяне на равновесните и точки.

Нека обобщено уравнението на мрежата запишем така

$$\frac{dx}{dt} = (-x + A * h(x) + B * u) = F(x), \quad (4.14)$$

където $x \stackrel{\text{def}}{=} x_{i,j}$, $u \stackrel{\text{def}}{=} u_{i,j}$, $y \stackrel{\text{def}}{=} y_{i,j}$. и за всеки клонинг темплейт A и B е дефиниран конволюционен оператор * .

Определение Едно равновесно решение $\bar{x} \in R^{M \times M}$ на 4.14 е такова, когато :

$$F(\bar{x}) = -\bar{x} + A * h(\bar{x}) + B * u = 0 \quad (4.15)$$

Следователно съответната линейна система в достатъчно малка околност на равновесната точка може да се разглежда като:

$$\frac{dz}{dt} = DF(\bar{x})z, \text{ където } z = x - \bar{x} \text{ и } DF(\bar{x}) = J, \quad (4.16)$$

Където J се нарича Якобиан в равновесната точка и може да се изчисли по следния начин:

$$J_{ps} = \left. \frac{\partial F_p}{\partial x_s} \right|_{x=\bar{x}} \quad (4.17)$$

$$1 \leq p, s \leq n, n = M \times M$$

Основната характеристика на клетъчна невронна мрежа е, че всяка клетка от нея е свързана по един и същи начин със съседните клетки, които имат едни и същи уравнения. Чрез тази основна характеристика изучаваме глобалните характеристики на мрежата.

Понякога поради хистерезисния тип на нелинейността на мрежата е логично да разгледаме $M \times M$ мерно евклидово пространство, разделено на различни по тип области виж фигура 4.5

Определения

1. област на устойчивост $SR = \{x ||x| > 1 \text{ и } |h(x)| \geq 1\}$
2. Област на частична устойчивост $PSR = \{x ||x| \leq 1, |h(x)| \geq 1; |x| > 1, |h(x)| = 1\}$
3. област на хистерезис $HR = \{x ||x| < 1, \forall x, |h(x)| \leq 1\}$

В сила е следната теорема:

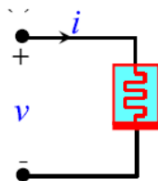
Теорема 11 *В устойчивата област SR всяка равновесна точка е асимптотично устойчива.*

4.2 Изследване на динамиката на хистерезисни НКНМ с мемристори

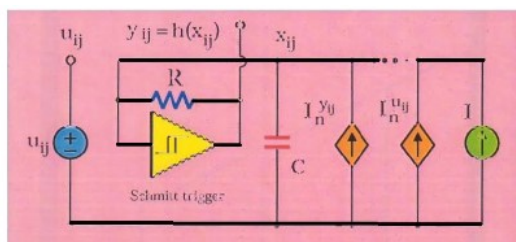
Индустрията за обработка на изображения използва нано клетъчни невронни мрежа, като компютърните експерименти показва, че включването на променливи мемристори като синапси позволяват повече степени на свобода на мрежата, като по този начин те превъзхождат познатите типове като синапси. Такива нано клетъчни невронни мрежа са представени от [5] и [84].

Както е показано в [9] и [7] Такива клетъчни невронни мрежи работят в режим "граница на хаоса имат изчислителна сложност и ще се ползват за в бъдеще в изчислителните системи. Размера на клетките не може да намалее значително в традиционните CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) технологии . (CMOS е технология за създаване на електронни схеми, в която се използват полеви транзистор с изолиран гейт и с канали с различна проводимост. CMOS имат ниско потребление на енергия в статичен режим, т.е може да се счита, че енергия се потребява само при превключване на състочнията. В CMOS има n и p канални полеви транзистори и имат по- голямо бързодействие. Чрез CMOS технологията се произвеждат логически и интегрални схеми. В сензорните фотоапарати се ползват CMOS матрици с достъпни цени. (<https://bg.wikipedia.org/wiki/CMOS>))

Нано елементите ще играят голяма роля в бъдещето на клетъчните невронни мрежи- универсални машини (КМН УМ) при реализацията им като чип, които са изследвани като синаптична връзка за пръв път в [8] . В бъдеще КМН УМ ще имат голямо приложение при сензорни работващи системи, поради богатото им динамично поведение. Развитието на наноелектрониката е свързано с разработката на все по –бързодействащи устройства за запис и съхраняване на информацията с възможен презапис и с ниска енергозависимост. При създаване на невронни мрежи от ново поколение се ползват мемристори –двуполусни устройства, съпротивлението на които се променя от протичащия през него заряд. Съществуването им е предсказано още от Чуа в далечната 1971година, но за пръв път ефектът мемристивност е демонстриран през 2008



Фигура 4.6. 2D - схема на мемристор



Фигура 4.7. Схема на хистерезисна клетъчна невронна мрежа

година за системи от вида метал - диелектрик – метал, когато е открит подходящ материал за изработката им.

Използването на мемристори като синапси позволява да се повиши изчислителната ефективност на невронните системи, като се повишава плътността на логическите елементи и свързаността на невроните. Чрез мемристори се реализира явлението хистерезис, което е изучено в дисертацията. Мемристорите се използват в клетъчните невронни мрежи, които правят извличане на данни (deep learning).

Те участват и при разработването на методи, позволяващи определянето на параметрите на динамичната система, която се изследва.

NiO_2 нимобиев диоксид Mott мемристорите са вградени в релаксационен осцилатор, който периодично преминава в осцилиращи хаотични движения.

Квази статичното напрежение в мемристора показва област на контролиран чрез ток отрицателно диференциално съпротивление (NDR) и има възпроизвеждащ се хистерезис при по високи токове.

В [84] динамичното поведение на тези мемристори се получава експериментално чрез изграждане на експериментален осцилатор. Направените там динамични измервания съвпадат със статичните такива. Пак там е показано, че включването на мемристори в Хопфийлд изчислителна мрежа може да подобри ефективността и точността на решението при изчислително сложни проблеми.

На практика за хистерезисните клетъчни невронни мрежи [10] и [12] може да се определи областта на клетъчни параметри за локално активните клетки. Изучена е динамиката на получения модел чрез теорията за локалната активност. Определена е и границата на областта на хаоса, в която клетъчната невронна мрежа има сложно поведение. Разглежданата хистерезисна клетъчна невронна мрежа е направена от един ред клетки с хистерезисни превключватели.

Асоциативната и динамичната памет могат да са производни на хистерезисна клетъчна невронна мрежа.

NDR - Negative Differential Resistance може да се моделира чрез използване на строго нелинейни транспортни връзки, при които температурата се повишава.

NiO_2 Mott мемристора има следния закон на охлаждане:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i_m v_m}{c_{th}} - \frac{x - T_{amb}}{c_{th} R_{th}(x)}, \quad (4.18)$$

където: $T_{amb} = 300K$ е температурата на околната среда;

$c_{th} = 10^{-16} W_s K^{-1}$ е термичен капацитет;

R_{th} е коефициент, зависещ от температурата на устройството.

Уравнението на модела на мемристора е :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{i,j}}{dt} &= -x_{i,j} + M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}, t) - 2h(x_{i,j}) \\ y_{i,j} &= G(x_{i,j}, u_{i,j})u_{i,j} \end{aligned}, \quad \text{където:} \quad (4.19)$$

$x_{i,j}$ е променливата на състоянието;

$y_{i,j}$ е i_m ;

$u_{i,j}$ е v_m ;

$h(x_{i,j})$ е следната динамична хистерезисна функция дефинирана в [12].

$$h(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{за } x(t) > -1, f(x(t_-)) = 1 \\ -1 & \text{за } x(t) = -1 \\ -1 & \text{за } x(t) < 1, f(x(t_-)) = -1 \\ 1 & \text{за } x(t) = 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

$t_- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t - \epsilon)$, $\epsilon > 0$, където

$$\begin{aligned} M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}) &= \frac{y_{i,j} u_{i,j}}{c_{th}} - \frac{x_{i,j} - T_{amb}}{c_{th} R_{th}} \\ G(x_{i,j}, u_{i,j}) &= A_1(x_{i,j})(B_1^2(x_{i,j}) + (1 + (\frac{\sqrt{u_{i,j}}}{B_1(x_{i,j})} - 1) \cdot e^{\frac{\sqrt{u_{i,j}}}{B_1(x_{i,j})}}) + \frac{1}{2d}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

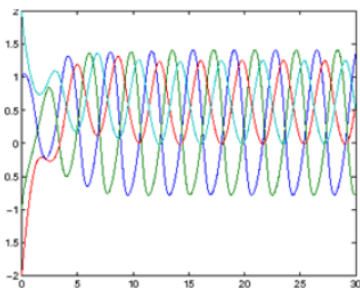
където

$$\begin{aligned} A_1(x_{i,j}) &= \sigma_0 \cdot e^{\frac{0.301}{2k_b \cdot x_{i,j}^A}} \\ k_b &= 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ е константата на Болцман} \\ A & \text{ е странична зона на устойчивост} \end{aligned} \quad (4.22)$$

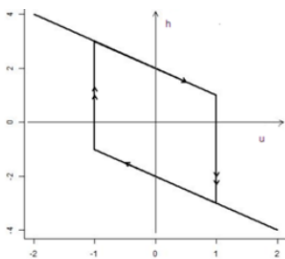
$$B_1(x_{i,j}) = \frac{k_b \cdot x_{i,j}}{\omega},$$

ω и σ_0 са реални константи, d е коефициент на гъвкавост

Модела на NbO_2 Mott мемристор 4.19, който е наречен нано мащабен мемристор (NM CNN)



Фигура 4.8. Симулация на нано-мемристорна клетъчна невронна мрежа която работи като релаксационен осцилатор



Фигура 4.9. Релаксационен осцилатор

е система, състояща се от диференциални уравнения от висока степен и алгебрични уравнения.

Направената симулация на този модел показва хаотични осцилации 4.8.

В [12] е показано, че хистерезисна клетъчна невронна мрежа работи като релаксационен осцилатор.

Ще приложим теорията на локалната активност, за да определим границата на хаоса, в който модела 4.19 показва сложно поведение.

Теорията за локалната активност предлага конструктивно - аналитичен метод. За хистерезисни клетъчна невронна мрежа [10] може да се определи областта на клетъчни параметри в локално активната зона и така потенциално да покажат сложност.

Физичната основа на теорията за локалната активност е инструктивна. Ще свържем променливи с напрежение и с настоящето състояние на електронна клетъчна мрежа, която се описва със същото уравнение.

Предполагаме, че всяка клетка оперира близо до равновесната си точка.

Ако съществува точно една равновесна точка, то мрежовия модел от активни клетки прилича на източник на слаб силов сигнал, както е описано в [7], т.е ако клетките са способни да поглъщат малките сигнали, тогава се казва, че клетките са локално активни.

В теорията за локалната активност може да се обясни възникващата сложност чрез точни математически критерии, дадени за идентифициране на относително малка локално активна област от локално активни параметри, наречена граница на хаоса.

Кинетичното уравнение за локално активната клетка може да покаже комплексно динамично поведение, като гранични цикли или хаос дори ако клетките не са свързани една с друга (т. е

всички дифузни коефициенти са 0)

В свързаните клетки могат да се зародят сложни пространствени и времеви явления, като превъртане на вълни и пространствено- времеви хаос.

Алгоритъм за определяне на границата на хаоса за нано КНМ (NM CNN модел) 4.19.

1. Намираме равновесните точки на съответната дискретна система. Тя може да има 1, 2 или ...m реални равновесни точки. Те могат да бъдат намерени или чрез изчислителни методи или чрез точни математически формули. Равновесните точки са функция от клетъчните параметри.
2. Изчисляване на клетъчните коефициенти на якобиан матрицата за всяка равновесна точка.
3. Изчисляване на следата (the trace) и детерминантата (Δ) от якобиан матрицата за всяка равновесна точка.
4. Определяме устойчивостта и локално активната зона за всяка равновесна точка.
5. Определяме областта, наречена граница на хаоса.

Прилагаме горния алгоритъм за нано КНМ 4.19. Както е показано в [7] равновесните точки се получават чрез решаване на системата.

$$\begin{aligned} 0 &= -x_{i,j} + M(x_{i,j}, y_{i,j}, u_{i,j}, t) - 2h(x_{i,j}) \\ 0 &= G(x_{i,j}, u_{i,j})u_{i,j} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Тази система може да има три реални корена като функция на клетъчните параметри.

Тогава изчисляваме клетъчните коефициенти $a_{11}(E_r), a_{12}(E_r), a_{21}(E_r), a_{22}(E_r)$

за всяка равновесна точка $r=1,2,3$ от якобиан матрицата във всяка равновесна точка.

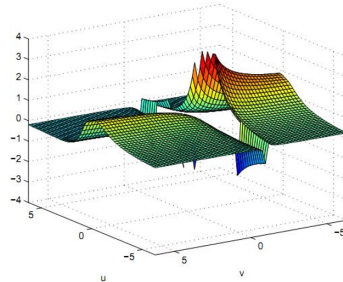
Определение 15 *Както в [9]. Дискретна система от уравнения се нарича **локално активна** тогава и само тогава, когато нейните асоциирани клетки са локално активни на някоя тяхна равновесна точка, в останалите точки са локално пасивни.*

Определение 16 *Една точка се намира и в устойчивия и в локално активната област на равновесната си точка r , за модела 4.19 когато $a_{22} > 0$ или $4a_{11} \cdot a_{22} < (a_{12} + a_{21})^2$ и е изпълнено $Tr(E_r) < 0$ и $\Delta(E_r) > 0$*

Тази област от параметри се нарича $SLAR(E_r)$ (Stability Locally Active Region)

Съществуващите дефиниции за граница на хаоса са дадени въз основа на практическия опит с динамични системи.

Определение 17 *Една нано КНМ работи в границата на хаоса тогава и само тогава, когато съществува поне една равновесна нейна точка, която е и локално активна и устойчива.*



Фигура 4.10. Граница на хаоса в нано КНМ модел

В сила е следната теорема:

Теорема 12 *NM CNN модела 4.19 оперира в областта граница на хаоса тогава и само тогава, когато са изпълнени следните условия:*

$$\begin{aligned} c_{tr} \cdot R_{tr} &< 1 \\ \frac{4}{c_{tr} \cdot R_{tr}} &< \left(\frac{K-r}{2d} + \frac{2K_r \cdot K_b}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Доказателство 15 *Намираме равновесните точки на системата от уравненията 4.23.*

Означаваме ги с :

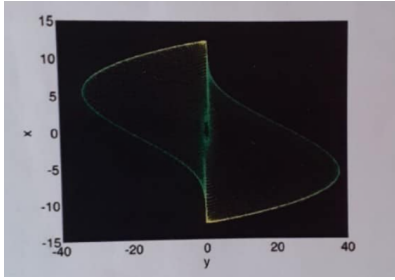
$$\begin{aligned} E_1(K_1(T_{amb}, c_{tr}, r_{tr}, d, K_B, \omega), 0, 0) \\ E_2(K_2(T_{amb}, c_{tr}, r_{tr}, d, K_B, \omega), 0, 0) \\ E_3(K_3(T_{amb}, c_{tr}, r_{tr}, d, K_B, \omega), 0, 0) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Тогава намираме клетъчните коефициенти a_{ki} от якобиан матрицата на системата 4.23 във всяка равновесна точка E_r , $r=1,2,3$. Като използваме първата дефиниция за граница на хаоса я определяме (т.е. определяме $SALR(E_r)$).

$$\begin{aligned} (SALR(E_r)) : c_{th} \cdot R_{th} &< 1 \\ \frac{4}{c_{th} \cdot R_{th}} &< \left(\frac{k_r}{2d} + \frac{2K_r \cdot K_B}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Според определение 15 имаме една равновесна точка, която е и устойчива и локално активна.

Направена е симулация, основана на алгоритъма за определяне граница на хаоса чрез МАТЛАБ, като е ползван алгоритъм на Ойлер с право разпространение на грешката и времева стъпка $t=0.01$ Хистерезисната функция е програмирана както следва:



Фигура 4.11. Граница на хаоса в NM КНМ модел

$$h(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{за } x(t_n) > -1, f(x(t_{n-1})) = 1 \\ -1 & \text{за } x(t_n) = -1 \\ -1 & \text{за } x(t_n) < 1, f(x(t_{n-1})) = -1 \\ 1 & \text{за } x(t_n) = 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

където $t_n = n\Delta t, n = 1, 2$.

Теоретичните резултати се потвърждават и от направената симулация 4.11

4.3 Приложение на метода на хармоничния баланс за намиране на периодични решения на хистерезисни НКНМ

В много от законите за съхранение на масата, момента и вътрешната енергия се открива хистерезисно поведение. Самото хистерезисно поведение се описва с хистерезисен оператор. Математическият модел на динамична система се състои от система диференциални уравнения, свързани с един или няколко хистерезисни оператора и допълнени с начални и гранични условия.

В тази глава се изучават клас квазилинейни хиперболични уравнения, в които има оператор за памет от следния вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + F(u) = 0 \text{ в множеството } Q = [a, b]X[0, T] \quad (4.28)$$

Ще търсим периодично решение на 4.28, което води до изучаването на обикновени диференциални уравнения с хистерезис. Ще приложим метода на нелинейните клетъчно невронни мрежи. За целта е необходимо да направим пространствена дискретизация. Уравнението 4.28 ще се трансформира в система от обикновени диференциални уравнения, които се идентифицират като статични уравнения на клетъчна невронна мрежа с подходящи темплейти.

Пространствената дискретизация правим по следния начин: проектираме $u(x, t)$ в слой на клетъчна невронна мрежа така, че производната $\frac{\partial u}{\partial x}$ да се запише като $\frac{u_{j+1} - u_j}{h}$, където $h = \Delta x$ е дискретната стъпка. Тогава уравнението 4.28 може да се запише със следната система от

обикновени диференциални уравнения:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{(u_{j+1} - u_j)}{h} - F(u_j), 1 \leq j \leq M \quad (4.29)$$

Да разгледаме линейна клетъчна невронна мрежа с $M \times M$ клетки, и да ставим 4.29 със статичното уравнение на автономна клетъчна невронна мрежа. Получаваме следните темплейти:

$$\begin{aligned} A &= [0, 1, \frac{1}{2h}][u_j] \\ \tilde{A} &= [0, -F(u_j), 0], 1 \leq j \leq M = N.N \end{aligned} \quad (4.30)$$

Нека $F(u_j)$ да е реален функционал, дефиниран с "горна" функция F_U и "долна" функция F_L виж фигура 4.4.

Функциите F_U и F_L са реални, непрекъснати, частично диференцируеми, като $F_U(u_j) = -F_L(u_j)$. Нека изходната функция f на нашия модел е стандартна сигмоидална функция. Разглеждаме периодични гранични условия, които правят нашата клетъчна невронна мрежа кръгова:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_n \\ u_n + 1 &= u_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Нека хистерезисния функционал е: $F(u_j) = \frac{u_j^3}{3} - u_j$.

Тогава модела на клетъчна невронна мрежа на 4.28, когато $F(u_j) = \frac{u_j^3}{3} - u_j$ има вида:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{(u_{j+1} - u_j)}{h} - (\frac{u_j^3}{3} - u_j), 1 \leq j \leq M = N.N \quad (4.32)$$

или след извършване на поределени пресмятания 4.32 придобива вида:

$$\frac{du_j}{dt} = u_j - \frac{u_{j+1}}{h} + \frac{u_j}{h} + n(u_j), \quad (4.33)$$

където $n(u_j) = \frac{u_j^3}{3}$

Ще изучим динамичното поведение на 4.33 с метода на хармоничния баланс. За целта ще приложим следната трансформация :

$$F(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-st} dt \quad (4.34)$$

към 4.33. Тогава получаваме:

$$sU(s, z) = U(s, z) + \frac{1}{h}U(s, z) - \frac{z}{h}U(s, z) + N(U(s, z)), \quad (4.35)$$

където $N(U(s, z))$ е подложената на трансформацията 4.34 функция $n(u_j)$. След направени

преобразования получаваме, че:

$$U(s, z) = \frac{h}{sh + z - h - 1} N(U(s, z)). \quad (4.36)$$

Така получаваме, че динамичната система може да се преобразува в схемата на Луре, в която трансферната функция е:

$$H(s, z) = \frac{h}{sh + z - h - 1} \quad (4.37)$$

В получения израз заместваме $s = i\omega_0$ и $z = e^{i\Omega_0}$, където ω_0 е времевата честота, а Ω_0 е пространствената честота и получаваме, че трансферната функция може да се представи като функция на ω_0 и Ω_0 т.е:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{U_{\Omega_0}(\omega_0)}{V_{\Omega_0}(\omega_0)}, \quad (4.38)$$

където U е входната, а V е изходната променлива според съответната схема на Луре.

За да намерим периодични решения, ще трябва входната променлива в системата да е във вида:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (4.39)$$

а изходната променлива да е във вида:

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + j\Omega_0) \quad (4.40)$$

Според метода на хармоничния баланс се разглеждат първите хармоници, които се получават при $j=0$:

$$U_{\Omega_0}(\omega_0) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t) \quad (4.41)$$

и

$$V_{\Omega_0}(\omega_0) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t) \quad (4.42)$$

Амплитудата V_{m_0} на изходната променлива се изчислява по формулата:

$$V_{m_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(u_{m_0} \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi \quad (4.43)$$

Като вземем под внимание, че $N(U_{m_0} \sin(\psi)) = -\frac{U_{m_0} \sin^3 \psi}{3}$ и като приложим формулата 4.43 получаваме:

$$V_{m_0} = -\frac{U_{m_0}^3}{4} \quad (4.44)$$

Като ползваме 4.41, 4.42 и 4.44 получаваме:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{U_{\Omega_0}(\omega_0)}{V_{\Omega_0}(\omega_0)} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \quad (4.45)$$

Трансферната функция 4.36 има вида:

$$H_{\Omega_0}(\omega_0) = \frac{h}{ih\omega_0 + \cos(\Omega_0) + isin(\Omega_0) - h - 1} \quad (4.46)$$

Получената функция рационализираме и отделяме реалната от имагинерната част и получаваме:

$$Re(H_{\Omega_0}(\omega_0)) = \frac{h(\cos(\Omega_0)-1-h)}{(\cos(\omega_0)-1-h)^2+(h\omega_0+sin(\Omega_0))^2} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} = -\frac{4}{U_{m_0}^2} \quad (4.47)$$

$$Im((H_{\Omega_0}(\omega_0))) = \frac{-h(h\omega_0+sin(\Omega_0))}{(\cos(\omega_0)-1-h)^2+(h\omega_0+sin(\Omega_0))^2} = 0$$

Нашия модел на клетъчно- невронна мрежа 4.33 е крайна кръгова мрежа от M клетки. Тогава ще имаме крайно множество от честоти:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{M}, 0 \leq k \leq M \quad (4.48)$$

Според метода на хармоничния баланс ако при дадена стойност на Ω_0 от 4.48 можем да намерим ω_0 и U_{m_0} от 4.47 . Тогава можем да предскажем съществуване на периодични решения на нашия клетъчно - невронен мрежови модел за хиперболичното уравнение 4.33. От 4.47 след извършване на съответните опростявания получаваме, че

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\frac{sin(\Omega_0)}{h} \\ U_{m_0} &= 2\sqrt{\frac{h+1-\cos(\Omega_0)}{h}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Така доказахме, че е в сила следната теорема:

Теорема 13 *Клетъчно невронния модел на 4.33 на хиперболичното уравнение с хистерезис 4.28 с кръгова мрежа от $M=N.N$ клетки и периодични гранични условия:*

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_M(t) \\ u_{M+1} &= u_1(t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

има периодично решение с период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и амплитуда U_{m_0} за всички $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{M}, 0 \leq k \leq M-1$ за всички M , както и тези решения са устойчиви.

4.4 Изводи

В глава четвърта е изучено :

1. Явлението Хистерезис
2. Представена е клетъчна невронна мрежа с хистерезис в системата за обратна връзка
3. Получени са аналитични резултати за КНМ модела на 4.19.
4. Изучена е работата на NbO_2 Mott мемристор в хистерезисна клетъчна невронна мрежа, която работи в осцилиращо релаксационната област (като релаксиращ оператор).
5. Получени са строги математически неравенства за определяне на областта на хаоса
6. Предложена е конструктивна процедура, която е приложима за произволна система, чиито клетки са свързани и описани чрез детерминистични математически модели.
7. Направено е проверимо необходимо и достатъчно условие, което гарантира, че системата има уникално steady state решение при $t \rightarrow \infty$

Глава 5

Изследване динамиката на КНМ на Мейнхард - Гиерер

5.1 Модел на Мейнхардт - Гиерер

Разпределените математически модели, които демонстрират промяна на количеството на едно или няколко вещества като резултат от два процеса: взаимодействие между компоненти (реакция) и дифузия се наричат модел от тип реакция дифузия и имат следния вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial}{\partial r} \sum D_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial r}, \quad (5.1)$$

Където $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са нелинейни функции описващи компонентите на системата; $D_{i,j}$ са съответните коефициенти на дифузия.

В своя работа Тюринг през 1952 година е изучил химичните основи на морфогенезата. В първоначално еднородна система протича химична реакция между различни вещества, на които скоростта на дифузия им е недостатъчна за пълна реакция и може да загуби устойчивост при определена дължина на вълната. Тук неустойчивостта предизвиква дифузия, като разрушава първоначално устойчивото състояние и предизвиква преход в ново състояние, което е пространствено нееднородно.

Прехода на системата към пространствено нееднородно състояние служи като предпоставка към различно поведение на клетките, които вече са в нова среда.

Анализирайки модела на реакция дифузия, Тюринг е получил, че еднаквото разпределение на реагиращите и дифузиращите вещества е неустойчиво, т.е. в системата трябва да има и автокатализа. Следователно коефициентите, описващи дифузията на различните вещества трябва да са различни. Тук дифузионната неустойчивост е известна като неустойчивост на Тюринг и

води до образуване на периодични в пространството и стационарни във времето концентрични структури.

При анализа на линейни модели от тип реакция дифузия се получава и друг тип дифузионна неустойчивост, която се нарича вълнова неустойчивост. При нея се образуват периодични в пространството и времето вълни или структури. При много актове на морфогенеза единното поле на зародиша се разделя на множество морфогенетически полета. Всеки морфогенетичен акт включва генериране на пространствена информация, която след това се запазва при деление на клетката.

Още в 18 век е забелязано, че при регенерацията се запазва поляриността на фрагмента[16], [43].

Разработения модел от Мейнхардт(1982) - Гиерер (1981) е модел от Тюрингов тип и описва процеса на морфогенеза. Модела има следния вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = F(A, B) + D_A \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = G(A, B) + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \end{cases}, \quad (5.2)$$

В този модел има два действащи противоположни реагента: локално действащ активатор и инхибитор, който намалява ефекта на активатора.

Ето и системата в по- детайлен вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{u^2}{v} - \mu_u D_u \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^2 - \mu_v v D_v \nabla^2 v \end{cases}, \quad (5.3)$$

където:

u - е активатор;

v - е инхибитор

ρ е способността на клетките да изпълняват автокаталитични реакции;

μ_u, μ_v са коефициенти на намаляването.

По детайлно е изследвана следната три компонентна система:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v, w) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = G(u, v, w) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = H(u, v, w) + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \end{cases}, \quad (5.4)$$

Тук F, G, H са нелинейни функции, описващи взаимодействието на променливите, D_i са

коэффициенты на дифузия.

Нека (u^0, v^0, h^0) е стационарното решение на системата

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 0 \\ G = 0 \\ H = 0 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Линеаризираме около равновесната точка (u^0, v^0, h^0) . Нулевото решение е устойчиво при липса на дифузия. Нека след линеаризиране на 5.4 получаваме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{1,1}\tilde{u} + a_{1,2}\tilde{v} + a_{1,3}\tilde{w} + D_1\nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a_{2,1}\tilde{u} + a_{2,2}\tilde{v} + a_{2,3}\tilde{w} + D_1\nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a_{3,1}\tilde{u} + a_{3,2}\tilde{v} + a_{3,3}\tilde{w} + D_1\nabla^2 w \end{array} \right. , \quad (5.6)$$

$a_{i,j}$ са коефициентите на якобиан матрицата, изчислена в стационарната точка, а $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ са малки отклонения от равновесната точка (u^0, v^0, w^0) . Намираме собствените стойности на 5.6:

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} - \lambda - k^2 D_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda - k^2 D_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda - k^2 D_3 \end{array} \right| \quad (5.7)$$

Тук сме означили

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= k^2 \\ \nabla^2 v &= k^2 \\ \nabla^2 w &= k^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

За да намерим собствените стойности на уравнението трябва да решим следното уравнение

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0 \quad (5.9)$$

където:

$$\begin{aligned} A &= \sigma - k^2(D_1 + D_2 + D_3) \\ B &= \Sigma - k^2(D_1(a_{2,2} + a_{3,3}) + D_2(a_{1,1} + a_{3,3}) + D_3(a_{1,1} + a_{2,2})) + k^4(D_1D_2 + D_1D_3 + D_2D_3) \\ C &= \Delta - k^2 \sum_{i=1}^3 D_i \Theta_i + k^4(D_1D_2a_{3,3} + D_1D_3a_{2,2} + D_2D_3a_{1,1}) - k^6 D_1D_2D_3 \end{aligned} \quad (5.10)$$

където

$$\begin{aligned}
 \sigma &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} \\
 \Delta &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\
 \Sigma &= \sum_{i=1}^3 \Theta_i \text{ където } \Theta_i = a_{j,j}a_{l,l} - a_{j,l}a_{l,j}, i \neq j \neq l
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Уравнението 5.9 е от трета степен с реални коефициенти и и нека корените му са $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Между коефициентите на 5.9 и корените му $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ съществува следната зависимост:

$$\begin{cases}
 A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
 B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\
 C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 AB - C = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1)
 \end{cases} \tag{5.12}$$

Състоянието е устойчиво, когато $Re\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3$

Следователно хомогенното уравнение е устойчиво тогава и само тогава, когато е изпълнено:

$$\begin{cases}
 A < 0 \\
 B > 0 \\
 C < 0 \\
 AB - C < 0
 \end{cases} \tag{5.13}$$

Когато дифузия липсва ($k^2 = 0$), състоянието на хомогенната система е устойчиво и неравенствата 5.13 приемат вида:

$$\begin{cases}
 \sigma < 0 \\
 \Sigma > 0 \\
 \Delta < 0 \\
 \sigma\Sigma - \Delta < 0
 \end{cases} \tag{5.14}$$

Търсим онези стойности на параметрите, при които равновесното състояние е неустойчиво, т.е. $\exists k \neq 0$, такова че за поне едно $\lambda_i(k^2), i = 1, 2, 3, Re(\lambda_i(k^2)) > 0$. Когато поне едно от 5.13 е нарушено, това означава, че в системата е възникнала бифуркация- т.е. еднородното състояние е изгубило устойчивостта си. Поради условията 5.14 $A < 0 \forall k$.

Второто неравенство в 5.13 не може да бъде нарушено, ако са изпълнени всички други условия. По този начин или условието $C < 0$ е нарушено, което по силата на съотношения 5.12 означава появата на реална положителна собствена стойност в системата, което съответства на бифуркация на Тюринг, или условието $AB - C < 0$ е нарушено и тогава съществува двойка комплексно спрегнати собствени стойности с положителна реална част, което означава че имаме вълнова бифуркация.

5.1.1 Бифуркация на Тюринг

Ще намерим при какви стойности на параметрите се появява неустойчивостта на Тюринг. Коефициента C е функция, която можем да предствим във вида:

$$\begin{aligned} C(k^2) &= \Delta - \alpha_T k^2 + \beta_T k^4 - \delta_T k^6, \text{ където} \\ \alpha_T &= \sum_{i=1}^3 D_i \Theta_i \\ \beta_T &= D_1 D_2 a_{3,3} + D_1 D_3 a_{1,1} + D_2 D_3 a_{1,1} \\ \delta_T &= D_1 D_2 D_3 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Функцията C е от трета степен и е монотонно намаляваща когато $\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T \leq 0$.

Когато $\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T > 0$ функцията C има локални екстремуми, като максимума се достига в точката $k_0^2 = \frac{1}{3\delta_T}(\beta_T + \sqrt{\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T})$ и е равен на :

$$C_{max}(k^2) = \Delta + \frac{1}{27\delta_T^2}(2(\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T)^{\frac{3}{2}} + \beta_T(2\beta_T^2 - 9\alpha_T \delta_T)) \quad (5.16)$$

За да съществува бифуркация на Тюринг трябва функцията $C(k^2) > 0$, т.е да е в сила условието:

$$C_{max}(k^2) = \Delta + \frac{1}{27\delta_T^2}(2(\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T)^{\frac{3}{2}} + \beta_T(2\beta_T^2 - 9\alpha_T \delta_T)) > 0, \quad (5.17)$$

като е необходимо и да са изпълнени 5.14

Неравенството 5.17 може да е изпълнено само когато $\beta_T > 0$, което е възможно когато поне един от коефициентите на главния диагонал на линеаризиращата матрица е по-голям от нула (това е известното условие за наличие на автокатализа), като съответния му коефициент на дифузия трябва да е по-малък в сравнение с другите два.

Нека предположим, че $a_{1,1} > 0$ и нека $D_2 D_3 \gg D_1$. След известни пресмятания, получаваме, че

$$\begin{aligned} C_{max}(k_0^2) &= \Delta + \frac{4}{27} \frac{D_3 D_3 a_{1,1}^3}{D_1^2} \\ k_0^2 &\approx \frac{2a_{1,1}}{3D_1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Така стигнахме до следния извод:

Извод 5

Когато коефициентът на дифузия на първата, автокаталитична променлива е много по-малък от другите две, хомогенното стационарно състояние на реакционно-дифузионната система от тип 5.4 е Тюринг нестабилно, ако параметрите на тази система удовлетворяват

следните условия:

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &> 0 \\
\sigma &< 0 \\
\Sigma &> 0 \\
\Delta &< 0 \\
\frac{D_2 D_3}{D_1^2} &> \frac{4}{47} \frac{(-\Delta)}{a_{1,1}^3}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

5.1.2 Вълнова бифуркация

Нашата цел е да намерим стойностите на параметрите, при които се получава вълнова неустойчивост. За целта въвеждаме функцията:

$$F(k^2) = AB - C = \sigma\Sigma - \Delta - a_V k^2 + \beta_V k^4 - \delta_V k^6, \text{ където}$$

$$\begin{aligned}
a_V &= D_1(\sigma^2 - a_{1,1}^2 - a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,3}a_{3,1}) + D_2(\sigma^2 - a_{2,2}^2 - a_{1,2}a_{2,1} - a_{2,3}a_{3,2}) + D_3(\sigma^2 - a_{3,3}^2 - a_{1,3}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}) \\
\beta_V &= (D_1 + D_3)(D_2 + D_3)(a_{1,1} + a_{2,2}) + (D_1 + D_2)(D_2 + D_3)(a_{1,1} + a_{3,3}) + (D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(a_{3,3} + a_{2,2}) \\
\delta_V &= (D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Функцията $F(k^2)$ има локални екстремуми ако $\beta_V - 3\alpha_V > 0$. Локалния екстремум е в точката k_0^2 и има стойност:

$$k_0^2 = \frac{1}{3\delta_V}(\beta_V^2 + \sqrt{\beta_V^2 - 3\alpha_V\delta_V}) \tag{5.21}$$

$$F(k^2) = \sigma.\Sigma - \Delta + \frac{1}{27\delta_V^2}(2(\beta_V^2 - 3\alpha_V\delta_V)^{\frac{3}{2}} + \beta_V(2\beta_V^2 - 9\alpha_V\delta_V))$$

За да има в системата вълнова неустойчивост, освен 5.14 трябва да бъде изпълнено и условието:

$$F_{max}(k_0^2) = \sigma.\Sigma - \frac{1}{27\delta_V^2}(2(\beta_V^2 - 3\alpha_V\delta_V)^{\frac{3}{2}} + \beta_V(2\beta_V^2 - 9\alpha_V\delta_V)) > 0 \tag{5.22}$$

Неравенството 5.22 е изпълнено само ако $\beta_V > 0$, което е възможно само когато сумата на два от членовете на матрицата $a_{i,j}$ по главния и диагонал е по-голяма от нула и коефициента на дифузия съответстващ на третата променлива е достатъчно голям в сравнение с останалите. Ако коефициента на дифузия съответстващ на третата променлива е достатъчно голям то 5.22 може да се представи в по опростен вид. Нека приемем за определеност, че $a_{1,1} + a_{2,2} > 0$ и $D_3 \gg D_1 D_2$.

Извършваме полагането:

$$D_3 = D$$

$$D_2 = \epsilon q D$$

$$D_1 = \epsilon D$$

където ϵ е малко число а q е ≈ 1

Тогава е изпълнено:

$$\begin{aligned} a_V &= D\epsilon(\sigma^2 - a_{1,1}^2 - a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,3}a_{3,1}) + \epsilon q(\sigma^2 - a_{2,2}^2 - a_{1,2}a_{2,1} - a_{2,3}a_{3,2}) + \\ &+ (\sigma^2 - a_{3,3}^2 - a_{1,3}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}) = D(\sigma^2 - a_{3,3}^2 - a_{1,3}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}) + O(\epsilon) \\ \beta_V &= D^2((a_{1,1} + a_{2,2})(1 + \epsilon)(1 + \epsilon q) + (a_{1,1} + a_{3,3})(\epsilon + \epsilon q)(q + 1) + (a_{2,2} + a_{3,3})(\epsilon + \epsilon q)(\epsilon + 1) = \\ &= D^2(a_{1,1} + a_{2,2} + O(\epsilon)) \\ \delta_V &= D^3(\epsilon + \epsilon q)(\epsilon q + 1)(\epsilon + 1) = D^3\epsilon(1 + q) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{5.23}$$

По предположение $\epsilon \ll 1$, и като ползваме равенството $(1 + q)\epsilon = \frac{(D_1 + D_2)}{D_3}$, Получаваме оценките:

$$F_{max}(k_0^2) \approx \sigma\Sigma - \Delta + \frac{4(a_{1,1} + a_{2,2})^3}{27} \left(\frac{D_3}{D_1 + D_2}\right)^2 \tag{5.24}$$

$$k_0^2 \approx \frac{4}{27} \frac{(a_{1,1} + a_{2,2})^3}{(\Delta - \sigma\Sigma)}$$

Условиата 5.19 и 5.24 могат да се изпълняват едновременно.

5.2 Метод на хармоничния баланс за изследване на динамиката на КНМ на Мейнхард - Гиерер

Нашата цел е да приложим метода на хармоничния баланс към системата на Майнхардт-Гиерер. Описаният модел се използва за моделиране на регенерацията на главата на хидра или на многоклетъчни организми, съставени от няколко клетъчни типа. Неговата динамика се дава от следната нелинейна система от диференциални уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = au^2(t,x,y)\frac{1}{v(t,x,y)} - \beta u(t,x,y) + D_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial v(t,x,y)}{\partial t} = au^2(t,x,y) - \gamma v(t,x,y) + D_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \tag{5.25}$$

Първото уравнение описва промяната на концентрацията на активатора, където $u(t, x, y)$ е автокаталитично вещество с малък обхват; $v(t, x, y)$ е антагонист с далечен обхват, т.е инхибитор $\frac{\partial u}{\partial t}$ описва промяната на концентрацията на активатора $u(t, x, y)$ за единица време. u^2 - описва скоростта на производство на активатора, която зависи нелинейно от неговата концентрация.

$\frac{1}{v}$ - Показва факта, че производството на активатора се улавя от инхибитора.

β - е коефициент , показващ степента на инхибиране на активаторните молекули. Обменът на молекули се осъществява чрез дифузия;

γ е фактор на натоварване на инхибитора.

Проектираме решението $u(t,x,y)$ и $v(t,x,y)$ на уравненията (5.25) върху слой на клетъчна невронна мрежа, така, че статичното напрежение на клетка от клетъчна невронна мрежа $x_{kl}(t)$ да е в точка от мрежата (k,l) .

$h_x = \Delta x, h_y = \Delta y$. Предполагаме, че $h_x = h_y = h$. Тогава

$$u_{xx} + u_{yy} \approx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} ((u(t, x+h, y) - u(t, x, y)) - (u(t, x, y) - u(t, x-h, y)) + (u(t, x, y+h) - u(t, x, y)) - \\ - (u(t, x, y) - u(t, x, y-h))) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Коего може да се напише като:

$$u_{xx} + u_{yy} \sim \frac{1}{h^2} (u_{k+1,l} - 4u_{k,l} + u_{k,l-1} + u_{k-1,l} + u_{k,l+1}) \quad (5.27)$$

Тогава динамиката на клетъчно невронния модел (5.25) може да се опише като:

$$\begin{cases} \dot{u}_{i,j} = \alpha \frac{u_{i,j}^2}{v_{i,j}} - \beta u_{i,j} + D_1(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \\ \dot{v}_{i,j} = \alpha u_{i,j}^2 - \gamma v_{i,j} + D_2(v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) \end{cases} \quad (5.28)$$

Прилагаме трансформацията на Фурие към (5.28):

$$F(s, z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} z_1^{-k} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} z_2^{-l} \int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}(t) e^{-st} dt \quad (5.29)$$

Тогава за клетъчно - невронния модел на Мейнхард - Гиерер получаваме:

$$\begin{cases} sU = \alpha \frac{U^2}{V} - \beta U + D_1(z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1^1 + z_2^1 - 4)U \\ sV = \alpha U^2 - \gamma V + D_2(z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1^1 + z_2^1 - 4)U \end{cases} \quad (5.30)$$

или

$$\begin{cases} U = \frac{1}{(s+\beta-D_1T)} N_1(U, V) \\ V = \frac{1}{(s+\gamma-D_2T)} N_2(U, V) \end{cases} \quad (5.31)$$

Където $T = z_1^{-1} + z_1 + z_2^{-1} + z_2 - 4 = 2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4$, $N_1(U, V) = \alpha \frac{U^2}{V}$, $N_2(U, V) = \alpha U^2$

$$\frac{U}{V} = \frac{s + \gamma - D_2T}{s + \beta - D_1T} N \quad (5.32)$$

като $N = \frac{N_1(U,V)}{N_2(U,V)}$.

Това означава че системата диференциални уравнения на Мейнхард - Гиерер може да се представи в схемата на Луре с трансферна функция $H(s, z_1, z_2) = \frac{s + \gamma - D_2T}{s + \beta - D_1T}$.

Ще търсим решение във вида:

$$\begin{cases} u_{ij}(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = U_{m_0} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) = U_{m_0} \sin(\psi) \\ v_{ij}(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = V_{m_0} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) = V_{m_0} \sin(\psi) \end{cases} \quad (5.33)$$

където $\psi = \omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, where $T_0 > 0$ е минималния период. Взимаме периодични гранични решения за нашия модел (5.28) и предполагаме, че $s = j\omega_0$, $z_2 = e^{j\Omega_2}$ и $z_1 = e^{j\Omega_1}$, където ω_0 е времева честота, Ω_1, Ω_2 са пространствени честоти и

$\Omega_1 + \Omega_2 = \frac{2k\pi}{n}$, където $0 < k \leq n - 1$.

Заместваме s, z_1 и z_2 в (5.32) и получаваме:

$$H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2T)(\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} + j \frac{(\gamma - D_2T) - (\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} \omega_0 \quad (5.34)$$

Трансферната функция е реална функция. Тогава

$$\begin{cases} Re(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) = \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2T)(\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} = \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \\ Im(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) = \frac{(\gamma - D_2T) - (\beta - D_1T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1T)^2} \omega_0 = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

В съответствие с [38] и метода на хармоничния баланс предполагаме, че съответната нелинейност N_{ij} се развива в ред на Фурие като

$$N_{ij} = N_0(U_{m_0})U_{m_0} + N_1(U_{m_0})U_{m_0} \sin \psi + \dots$$

Коефициентите могат да се пресметнат по формулите:

$$N_0(U_{m_0}) = \frac{1}{2\pi U_{m_0}} \int_{-\pi}^{\pi} N(U_{m_0} \sin \psi) d\psi = 0 \quad (5.36)$$

$$N_1(U_{m_0}) = \frac{1}{\pi U_{m_0}} \int_{-\pi}^{\pi} N(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{U_{m_0} V_{m_0}}$$

Тогава в съответствие с [39] и метода на хармоничния баланс съществува периодично решение

на (5.28) изразено чрез:

$$U_{m_0}[1 + N_0(U_{m_0})H(0, \Omega_1, \Omega_2)] = 0 \quad (5.37)$$

$$1 + N_1(U_{m_0})H(i\omega_0) = 0$$

От където получаваме:

$$\gamma - D_2T - (\beta - D_1T) = 0 \quad (5.38)$$

Тогава:

$$T = \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1}$$

$$T = e^{-j\Omega_1} + e^{j\Omega_1} + e^{-j\Omega_2} + e^{j\Omega_2} - 4$$

$$T = 2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4$$

$$\begin{aligned} 2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4 &= \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1} \\ 2 \cos \frac{k\pi}{n} \cos\left(\frac{2\Omega_1 - \frac{2k\pi}{n}}{2}\right) &= \frac{\gamma - \beta}{D_2 - D_1} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\cos\left(\Omega_1 - \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n}(D_2 - D_1)}$$

$$\Omega_1 = \frac{k\pi}{n} + \arccos \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n}(D_2 - D_1)}$$

$$\Omega_2 = \frac{k\pi}{n} - \arccos \frac{\gamma - \beta + 8(D_2 - D_1)}{4 \cos \frac{k\pi}{n}(D_2 - D_1)}$$

Можем да апроксимираме изхода $\frac{U}{V}$ от схемата на Лур с

$$\frac{U}{V} \sim \frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} \sin(\omega_0 t + k\Omega_1 + l\Omega_2) \quad (5.40)$$

$$\frac{U_{m_0}}{V_{m_0}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_{m_0} \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{V_{m_0}} \quad (5.41)$$

Където $f(x) = \frac{1}{2}(|x - 1| - |x + 1|)$.

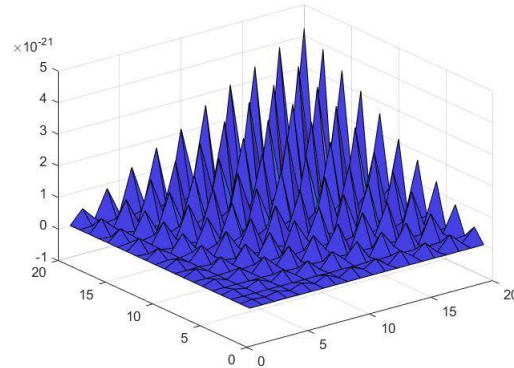
Когато пресметнем (5.41) ще получим че $U_{m_0} = 2$

Така получихме

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H(\omega_0, \Omega_1, \Omega_2)) &= \frac{-\omega_0^2 - (\gamma - D_2 T)(\beta - D_1 T)}{-\omega_0^2 - (\beta - D_1 T)^2} = \frac{U_{m_0}}{(V_{m_0})} = \frac{2}{V_{m_0}} \\ V_{m_0} &= \frac{(\omega_0^2 + (\gamma - D_2(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4))^2)}{2(\omega_0^2 + (\gamma - D_2(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4))(\beta - D_1(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2 - 4)))} \quad (5.42) \\ U_{m_0} &= 2 \end{aligned}$$

Извод 6 Чрез използване на метода на хармоничния баланс доказахме следната теорема за модела на Мейнхард - Гиерер

Теорема 14 Модела на Мейнхард - Гиерер (5.28) с кръгов масив с $n = M \times M$ клетки има периодично решение $u_j(t)$ и $v_j(t)$ с период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и амплитуда $U_{m_0} \forall \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{2\pi k}{n}$, $0 \leq k \leq n - 1$



Фигура 5.1. Симулация на функцията v от Мейнхард- Гиерер КНМ

Чрез програма на MatLab е анализирано динамичното поведение на решението на (5.25) на КНМ модел на Мейнхард - Гиерер.

5.3 Изводи

В глава пета:

1. Изследвана е пространствено нееднородна динамична система чрез модела на Мейнхардт-Гиерер.
2. Изведени са условия за устойчивост на модела на Мейнхардт-Гиерер.
3. Изведени са условията, при които се получава Тюрингова неустойчивост.

4. Изведени са условията, при които се получава вълнова неустойчивост.
5. Приложен е метода на хармоничния баланс и са получени аналитични резултати за KNM модела на Мейнхардт- Гиерер.

Глава 6

Приноси в дисертационния труд:

Приносите в дисертацията условно могат да се разделят на научни и научно-приложни.

1. Научни приноси

- (а) Доказано е , че всяко нелинейно диференциално уравнение може да се изследва с метода на хармоничния баланс.
- (б) Изведено е уравнението на хармоничния баланс за нелинейни системи.
- (в) Представен е КНМ алгоритъм за изследване на уравнения на реакция дифузия.
- (г) Дефинирани са флуксони от математическа гледна точка.
- (д) Моделирано е взаимодействието флуксон- антифлуксон с КНМ.

2. Научно - приложни приноси

- (а) Представени са приложения на КНМ в биологията, физиката, механиката, свръхпроводящите нанотехнологии.
- (б) Изследвани са решения от тип пътуваща вълна на КНМ.
- (в) Изследвано е явлението хистерезис в КМН с мемристорни синапси.
- (г) Получени са строги математически неравенства за определяне на областта, наречена „ръб на хаос”.
- (д) Изследвана е системата на Мейнхард – Гиерер, като изведени условията при които се получават Тюрингова и вълнова неустойчивост.

Приложение А

Програмен код на симулацията на уравнението на Фиц Хю Нагумо

```
clear all; clc;
dx = 0.1;
dt = (1/2) * dx2;
x = [0:dx:200];
T = 500;
d = 1;
= 1.1 * exp((-x.2)/(d2));
v = zeros(1,length(x));
D = 0.5;
r = D * dt/dx2;
a = 0.02;
b = 0.01;
g = 0.02;
iter = 0;
cumshift = 0;
xoffset = 0;
xpos = 0;
tm = 0;tj=0;
newx = x;
for j = 0:dt:T
v = dt.*(b*u -g*v) + v;
u(2:end-1) = u(2:end-1) + r.*(u(3:end)-2.*u(2:end-1)+u(1:end-2)) ...
```

```

+ dt.*u(2:end-1).*(1-u(2:end-1)).*(u(2:end-1)-a) - dt.*v(2:end-1);
u(1) = u(1) + 2*r*(u(2) -u(1)) + dt*(u(1)*(1-u(1))*(u(1)-a)) - dt*v(1);
u(end) = 0;
tstart = 267;
if(j >= tstart)
iter = iter + 1;
if (tj == 0)
xq = [x(1):0.001:x(end)];
s = interp1(x,u,xq,'spline');
maxs = max(s);
mxu = find(s==max(s));
xcm = xq(mxu);
tj = j;
end
if (mod(iter,400)==0)
w = find(u>0.2);
ww = x(w)
xq2 = [ww(1):0.00001:ww(end)];
h = interp1(x,u,xq2,'spline');
ind = find(h == max(h));
xt = xq2(ind); xc = xt -xcm; N = floor(xc/dx);
xshift = N*dx;
cumshift = cumshift + xshift
xoffset = xc -xshift;
u = [u(N+1:end) zeros(1,N)];
v = [v(N+1:end) zeros(1,N)];
plot(newx,u,'r',newx,v,'g');
axis([newx(1) newx(end) -0.5 1])
xlabel('x','Interpreter','latex','FontSize',13);
ylabel('u','Interpreter','latex','FontSize',13);
newx = x+cumshift+ xoffset;
pause(0.01)
xpos = [xpos cumshift+xoffset];
tm = [tm j];
end
end

```

```

end
sum = 0;
k = 0;
speed(1) = 0;
for j = 3:length
temp = (xpos(j)-xpos(j-1))/(tm(j)-tm(j-1));
sum = sum + temp;
k=k+1;
speed(j) = sum/k;
end
figure (4)
plot(tm(3:end),speed(3:end))
axis([tm(3) tm(end) (speed(end)-0.0005) (max(speed)+0.0005)])
xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',11);
ylabel('Speed','Interpreter','latex','FontSize',11);
fprintf('final speed = fprintf('maximum of u = fprintf('final speed = fprintf('maximum of u =

```


Библиография

- [1] Cellular Non-linear Networks as a New Paradigm for Evolutionary Robotics. <http://cdn.intechweb.org/pdfs/847.pdf>. Accessed: 2018-07-31.
- [2] Cellular Nonlinear Network. http://www.vernon.eu/euCognition/cognition_briefing_cnn.htm. Accessed: 2018-07-31.
- [3] Chua L. A paradigm for complexity,. *Circuit Theory Applications*, 10:201–229, 1982.
- [4] D.B. Stukov, G.S. Sinder, D. R. Stewart and R.S. Williams. The missing memristor found. *Nature Letters*, 453-DOI 10.1038/nature06932:3435– 3456, 2005.
- [5] G. Gibson, S. Musunuru, J. Zhang, K. Vanderberge, J. Lee, Ch. Heis, D. Henze, Z. Li, S. Williams. An accurate locally active memristor model for s - type negative resistance in NiO_2 . *Appl. Phys. Letter*, 108:–, 2016.
- [6] Guzelis C., and Chua L. Stability analysis of generalized cnn. *Circuit Theory and App.*, 21:1–33, 1993.
- [7] K. Mainzer, L.O. Chua. Local activity principle. *Imperial college Press*, pages 1257–, 1988.
- [8] L.O. Chua. Memristor: the missing circuit element. *IEEE Trans. On circuit theory*, 18-5:507–519, 1971.
- [9] L.O. Chua. Local activity is the origin complexity. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 15:3435– 3456, 2005.
- [10] L.O. Chua. Memristor Hodgkin Huxley and edge of chaos. *Nanotechnology*, 24:–, 2013.
- [11] L.O. Chua, L. Yang. Cellular neural network - theory and applications. *IEEE trans. CAS*, 35:3435– 3456, 2005.
- [12] M. Itoh, L.O. Chua. Cellular neural networks for associative and dynamical memories. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 14:1725– 1772, 2004.
- [13] Roska T., and Chua L. and Wu C.W. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay - type templates. *IEEE Trans. Circuit Syst.*, 40:270–271, 1993.
- [14] Slavova A. Cellular neural networks with nonlinear dynamics. *Neural, Parallel, and Scientific Computations*, 3:3:369–379, 1995.
- [15] Slavova A. R. Tetzlaff. Cnn computing of double sine-gordon equation with physical applications. *C.R. Bulg. Acad. Sci.*, 67:21–28, 2014.
- [16] H. Meinhardt A. Gierer. A theory of biological pattern formation. 12, 1972.
- [17] Leslie A. Aamport. The gnats and gnus document preparation system. *G-Animal's Journal*, 41(7):73+, July 1986. This is a full ARTICLE entry.
- [18] Leslie A. Aamport. The gnats and gnus document preparation system. In *G-Animal's Journal* [37], pages 73+. This is a cross-referencing ARTICLE entry.

- [19] A.Mees. *Dynamics of Feedback Systems*. Wiley, London, 1981.
- [20] Eleonora Bilotta and Pietro Pantano. Cellular Non-Linear Networks as a New Paradigm for Evolutionary Robotics, *Frontiers in Evolutionary Robotics* year = 2008, url = http://www.intechopen.com/books/frontiers_in_evolutionary_robotics/cellular_nonlinear_networks_as_a_new_paradigm_for_evolutionary_robotics.
- [21] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F., (2007a). A gallery of chua's attractors - part i,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 1:1–60, 2007.
- [22] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007b), . A gallery of chua's attractors - part ii,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 2:293–380, 2007.
- [23] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007c), . A gallery of chua's attractors - part iii,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 3:657–734, 2007.
- [24] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007d), . A gallery of chua's attractors - part iv,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 4:1007–10078, 2007.
- [25] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007e), . A gallery of chua's attractors - part v,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 5:1383–1511, 2007.
- [26] Bilotta, E.; Pantano, P. Stranges, F.(2007f), . A gallery of chua's attractors - part vi,. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 17 n 1:1801–1910, 2007.
- [27] Steffen Borms. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. <https://www.informatik.uni-kiel.de/sb/data/NumPDE.pdf>, pages =, 2019.
- [28] J.M. Burgers. *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Academic Press in *Advances in Applied Mechanics*, New York, 1948.
- [29] C.-H.Hsu and S.-Y. Yang, . Wave propagation in rtd-based cellular neural networks. *Diff.Eq.*, 204:339–379, 2004.
- [30] L. Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing*. Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [31] L. Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing*. Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [32] Chua L. and Roska T., . The cnn paradigm. *IEEE Trans. Circuit Syst.*, 40:147–156, 1993.
- [33] Chua L., Yang L. Cellular neural networks: Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35:1257–1272, 1988.
- [34] Chua L., Yang L. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS*, 35:1273–1290, 1988.
- [35] C. Cuzelis and L. Chua. *Stability analysis of generalized CNN*. Circuit theory and applications, U.K., 1993.
- [36] Manfred Eigen. Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. *Naturwissenschaften*, 58(10):465–523, 1971.
- [37] *G-Animal's Journal*, 41(7), July 1986. The entire issue is devoted to gnats and gnus (this entry is a cross-referenced ARTICLE (journal)).
- [38] Genesio R.,and Tesi A., . The cnn paradigm a harmonic balance approach for chaos prediction:the chua's circuit. *Int.J.of Bifurcation and Chaos*, 2:61–79, 1992.
- [39] Genesio R.,and Tesi A., . Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica*, 28:531–531, 1992.

- [40] M. Gilli. Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 41(8):518–528, 1994.
- [41] M. Gilli. Bifurcation and chaos in cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 36(12):986–987, 1999.
- [42] M. Gilli. Comparison between the dynamic behavior of chua-yand and full-range cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 31:423–441, 2003.
- [43] H.Meinhardt. *The algorithmic beauty of sea shells.*, Berlin- Springer - Verlag, 1995.
- [44] Volker John. Numerical Methods for Partial DifferentialEquations, 2013.
- [45] T. J. Sullivan Mark Girolami Jon Cockayne, Chris J. Oates. *Probabilistic Numerical Methods for PartialDifferential Equations and Bayesian InverseProblems.* <https://arxiv.org/pdf/1605.07811.pdf>, pages =, 2017.
- [46] Donald E Knuth. Semantics of context-free languages. *Mathematical Systems Theory*, 2(2):127–145, 1968.
- [47] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming.* Four volumes. Addison-Wesley, 1968–90. Seven volumes planned (this is a cross-referenced set of BOOKs).
- [48] Donald E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, chapter 1.2. Addison-Wesley, 1973.
- [49] Donald E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, volume 1 of *The Art of Computer Programming*, section 1.2, pages 10–119. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 10 January 1973. This is a full INBOOK entry.
- [50] Donald E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, section 1.2. Volume 1 of *The Art of Computer Programming* [47], second edition, 1973. This is a cross-referencing INBOOK entry.
- [51] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms.* Addison-Wesley, 1981.
- [52] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*, volume 2 of *The Art of Computer Programming.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 10 January 1981. This is a full BOOK entry.
- [53] Donald E. Knuth. *Seminumerical Algorithms.* Volume 2 of *The Art of Computer Programming* [47], second edition, 1981. This is a cross-referencing BOOK entry.
- [54] The programming of computer art.
- [55] Jill C. Knuth. The programming of computer art. Vernier Art Center, Stanford, California, February 1988. This is a full BOOKLET entry.
- [56] D.F. Mayers K.W. Morton. *Numerical Solution of PartialDifferential Equations ISBN-I3 987-0-5II-III62-4.* Cambridge University Press, U.K., 2005.
- [57] Lamb, G. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.*, 43:99–124, 1971.
- [58] L.Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and visual computing.* Cambridge University Press, U.K., 2002.
- [59] Daniel D. Lincolll. Semigroups of recurrences. In *High Speed Computer and Algorithm Organization.* Academic Press, 1977.

- [60] Daniel D. Lincoll. Semigroups of recurrences. In David J. Lipcoll, D. H. Lawrie, and A. H. Sameh, editors, *High Speed Computer and Algorithm Organization*, number 23 in Fast Computers, part 3, pages 179–183. Academic Press, New York, third edition, September 1977. This is a full INCOLLECTION entry.
- [61] Daniel D. Lincoll. Semigroups of recurrences. In Lipcoll et al. [62], pages 179–183. This is a cross-referencing INCOLLECTION entry.
- [62] David J. Lipcoll, D. H. Lawrie, and A. H. Sameh, editors. *High Speed Computer and Algorithm Organization*. Number 23 in Fast Computers. Academic Press, New York, third edition, September 1977. This is a cross-referenced BOOK (collection) entry.
- [63] MultiMedia LLC. MS Windows NT kernel description, 1999.
- [64] Scott A. Ets. Lonngren, K. *Solitons in action*. Academic Press., 1978.
- [65] Macki J., Nistri P., Zecca P. . Mathematical models for hysteresis. *SIAM*, 53:94–112), 1993.
- [66] *The Definitive Computer Manual*.
- [67] Larry Manmaker. *The Definitive Computer Manual*. Chips-R-Us, Silicon Valley, silver edition, April-May 1986. This is a full MANUAL entry.
- [68] Édouard Masterly. Mastering thesis writing. Master’s thesis, Stanford University, 1988.
- [69] Édouard Masterly. Mastering thesis writing. Master’s project, Stanford University, English Department, June-August 1988. This is a full MASTERSTHESIS entry.
- [70] This is a minimal MISC entry.
- [71] Joe-Bob Missilany. Handing out random pamphlets in airports. Handed out at O’Hare, October 1984. This is a full MISC entry.
- [72] M.Itoh, P.Julian, and L.O. Chua. ”rtd-based cellular neural networks with multiple steady states”. *Int.J.Bifurcat.Cahos*, 11:2913–2959, 2001.
- [73] Alfred V. Oaho, Jeffrey D. Ullman, and Mihalis Yannakakis. On notions of information transfer in VLSI circuits. In *Proc. Fifteenth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 1983.
- [74] Alfred V. Oaho, Jeffrey D. Ullman, and Mihalis Yannakakis. On notions of information transfer in VLSI circuits. In Wizard V. Oz and Mihalis Yannakakis, editors, *Proc. Fifteenth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, number 17 in All ACM Conferences, pages 133–139, Boston, March 1983. The OX Association for Computing Machinery, Academic Press. This is a full INPROCEEDINGS entry.
- [75] Alfred V. Oaho, Jeffrey D. Ullman, and Mihalis Yannakakis. On notions of information transfer in VLSI circuits. In OXstoc [77], pages 133–139. This is a cross-referencing INPROCEEDINGS entry.
- [76] Louise Olsen-Kettle. *Numerical solution of partial differentiale quations*. <http://researchers.uq.edu.au/researcher/768> ISBN 978-1-74272-149-1, 2011.
- [77] The OX Association for Computing Machinery. *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, Boston, 1983. This is a cross-referenced PROCEEDINGS.
- [78] *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, 1983.
- [79] Wizard V. Oz and Mihalis Yannakakis, editors. *Proc. Fifteenth Annual Symposium on the Theory of Computing*, number 17 in All ACM Conferences, Boston, March 1983. The OX Association for Computing Machinery, Academic Press. This is a full PROCEEDINGS entry.

- [80] A. Slawowa P. Popivanov. *Nonlinear Waves. An Introduction*. World Scientific, Singapore, 2011.
- [81] P. Popivanov and A. Slavova. *Nonlinear waves An introduction*. World Scientific, Singapoure., 2011.
- [82] P.Popivanov and A.Slavova. *Peakons, cuspons,compactons, solitons, kinks and periodic solutions of several third order PDE and their CNN realization*. Springer, 2009.
- [83] G. E. Roska, T.and Pazienza. Cellular neural network. *Scholarpedia*, 4(12):1519, 2009. revision #136670.
- [84] S. Kummar, J.P.Starchan, S. Williams. Chaotic dynamic in nanoscale *nio*₂ mott memristor for analog computing. *Int.J.Bifurcation and Chaos*, 548 - 23307:–, 2017.
- [85] Thiran P. Hasler M. Setti, G. An approach to information propagation in 1-d cellular neural networks- part i: Local diffusion. *IEEE Trans. Circuits Systems I*, 45(8):790–811, 1998.
- [86] Thiran P. Hasler M. Setti, G. An approach to information propagation in 1-d cellular neural networks- part ii: Global propagation. *IEEE Trans. Circuits Systems I*, 45(8):790–811, 1998.
- [87] A. Slavova. *Cellular Neural Networks: Dynamics and Modeling*. Springer Science + Business Media, B.V ISBN 978-90-481-6254-3, 2005.
- [88] Slavova A.,and Zecca P., . Cnn model for studying fitzhugh-nagumo equation. *Comp.R.Bulg.Acad.Sci.*, 52:6:31–34, 2000.
- [89] EITAN TADMOR. *A REVIEW OF NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. <https://www.ams.org/journals/bull/2012-49-04/S0273-0979-2012-01379-4/S0273-0979-2012-01379-4.pdf>, 2012.
- [90] Tom Terrific. An $O(n \log n / \log \log n)$ sorting algorithm. Technical report, Fanstord University, 1988.
- [91] Tom T errific. An $O(n \log n / \log \log n)$ sorting algorithm. Wishful Research Result 7, Fanstord University, Computer Science Department, Fanstord, California, October 1988. This is a full TECHREPORT entry.
- [92] Ulrich  underwood, Ned  net, and Paul  pot. Lower bounds for wishful research results. Talk at Fanstord University (this is a minimal UNPUBLISHED entry).
- [93] Ulrich  underwood, Ned  net, and Paul  pot. Lower bounds for wishful research results. Talk at Fanstord University (this is a full UNPUBLISHED entry), November, December 1988.
- [94] A. Visintin. *Models of Hysteresis*. Springer, 1993.
- [95] Volume 2 is listed under Knuth [52].
- [96] Nossek J.A Zou, F. Bifurcation and chaos in cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, 40(3):166–173, 1993.
- [97] Первозванский А. А. *Курс теории автоматического управления*. Наука,, Москва, 1986.
- [98] Б.Р. Андриевски and А. Л. Фрадков. *Избрание главы теории автоматического управления*. Наука ISBN 5-02-024873-8, 2000.
- [99] Патерно Дж Байрон, А. *Эффект Джозефсона: физика и применения*. Мир, Москва, 1984.
- [100] В.Е.МИЗОНОВ. *УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*. Иваново, 2001.

- [101] Ковалев А.С. Косевич А.М., Иванов Б.А. *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны.* Наунл Думка, Москва, 1983.
- [102] и други Кошляков Н., С. *Уравнения в частных производных математической физики.* Высшая школа, Москва, 1970.
- [103] Смирнов М. М. Кошляков Н.С. *УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.* Висшая школа Москва, 1970.
- [104] Mirela Serra. *Dynamics of two neuron Cellular Neural Network.* PhD dissertation, Universitat Ramon Lull, Department Electronica.
- [105] Егоров Р. Ф. Панов Ю.Д. *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.* Екатеринбург, 2005.
- [106] Л. С. Понтрягин. *Обикновение дифференциальные уравнения.* Наука, 1974.
- [107] Е.А. Рындин. *МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.* 2012.
- [108] Жан-Пиер Сарман. *Енциклопедичен речник по физика ISBN 954-598-041-9.* Мартилен, София, 1995.
- [109] А. Л. Фрадков. *Синтез адаптивние системи стабилизации линейного динамического объекта.* Автоматизация и телемеханика № 12, 1974.
- [110] под редакции А. Л. Фрадкова. *Основы математического моделирования.* БГТУ, 1996.
- [111] Шамсутдинов Д.М. Бризер уравнения синус-Гордон с высшей дисперсией. *В кн.: Университетская наука - Республике Башкортостан,* Том.1, 2004.