СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Тодор Г.Генчев

ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ТИП

Дисертация представена за получаване
на научната спепен "Доктор на математическите науки"

СОФИЯ 1975

Учитесь честно достигать успеха
И привлекать благодаря уму...
А побрякушки,гулкие как эхо
Подделка и не нужны никому.

/ Фауст,стихове 548-551
в превод на Пастернак/.

УВОД. ПРЕГЛЕД НА СЪДЪРЖАНИЕТО

<u>Предварителни бележки.</u> След откриването на теоремата на Винер и Пели [1], чието значение е било незабавно оценено /ср. реферата на Тамаркин в Zentralblatt für Math. 16 /1937/, стр. 360, в който тази теорема е наречена класическа/, трансформацията на Фурие става един от основните инструменти при изследването на целите функции от експоненциален тип. Нейната роля се чувствува особено осезателно в теорията на целите функции на няколко променливи, където апаратът на безкрайните произведения, като правило, е неизползваем

Привлякла веднага вниманието на математиците, теоремата на Винер и Пели поражда редица изследвания, отнасящи се до различни класове от цели функции от експоненциален тип, на които върху реалната ос /или върху реалното подпространство $R^n_x \subset C^n$/ са наложени едни или други ограничения. Крайната цел в тези работи винаги е една и съща: с помощта на трансформацията на Фурие да се установи изоморфизъм между разглежданото пространство от цели функции и подходящо пространство от сумируеми функции, дефинирани за реални стойности на независимата променлива[1]. Забележително е и в това се крие силата и значението на теоремите от този тип, че всички такива пространства от сумируеми функции се оказват достатъчно прости - например имат компактен носител, от размерите на които се определя типът на съответната цяла функция.

До естествен завършък на изследванията от този род се стигна едвам след създаването на теорията на разпределенията от Лоран Шварц, който, използвайки тази теория, доказа теорема, сравнима по значение с класическата теорема на Винер и Пели и в редица случаи даже по-удобна за прилагане [3].

---

[1] Тук имаме пред вид класическия аспект на въпроса и умишлено не засягаме обобщенията, отнасящи се до различни класове топологични групи.

Главната цел, която преследваме в глава първа, е да дадем прости и еднообразни доказателства на повечето известни теореми от идейния кръг на Винер и Пели /ср. [4] стр. 103-107/, включително и на теоремата, доказана от Шварц /в текста - теорема на Винер-Пели-Шварц/.

Методът, който използваме, ни позволява да получим и нови резултати, както и n-мерни аналози на някои теореми досега известни само в едномерния случай. Нашият изходен пункт беше следният: Както е добре известно, теоремата на Винер и Пели може да се формулира по два начина:

1. /Силна форма/. Цялата функция $f(z)$ от експоненциален тип $\leq \sigma$ удовлетворява условието

а/ $$\int_{R^n} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тогава и само тогава, когато има вида

/1/ $$f(z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g(t)\, dt, \quad \text{където } z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

$t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $(z,t) = \sum_{j=1}^{n} z_j t_j$, а $g(t) \in L_2(R^n)$ и се анулира почти навсякъде извън кълбото S_σ: $\sum_{j=1}^{n} t_j^2 \leq \sigma^2$.

2. /Слаба форма/. Цялата функция $f(z)$ от експоненциален тип $\leq \sigma$ удовлетворява условията а/ и

б/ $$|f(z)| \leq M e^{\sigma |\mathrm{Im}\, z|}, \quad \text{където } |\mathrm{Im}\, z|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Im}\, z_j|^2,$$

тогава и само тогава, когато има вида /1/.

Докато краткото и естествено доказателство на теоремата в нейната слаба форма е добре известно [5], [6], [7][1], всички известни доказателства на теоремата в нейната силна форма са сравнително сложни [1], [2], [4], [8].

Използвайки едно елементарно неравенство от Бернщайнов тип, ние доказваме директно, че от а/ следва б/ и по този начин получаваме елементарно доказателство на теоремата в нейната силна формулировка. По същата схема протича и доказателството на останалите теореми от този тип, като освен това при изследването на случая $f(z) \in L_p(R^n_x)$, $1<p<2$ основна роля играе и неравенството на Хаусдорф-Юнг [9], без което впрочем и самата дефиниция на трансформацията на Фурие за функции от $L_p(R^n)$, $1<p<2$, без да се прибягва до теорията на разпределенията, е невъзможна.

Разбира се, в най-важния случай $f(z) \in L_2(R^n_x)$, неравенството на Хаусдорф-Юнг се замества от равенството на Парсевал, така че доказателството става особено просто.

За да можем да направим пълен обзор на съдържанието на глава първа, са необходими няколко дефиниции.

Означения и дефиниции. Нека, както обикновено C^n е пространството на n-те комплексни променливи $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ снабдено с метриката $|z|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 + y_j^2)$.

Постоянно ще пишем $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = x + iy$, където $x = \operatorname{Re} z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = \operatorname{Im} z = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, така че $C^n = R^n_x + iR^n_y$. В пространствата R^n_x и R^n_y ще използваме евклидовата метрика $|x|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$; $|y|^2 = |\operatorname{Im} z|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2$.

---

[1] В същност там се доказва един отслабен вариант на теоремата на Винер-Пели-Шварц, но измененията, които са необходими, за да се получи формулираната по-горе теорема на Винер и Пели, са очевидни.

Множеството на целите функции в C^n, които са от експоненциален тип $\leq \sigma$, т.е. функциите, за които е в сила оценката

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad \varepsilon > 0, \; z \in C^n,$$

ще означаваме с E^n_σ, а подмножеството на E^n_σ, което се състои от функциите, ограничени върху R^n_x, с B^n_σ.

Всички цели функции, които се разглеждат в тази работа, принадлежат на E^n_σ и освен това, както показва заглавието, растат върху R^n_x не по-бързо от $|x|^m$, където числото $m > 0$ може да бъде различно за различните функции.

Ако Ω е област в R^n, с $C^\infty(R^n)$ ще означаваме множеството на всички функции, дефинирани в Ω, с непрекъснати производни от произволен ред, а с $C_0^\infty(\Omega)$ подмножеството на $C^\infty(\Omega)$, което се състои от функциите с компактен носител в Ω /Под носител на една функция или на едно разпределение /в текста ще се използува означението $supp$ / разбираме най-малкото затворено подмножество на дефиниционната област на функцията /разпределението/, извън което тя /то/ се анулира тъждествено.

Нека α е мултииндекс, т.е. нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, където числата $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ са цели. В такъв случай полагаме $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$ където $D_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ / i е имагинерната единица/. Подпространството на $C^\infty(R^n)$ което се състои от функции, такива че

$$\sup_{R^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \quad (x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n})$$

за произволни мултииндекси α и β, ще означаваме с $\mathcal{J}$. Добре известно е, че трансформацията на Фурие, дефинирана чрез равенството

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{R^n} e^{-i(x,t)} \varphi(t) dt, \quad (x,t) = \sum_{j=1}^{n} x_j t_j$$

осъществява еднозначно съответствие на $\mathcal{J}$ върху $\mathcal{J}$. Формулата за обръщане има вида

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} e^{i(x,t)} \hat{\varphi}(x)\,dx .$$

Да означим с $\mathcal{E}'(R^n)$ множеството от разпределенията с компактен носител в R^n. В $\mathcal{E}'(R^n)$ се дефинира трансформация на Фурие с помощта на равенството

/2/ $\quad \hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$

и се проверява, че ако разпределението u е сумируема функция, неговата трансформация на Фурие, дефинирана чрез /2/ е функция, свързана с u чрез равенството

$$\hat{u}(x) = \int\limits_{R^n} e^{-i(x,t)} u(t)\,dt,$$

т.е. новата дефиниция е естествено обобщение на старата. По-нататък, ако $u \in \mathcal{E}'(R^n)$ оказва се, че $\hat{u}$ е цяла функция от експоненциален тип, свързана с u чрез равенството

/3/ $\quad \hat{u}(z) = u_t(e^{-i(z,t)})$.

/Индексът t показва, че разпределението u действува на $e^{-i(z,t)}$ разглецана като функция на t при фиксирано z./ Нещо повече, ако носителят на u се съдържа в кълбото $|t| \le \sigma$ /в такъв случай ще пишем $\operatorname{supp} u \subset \{t : |t| \le \sigma\}$/ за $\hat{u}(z)$ важи оценка от вида

$$|\hat{u}(z)| \le C(1+|z|)^m e^{\sigma|\operatorname{Im} z|},$$

т.е. $\hat{u}(z) \in E^n_\sigma$. Числото m е редът на разпределението, т.е. най-малкото цяло неотрицателно число, за което е в сила оценката:

$$|u(\varphi)| \le C(K) \sum_{|\alpha| \le m} \max_K |D^\alpha \varphi|,$$ където $\varphi \in C^\infty(R^n)$

и K е произволна компактна околност на $\operatorname{supp} u$.

Всички факти от теорията на разпределенията, които се използват в тази работа, могат да се намерят в глава първа на [5].

За да приключим с въвеждането на почти всички означения, които се използват в текста, остава да отбележим, че нормата в пространствата $L_p(R^n)$, $p \geq 1$ ще означаваме с $\|\cdot\|_p$.

<u>Съдържание на глава първа</u>. Нашето доказателство на теоремата на Винер и Пели, както и на всички останали теореми от този род, се опира на следните леми. /Ще използваме номерацията от текста./

Лема 2. Нека $f(z) \in E^n_\sigma$ и нека върху R^n_x е в сила неравенството

$$|f(x)| \leq M(1+|x|)^m, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad M \geq 0, \ m \geq 0 \text{-константи.}$$

Тогава в C^n е в сила оценката

$$|f(z)| \leq M_1 (1+|z|)^{2m} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad |z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2, \quad M_1 \leq 2^{\frac{m}{2}} M.$$

Лемата се доказва с помощта на принципа на Фрагмен-Линдельоф, приложен към подходящо дефинирани цяла функция на една комплексна променлива.

Лема 3. Нека $f(z) \in E^n_\sigma$ и нека е в сила неравенството

$$\int_{R^n} |f(x)|dx < \infty.$$

Тогава $f(z)$ е ограничена върху R^n_x.

В доказателство се използва лема 2 и формулата на Коши.

Следващата теорема обединява съдържанието на теорема 2 и теорема 3 от текста.

Теорема. Нека $f(z) \in E^n_\sigma$, $\sigma < \pi$. В такъв случай неравенството

$$/1/ \qquad \int_{R^n} |f(x)| dx < \infty$$

е валидно тогава и само тогава, когато $f(z)$ има вида

$$f(z)=\int\limits_{R^n} e^{-i(z,t)}g(t)dt,$$

където $g(t)$ е непрекъсната функция, която се анулира тъждествено извън кълбото $|t|\leq \sigma$ и се разлага в абсолютно сходящ ред на Фурие, т.е.

$$/5/ \quad g(t)=\sum_{\nu\in Z} a_\nu e^{-i(\nu,t)}, \qquad \text{където } \sum_{\nu\in Z}|a_\nu|<\infty.$$

/Тук и оттук нататък Z означава решетката на реалните вектори $\nu=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ с цели координати./

За $n = 1$ тази теорема е била доказана от Винер [10] /достатъчност/ и Боаз [11] /необходимост/.

Забележка. Условието $\sigma<\pi$ е наложено за удобство при формулировката и има характер на нормировка. Случаят $\sigma\geq\pi$ се свежда към вече разгледания с помощта на смяната $w=\frac{\lambda}{\sigma}z$, където $0<\lambda<\pi$. Тогава обаче видът на развитието /5/ е по-сложен.

Теорема 4. Нека $f(z)\in E_\sigma^n$ и нека условието

$$/6/ \quad \int\limits_{R^n}|f(x)|^p dx<\infty, \quad 1<p\leq 2$$

е налице. Тогава $f(z)$ има вида

$$/7/ \quad f(z)=\int\limits_{R^n} e^{-i(z,t)}g(t)dt,$$

където $g(t)\in L_q(R^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\operatorname{supp} g\subset\{t: |t|\leq\sigma\}$.

Теорема 4 е доказана за пръв път от Полиа и順 Планшерел [2]. Доказателството в текста е значително по-просто от първоначалното и се основава на други съображения. При $p = 2$ теорема 4 съвпада със съществената част от класическата теорема на Винер и Пели [1].

Последната твърди още, че ако $f(z)$ има вида /7/, където $g(t)$ удовлетворява направените предположения с $q=2$, то $f(z)\in E^n_\sigma$ и /6/ е в сила с $p=2$. Това обаче е очевидно.

Теорема на Винер-Пели-Шварц. /В текста теорема на ВПШ./ Нека $f(z)\in E^n_\sigma$ и нека $f(x)=O(|x|^m)$ при $|x|\to\infty$, x - реално. Тогава $f(z)$ е трансформация на Фурие на някакво разпределение от $\mathcal{E}'(R^n)$, носителят на което се съдържа в сферата $|t|\leq\sigma$.

Доказателство. Според лема 2 имаме

$$|f(z)|\leq M(1+|z|)^{2m}e^{\sigma|\operatorname{Im} z|},$$

след което доказателството приключва, както в [5], гл.1.

Теорема 5. Нека, както по-горе, Z да бъде решетката на реалните вектори $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n)$ с цели координати и нека Π_ν е кубът, дефиниран с неравенствата $\nu_j\leq x_j\leq\nu_j+1$, $j=1,2,\dots,n$. Ако $f(z)\in E^n_\sigma$, $\sigma<\pi$ то неравенствата

$$\text{a/}\quad\Big(\sum_{\nu\in Z}|f(\nu)|^p\Big)^{1/p}\leq C_1\Big(\int_{R^n}|f(x)|^p dx\Big)^{1/p},\ p\geq 1$$

$$\text{б/}\quad\Big(\int_{R^n}|f(x)|^p dx\Big)^{1/p}\leq C_2\Big(\sum_{\nu\in Z}|f(\nu)|^p\Big)^{1/p},\ p\geq 1$$

и

$$\text{c/}\quad\Big(\sum_{\nu\in Z}\max|f(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq C_3\Big(\sum_{\nu\in Z}|f(\nu)|^p\Big)^{1/p},\ p\geq 1$$

са еквивалентни. Константите C_k, $k=1,2,3$ зависят само от σ.

И тук нормировката $\sigma<\pi$ е направена за удобство.

И тази теорема принадлежи на Полиа иИраншерел [2]. Тяхното доказателство е твърде дълго и не използва трансформацията на Фурие. Формулировката, дадена по-горе, и доказателството в текста са по-близки до тези на Винер [10, гл.2, лема 6], които разглежда частният случай $n = 1$, $p = 1$ и се ограничава с изследването на цели функции, които по предположение са фуриерови трансформации на непрекъснати функции с компактен носител. Доказателството в текста съществено използва теоремата на Винер-Пели-Шварц.

Теорема 5 има многобройни следствия, някои от които са останали незабелязани досега. Едно от тях ще формулираме като

Теорема 6. Нека $f(z)$ е функция от експоненциален тип σ, $\sigma < \pi$. В такъв случай $f(z) \in L_p(R^n_x)$, $p \geq 1$ тогава и само тогава, когато тя е трансформация на Фурие на някакво разпределение $u \in \mathcal{E}'(R^n)$ с носител в кълбото $|t| \leq \sigma$, за което е в сила оценката

$$|u(\varphi)| \leq C\Big(\sum_{\nu\in Z} |\tilde{\varphi}(\nu)|^q\Big)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

за всяко $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathcal{D})$, където $\mathcal{D}$ е кълбото $|t| < \pi$.

В частност, $f(z)$ е ограничена върху R^n_x тогава и само тогава, когато u удовлетворява ~~оценката~~ неравенството

$$/8/ \quad |u(\varphi)| \leq C \sum_{\nu\in Z} |\tilde{\varphi}(\nu)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{D}).$$

Да отбележим, че $\tilde{\varphi}(\nu)$ не е нищо друго освен ν-тия коефициент на $\varphi(t)$ в развитието

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\nu\in Z} a_\nu e^{i(\nu,t)}$$

Казаното дотук предизвиква следния естествен въпрос: Според ~~, където~~ теоремата на Винер-Пели-Шварц за да бъде една функция от експоненционен тип σ, ограничена върху R^n_x е достатъчно тя да бъде трансформация на Фурие на някакво разпределение $u \in \mathcal{E}'(R^n)$, $\operatorname{supp} u \subset \{t : |t| \leq \sigma\}$, за което важи оценката

$$/9/ \qquad |u(\varphi)| \leq C \max_{|t|\leq\sigma} |\varphi|, \quad \varphi \in C^\infty(R^n),$$

но според теорема 6 това не е необходимо. Пита се как изглеждат фуриеровите трансформации на разпределенията, удовлетворяващи /9/. Отговорът на този въпрос се дава със следната

Теорема 7. Една цяла функция от експоненциален тип σ е трансформация на Фурие на разпределение, удовлетворяващо /9/, тогава и само тогава, когато има вида

$$/10/ \qquad f(z) = \int_{S_\sigma} e^{-i(z,t)} \mu(dt), \quad S_\sigma : |t| \leq \sigma$$

където $\mu(dt)$ е регулярна, изброимо адитивна мярка, дефинирана в $S_\sigma = \{t : |t| \leq \sigma\}$.

Теорема 7 следва веднага от теоремата на Рис за линейните функционали, дефинирани в линейното пространство на непрекъснатите функции в даден компакт [12, стр.288], но въпреки това дава отговор на един въпрос, който, доколкото ни е известно, досега оставаше открит.[1)]

От теоремата на Винер и Пели следва непосредствено, че функциите от вида /10/ са навсякъде гъсто в B_σ^n - обстоятелство, което играе решаваща роля при изследването на много екстремални задачи. Теорема 7 ни позволява да твърдим, че функциите от B_σ^n, които не могат да се представят във вида /10/ са също навсякъде гъсто в B_σ^n /има се пред вид равномерната сходимост върху компактните подмножества на C^n/

Освен казаното дотук, в глава първа се дават различни отговори на въпроса как да характеризираме, при сравнително слаби пред-

1) Именно на въпроса, за кои функции от B_σ е в сила (10).

положения, полиномите измежду всички цели функции от експоненциален тип. Този въпрос, специално или мимоходом, е бил разискван от много автори. Например Бернщайн [13] показа, че една функция $f(z)\in E_0^1$ може да бъде ограничена върху реалната ос само когато е константа; Зигел [14] установи, че от $f(z)\in E_0^n \cap L_1(R_x^n)$ следва $f(z)\equiv 0$. Същият резултат при предположение, че $f(z)\in E_0^n\cap L_p(R_x^n), 1<p\leq 2$ се дължи на Полиа иЕраншерел [2]. Накрая Боаз [11] доказа, че ако $f(z)\in E_0^1$ и $\varphi(t)$ е неотрицателна, строго растяща и изпъкнала в интервала $t\geq 0$, интегралът $\int_0^\infty \varphi(|f(x)|)dx$ е сходящ само в случай, че $f(z)$ се анулира тъждествено. Същият автор установи [11], че ако $f(z)\in E_0^1$ и за някакво естествено n $\frac{f(x)}{(1+|x|)^n}\in L_p(R^1), p\geq 1$, то $f(z)$ е полином.

Към разглеждания кръг въпроси спада и следната задача, поставена от Полиа в Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung: ако $f(z)\in E_0^1$ и е ограничена в точките $z=n$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ да се докаже, че тя е константа. Тази задача предизвиква забележим интерес и бива решена по едно и също време и независимо един от друг от няколко математици в това число и от Винер и Пели [1], Сегьо [16] и Чакалов [15][1] с помощта на различни методи. От съвременно гледище най-интересен е методът на Чакалов, водещ непосредствено до една важна теорема на Картрайт [4, стр.180], която за съжаление Чакалов не забеляза.

С помощта на разсъжденията, с които се установяват лема 2 и лема 3, ние доказваме няколко теореми, които характеризират поли-

---

[1]Интересно е да се отбележи, че теоремата е била открита и доказана от Валирон десетина години преди това, но е останала незабелязана.

номите измежду всички функции от експоненциален тип. От тях ще отбележим следните:

Теорема 1. Ако $f(z) \in E_0^n$ и за някакви $p \geq 1$ и $m \geq 0$ имаме

$$\int_{R^n} \frac{|f(x)|^p}{(1+|x|)^m} dx < \infty ,$$

$f(z)$ е полином. /Ако m е равно на нула и $f(z)$ е тъждествено равна на нула./ В едномерния случай, както видяхме, това е теорема на Боаз [11], но нашето доказателство е значително по-просто.

Теорема 8. /Вж. § 2/. Ако $f(z) \in E_\sigma^n$, $\sigma < \pi$ и ако за $\nu \in Z$ е в сила неравенството $|f(\nu)| \leq M(1+|\nu|)^\alpha$, $\alpha \geq 0$, то за $x \in R^n$ е в сила оценката

$$|f(x)| \leq CM(1+|x|^\alpha).$$

Следствие 1. Ако $f(z) \in E_0^n$ и ако за $\nu \in Z$ имаме $|f(\nu)| \leq M(1+|\nu|^\alpha)$, то $f(z)$ е полином.

/В този случай методите на Винер и Пели [1], на Сегьо [15] и Чакалов [15] са неприложими./

Следствие 2. Ако $f(z) \in E_\sigma^n$, $\sigma < \pi$ и ако за $\nu \in Z$ имаме $f(\nu) = O(|\nu|^\alpha)$, $f(i\nu) = O(|\nu|^\alpha)$, то $f(z)$ е полином.

Разглеждайки функции от E_σ^1 Джоин [16] доказа следната

Теорема. Ако $f(z) \in E_\sigma^1$ и за θ_j, $j = 1, 2, 3$, имаме $\int_0^\infty |f(re^{i\theta_j})| dr < \infty$ където $0 < \theta_{j+1} - \theta_j < \pi$, $j = 1,2,3$, $\theta_4 = \theta_1 + 2\pi$, то $f(z) \equiv 0$

С нашия метод установихме нещо повече.

Теорема. Ако $f(z) \in E_\sigma^1$ и функциите

$$g_j(r) = \int_0^r \frac{f(te^{i\theta_j})}{t^\alpha} dt, \quad 1 \leq t \leq r, \quad \alpha \geq 0, \quad j = 1,2,3$$

$$0 < \theta_{j+1} - \theta_j < \pi, \quad \theta_4 = \theta_1 + 2\pi$$

са ограничени в интервала $[1, \infty)$, то $f(z)$ е полином.

В § 3 на глава първа, използвайки отново теоремата на Винер-Пели-Шварц, доказваме няколко неравенства от типа на Кореваар [17] и Николский [18], подобрявайки някои резултати на последния. Нашите разсъждения се основават на следната лема, която играе съществена роля и при доказателството на теорема 5, формулирана по-горе.

Лема 6. Нека $f(z) \in E_\sigma^n$ и нека върху R_x^n имаме $f(x) = O(|x|^m)$ за $|x| \to \infty$. В такъв случай е в сила равенството

/11/ $$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{h}(z-t) f(t) dt,$$

където $h(t) \in C_0^\infty(R^n)$ и $h(t) = 1$ в някаква околност на кълбото $|t| \leq \sigma$.

Тази лема е следствие от теоремата на Винер-Пели-Шварц.

Прилагайки към /11/ неравенството на Хьолдер или ... една негова модификация, ние получаваме неравенствата, за които споменахме.

Тук за краткост ще се ограничим със случая $n = 1$.

Да означим с $\mathfrak{M}$ множеството на функциите от $C_0^\infty(R^1)$, които са тъждествено равни на единица в някаква околност на интервала $[-\sigma, \sigma]$ /Тя може да бъде различна за различните функции./ Ако $f(z) \in E_\sigma^1 \cap L_p(R^1)$, $p \geq 1$, прилагайки /11/ в случая $n = 1$, получаваме

/12/ $$|f(x+iy)| \leq \frac{1}{2\pi} A_q(y) \|f(x)\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

където $$A_q(y) = \inf_{\mathfrak{M}} \|\hat{h}(x+iy)\|_q$$

В случая $p > 1$, апроксимирайки характеристичната функция на интервала $[-\sigma, \sigma]$ с функции от $\mathfrak{M}$, от /12/ получаваме

$$/13/ \quad |f(x+iy)| \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma(x+iy)}{x+iy}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \|f(x)\|_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \ q>1,$$

откъдето, оставяйки q да клони към безкрайност, намираме неравенството на Кореваар

$$|f(x+iy)| \leq \frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sh}\sigma y}{y}\,\|f(x)\|_1.$$

По-нататък, предполагайки $q \geq 2$ като оценим интеграла в /13/ с помощта на неравенството на Хаусдорф-Юнг, получаваме

$$|f(x+iy)| \leq \left(\frac{\operatorname{sh}\sigma p y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

резултат, който също се дължи на Кореваар [17].

По същия начин от /11/, използвайки един вариант на неравенството на Хьолдер, получаваме

$$\|f(x+iy)\|_r \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma(x+iy)}{x+iy}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \|f(x)\|_p,$$

където $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1, \ q>1, \ p>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1.$

Оттук, прилагайки неравенството на Хаусдорф-Юнг за $1<p\leq 2$ $\frac{1}{r}\leq\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$ намираме

$$\|f(x+iy)\|_r \leq \left(\frac{\operatorname{sh}\sigma q' y}{\pi q' y}\right)^{\frac{1}{q'}} \|f(x)\|_p, \quad \frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\geq\frac{1}{2},$$

което е по-точно от някои неравенства на Николский [18]. /Вж. също [4] стр. 102./

Накрая ще отбележим, че от /11/ следват и нови неравенства.

Например неравенството

$$\|f^{(m)}(x)\|_r \leq \left(\frac{\sigma^{mq'+1}}{(mq'+1)\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \|f(x)\|_p\,, \quad \frac{1}{q'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\geq\frac{1}{2}$$

се получава след предварително диференциране. По-общо, от /11/ следва оценката

$$\|f^{(m)}(x+iy)\|_r \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{q'}}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{mq'}e^{q'yt}\,dt\right)^{\frac{1}{q'}}\|f(x)\|_p\,, \frac{1}{q'}\geq\frac{1}{2}$$

която при $m=1,\ p=1,\ r=\infty$ взема вида

$$|f'(x+iy)| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma\,\mathrm{sh}\,\sigma y}{y}+\frac{1-\mathrm{ch}\,\sigma y}{y^2}\right)\|f(x)\|_1.$$

<u>Съдържание на глава втора.</u> Втората част на тази работа е посветена на някои екстремални въпроси - т.е. на намирането на точни неравенства, валидни за всички функции от дадена класа. Тази терминология води началото си от изследванията на С.Н.Бернщайн, който е използвал вариационни методи. Очевидно е, че всяко точно неравенство е свързано с подходяща вариационна задача. В цялата глава се разглеждат само функции от експоненциален тип на една комплексна променлива, като специално внимание е отделено на тригонометричните полиноми.

Прототип на всички разглеждани въпроси е следното знаменито неравенство на Бернщайн [19]: ако $f(z)$ е функция от експоненциален тип σ и $\sup\limits_{R^1}|f(x)|=M<\infty$, то върху реалната ос имаме

/14/ $\qquad |f'(x)|\leq\sigma M.$

Както показва например функцията $f(z)=\sin\sigma z$, неравенството на Бернщайн е точно. В текста са дадени няколко обобщения на /14/.

Неравенството на Бернщайн може да се изкаже по следния начин: ако $f(z) \in E^1_\sigma$ и върху реалната ос е в сила неравенството $|f(x)| \leq M|e^{-i\sigma x}|$, то за същите стойности на x имаме $|f'(x)| \leq M|(e^{-i\sigma x})'|$. Естествен е стремежът да се намерят всички функции, които могат да заместят $e^{-i\sigma x}$. След като е бил изследван от Бернщайн [20] и Ахиезер [21], този въпрос е бил решен окончателно от Левин [22], който показва, че неравенството $|f'(x)| \leq |\omega'(x)|$ следва от неравенството $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ тогава и само тогава, когато $\omega(x)$ е "мажоранта".

Дефиниция. Функцията $\omega(z) \in E^1_\sigma$ се нарича мажоранта, когато не се анулира в полуравнината $\Im m z > 0$ и удовлетворява неравенството

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln|\omega(iy)|}{y} \geq \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln|\omega(-iy)|}{y}. \tag{15}$$

За нас е важно да отбележим, че в случая, когато $\omega(z)$ е тригонометричен полином от n-ти ред, т.е.

$\omega(z) = \sum_{-n}^{n} a_\nu e^{i\nu z}$, условието /15/ е равносилно с неравенството $a_{-n} \neq 0$.

След като разполагаме с понятието мажоранта, естествено е да си поставим за задача да характеризираме линейните оператори $\lambda: E^1_\sigma \to E^1_\sigma$, които запазват неравенствата, т.е. притежават свойството, че от $|f(x)| \leq |\omega(x)|$, $-\infty < x < \infty$ следва неравенството $|\lambda(f)(x)| \leq |\lambda(\omega)(x)|$, $-\infty < x < \infty$. Такива оператори ще наричаме <u>монотонни</u>.

Този въпрос е бил изследван от Левин [22], който описва всички линейни оператори, които трансформират $E = \bigcup_{\sigma=0}^{\infty} E^1_\sigma$ в E и са монотонни, но в общия случай неговите условия нямат ексилицитен характер.

В тази работа са намерени линейни оператори, които са монотонни в класата на тригонометричните полиноми от ред ненадминаващ ~~метричните полиноми от ред ненадминаващ~~ произволно фиксирано число, които, разгледани като оператори, действуващи от E в E не са монотонни, и които имат нетривиални приложения. Именно по този начин обобщаваме неравенството на Бернщайн.

~~През~~ В цялата глава си служим с един метод на Де Брьойн [23], на който придаваме форма на теорема.

Теорема. Нека K е затворено точково множество в комплексната равнина C и нека $\mathfrak{M}$ е комплексно линейно пространство от мероморфни функции с полюси в K [1]. Нека $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ се състои от функции, които не се анулират извън K, а $L : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ е линеен оператор. В такъв случай неравенството

$$|L(f)(z)| \le |L(g)(z)|, \quad z \in C \setminus K, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad g \in \mathfrak{M}$$

е следствие от неравенството

$$|f(z)| \le |g(z)|, \quad z \in C \setminus K$$

тогава и само тогава, когато $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$

Доказателството на тази теорема е тривиално. По-главните резултати, които получихме с нейна помощ, са следните.

Теорема 11[2]. Нека $f(z)$ е алгебричен полином с реални коефициенти, чиито корени лежат в областта, дефинирана с неравенството

$$y^2 \le \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2}, \quad (z = x + iy)$$

---

[1]Разбира се, елементите на $\mathfrak{M}$ не са длъжни обезателно да имат полюси. В повечето приложения те са полиноми.

[2]Номерациите на формулите и теоремите в отделните глави не зависят една от друга.

Нека по-нататък $S(\theta)$ и $T(\theta)$ са тригонометрични полиноми от ред, ненадминаващ n и полиномът $T(\theta)=\sum_{-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}$, $a_{-n}\neq 0$ не се анулира в полуравнината H : $\operatorname{Im}\theta\geq 0$ /т.е. $T(\theta)$ е мажоранта./ В такъв случай, ако върху реалната ос е в сила неравенството $|S(\theta)|<|T(\theta)|$ то в H имаме

/16/ $$\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|<\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)T(\theta)\right|$$

/т.е. операторът $L(g)=f\left(\frac{d}{d\theta}\right)g$ е монотонен в класата на тригонометричните полиноми от ред $\leq n$ /

В случая, когато $f(z)$ е с реални корени, а $T(\theta)$ има вида $T(\theta)=Me^{-in\theta}$, от /16/ се получава обобщение на /14/, което принадлежи на самия Бернщайн [20]. В случая, когато $f(z)$ е произволен полином, удовлетворяващ изискванията на теоремата, и $T(\theta)=Me^{-in\theta}$, получаваме неравенството

/17/ $$\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|\leq|f(in)|M\text{, където }M=\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}|S(\theta)|,$$

доказано за пръв път от Дочев [24] [46]. По нататък доказваме и L_p аналога на /17/, т.е. неравенството

/18/ $$\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leq|f(in)|\left(\int_0^{2\pi}|S(\theta)|^p d\theta\right)^{1/p},\ p\geq 1,$$

което също е точно.

От /16/ произтича и следният аналог на класическата теорема на Гаус-Люка:

Теорема. Ако нулите на $T(\theta)=\sum_{-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}$, $a_n a_{-n}\neq 0$ се съдържат в някакво изпъкнало и затворено множество $\mathcal{D}$, то и нулите на неговата производна се съдържат в същото множество. При това една нула на $T'(\theta)$, която не е нула на $T(\theta)$, може да лежи върху границата на $\mathcal{D}$ само, когато $\mathcal{D}$ е права и всички нули на $T(\theta)$ лежат върху нея.

В текста са дадени няколко доказателства на първото твърдение в теоремата. Второто твърдение се получава въз основа на една непубликувана бележка на Чакалов /вж. [25], задача 43/. Впоследствие установихме, че аналогично твърдение е публикувано от Обрешков [26], чието доказателство се различава от това на Чакалов.

През 1933 година Обрешков [27] получи следното обобщение на теоремата на Гаус-Люка:

Ако $f(z)$ е полином с нули в дадена ивица Ω и h е комплексно число с радиус вектор перпендикулярен на контурните прави на Ω, то и нулите на полинома $f(z+h)+\gamma f(z-h)$, $|\gamma|=1$ лёжат в Ω.

Изхождайки от тази теорема с помощта на метода на Де Бръойн, доказахме следната

Теорема 13. Нека $S(\theta)$ и $T(\theta)$ са тригонометрични полиноми от ред не подминаващ n и нека $T(\theta)$ е мажоранта. Тогава, ако неравенството $|S(\theta)| < |T(\theta)|$ е в сила за всички реални стойности на θ, в полуравнината $H: \operatorname{Im}\theta \geq 0$ имаме

/19/ $$|S(\theta+\lambda i)-\tau S(\theta-\mu i)| < |T(\theta+\lambda i)-\tau T(\theta-\mu i)|,$$

където $0 \leq \mu \leq \lambda$, $\lambda \neq 0$, $|\tau| \leq \left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\mu}{2}}\right)^{2n}$

т.е. операторът $S(\theta) \to S(\theta+\lambda i)-\tau S(\theta-\mu i)$, действуващ в линейното пространство на тригонометричните полиноми от ред $\leq n$, е монотонен. /Като оператор, действуващ от E в E, той не е монотонен.

От /19/ с граничен преход се получават неравенства за произволни цели функции от експоненциален тип, ограничени върху реалната ос.

Ще изброим някои от тях.

1. Нека $f(z) \in E_\sigma^1$ и върху реалната ос имаме $|f(x)| \leq M$. Тогава е в сила неравенството

$$/20/ \quad |e^{-i\omega} f(z+\lambda i) + e^{i\omega} f(z-\mu i)| \leq M |e^{-i\omega} e^{-i\sigma(z+\lambda i)} + e^{i\omega} e^{-i\sigma(z-\mu i)}|$$

$0 \leq \mu \leq \lambda, \quad \Im m\, z \geq 0, \qquad \omega$ - реално

За $\lambda = \mu$ и z реално /20/ се превръща в едно известно неравенство на Боаз [28].

От /20/ на свой ред следва

$$/21/ \quad \left| \frac{f(x+iy) - f(x)}{y} \right| \leq M \frac{e^{\sigma|y|} - 1}{|y|}, \quad y\text{ - реално},$$

което очевидно е обобщение на неравенството на Бернщайн.

2. Ако $f(z)$ удовлетворява предположенията, изброени в 1, в сила е неравенството

$$/22/ \quad \left| \int_{z-\mu i}^{z+\lambda i} f(t)\,dt \right| \leq M \left| \int_{z-\mu i}^{z+\lambda i} e^{-i\sigma t} dt \right|$$

където $0 \leq \mu \leq \lambda, \lambda > 0, \quad \Im m\, z \geq 0.$

От /19/ произтичат следствия и за самите тригонометрични полиноми. Ето три от тях.

1. Ако

$$/23/ \quad T(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \quad a_n a_{-n} \neq 0$$

има нули само в ивицата $a \leq \Im m\,\theta \leq b$ то и полиномът

$$T(\theta+\lambda i)+\gamma T(\theta-\lambda i),\ \lambda>0,\ |\gamma|=1,$$

има нули само във въпросната ивица. Този резултат очевидно е аналогичен на теоремата на Обрешков [27], за която споменахме по-горе.

2. Ако $T(\theta)$ има вида /23/ и притежава нули само в ивицата $a \le \operatorname{Im}\theta \le b$ то полиномът

$$\int_{\theta-\lambda i}^{\theta+\lambda i} T(t)\,dt,\ \lambda>0$$

има нули само в тази ивица.

3. Операторът

$$S(\theta) \longrightarrow \int_{\theta-\mu i}^{\theta+\lambda i} S(t)\,dt,\ 0\le\mu\le\lambda,\ \lambda>0$$

е монотонен в класата на тригонометричните полиноми.

Съществуват L_p аналози на /20/, /21/ и /22/.

<u>Заключителни бележки</u>. Части от тази работа бяха докладвани на семинара по комплексен анализ /април 1973, октомври 1974/, на колоквиума на Българското математическо дружество /март 1974/, на семинара към сектора по реален и функционален анализ /май 1974/, на семинара към сектора по диференциални уравнения /май 1974/ и на юбилейната научна сесия, посветена на тридесетата годишнина от социалистическата революция в България /22 ноември 1974/.

Основните резултати се съдържат в [29] - [34].

Глава първа

ЦЕЛИ ФУНКЦИИ И ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ФУРИЕ

§ 1. Теореми от идейния кръг на Винер и Пели

Доказателствата в този параграф се основават на следните няколко леми.

Лема 1. Нека $f(z) \in E^1_\sigma$ и нека върху реалната ос имаме

/1/ $|f(x)| \leqq M(1+|x|)^m$, където $M \geq 0$ и $m \geq 0$ са константи. Тогава неравенството

/2/ $|f(z)| \leq M_1(1+|z|)^m e^{\sigma|\Im m z|}$, $M_1 = const$, $M_1 \leq 2^{\frac{m}{2}} M$

е в сила за произволно z от комплексната равнина.

В случая $m=0$ тази лема е добре известна [4]. Доказателството в общия случай е аналогично.

Доказателство. Да резгледаме помощната функция

$$f_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{(i+z)^m} e^{(\sigma+2\varepsilon)iz},$$

в полуравнината $\Im m z \geq 0$. Имайки пред вид /1/ и очевидното неравенство $(1+|x|)^2 \leq 2(1+|x|^2)$, веднага заключаваме, че върху реалната ос е в сила оценката

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{M(1+|x|)^m}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \leq 2^{\frac{m}{2}} M = M_1$$

От друга страна, понеже за $z = iy$, $y \geq 0$ имаме

$$|f_\varepsilon(iy)| \leq \frac{A_\varepsilon e^{-(\sigma+2\varepsilon)y} e^{(\sigma+\varepsilon)y}}{(1+y)^m} = A_\varepsilon \frac{e^{-\varepsilon y}}{(1+y)^m} \leq M_2(\varepsilon)$$

където $M_2(\varepsilon) = \sup\limits_{y\geq 0} |f_\varepsilon(iy)| \leq A_\varepsilon$

Функцията $f_\varepsilon(z)$ се оказа ограничена по контура на първи и втори квадрант и следователно, според принципа на Фрагмен-Линдельоф - в цялата полуравнина $\operatorname{Im} z \geq 0$ е в сила неравенството

/3/ $|f_\varepsilon(z)| \leq \max(M_1, M_2(\varepsilon))$.

Както в случая $m=0$, не е трудно да се установи неравенството $M_2(\varepsilon) \leq M_1$. Наистина да допуснем, че $M_2(\varepsilon) > M_1$. Понеже очевидно $\lim\limits_{y\to+\infty} f_\varepsilon(iy) = 0$, съществува $y_0 \geq 0$, за което

$|f(iy_0)| = M_2(\varepsilon)$. Сега обаче неравенствата $M_2(\varepsilon) > M_1$ и /3/ показват, че $f_\varepsilon(z)$ достига максимума в $\operatorname{Im} z \geq 0$ във вътрешна така от тази полуравнина, което е възможно само в случай, че е константа. Тогава обаче имаме $M_2(\varepsilon) \leq M_1$ и полученото противоречие доказва неравенството $M_2(\varepsilon) \leq M_1$. По такъв начин получихме оценката

/4/ $|f_\varepsilon(z)| \leq M_1$ за $\operatorname{Im} z \geq 0$ т.е.

/5/ $|f(z)| \leq M_1 (1+|z|)^m e^{(\sigma+2\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Оттук, извършвайки граничния преход $\varepsilon \to 0$, получаваме /2/ за $\operatorname{Im} z \geq 0$. За да докажем това неравенство и в точките от полуравнината $\operatorname{Im} z \leq 0$ разглеждаме помощната функция

$(z-i)^{-m} e^{-(\sigma+\varepsilon)iz} f(z)$ и разсъждаваме по същия начин.

Лема 1 е доказана.

Лема 2. Нека $f(z) \in E^n_\sigma$ и нека върху R^n_x е в сила неравенството

/6/ $|f(x)| \leq M(1+|x|)^m$, $|x|^2 = \sum\limits_{j=1}^n x_j^2$, $M \geq 0$, $m \geq 0$.

Тогава в C^n имаме

$$|f(z)| \leq M_1(1+|z|)^{2m} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad M_1 \leq 2^{\frac{m}{2}} M.$$

/7/

Лема 2 е по-груба от лема 1, но за нашите цели е напълно достатъчна.

Доказателство. Нека $z_0 = x_0 + iy_0$ е произволна точка от C^n и нека ортогоналната матрица B е така избрана, че да имаме равенство от вида $B^{-1}y_0 = (h, 0, 0, \ldots, 0)$. Това е възможно, защото ортогоналната група действува транзитивно върху сферите с център началото. Да положим $B^{-1}z_0 = \zeta_0$. Благодарение на този избор на B имаме $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$, където $\eta_0 = (h, 0, 0, \ldots, 0)$. Да разгледаме вектора $\zeta = (\tau, \xi_{20}, \ldots, \xi_{n0})$, където $\xi_{k0}, k = 2, 3, \ldots, n$ са съответните компоненти на ξ_0, а τ е независима комплексна променлива. Прилагайки лема 1 към функцията $g(\tau) = f(B\zeta)$ получаваме

$$|g(\tau)| \leq C_{z_0}(1+|\tau|)^m e^{\sigma|\operatorname{Im}\tau|}, \text{ където } C_{z_0} \leq 2^{\frac{m}{2}} \sup_{R^1} \frac{|g(\tau)|}{(1+|\tau|)^m}$$

е константа, евентуално зависеща от z_0. По-нататък с помощта на неравенствата

$$\sup_{R^1} \frac{|g(\tau)|}{(1+|\tau|)^m} \leq \sup_{\zeta \in R^n} \frac{|f(B\zeta)|}{(1+|B\zeta|)^m} \sup_{\tau \in R^1} \frac{(1+|B\zeta|)^m}{(1+|\tau|)^m}$$

и

$$\frac{1+|B\zeta|}{1+|\tau|} = \frac{1+|\zeta|}{1+|\tau|} \leq \frac{1+|\tau| + \left(\sum_{k=2}^{n} \xi_{k0}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1+|\tau|} \leq 1 + |\zeta_0| = 1 + |z_0|$$

получаваме

$$|g(\tau)| \leq M_1(1+|z_0|)^m (1+|\tau|)^m e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$$

откъдето за $\tau_0 = \xi_{10} + ih$ намираме

$$|f(z_0)| \le M_1 (1+|z_0|)^{2m} e^{\sigma |\Im z_0|},$$

понеже матрицата B беше така избрана, че $|\tau_0| \le |\zeta_0| = |z_0|$ и $|\Im \tau_0| = |\Im z_0|$.

Тъй като z_0 беше произволно, лема 2 е доказана.

В следващото изложение ще бъде полезен и следният вариант на тази лема.

Лема 2'. Нека $\mathcal{D}$ е областта $\Im z_j > 0,\ j = 1, 2, \dots n$ и нека $f(z)$ е холоморфна в $\mathcal{D}$ и непрекъсната в $\overline{\mathcal{D}}$. Нека освен това са в сила неравенствата

$$|f(z)| \le A_\varepsilon e^{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|z_j|}, \quad z \in \mathcal{D},\ \varepsilon > 0,\ \sigma_j \ge 0$$

и

$$|f(x)| \le M \prod_{j=1}^{n} (1+|x_j|)^m, \quad m \ge 0,\ x \in R^n$$

В такъв случай в $\overline{\mathcal{D}}$ е в сила оценката

$$/8/ \qquad |f(z)| \le C \prod_{j=1}^{n} (1+|z_j|)^m e^{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j |\Im z_j|},$$

където C е константа, зависеща само от M и m.

Лема 2' се доказва чрез последователно прилагане на лема 1 към функцията $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ разглеждана най-напред като функция на z_1 /при фиксирани $z_2, z_3, \dots, z_n$ после на z_2 и т.н.

Следващата лема ни дава неравенството от Бернщайнов тип, за което споменахме в увода.

Лема 3. Нека $f(z) \in E_\sigma^n$ и нека $\int_{R^n} |f(x)| dx < \infty$. Тогава $f(z)$ е ограничена върху R_x^n.

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$F(z)=\int_0^{z_1}\int_0^{z_2}\dots\int_0^{z_n} f(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_1 d\zeta_2\dots d\zeta_n,$$

която очевидно също принадлежи на E^n_σ. Понеже имаме

$$|F(x)|\le\int_0^{|x_1|}\int_0^{|x_2|}\dots\int_0^{|x_n|}|f(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)|\,d\zeta_1\dots d\zeta_n\le\int_{R^n}|f(\zeta)|\,d\zeta<\infty,$$

$F(z)$ е ограничена върху R^n_x. Да положим $M=\sup|F(x)|,\ x\in R^n$ и нека $x_0=(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ е произволна точка от R^n_x. Използувайки формулата на Коши

$$f(x_0)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|z_j-x_{j0}|=r}\frac{F(z_1,z_2,\dots,z_n)\,dz_1\dots dz_n}{(z_1-x_{10})^2\dots(z_n-x_{n0})^2}$$

и неравенството $|F(z)|\le Me^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$, което ни дава лема 2, незабавно получаваме $|f(x_0)|\le\dfrac{Me^{n\sigma r}}{r^n}$, откъдето, полагайки $r=\dfrac{1}{\sigma}$ намираме $|f(x_0)|\le\sigma^n e^n M$.

С това лема 3 е доказана.

От доказаните леми следват няколко теореми, които ни позволяват /при известни условия/ да различаваме полиномите измежду целите функции от експоненциален тип.

Теорема 1. Нека $f(z)\in E^n_0$ и нека

$$\int_{R^n}\frac{|f(x)|^p}{(1+|x|)^m}\,dx<\infty,\quad p\ge 1.$$

Тогава $f(z)$ е полином.

За $n=1$ теоремата е доказана от Боаз [11].

Доказателство. Имайки пред вид неравенството на Хьолдер, без ограничение на общността, можем да предположим, че $p=1$. Да разгледаме функцията

$$G(z)=\int_0^{z_1}\ldots\int_0^{z_n} g(\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)\,d\zeta_1\ldots d\zeta_n\,,\quad \left(g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n}(z_j+i)^m}\right.,$$

която е от минимален тип в областта $\operatorname{Im} z_j>-1\,,\ j=1,2,\ldots,n$ и е ограничена върху R_x^n. Следователно според лема 2' за $\operatorname{Im} z_j\geq 0$, $j=1,2,\ldots,n$ имаме $|G(z)|\leq C$ /в случая имаме $\sigma=0$!/, откъдето, прилагайки формулата на Коши, точно както при доказателството на лема 3, заключаваме, че функцията $g(z_1+i,z_2+i,\ldots,z_n+i)$ е ограничена върху R_x^n, т.е., че е в сила неравенството

$$|f(x_1+i,x_2+i,\ldots,x_n+i)|\leq C_1\prod_{j=1}^{n}|x_j+2i|^m$$

Сега вече лема 2 /в случая $\sigma=0$ / и теоремата на Лиувил, ни позволяват да твърдим, че $f(z)$ е полином.

Фактически ние доказахме малко повече. Именно в сила е

Теорема 1'. Нека $f(z)\in E_0^n$ и нека $P(z)$ е полином, нулите на които лежат от "едната страна"[1] на R_x^n Ако функцията

$$G(x)=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\ldots\int_0^{x_n} g(t_1,\ldots,t_n)\,dt\,,\quad g(z)=\frac{f(z)}{P(z)}$$

е ограничена в R_x^n /интегрирането се извършва по криви, лежащи в R_x^n /, $f(z)$ е полином.

Наистина $P(z)$ по-предположение няма нули или в областта $\operatorname{Im} z_j\geqslant\delta>0$ или в областта $\operatorname{Im} z\leq-\delta<0$, така, че предните разсъждения са приложими.

Сходна теорема за цели функции на едно комплексно променливо от произволен експоненциален тип е следната:

---

1) точният смисъл на това условие става ясен по-долу.

Теорема /Джаин [16] /. Нека числата $\{\theta_j\}$, $j=1,2,3,4$ удовлетворяват условията

/9/ $\quad 0<\theta_{j+1}-\theta_j<\pi, \; j=1,2,3, \quad \theta_4=\theta_1+2\pi$

и нека $f(z)\in E^1_\sigma, \; \sigma\geq 0$.

Тогава от равенствата

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta_j})|dr<\infty \;, \; j=1,2,3$$

следва, че $f(z)$ се анулира тъждествено.

Тук ще обобщим теоремата на Джаин, като докажем следната

Теорема. Нека $f(z)\in E^1_\sigma, \sigma\geq 0$ и нека числата $\{\theta_j\}$, $j=1,2,3,4$ удовлетворяват /9/. В такъв случай, ако функциите

$$g_j(r)=\left|\int_1^r \frac{f(te^{i\theta_j})}{t^\alpha}dt\right|, \; 1\leq t\leq r, \; \alpha\geq 0, \; j=1,2,3$$

са ограничени в интервала $[1, \infty ,)$, $f(z)$ е полином.

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$F_1(z)=\int_{e^{i\theta_1}}^{z} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt \;,$$

която е холоморфна и от експоненциален тип в областта G_1: $\theta_1-\pi<\arg z<\theta_1+\pi, \; |z|>\frac{1}{2}$. Не е трудно да се убедим, че $|F_1(z)|$ е ограничена върху лъчите $z=re^{i\theta_j}, \; r\geq 1, \; j=1,2,3$. Наистина имаме

$$F_1(re^{i\theta_j})=\int_{e^{i\theta_1}}^{e^{i\theta_j}} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt + \int_{e^{i\theta_j}}^{re^{i\theta_j}} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt \;,$$

където интегралите се пресичат съответно по дъгата от единичната окръжност с краища $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_j}$, която лежи в G_1 и по лъча $1 \le u \le r,\ t = u e^{i\theta_j}$. Понеже очевидно имаме

$$\left| \int_{e^{i\theta_1}}^{re^{i\theta_j}} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt \right| = \left| e^{i(1-\alpha)} g_j(r) \right| \le M_j$$

от /10/ получаваме

$$|F_1(re^{i\theta_j})| \le \left| \int_{e^{i\theta_1}}^{e^{i\theta_j}} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt \right| + M_j \le A_j = const$$

и прилагайки два пъти принципа на Фрагмен-Линдельоф, се убеждаваме, че $F_1(z)$ е ограничена в затворената област

$H_1:\ \theta_3 \le \arg z_1 \le \theta_2 + 2\pi,\ |z| \ge 1.$

Да въведем множеството

$H_1^{\delta}:\ \theta_3 + \delta \le \arg z \le \theta_2 + 2\pi - \delta,\ |z| \ge \dfrac{2}{\sin\delta},$

където $\delta,\ 0 < \delta < \dfrac{\theta_2 - \theta_3 + 2\pi}{2}$ е фиксирано. Веднага се вижда, че щом $z_0 \in H_1^{\delta}$ кръгът $|z - z_0| \le 1$ се съдържа в H_1. Следователно, полагайки $\sup\limits_{H_1} |F_1(z)| = B_1$, с помощта на формулата на Коши получаваме

$$|F_1'(z_0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0^{\alpha}} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=1} \frac{F_1(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \le B_1$$

По същия начин, разглеждайки функциите

$$F_j(z) = \int_{e^{i\theta_j}}^{z} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt,\ j = 2, 3$$

съответно в областите

$$G_j: \theta_j - \pi < \arg z < \theta_j + \pi, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad j = 2,3$$

се убеждаваме, че неравенствата $|f(z)| \le B_j |z|^\alpha$; $j = 2,3$ са в сила съответно в областите

$$H_2^\delta: \theta_1 + \delta \le \arg z \le \theta_3 - \delta, \quad |z| \ge \frac{2}{\sin\delta}, \quad 0 < \delta < \frac{\theta_3 - \theta_1}{2}$$

и

$$H_3^\delta: \quad \theta_2 + \delta \le \arg z \le \theta_1 + 2\pi - \delta, \quad |z| \ge \frac{2}{\sin\delta}, \quad 0 < \delta < \frac{\theta_1 - \theta_3 + 2\pi}{2}$$

След тази констатация да вземем $\delta = \delta_0 > 0$ толкова малко, че да имаме

$$H_1^{\delta_0} \cup H_2^{\delta_0} \cup H_3^{\delta_0} = \left\{ z : |z| \ge \frac{2}{\sin\delta_0} \right\}$$

и да го фиксираме. По този начин за $|z| \ge \frac{2}{\sin\delta_0}$ получихме

$|f(z)| \le B|z|^\alpha$; $B = \max B_j$, $j = 1,2,3$ и следователно според теоремата на Лиувил $f(z)$ е полином.

Следствие. Нека $f(z) \in E_\sigma^1$, $\sigma \ge 0$ и $\{\theta_j\}$ удовлетворяват /9/. Тогава, ако за $p \ge 1$ имаме

$$\int_1^\infty \frac{|f(re^{i\theta_j})|^p}{r^\alpha} dr < \infty, \quad j = 1,2,3, \quad \alpha \ge 0,$$

$f(z)$ е полином.

Обобщения на теоремата на Джаин в друга насока могат да се намерят в [4], стр. 196.

По същия начин се доказва и следната

Теорема. Нека $f(z)$ е цяла функция от ред $\rho > 1$, т.е. нека

$$|f(z)| \le A_\varepsilon e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad z \in C^1$$

и нека за числата $\{\theta_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2\rho^* + 2$, където ρ^* е единственото цяло число, удовлетворяващо неравенството

$p-\frac{1}{2}<p^{*}\leq p+\frac{1}{2}$, имаме

$$0<\theta_{j+1}-\theta_j<\frac{\pi}{p},\ j=1,2,\dots,2p^{*}+2,\ \theta_{2p^{*}+2}=\theta_1+2\pi.$$

В такъв случай, ако функциите

$$g_j(r)=\int_1^r\frac{f(te^{i\theta_j})}{t^{\alpha}}dt,\quad 1\leq t\leq r,\ \alpha\geq 0$$
$$j=1,2,\dots,2p^{*}+1$$

са ограничени в интервала $[1,\infty)$, то $f(z)$ е полином.

Главното приложение на лемите 1 - 3 ще бъде доказателството на няколко теореми от идейния кръг на Винер и Пели. За тази цел обаче трябва да припомним едно добре известно свойство на функциите от $C_0^{\infty}(R^n)$. За удобство при цитирането ще му придадем вид на отделна лема.

Лема 4. Нека $\varphi(t)\in C_0^{\infty}(R^n)$ и нека $\operatorname{supp}\varphi\subset\{t:|t|\leq\sigma\}$. Тогава фуриеровата трансформация

/11/ $$\tilde{\varphi}(z)=\int_{R^n}e^{-i(z,t)}\varphi(t)dt$$

на $\varphi(t)$ е цяла функция от E^n_{σ} и нейната рестрикция върху R^n_x принадлежи на пространството $\mathcal{J}$. Нещо повече за всяко естествено m е в сила оценката

/12/ $$|\tilde{\varphi}(z)|\leq\frac{C_m}{(1+|z|)^m}e^{\sigma|\operatorname{Im}z|}.$$

За да докажем тази лема е достатъчно да умножим /11/ със $z^{\alpha}=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\dots z_n^{\alpha_n}$ и да интегрираме на части.

$\alpha_j\geq m,\ j=1,2,\dots n.$

Ролята на функцията $\hat{\varphi}(z)$ в нашите разсъждения е подобна на ролята на $\frac{\sin z}{z}$ в по-старите работи.

Сега вече можем да докажем

Теорема 2. Нека $f(z) \in E^n_\sigma$ и нека е в сила условието

$$\int_{R^n} |f(x)| dx < \infty.$$

Тогава $f(z)$ има вида

$$f(z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g(t) dt,$$

където $g(t)$ е непрекъсната функция в R^n с носител в кълбото $|t| \leq \sigma$.

Доказателство. С помощта на лемите 2 и 3 заключаваме, че $f(z)$ е ограничена в R^n_x и удовлетворява неравенството

/13/ $$|f(z)| \leq M e^{\sigma |\operatorname{Im} z|}$$

където $M > 0$ е подходяща константа. Да разгледаме функцията

/14/ $$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i(t,x)} f(x) \hat{\varphi}(\varepsilon x)\, dx,$$

където $\varepsilon > 0$ е фиксирано и $\hat{\varphi}(z)$ е фуриеровият образ на някаква функция $\varphi(t) \in C_0^\infty(R^n)$, която удовлетворява условията

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{t : |t| \leq 1\} \quad \text{и} \quad \int_{R^n} \varphi(t) dt = 1$$

Имайки пред вид /12/ /в случая $m = n+1$ / и /13/, получаваме неравенството

/15/ $$|f(z) \hat{\varphi}(\varepsilon z)| \leq \frac{C e^{(\sigma+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}}{(1 + \varepsilon |z|)^{n+1}}$$

където константата C не зависи от ε. Сега вече, използувайки /15/ с помощта на теоремата на Коши, изменяме контура, по който се интегрира в /14/, и намираме

/16/ $$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i(t,x+iy)} f(x+iy)\check{\varphi}(\varepsilon(x+iy))dx$$

за произволен реален вектор y. Нещо повече, от /15/ и /16/ следва оценката

$$|g_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} C\, e^{(\sigma+\varepsilon)|y|-(y,t)} \int_{R^n} \frac{dx}{(1+\varepsilon|x|)^{n+1}}$$

откъдето, полагайки $y = \rho t$, $\rho > 0$ и оставяйки ρ да клони към безкрайност при фиксирано ε, заключаваме, че $g_\varepsilon(t) \equiv 0$ за $|t| > \sigma+\varepsilon$. От друга страна, очевидно е, че при $\varepsilon \to 0$ клони равномерно към непрекъснатата функция $g(t) = (2\pi)^{-n}\check{f}(-t)$ Наистина имаме

$$|g_\varepsilon(t) - g(t)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} |f(x)||\check{\varphi}(\varepsilon x) - 1|\,dx$$

и твърдението следва, понеже $\check{\varphi}(\varepsilon x) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Следователно $g(t)$ е непрекъсната функция с носител в кълбото $|t| \leq \sigma$ Сега вече, извършвайки граничния преход $\varepsilon \to 0$ в равенството

$$\hat{\varphi}(\varepsilon z) f(z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g_\varepsilon(t)\,dt$$

завършваме доказателството на теоремата.

Както отбелязахме в увода, в случая $n=1$ теоремата е доказана от Боаз [11] с помощта на друг метод. В следващия параграф ще подобрим тази теорема, като установим

Теорема 3. Една функция $f(z)$, принадлежаща на $E_\sigma^n \cap L_1(R_x^n)$, $\sigma < \pi$, тогава и само тогава, когато има вида

$$f(z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g(t)\,dt ,$$

където $\operatorname{supp} g \subset \{t : |t| \leq \sigma\}$ и

/17/ $$g(t) = \sum_{Z} a_\nu e^{i(\nu,t)} , \quad \sum_{\nu \in Z} |a_\nu| < \infty ,$$

В случая $n=1$ достатъчността на /17/ е доказана от Винер [10]. Нормировката $\sigma < \pi$, както споменахме в увода, е направена само за удобство при формулировката.

Теорема 4. Нека $f(z) \in E_\sigma^n$ и нека

$$\int_{R^n} |f(x)|^p dx < \infty , \quad 1 < p \leq 2 .$$

Тогава $f(z)$ има вида

/18/ $$f(z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g(t)\,dt ,$$

където $g(t) \in L_q(R^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\operatorname{supp} g \subset \{t : |t| \leq \sigma\}$.

Тази теорема дължим на Планшерел и Полиа [2] за $p<2$ и на Винер и Пели [1] за $p=2$. Доказателството, което следва е много по-просто от оригиналните доказателства.

Доказателство. Както при доказателството на теорема 2, да въведем функцията $f(z)\check{\varphi}(\varepsilon z)$, която очевидно принадлежи на $E_{\sigma+\varepsilon}^n$.

С помощта на неравенството на Хьолдер $\|f\vec{\varphi}\|_1 \le \|f\|_p \|\vec{\varphi}\|_q$ заключаваме, че $f(x)\vec{\varphi}(\varepsilon x) \in L_1(R^n)$ защото $\vec{\varphi}(x) \in L_q(R^n)$ за всяко $q \ge 1$. Следователно според теорема 2 имаме

$$/19/ \quad f(z)\vec{\varphi}(\varepsilon z) = \int_{R^n} e^{-i(z,t)} g_\varepsilon(t)\,dt,$$

където $g_\varepsilon(t)$ е непрекъсната и $\operatorname{supp} g \subset \{t : |t| \le \sigma\}$. От /19/, използвайки формулата за обръщане[1] получаваме

$$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{i(t,x)} f(x)\vec{\varphi}(\varepsilon x)\,dx.$$

Нека сега $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu \to 0$ да бъде произволна редица от положителни числа. Използувайки неравенството на Хаусдорф-Юнг / [9], стр. 381/, намираме

$$\|g_{\varepsilon_\nu}(t) - g_{\varepsilon_\mu}(t)\|_q \le (2\pi)^{-\frac{n}{p}} \|\vec{\varphi}(\varepsilon_\nu x) - \vec{\varphi}(\varepsilon_\mu x)\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

което показва, че $\{g_{\varepsilon_\nu}\}$ е сходяща в L_q към някаква функция $g(t) \in L_q(R^n)$. Понеже имахме $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \{t : |t| \le \sigma + \varepsilon\}$ заключаваме, че $\operatorname{supp} g \subset \{t : |t| \le \sigma\}$ и извършвайки граничния преход $\varepsilon_\nu \to 0$ в /19/, завършваме доказателството.

От доказаната теорема произтичат две важни следствия, които се дължат на Полиа и립шерел [2].[2]

Следствие 1. Ако $f(z) \in E^n_\sigma \cap L_p(R^n_x)$, $p \ge 1$ то в R^n_x имаме $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Доказателство. Ако $1 \le p \le 2$ твърдението следва от /18/ благодарение на лемата на Риман-Лебег. Ако $p > 2$, прилагаме същото разсъждение към $f^{[p]}(z)$, където $[p]$ е цялата част на p.

---

[1] Тя е валидна например, защото $g_\varepsilon \in L_2(R^n)$

[2] В [2] следствие 1 е доказано по съвсем друг начин.

Следствие 2. Ако $f(z)\in E_\sigma^n\cap L_p(R_x^n)$, $p\geq 1$ то $f(z)\in E_\sigma^n\cap L_{p'}(R_x^n)$ за всяко $p'>p$.

Заключението се съдържа в следствие 1.

Забележка. Ако $f(z)$ и $g(t)$ са функциите от теорема 4, в имаме

$$/20/\quad g(t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} e^{i(x,t)}f(x)dx$$

Доказателство. Да въведем функциите

$$\varphi_k(t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|x|\leq k} e^{i(x,t)}f(x)dx\,.$$

Редицата $\{\varphi_k\}$ е сходяща в $L_q(R^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ при $k\to\infty$, защото според неравенството на Хаусдорф-Юнг имаме

$$\|\varphi_k-\varphi_m\|_q\leq(2\pi)^{-\frac{n}{p}}\Big(\int\limits_{k\leq|x|\leq m}|f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

От друга страна, както видяхме $f(x)\in L_2(R^n)$ следователно според теоремата на Планшерел $\|\varphi_k-g\|_2\to 0$

По такъв начин се убедихме, че за някаква поредица почти навсякъде в R^n имаме $g(x)=\lim\limits_{k_\nu\to\infty}\varphi_{k_\nu}(x)$. Тъй като вече знаем, че $\{\varphi_k\}$ е сходяща в $L_q(R^n)$, /20/ е доказано.

Ще приключим този параграф, като покажем, че нашият метод е приложим и към доказателството на следната важна

Теорема на Винер-Пели-Шварц /Теорема на ВПШ/. Нека $f(z)\in E_\sigma^n$ и нека $f(x)=O(|x|^m)$, когато $|x|\to\infty$, $x\in R^n$. Тогава

$f(z)$ е трансформация на Фурие на някакво разпределение от $\mathcal{E}'(R^n)$ с носител в кълбото $|t| \le \sigma$.

Доказателство. Според лема 2 имаме оценка от вида

$$|f(z)| \le M(1+|z|)^{2m} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|},$$

след което доказателството може да се завърши, както в [5].

§ 2. Обобщение на една лема на Винер

Теоремата на Винер-Пели-Шварц е без съмнение централният резултат в теорията на целите функции от експоненциален тип със степенен ръст върху R^n_x и, като всеки такъв резултат, води до директни и сравнително прости доказателства на почти всички теореми в тази област, получени преди нейното откриване. За илюстрация на казаното може да служи доказателството на една основна теорема на Полиа и Планшерел, дадено по-долу.

Теорема 5. Нека Z е решетката от векторите $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in R^n_x$ с цели координати и нека Π_ν е n-мерният куб, дефиниран с неравенствата $\nu_j \le x_j \le \nu_j + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ако $f(z) \in E^n_\sigma$, $\sigma < \pi$ неравенствата

$$\text{a/} \quad \left(\sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p\right)^{1/p} \le C_1 \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad p \ge 1$$

$$\text{b/} \quad \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le C_2 \left(\sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p\right)^{1/p}, \quad p \ge 1$$

и

$$\text{c/} \quad \left(\sum_{\nu \in Z} \max_{\Pi_\nu} |f(x)|^p\right)^{1/p} \le C_3 \left(\sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1$$

са равносилни. Константите C_k, $k=1,2,3$ зависят само от σ.

В случая $n=1$, $p=1$ подобен резултат е установен от Винер [10], гл.2, лема 6/. В общия случай теоремата е доказана от Полиа и Планшерел [7], които разглеждат и случая $0<p<1$ и въобще не използват трансформацията на Фурие. До известна степен нашите разсъждения наподобяват тези на Винер, но разбира се, се опират на теоремата на БПШ.

Отново ще започнем с няколко леми.

Лема 5. Нека $h(t)\in C_0^\infty(R^n)$. Тогава върху R^n_x имаме

$$\sum_{\nu\in Z}|\hat{h}(x-\nu)|\leq M \qquad /21/$$

където M е константа и $\hat{h}$ е фуриеровият образ на $h(t)$.

Доказателство. Според лема 4 имаме $|\hat{h}(x-\nu)|\leq A(1+|x-\nu|)^{-n-1}$. Понеже сумата на /21/ е периодична функция на x, достатъчно е да разгледаме само случая $0\leq x_j\leq 1$, $j=1,2,\dots,n$. Нека Γ_k е множеството на точките с цели координати, лежащи по границата на куба $|x_j|\leq k$, $j=1,2,\dots,n$ и нека $N(k)$ е броят на тези точки. Благодарение на асимптотичното съотношение $N(k)=O(k^{n-1})$, което се проверява индуктивно, получаваме

$$\sum_{\nu\in Z}|\hat{h}(x-\nu)|\leq A\sum_{\nu\in Z}(1+|x-\nu|)^{-n-1}=A\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\Gamma_k}(1+|x-\nu|)^{-n-1}$$

$$\leq AB\sum_{k=0}^{\infty}k^{n-1}(1+k)^{-n-1}<\infty,$$

с което лемата е доказана.

Следващите две леми, макар и непосредствени следствия от теоремата на БПШ, са интересни сами по себе си и могат да бъдат полезни в много случаи.

Лема 6. Нека $f(z)\in E_\sigma^n$ и нека върху R_x^n имаме $f(x)=O(|x|^m)$ при $|x|\to\infty$. Тогава е в сила равенството

/22/ $$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{h}(z-t)f(t)dt,$$

за произволна функция $h(t)\in C_0^\infty(R^n)$, която е тъждествено равна на единица в някаква околност на кълбото $|t|\le\sigma$.

Доказателство. Според теоремата на ВПШ f е трансформация на Фурие на някакво разпределение $u\in\mathcal{E}'(R^n)$ такова, че $\operatorname{supp} u\subset\{t: |t|\le\sigma\}$. Да въведем функцията $\varphi(t)\in C_0^\infty(R^n)$ подчинена на изискванията $\int_{R^n}\varphi(t)dt=1$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{t: |t|\le 1\}$ и да положим $u_\varepsilon=\varepsilon^{-n}u*\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. Както е добре известно / [5], гл.1/ $u_\varepsilon\in C_0^\infty(R^n)$ и $\hat{u}_\varepsilon(x)=f(x)\hat{\varphi}(\varepsilon x)\in\mathcal{J}$. Понеже $\operatorname{supp} u_\varepsilon\subset\{t; |t|\le\sigma+\varepsilon\}$ избирайки $\varepsilon>0$ достатъчно малко, намираме $hu_\varepsilon=u_\varepsilon$, т.е. $\hat{u}_\varepsilon=\widehat{hu_\varepsilon}$, което е равносилно с равенството

/23/ $$\hat{\varphi}(\varepsilon x)f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{h}(x-t)f(t)\hat{\varphi}(\varepsilon t)dt$$

/ [5], теореми 1.7.2 и 1.7.3/. Понеже $\hat{h}(x)\in\mathcal{J}$, можем да извършим граничния преход $\varepsilon\to 0$ в /23/ и да завършим доказателството.

Лема 7. Нека $f(z)\in E_\sigma^n$, $\sigma<\pi$ и нека $f(x)=O(|x|^m)$ когато $|x|\to\infty$, $x\in R^n$. Да означим с Ω куба $|t_j|<\pi$, $j=1,2,\dots,n$. Ако $h(t)\in C_0^\infty(\Omega)$ е такава, че $h(t)\equiv 1$ в някаква ~~област~~ околност на кълбото $|t|\le\sigma$, в сила е тъждеството

/24/ $$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\nu\in Z} f(\nu)\hat{h}(z-\nu)$$

Доказателство. Според теоремата на ВПШ имаме $f=\hat{u}$ където $\operatorname{supp} u \subset \{t: |t|\leq \sigma\}$. Нещо повече, равенството

$$f(z)=u_t\left(e^{-i(z,t)}\right)=u_t\left(h(t)e^{-i(z,t)}\right)$$

е налице / [5] гл.1/. Развивайки функцията $\varphi_z(t)=h(t)e^{-i(z,t)}$ в ред на Фурие, получаваме

$$\varphi_z(t)=\sum_{\nu\in Z} a_\nu e^{-i(\nu,t)}, \text{ където } a_\nu(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_\Omega h(t)e^{-i(z-\nu,t)}dt=\frac{\hat{h}(z-\nu)}{(2\pi)^n}$$

Нека сега $\rho(t)\in C_0^\infty(\Omega)$ и нека $\rho(t)=1$ в някаква околност на $\operatorname{supp} h$. Понеже фуриеровият ред на $\varphi_z(t)$ е равномерно сходящ в Ω заедно с кой да е от редовете, получени от него чрез диференциране, същото е вярно и за редицата

$$S_m(t)=\rho(t)\sum_{|\nu|\leq m} a_\nu(z)e^{-i(\nu,t)}$$

Нещо повече, имаме $\operatorname{supp} S_m\subset\Omega$, така че $\lim\limits_{m\to\infty} u(S_m)=u(\varphi_z(t))$

Понеже, от друга страна,

$$u(S_m)=\sum_{|\nu|\leq m} a_\nu(z)u\left(e^{-i(\nu,t)}\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|\nu|\leq m} f(\nu)\hat{h}(z-\nu)$$

лема 7 е доказана.

Освен тези леми, доказвайки с/, ще имаме нужда и от следната

Теорема на Картрайт. Нека $f(z)\in E^n_\sigma$, $\sigma<\pi$ и нека за $\nu\in Z$ е в сила неравенството $|f(\nu)|\le M$. Тогава върху R^n_x имаме $|f(x)|\le MA$ с константа, зависеща само от σ и n.

В случая $n=1$ няколко доказателства на тази теорема могат да се намерят в [4]. За $n>1$ индуктивното доказателство е непосредствено.

Сега вече можем да пристъпим към доказателството на теорема 5. Благодарение на неравенството

$$\int_{R^n}|f(x)|^p dx=\sum_{\nu\in Z}\int_{\Pi_\nu}|f(x)|^p dx\le\sum_{\nu\in Z}\max_{\Pi_\nu}|f(x)|^p,\quad p\ge 1$$

достатъчно е да докажем само а/ и с/.

Доказателство на а/. Нека $f(x)\in L_p(R^n_x)$, $p>1$. Според следствие 1 от теорема 4 имаме $f(x)\to 0$ когато $|x|\to\infty$, $x\in R^n$ и лема 6 ни дава

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{h}(z-t)f(t)dt$$

Оттук с помощта на неравенството на Хьолдер получаваме

$$|f(\nu)|^p\le\frac{1}{(2\pi)^{np}}\left(\int_{R^n}|h(t)|dt\right)^{\frac{p}{q}}\int_{R^n}|\hat{h}(\nu-t)||f(t)|^p dt$$

$$\le C_1^p\int_{R^n}|\hat{h}(\nu-t)||f(t)|^p dt,\quad \text{където } C_1=\frac{1}{(2\pi)^n}\|\hat{h}\|_1$$

и следователно

$$\sum_{\nu\in Z}|f(\nu)|^p\le C_1^p\sum_{\nu\in Z}\int_{R^n}|\hat{h}(\nu-t)||f(t)|^p dt,$$

което заедно с лема 5 доказва а/.

В случая $p=1$ доказателството е подобно, но още по-просто.

Доказателство на c/. Да положим $M_\mu = \max_{\Pi_\mu} |f(x)|, \mu \in Z$ и нека $x_\mu \in \Pi_\mu$ да бъде точка, за която $|f(x_\mu)| = M_\mu$.

Предполагайки, че $\sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p < \infty$ с помощта на теоремата на Картрайт заключаваме, че $f(z)$ е ограничена върху R^n_x и следователно лема 7 е приложима. Прилагайки лемите 5 и 7, ние получаваме

/25/ $$M_\mu \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\nu \in Z} |f(\nu)| |\hat{h}(x_\mu - \nu)| \leq A_1 \sum_{\nu} |f(\nu)| (1 + |x_\mu - \nu|)^{-n-2}$$

$$\leq A_2 \sum_{\nu} |f(\nu)| (1 + |\mu - \nu|)^{-n-2}$$

откъдето за $p > 1$ с помощта на неравенството на Хьолдер намираме

$$M_\mu^p \leq A_2^p \sum_{\nu} |f(\nu)|^p (1+|\mu-\nu|)^{-n-2} \left(\sum_{\nu} (1+|\mu-\nu|)^{-n-2} \right)^{\frac{p}{q}} \leq A_3^p \sum_{\nu} \frac{|f(\nu)|^p}{(1+|\mu-\nu|)^{n+2}}$$

и следователно

$$\sum_{\mu \in Z} M_\mu^p \leq A_3^p \sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p \sum_{\mu \in Z} (1+|\mu-\nu|)^{-n-2} \leq A_4 A_3^p \sum_{\nu \in Z} |f(\nu)|^p$$

Тъй като в случая $p=1$, твърдението следва веднага от /25/, теорема 5 е доказана. Тя притежава редица следствия, някои от които са останали незабелязани. Едно от тях ще формулираме като

Теорема 6. Нека $f(z) \in E^n_\sigma, \sigma < \pi$. Тогава нейната рестрикция върху R^n_x принадлежи на $L_p(R^n_x)$, $p \geq 1$ тогава и само тогава, когато $f(z)$ е фуриерова трансформация на някакво разпределение $u(t)$ с носител в кълбото $|t| \leq \sigma$, което удовлетворява неравенството

$$/26/ \quad |u(\varphi)| \le C\Big(\sum_{\nu\in Z} |\check{\varphi}(\nu)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

за произволно $\varphi(t)\in C_0^\infty(\mathcal{D})$, където $\mathcal{D}$ е кълбото $|t|<\pi$

В частност $f(z)$ е ограничена върху R_x^n тогава и само тогава, когато е в сила оценката

$$|u(\varphi)| \le C \sum_{\nu\in Z} |\check{\varphi}(\nu)|, \quad \varphi\in C_0^\infty(\mathcal{D}).$$

Понеже $\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{D})$ за $\check{\varphi}(\nu)$ имаме $(2\pi)^n a_\nu$, където е ν-тият коефициент във фуриеровото развитие

$$\varphi(t) = \sum_{\nu\in Z} a_\nu e^{i(\nu,t)}$$

на $\varphi(t)$.

Доказателство. Нека най-напред $f(z)\in E_\sigma^n \cap L_p(R_x^n)$, $\sigma<\pi$, $p\ge 1$. Тогава според следствие 1 от теорема 4 $f(z)$ е ограничена в R_x^n и според теоремата на ВПШ имаме $f=\hat{u}$ където $u\in \mathcal{E}'(R^n)$ и $\operatorname{supp} u\subset\{t: |t|\le\sigma\}$ Нека сега $\varphi(t)\in C_0^\infty(\mathcal{D})$. С помощта на тъждеството / [5], теорема 1.7.3/

$$\int_{R^n} f(x)\check{\varphi}(-x)dx = (2\pi)^n u(\varphi)$$

получаваме

$$|u(\varphi)| \le \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_p \|\check{\varphi}\|_q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

и тъй като според теорема 5 имаме $\|\check{\varphi}\|_q \le C_1\Big(\sum_{\nu\in Z}|\check{\varphi}(\nu)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$

необходимостта на /26/ е доказана.

Нека сега $u(\varphi)$ е разпределение с носител в кълбото $|t|\le\sigma$ което удовлетворява /26/ с някакво $q\ge 1$ В такъв случай, ако $h(t)\in C_0^\infty(D)$ е тъждествено равно на единица в някаква околност на $supp\, u$ за произволно $\varphi\in \mathcal{J}$ получаваме

$$|u(\varphi)| = |u(h\varphi)| \le C\Big(\sum_{\nu\in Z} |\widehat{h\varphi}(\nu)|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le CC_2 \|\widehat{h\varphi}\|_q$$

По-нататък, като вземем пред вид тъждеството $\widehat{\varphi h} = (2\pi)^{-n}\hat{h}*\hat{\varphi}$ и неравенството $\|\hat{h}*\hat{\varphi}\|_q \le \|\hat{h}\|_1 \|\hat{\varphi}\|_q$, $q\ge 1$ получаваме $|u(\varphi)|\le C_3\|\hat{\varphi}\|_q$, което заедно с тъждеството $\hat{u}(\hat{\varphi}(-t)) = (2\pi)^n u(\varphi)$ на свой ред ни дава

$$/27/ \quad \Big|\int_{R^n} f(x)\hat{\varphi}(-x)dx\Big| \le (2\pi)^n C_3 \|\hat{\varphi}\|_q,\ q\ge 1.$$

Понеже трансформацията на Фурие изобразява $\mathcal{J}$ върху $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}$ е навсякъде гъсто в $L_q(R^n)$ от /27/ следва, че $f(x)\in L_p(R^n)$ където $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и доказателството на теорема 6 е завършено.

Теорема 6 поражда следния въпрос: от доказателството [5] на теоремата на ВПШ се вижда, че ако $u(\varphi)$ е разпределение с носител в кълбото $|t|\le\sigma$, за което е в сила оценката

$$/28/ \quad |u(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \max_K |D^\alpha \varphi|$$

където K е някаква компактна околност на $supp\, u$, и $f(z) = u_t(e^{-i(z,t)})$ е фуриеровата трансформация на u, за $f(z)$ имаме $|f(z)|\le C_1(1+|z|)^m e^{\sigma|\Im m\, z|}$.

Следователно в случая $m=0$ функцията $f(z)$ е ограничена в R^n_x. Според теорема 6 обаче това условие не е необходимо. Естествено е да се потърси характеристика на целите функции от B^n_σ

които са фуриерови образи на разпределения, за които е в сила /28/ с $m=0$. Отговор на този въпрос ни дава следната

Теорема 7. Една функция от E_σ^n е трансформация на Фурие на разпределение с носител в кълбото $S_\sigma=\{t: |t|\le\sigma\}$, за което е в сила оценката

/29/ $$|u(\varphi)|\le C\max_{S_\sigma}|\varphi|$$

тогава и само тогава, когато има вида

/30/ $$f(z)=\int_{S_\sigma} e^{-i(z,t)}\mu(dt),$$

където $\mu(dt)$ е регулярна, изброимо адитивна мярка, дефинирана в S_σ.

Доказателство. Да предположим, че $f(z)=u_t(e^{-i(z,t)})$ където $u\in\mathcal{E}'(R^n)$, $\operatorname{supp} u\subset S_\sigma$ и /29/ е налице. Тогава според теоремата на Рис за линейните функционали [12, стр. 288] имаме

$$u(\varphi)=\int_{S_\sigma}\varphi(t)\mu(dt)$$

и следователно

$$f(z)=u_t(e^{-i(z,t)})=\int_{S_\sigma} e^{-i(z,t)}\mu(dt),$$

с което достатъчността на условието /29/ е доказана. Неговата необходимост следва веднага от тривиалната оценка.

$$\left|\int_{S_\sigma}\varphi(t)\mu(dt)\right|\le\max_{S_\sigma}|\varphi|\operatorname{Var}_{S_\sigma}\mu$$

Както е добре известно от теоремата на Винер и Пели лесно следва, че функциите, които имат вида /30/, са навсякъде гъсто в B_σ^n. Теорема 7 ни позволява да твърдим, че и функциите от B_σ^n

които не могат да се представят във вида /30/, имат същото свойство.

Наистина да разгледаме разпределението

$$u_0(\varphi) = \int_{R^n} h(t) \frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) - \varphi(-t_1, t_2, \dots, t_n)}{t_1} dt$$

където $h(t) \in C_0^\infty(S_\sigma)$ е тъждествено равна на единица в кълбото $|t| \le \frac{\sigma}{2}$, $\sigma > 0$. Да положим $z = (z_1, z')$, $t = (t_1, t')$, където съответно

$$z' = (z_2, z_3, \dots, z_n), \quad t' = (t_2, t_3, \dots, t_n).$$

Очевидно е, че функцията

$$/31/ \quad f_0(z) = u_0(e^{-i(z,t)}) = \int_{S_\sigma} h(t) \frac{e^{-ix_1 t_1} - e^{ix_1 t_1}}{t_1} e^{-i(z', t')} dt$$

принадлежи на B_σ^n. Ще покажем обаче, че неравенството /29/ не е в сила. Да допуснем противното и да разгледаме функцията

$\varphi(t) = \psi(t_1)\varphi_0(t')$, където $\psi(t_1) \in C_0^\infty(-\frac{\sigma}{8}, \frac{\sigma}{8})$, а $\varphi_0(t')$ е фиксирана неотрицателна безбройно много пъти диференцируема функция с носител в куба $K_\sigma : |t_j| < \frac{\sigma}{8n}$, $j = 1, 2, \dots, n$, която не се анулира тъждествено. В такъв случай имаме $\varphi(t) \in C_0^\infty(S_{\frac{\sigma}{2}})$ и

$$u_0(\varphi) = \int_{K_\sigma} \varphi_0(t') \left(\int_{-\frac{\sigma}{8}}^{\frac{\sigma}{8}} \frac{\psi(t_1) - \psi(-t_1)}{t_1} dt_1 \right) dt' = A \int_{-\frac{\sigma}{8}}^{\frac{\sigma}{8}} \frac{\psi(t_1) - \psi(-t_1)}{t_1} dt_1$$

където

$$A = \int_{K_\sigma} \varphi_0(t') dt' > 0.$$

Да вземем сега $\psi(t_1)=g_\alpha(t_1)$, където функцията $g_\alpha(t)\in C_0^\infty(-\frac{\sigma}{8},\frac{\sigma}{8})$ е нечетна, неотрицателна в интервала $0\le t_1\le\frac{\sigma}{8}$ и съвпада с t^α, $0<\alpha<1$ в интервала $\frac{\sigma}{16.2^{\frac{1}{\alpha}}}\le t_1\le\frac{\sigma}{16}$. При този избор на $\psi(t_1)$ имаме

$$\int_{-\frac{\sigma}{8}}^{\frac{\sigma}{8}}\frac{\psi(t_1)-\psi(-t_1)}{t_1}dt_1=2\int_0^{\frac{\sigma}{8}}\frac{g_\alpha(t_1)}{t_1}dt_1\ge 2\int_{\frac{\sigma}{16.2^{\frac{1}{\alpha}}}}^{\frac{\sigma}{16}}t_1^{\alpha-1}dt_1=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sigma}{16}\right)^\alpha$$

така че от /29/ получаваме

/32/ $$\frac{A}{\alpha}\left(\frac{\sigma}{16}\right)^\alpha\le C\max_{K_\sigma}|\varphi_0(t')|\max_{|t_1|\le\frac{\sigma}{8}}|g_\alpha(t_1)|.$$

Понеже очевидно можем така да изберем $g_\alpha(t_1)$, че при всяко $0<\alpha<1$ да имаме $|g_\alpha(t)|\le\sigma$ стигаме до противоречие, защото при $\alpha\to 0$ лявата страна на /32/ расте неограничено.

Нека сега $f(z)$ е функция от B_σ^n, която има вида /30/. Тогава функцията $f_\varepsilon(z)=f(z)+\varepsilon f_0(z)$, $\varepsilon>0$ където $f_0(z)$ е въведена с /31/, не може да се представи във вида /30/. Понеже при $\varepsilon\to 0$ $f_\varepsilon(z)\to f(z)$ равномерно върху ограничените подмножества на C^n, твърдението, че функциите от B_σ^n, които не допускат интегралното представяне /30/, са навсякъде гъсто в B_σ^n, е доказано.

След като разполагаме с теорема 5, доказателството на теорема 3 от § 1 се завършва с лекота.

Наистина да разгледаме функцията

$$f(z)=\int_{R^n}e^{-i(z,t)}g(t)dt$$

където $g(t)$ е непрекъсната и с носител в кълбото $|t|\le\sigma$, $\sigma<\pi$. Имайки пред вид теорема 2, § 1, остава да се убедим, че $f(x)\in L_1(R^n)$ тогава и само тогава, когато $g(t)$ има вида

$$g(t)=\sum_{\nu\in Z} a_\nu e^{i(\nu,t)}, \text{ където } \sum_{\nu\in Z}|a_\nu|<\infty$$

Доказателство. Понеже очевидно имаме

$$a_\nu=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{-i(\nu,t)}g(t)dt=\frac{f(\nu)}{(2\pi)^n},$$

твърдението следва моментално от а/ и б/ на теорема 5.

Като последно приложение на теорема 5, ще докажем следната

Теорема 8. Нека $f(z)\in E^n_\sigma$, $\sigma<\pi$ и нека за $\nu\in Z$ е в сила неравенството $|f(\nu)|\leq M(1+|\nu|)^\alpha$, $\alpha\geq 0$. Тогава върху R^n_x имаме $|f(x)|\leq CM(1+|x|)^\alpha$

Доказателство. Нека $x=(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ е фиксирана точка от R^n_x и нека $a=([x_{10}],[x_{20}],\dots,[x_{n0}])$, където $[x_{j0}]$ е цялата част на x_{j0}. По-нататък нека $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ удовлетворява условията $\operatorname{supp}\varphi\subset\{t: |t|\leq 1\}$ и $\int_{R^n}\varphi(t)dt=1$. Да разгледаме

цялата функция $F(z)=f(z)\tilde{\varphi}(\delta(a-z))$, където $\delta>0$ е така избрано, че $\sigma+\delta<\pi$ и за $|z|<n+1$ е в сила неравенството $|\tilde{\varphi}(\delta z)|\geq\frac{1}{2}$. Тъй като според лема 4 имаме

$$|F(\nu)|\leq MC(1+|\nu|)^\alpha(1+|a-\nu|)^{-n-\alpha-2},$$

прилагайки очевидното неравенство $(1+|\nu|)^\alpha\leq(1+|a|)^\alpha(1+|a-\nu|)^\alpha$ за $p>1$ получаваме

$$\Big(\sum_{\nu\in Z}|F(\nu)|^p\Big)^{1/p}\leq MC(1+|a|)^\alpha\Big(\sum_{\nu\in Z}(1+|\nu-a|)^{-(n+2)p}\Big)^{\frac{1}{p}}\leq MC(1+|a|)^\alpha\Big(\sum_{\nu\in Z}\frac{1}{(1+|\nu|)^{n+2}}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

От друга страна, $F(z)\in E^n_{\sigma+\delta}$, $\sigma+\delta<\pi$ и теорема 5 е приложима. Следователно

$$\Big(\int\limits_{|x-x_0|\le 1} |F(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int\limits_{R^n} |F(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le MC_1(1+|a|)^\alpha \Big(\sum_{\nu\in Z} \frac{1}{(1+|\nu|)^{n+2}}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

откъдето, оставяйки p да клони към безкрайност, намираме

$$\max_{|x-x_0|\le 1} |F(x)| \le MC_1(1+|a|)^\alpha.$$

Накрая, забелязвайки, че от $|x-x_0|\le 1$ следва $|a-x|\le |a-x_0|+|x-x_0|\le n+1$, така че $|\overset{-1}{e}\,\sigma(x-x_0)|\ge \frac{1}{2}$ за $|x-x_0|\le 1$, получаваме

$$|f(x_0)|\le 2\max_{|x-x_0|\le 1}|F(x)|\le C_2 M(1+|x_0|)^\alpha.$$

С това доказателството е завършено, понеже C_2 не зависи от x_0

Следствие 1. Нека $f(z)\in E_0^n$ и нека за $\nu\in Z$ е в сила неравенството $|f(\nu)|\le M(1+|\nu|)^\alpha$. Тогава $f(z)$ е полином от степен ненадминаваща $[\alpha]$.

Доказателство. Теорема 8 заедно с лема 2 ни дава $|f(z)|\le C(1+|z|)^{2\alpha}$, откъдето с помощта на теоремата на Лиувил заключаваме, че $f(z)$ е полином.

Следствие 2. Ако $f(z)\in E_\sigma^n$, $\sigma<\pi$ и ако за $\nu\in Z$ имаме $f(\nu)=O(|\nu|^\alpha)$, $f(i\nu)=O(|\nu|^\alpha)$, то $f(z)$ е полином.

Доказателство. Според теорема 8 и лема 2 имаме

$$|f(z)|\le M(1+|z|)^{2\alpha}e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad |f(z)|\le M(1+|z|)^{2\alpha}e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$$

и в случая $n=1$ твърдението следва веднага от принципа на Фрагмен-Линдельоф. В общия случай доказателството се завършва индуктивно.

Ще приключим този параграф с един аналог на една теорема на Картрайт.

Теорема 9. Нека $f(z) \in E_\sigma^n$, $\sigma < \pi$ и нека за $\nu \in Z$ имаме $\lim\limits_{|\nu| \to \infty} f(\nu) = 0$. В такъв случай във всяка област от вида $|\operatorname{Im} z| < A$ имаме $\lim\limits_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} \mathcal{D}_j f(z) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теоремата следва веднага от лема 4 и лема 7. В случая $n = 1$ теоремата е добре известна.

§ 3. Няколко неравенства

От теорема 6 произтичат лесно няколко известни свойства на функциите от E_σ^n, които досега не са били доказвани толкова елементарно. Такава е например

Теорема 9. Нека $f(z) \in E_\sigma^n \cap L_p(R_x^n)$, $p \geq 1$. Тогава за всяко фиксирано $y \in R_x^n$ функциите $f(x+iy)$, $\mathcal{D}_j f(x+iy)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат на $L_p(R_x^n)$

Доказателство. Според лема 6 имаме

/33/ $$f(x+iy) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \hat{h}(x+iy-t) f(t)\, dt$$

откъдето с помощта на известното неравенство [9]

$$\|a * b\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, \quad p \geq 1, \ q \geq 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$$

получаваме

$$\| f(x+iy) \|_p \leq (2\pi)^{-n} \| \hat{h}(x+iy) \|_1 \, \| f(x) \|_p$$

$$\| \mathcal{D}_j f(x+iy) \|_p \leq (2\pi)^{-n} \| \mathcal{D}_j \hat{h}(x+iy) \|_1 \, \| f(x) \|_p,$$

с което теоремата е доказана.

По същия начин могат да се подобрят някои неравенства на Кореваар [17] и Николский [18].

Нека $\mathfrak{M}_\sigma$ е множеството от функциите от $C_0^\infty(R^1)$, всяка от които е равна на единица в някаква околност на интервала $[-\sigma,\sigma]$ и нека $f(z)\in E_\sigma^1 \cap L_p(R_x^1), p\geq 1$. От /33/ /в случая $n=1$ / за произволно $h\in\mathfrak{M}_\sigma$ получаваме

$$|f(x+iy)|\leq \frac{1}{2\pi}\|\hat{h}(x+iy)\|_q \|f(x)\|_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

откъдето следва неравенството

/34/ $$|f(x+iy)|\leq \frac{1}{2\pi} A_q(y)\|f(x)\|_p, \quad \text{където} \quad A_q(y)=\inf_{h\in\mathfrak{M}_\sigma}\|\hat{h}(x+iy)\|_q$$

Нека сега $q>1$. Апроксимирайки характеристичната функция на интервала $[-\sigma,\sigma]$ с функции от $\mathfrak{M}_\sigma$ в метриката на $L_q(R^1)$ намираме непосредствено

$$A_q(y)\leq B_q(y)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\sin\sigma(x+iy)}{x+iy}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

и /34/ ни дава

$$|f(x+iy)|\leq \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma(x+iy)}{x+iy}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\|f(x)\|_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, q>1$$

Оттук при $q\to\infty$ получаваме неравенството

$$|f(x+iy)|\leq \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\sigma y}{y}\|f(x)\|_1$$

което се дължи на Кореваар [17]. По-нататък, оценявайки $B_q(y)$, $q\geq 2$ с помощта на неравенството на Хаусдорф-Юнг, намираме

$$|f(x+iy)| \leq \left(\frac{sh\,\sigma p y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2$$

- резултат, който също принадлежи на Кореваар.

За да можем да формулираме съответните резултати в случая $n > 1$, ще дадем следната

Дефиниция. Ще казваме, че цялата функция $f(z)$ е от експоненциален тип $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_j \geq 0$, когато за всяко $\varepsilon > 0$ е в сила неравенството

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|z_j|}, \quad \varepsilon > 0, \ z \in C^n.$$

Множеството от всички цели функции от тип $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ще означаваме с $E^n_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n}$.

В такъв случай, ако $f(z) \in E^n_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} \cap L_p(R^n_x)$, $p \geq 1$

, в сила е неравенството

/35/ $$|f(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} B_{jq}(y_j) \|f(x)\|_p, \quad p > 1$$

където
$$B_{jq}(y) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 \sin \sigma_j (x+iy)}{x+iy} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q > 1,$$

от което, както по-горе, за $q \geq 2$ получаваме

/36/ $$|f(x+iy)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{sh\,\sigma_j p y_j}{\pi p y_j} \right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Доказателство. Нека p, q, r са неотрицателни числа, за които имаме $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ и нека $f(z) \in E^n_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} \cap L_p(R^n_x)$. Като вземем пред вид неравенството

$$\| f(x+iy) \|_r \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \| \hat{h}(x+iy) \|_q \| f(x) \|_p ,$$

което следва от /33/, и положим $h(t) = \prod_{j=1}^{n} h_j(t_j)$, където $h_j(t_j) \in \mathfrak{M}_{\sigma_j}$ както по-горе, получаваме

$$/37/ \quad \| f(x+iy) \|_r \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} B_{jq}(y_j) \| f(x) \|_p , \quad q > 1$$

Нека сега $1 < p \leq 2$ и $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$. Да дефинираме q чрез неравенството $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Понеже сега $q \geq 2$ можем да се възползваме от неравенството на Хаусдорф-Юнг и по такъв начин от /37/ получаваме

$$/38/ \quad \| f(x+iy) \|_r \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{sh\, \sigma_j q' y_j}{\pi q' y_j} \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \| f(x) \|_p , \quad \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2},$$

което е по-точно от съответното неравенство на Николский [18]. От /38/ при $p \to 1$, $r \to \infty$ получаваме /36/. По същия начин от /37/ следва /35/.

Полагайки $y = 0$ в /38/ намираме

$$/39/ \quad \| f(x) \|_r \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sigma_j}{\pi} \right)^{\frac{1}{q'}} \right) \| f(x) \|_p .$$

Аналогични оценки са в сила и за $p > 2$ за подходящи стойности на r. Наистина, нека $p > 2$ и $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2[p]}$. Понеже имаме

$$f^{[p]}(z) \in E^n_{[p]\sigma_1,[p]\sigma_2,\dots,[p]\sigma_n} \cap L_{p'}(R^n_x),\ p' = \frac{p}{[p]},\ 1 \le p' \le 2$$

като се възползваме от /38/ /което очевидно важи и за $p=1$ /, получаваме

$$\|f(x+iy)\|_r \le \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{sh\,\sigma q' y_j}{\pi y_j}\right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \|f(x)\|_p,\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \ge \frac{1}{2[p]}.$$

Ще завършим този параграф с едно ново неравенство от същия тип. За простота ще се ограничим със случая $n=1$

След диференциране от /33/ /в случая $n=1$ / получаваме

$$\|f^{(m)}(x+iy)\|_r \le \frac{1}{2\pi} \|\hat{h}^{(m)}(x+iy)\|_q \|f(x)\|_p,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

откъдето за $q \ge 2$ намираме

$$\|f^{(m)}(x+iy)\|_r \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) t^m e^{-i(x+iy)t}|^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \|f(x)\|_p,$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

Апроксимирайки характеристичната ф-я на $[\sigma,\sigma]$ отново с функции от $\mathfrak{M}_\sigma$ от това неравенство получаваме

/40/ $$\|f^{(m)}(x+iy)\|_r \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^{mq'} e^{q'yt} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \|f(x)\|_p,\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \ge \frac{1}{2}$$

което в случая $y=0$ ни дава

$$\|f^{(m)}(x)\|_r \le \left(\frac{\sigma^{mq'+1}}{(mq'+1)\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_p,\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \ge \frac{1}{2}$$

и в частност

$$|f^{(m)}(x)| \le \frac{\sigma^{m+1}}{(m+1)\pi} \|f(x)\|_1$$

Накрая, извършвайки в /40/ граничния преход $p\to 1$, $r\to\infty$ получаваме

$$|f^{(m)}(x+iy)| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^m e^{ty}\,dt\right)\|f(x)\|_1,$$

което в случая $m=1$ взема вида

$$|f'(x+iy)| \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma\,\mathrm{sh}\,\sigma y}{y}+\frac{1-\mathrm{ch}\,\sigma y}{y^2}\right)\|f(x)\|_1.$$

Глава втора

ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА ЦЕЛИТЕ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ТИП

§ 1. Няколко обобщения на неравенството на С.Н.Бернщайн

В тази глава ще разглеждаме само цели функции от експоненциален тип на една комплексна променлива, които са ограничени върху реалната ос и преди всичко - тригонометричните полиноми. Нашата задача ще бъде да намерим точни неравенства, валидни за една или друга подкласа на функциите, за които споменахме. Прототип на всички неравенства от този род е следното знаменито неравенство на С.Н. Бернщайн [19]: ако $f(z) \in B^1_\sigma$ и $|f(x)| \le M$ за $x \in R^1$, то е в сила неравенството

/1/ $$|f'(x)| \le \sigma M, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Нашият първоначален стремеж беше да докажем неравенството на Бернщайн с помощта на интегралното представяне

/2/ $$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(z-t) f(t)\,dt,$$

което ни дава лема 6, гл.1, § 2.

Наистина, за $f(z) \in B^1_\sigma$, $h \in \mathfrak{M}_\sigma$ от /2/ получаваме

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2\pi} \|\hat{h}'(x)\|_1 \sup_{R^1} |f(x)|$$

т.е.

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2\pi} C(\sigma) \sup_{R^1} |f(x)|, \quad \text{където } C(\sigma) = \inf_{h \in \mathfrak{M}_\sigma} \|\hat{h}'(x)\|_1$$

но пресмятането на величината $C(\sigma)$ не ни се удаде. По този начин успяхме да получим само неравенството

$$|f'(x)|\le\frac{3}{2}\sigma M,\quad M=\sup_{R^1}|f(x)|,$$

което е доста по-грубо от резултата на Бернщайн. Проучвайки литературата по разглеждания въпрос, ние се натъкнахме на един метод на Де Бройн [23], който допълнен с един трик на Стейн [35], придобива почти универсално значение.

Де Бройн забелязва връзката между неравенствата в комплексна област и разпределението на нулите на полиномите, които участвуват в тях и демонстрира неочакваната простота и ефективност на тази зависимост в няколко конкретни примера, без да счете за необходимо да формулира някаква обща теорема.

Ние ще илюстрираме метода на де Бройн, като дадем просто доказателство на следното известно [22] обобщение на неравенството на С.Н.Бернщайн за тригонометрични полиноми.

Теорема 1. Нека тригонометричните полиноми

$$S(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n}b_\nu e^{i\nu\theta},\quad T(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n}a_\nu e^{i\nu\theta},\quad a_{-n}\neq 0,$$

са линейно независими и за реални стойности на θ удовлетворяват неравенството

/3/ $$|S(\theta)|\le|T(\theta)|.$$

Нека освен това $T(\theta)\neq 0$ в полуравнината $H:\ \Im\theta>0$. Тогава в H имаме

/4/ $$|S'(\theta)|<|T'(\theta)|.$$

Неравенството на С.Н.Бернщайн за тригонометрични полиноми се получава от /4/ в специалния случай $T(\theta)=Me^{-in\theta}$.

Ние ще докажем /4/ като следствие от нашата теорема на Гаус-Люка за тригонометрични полиноми. Ще започнем със следната непубликувана[1] теорема на Чакалов [25, зад.43].

[1] От самия Чакалов.

Теорема. Нека $f(z)$ е полином от n-та степен и Г е окръжност с център a. Ако нулите на $f(z)$ се намират вътре върху или вън от Г, то и нулите на полинома

$$F(z) = 2(z-a)f'(z) - nf(z)$$

лежат вътре, върху или вън от Г.

Доказателство /Л.Чакалов/. Нека $z_1, z_2, \dots, z_n$ са нулите на $f(z)$ и z_0 е нула на $F(z)$, такава, че $f(z_0) \neq 0$. Тогава имаме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_0 - z_k} = \frac{n}{2(z_0-a)},$$

откъдето следва

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z_k - a}{z_0 - a}} = \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{z_k - a}{z_0 - a}} = \frac{n}{2}.$$

Понеже неравенствата $\operatorname{Re} \frac{1}{1-u} \underset{>}{\overset{<}{=}} \frac{1}{2}$ и $|u| \underset{<}{\overset{>}{=}} 1$ са еквивалентни, доказателството е завършено.

Направените разсъждения доказват и следната теорема на Обрешков [26].

Теорема 2. Нека G е кръговата област $|z-a| \geq r$ $(|z-a| \leq r)$ и нека $f(z)$ е полином от степен n. Ако нулите на $f(z)$ се намират в G, то и нулите на полинома $F(z) = (z-a)f'(z) - \nu f(z)$, където $\operatorname{Re}\nu \geq \frac{n}{2}$ $\left(\operatorname{Re}\nu \leq \frac{n}{2}\right)$ лежат в G. Нещо повече, една нула на $F(z)$, която не е нула на $f(z)$, може да лежи на окръжността $|z-a| = r$ тогава и само тогава, когато $\operatorname{Re}\nu = \frac{n}{2}$ и всичките нули на $f(z)$ лежат върху тази окръжност.

Макар и директно следствие от теорема 2, следващата теорема, доколкото ни е известно, е останала незабелязана досега.

Теорема 3. Нека нулите на рационалната функция

$$R(z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k (z-a)^k,\ a_{-n}\neq 0 \quad (a_n\neq 0),$$

лежат в областта $|z-a|\geq r$ $(|z-a|\leq r)$. В такъв случай и нулите на нейната производна $R'(z)$ лежат в същата област. При това една нула на $R'(z)$, която не е нула на $R(z)$, може да лежи върху окръжността $|z-a|=r$ тогава и само тогава, когато всичките нули на $R(z)$ лежат върху тази окръжност.

Доказателство. Имаме $R(z)=\dfrac{P(z)}{(z-a)^n}$, където $P(z)$ е полином от степен най-много $2n$ с нули в областта $|z-a|\geq r$ $(|z-a|\leq r)$. Понеже

$$R'(z)=\frac{(z-a)P'(z)-nP(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

твърдението следва от теорема 2.

Истинският смисъл на тази теорема изпъква след следната формулировка

Теорема 4. Нека нулите на тригонометричния полином

$$S(z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikz},\ a_{-n}\neq 0 \quad (a_n\neq 0),$$

лежат в полуравнината $\operatorname{Im} z\leq a$ $(\operatorname{Im} z\geq a)$. Тогава и нулите на неговата производна $S'(z)$ лежат в същата полуравнина. При това една нула на $S'(z)$, която не е нула на $S(z)$, може да лежи върху правата $\operatorname{Im} z=a$ тогава и само тогава, когато всички нули на $S(z)$ лежат върху тази права.

Теорема 4 се свежда към теорема 3 чрез субституцията $w=e^{iz}$.

Прилагайки два пъти теорема 4, получаваме

Теорема 5 /теорема на Гаус-Люка за тригонометрични полиноми/. Нека D е най-малкото изпъкнало и затворено множество, което съдържа нулите на тригонометричния полином

$$T(z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikz}, \quad a_n a_{-n}\neq 0.$$

Тогава и нулите на неговата производна $T'(z)$ се съдържат в $\mathcal{D}$. Нещо повече - една нула на $T'(z)$, която не е нула на $T(z)$ може да лежи върху контура на $\mathcal{D}$ тогава и само тогава, когато $\mathcal{D}$ е права, успоредна на реалната ос.

Доказателство. Понеже $T(z)$ е периодична, $\mathcal{D}$ е ивица от вида $a\leq \operatorname{Im} z\leq b$ и теоремата следва от теорема 4.

Сега вече можем да докажем теорема 1, която формулирахме погоре.

Доказателство. И така, нека

$$S(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu e^{i\nu\theta}, \quad T(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \quad a_{-n}\neq 0$$

и нека върху реалната ос имаме

/3/ $\quad |S(\theta)|\leq |T(\theta)|$

Полагайки $z=e^{i\theta}$ намираме $S(\theta)=z^{-n}P(z)$, $T(\theta)=z^{-n}Q(z)$, където $P(z)$ и $Q(z)$ са алгебрични полиноми и $Q(z)\neq 0$ за $|z|<1$. /По предположение имахме $T(\theta)\neq 0$ в $H: \operatorname{Im}\theta>0$ /. Имайки пред вид /3/ с помощта на принципа за максимума получаваме

$|P(z)|<|Q(z)|,\ |z|<1$, което ни дава

/5/ $\quad |S(\theta)|<|T(\theta)|,\ \theta\in H$

и в частност $|a_{-n}|=|P(0)|<|Q(0)|=|b_{-n}|$.

Да допуснем, че съществува $\theta_0\in H$ такова, че $|S'(\theta_0)|\geq |T'(\theta_0)|$ и да разгледаме тригонометричния полином

$$N(\theta)=S(\theta)-\lambda T(\theta), \quad \text{където} \quad \lambda=\frac{S'(\theta_0)}{T'(\theta_0)},\ |\lambda|\geq 1.$$

(Понеже по предположение $T(\theta)\neq 0$ в H, според теорема 4 $T'(\theta_0)\neq 0$).

Тъй като според /5/ $N(\theta)\neq 0$ в H и в частност $a_{-n}-\lambda b_{-n}\neq 0$, теорема 4 ни дава $N'(\theta)\neq 0$ в H. Това обаче противоречи на равенството $N'(\theta_0)=0$, което следва от избора на λ.

Това противоречие доказва теоремата.

Както вече отбелязахме, Де Брьойн не формулира някаква обща теорема, а се задоволява с няколко примера от рода на теорема 1. За нас обаче ще бъде по-удобно да формулираме метода на този автор, като му придадем вид на теорема.

Теорема 6 /Принцип на Де Брьойн/. Нека K е затворено множество в комплексната равнина C и нека $\mathfrak{M}$ е комплексно линейно пространство от мероморфни функции с полюси в K. Нека $\mathfrak{N}$ се състои от функциите от $\mathfrak{M}$, които не се анулират извън K и $\mathcal{L}:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ е линеен оператор. В такъв случай неравенството

$$|\mathcal{L}(f)(z)|<|\mathcal{L}(g)(z)|,\quad z\in C\setminus K,$$

където $f\in\mathfrak{M}$ и $g\in\mathfrak{M}$ са произволни, следва от неравенството $|f(z)|<|g(z)|$, $z\in C\setminus K$ тогава и само тогава, когато $\mathcal{L}(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{N}$.

Доказателство. Да допуснем, че $\mathcal{L}(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{N}$ и $|f(z)|<|g(z)|$ в $C\setminus K$, но въпреки това съществува $z_0\in C\setminus K$ такова, че $|\mathcal{L}(f)(z_0)|\geq|\mathcal{L}(g)(z_0)|$. Да си образуваме

$$\lambda=\frac{\mathcal{L}(f)(z_0)}{\mathcal{L}(g)(z_0)},\quad |\lambda|\geq 1$$ /очевидно $g\in\mathfrak{N}$ така че $\mathcal{L}(g)(z_0)\neq 0$/

и да разгледаме функцията $f(z)-\lambda g(z)$, която очевидно не се анулира извън K. Следователно $\mathcal{L}(f-\lambda g)$ $=\mathcal{L}(f)-\lambda\mathcal{L}(g)\in\mathfrak{N}$, което е невъзможно, защото очевидно $\mathcal{L}(f)(z_0)-\lambda\mathcal{L}(g)(z_0)=0$.

С това достатъчността на условието $\mathcal{L}(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{N}$ е доказана. За да докажем, че то е и необходимо, достатъчно е да приложим неравенството $|\mathcal{L}(f)|<|\mathcal{L}(g)|$, $z\in C\setminus K$ към всевъзможните двойки f, g, където $f\equiv 0$ а $g\in\mathfrak{N}$.

Забележка. Нека f и g са два фиксирани елемента от $\mathfrak{M}$ и $|f|<|g|$ в $C\setminus K$ Току-що направените разсъждения показват, че неравенството $|L(f)(z)|<|L(g)(z)|, z\in C\setminus K$ ще бъде в сила, ако L трансформира фамилията $\{g-\mu f\}, |\mu|\le 1$ в част от $\mathfrak{N}$.

От принципа на Де Брьойн и от теорема 2 се извлича с лекота следният резултат на Левин [22].

Теорема 7. Нека

$$S(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu e^{i\nu\theta} \text{ и } T(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \quad a_{-n}\neq 0,$$

удовлетворяват неравенството

$$/6/ \qquad |S(\theta)|<|T(\theta)|$$

за всяко реално θ и $T(\theta)$ не се анулира в полуравнината $H: \operatorname{Im}\theta>0$. В такъв случай за всеки алгебричен полином $f(z)$ с нули в полуравнината $\operatorname{Im} z\ge 0$ имаме

$$/7/ \qquad \left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|<\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)T(\theta)\right|, \quad \operatorname{Im}\theta\ge 0.$$

Доказателство. Най-напред ще разгледаме случая $f(z)=z-\mu$, $\operatorname{Im}\mu\ge 0$. С помощта на субституцията $z=e^{i\theta}$ получаваме

$$S(\theta)=\frac{P(z)}{z^n}, \quad T(\theta)=\frac{Q(z)}{z^n}$$

където $P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми от степен $\le 2n$ и $Q(z)$ не се анулира в кръга $|z|\le 1$. Ето защо принципът за максимума е приложим и от /6/ получаваме $|P(z)|<|Q(z)|$ за $|z|\le 1$ и следователна за $|z|\le 1+\varepsilon$, където $\varepsilon>0$ е достатъчно малко. Понеже в разгледания частен случай имаме

$$f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)=S'(\theta)-\mu S(\theta)=\frac{i}{z^n}\left(zP'-(n-\mu i)P\right),$$

$$f\left(\frac{d}{d\theta}\right)T(\theta)=T'(\theta)-\mu T(\theta)=\frac{i}{z^n}\left(zQ'-(n-\mu i)Q\right),$$

неравенство /7/ е равносилно с

/8/ $$|zP' - (n-i\mu)P| < |zQ' - (n-i\mu)Q|, \quad |z| \le 1.$$

Нека сега K е кръговата област $|z| \ge 1+\varepsilon$, а $\mathfrak{M}$ е линейното пространство от алгебричните полиноми от степен $\le 2n$. Най-после нека $\mathfrak{N}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ се състои от полиномите с нули в K. Тъй като според теорема 2 за линейния оператор

$$L(f) = zf' - (n-i\mu)f, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad \Im m\mu \ge 0,$$

имаме $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$, /8/ следва веднага от принципа на Де Бръойн. Понеже в общия случай $f(z)$ е произведение от линейни множители, неколкократното прилагане на доказаната част от теоремата завършва доказателството.

По същия начин се доказва следният аналог на теорема 7, валиден за алгебрични полиноми.

Теорема 7'. Нека $P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми от степен, ненадминаваща n и нека в кръга $|z| < 1$ имаме

$$|P(z)| < |Q(z)|$$

В такъв случай за всеки полином $g(z)$ с нули в полуравнината $Re\, z \ge \frac{n}{2}$ е в сила неравенството

$$\left| g\left(z\frac{d}{dz}\right) P(z) \right| < \left| g\left(z\frac{d}{dz}\right) Q(z) \right|, \quad |z| < 1.$$

Използваният метод позволява да се дадат прости доказателства на известните неравенства на Туран [36] и Ердьош-Лакс [37]. За тази цел ще формулираме още веднъж теорема 1.

Теорема 8. Нека

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu, \quad g(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu z^\nu, \quad b_{-n} \ne 0 \ (b_n \ne 0)$$

и нека неравенството $|f(z)| < |g(z)|$ е удовлетворено в областта $|z| < R$ $(|z| > R)$. Тогава в същата област е в сила и неравенството $|f'(z)| < |g'(z)|$.

Идентичността на теоремите 1 и 8 се вижда с помощта на субституцията $z = e^{i\theta}$

Следствие 1. Нека $P(z)$ е алгебричен полином от n-та степен, който не се анулира извън кръга $|z| \le 1$. Тогава върху окръжността $|z| = 1$ имаме

/9/ $$|zP' - nP| \le |P'|.$$

Доказателство. В областта $|z| > 1$ е в сила неравенството

$$\left| \frac{P(z)}{z^n} \right| < |P(z)|,$$

от което с помощта на теорема 8 получаваме

$$\left| \frac{zP'(z) - nP(z)}{z^{n+1}} \right| < |P'(z)|, \quad |z| > 1$$

и след граничния преход $|z| \to 1$, /9/.

Следствие 2. Нека отново $P(z)$ е полином от n-та степен и нека нулите му лежат в областта $|z| \ge 1$ Тогава за $|z| = 1$ е в сила неравенството[1]

/10/ $$|zP'(z) - nP(z)| \ge |P'(z)|$$

Доказателство. В кръга $|z| < 1$ имаме $|P(z)| < |z^{-n} P(z)|$ и понеже $P(0) \ne 0$ можем да се възползуваме от теорема 8.

От /9/ и /10/ разбира се следва, че ако нулите на $P(z)$ лежат по единичната окръжност, за $|z| = 1$ е в сила тъждеството

/11/ $$|zP'(z) - nP(z)| = |P'(z)|$$

Сега вече можем да докажем неравенството на Туран.

Теорема. Нека $P(z)$ е полином от n-та степен с нули в кръга $|z| \le 1$ и нека $\max\limits_{|z| \le 1} |P(z)| = 1$. Тогава $\max\limits_{|z| \le 1} |P'(z)| \ge \frac{n}{2}$.

---

[1] В [37] това неравенство е получено в резултат на доста сложни пресмятания.

Доказателство. Нека z_0, $|z_0|=1$ е такова, че $|P(z_0)|=1$ Използвайки /9/, получаваме

$$n = |nP(z_0)| = |nP(z_0) - z_0P'(z_0)| + |z_0P'(z_0)| \le 2|P'(z_0)|,$$

с което равенството на Туран е доказано.

Оригиналното доказателство не ни е известно, защото работата на Туран [36] е недостъпна за нас.

Теорема /Ердьош-Лакс/. Нека $P(z)$ е полином от n-та степен и нека за $|z|<1$ имаме $0<|P(z)|<1$. Тогава $\max_{|z|\le 1}|P'(z)| \le \frac{n}{2}$.

Доказателство. Нека $\mathfrak{M}$ е линейното пространство на алгебричните полиноми от степен $\le n$ и $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ се състои от полиномите с нули в областта $|z|\ge 1$. При фиксирано ζ, $|\zeta|<1$ според теоремата на Лагер [38] линейният оператор

$$L(f) = (\zeta - z)f' + nf, \quad f\in\mathfrak{M}$$

трансформира фамилията $\{1-\mu P\}$, $|\mu|\le 1$ в част от $\mathfrak{N}$. Следователно, според забележката към теорема 6, за $|z|<1$ имаме[1]

$$|L(P)| < |L(1)| \qquad \text{т.е.} \quad |\zeta P'(z) - zP'(z) + nP(z)| < n$$

откъдето, понеже ζ е произволна точка от единичният кръг, получаваме

$$|zP'(z)| + |nP(z) - zP'(z)| < n, \quad |z|<1.$$

Това неравенство, след граничния преход $|z|\to 1$ заедно с /10/ доказва теоремата.

За следващото обобщение на неравенството на Бернщайн имаме нужда от

Лема 1. Нека $P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми и нека в полуравнината $\operatorname{Im} z \ge a$ имаме

$$|P(z)| < |Q(z)|$$

В такъв случай е в сила и неравенството

[1] Разсъжденията до края на доказателството се съдържат в [23].

/12/ $|P'(z)-\gamma P(z)| \leq |Q'(z)-\gamma Q(z)|, \ \mathrm{Im}\, z > a, \ \mathrm{Im}\, \gamma \geq 0,$

където знак за равенство е възможен само, когато P и Q са полиноми от първа степен и $\gamma = 0$

Доказателство. Нека $\mathfrak{M}$ е линейното пространство на всички полиноми, а $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ се състои от тези от тях, нулите на които лежат в полуравнината $K: \mathrm{Im}\, z \leq a$. Както е добре известно и както лесно се вижда, операторът

$$\lambda(f) = f' - \gamma f, \ \mathrm{Im}\, \gamma \geq 0$$

трансформира $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ /с едно единствено изключение - $f = \mathrm{const} \neq 0$ $\gamma = 0$ / и лемата следва от принципа на Де Бръойн.

Теорема 9. Нека $S(\theta)$ и $T(\theta)$ са тригонометричните полиноми от теорема 7 и нека $f(z)$ е реален алгебричен полином с нули в ивицата $|\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$. Тогава в полуравнината $H: \mathrm{Im}\, \theta \geq 0$ имаме

$$\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right) S(\theta)\right| < \left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right) T(\theta)\right|$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем в частните случаи

$f(z) = z - \gamma$, γ - реално и $f(z) = (z-\gamma)(z-\bar{\gamma})$

където $|\mathrm{Im}\, \gamma| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ и $\bar{\gamma}$ е конюгованото число на γ. Понеже първият случай се съдържа в теорема 7, можем да предположим, че $f(z)$ има вида $f(z) = (z-\gamma)(z-\bar{\gamma})$.

Както видяхме при доказателството на теорема 7, от условията на теоремата следва, че в полуравнината $H: \mathrm{Im}\, \theta \geq 0$ е в сила неравенството

/13/ $|S(\theta)| < |T(\theta)|$

Нека сега $\alpha \in H$ е произволно, но фиксирано. Да въведем тригонометричните полиноми

$$S_1(\theta) = S(\theta + \alpha), \ T_1(\theta) = T(\theta + \alpha)$$

и да положим $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. По този начин получаваме

/14/ $$S_1(\theta) = \frac{P(z)}{(1+z^2)^n}, \quad T_1(\theta) = \frac{Q(z)}{(1+z^2)^n},$$

където $P(z)$ и $Q(z)$ са алгебрични полиноми от степен $\leq 2n$. Тъй като функцията $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ изобразява H в $H \setminus \{i\}$ и, както лесно се вижда $Q(i) = 4^n a_{-n} e^{-in\alpha} \neq 0$, от /13/ и /14/ с помощта на принципа за максимума получаваме

/15/ $$|P(z)| < |Q(z)|$$

за $\operatorname{Im} z \geq 0$. Нещо повече, понеже $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| = \left|\frac{S(\pi+\alpha)}{T(\pi+\alpha)}\right| < 1$, /15/ е в сила в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\varepsilon$, стига $\varepsilon > 0$ да бъде достатъчно малко.

Нека сега $h(z) = z^2 + 2bz + c$ е квадратен тричлен с реални корени. Като приложим два пъти лема 1, от /15/ получаваме

/16/ $$\left| h\left(\frac{d}{dz}\right) P(z) \right| < \left| h\left(\frac{d}{dz}\right) Q(z) \right|, \quad \operatorname{Im} z > -\varepsilon$$

откъдето, изразявайки производните на $P(z)$ и $Q(z)$ чрез производните на $S_1(\theta)$ и $T_1(\theta)$ и полагайки $z = 0$ получаваме

$$\left| S''(\alpha) + bS'(\alpha) + \left(\frac{c}{4} + \frac{n}{2}\right) S(\alpha) \right| < \left| T''(\alpha) + bT'(\alpha) + \left(\frac{c}{4} + \frac{n}{2}\right) T(\alpha) \right|.$$

Понеже $\alpha \in H$ е произволно и всеки полином от вида

$f(z) = (z-\gamma)(z-\bar{\gamma})$, $|\operatorname{Im}\gamma| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ може да се представи във вида

$f(z) = z^2 + bz + \frac{c}{4} + \frac{n}{2}$, $b^2 \geq c$, теоремата е доказана.

За да можем да усилим теорема 9, имаме нужда от едно обобщение на класическата теорема на Пулен-Ермит.

Теорема. Нека $g(z)$ е полином от n-та степен с нули в ивицата Ω: $p \leq \operatorname{Im} z \leq q$, а нулите на реалния полином $f(z)$ лежат в множеството

/17/ $\quad G_n: \ |\sin\varphi| \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \varphi = \arg z.$

Тогава и корените на полинома $f\left(\frac{d}{dz}\right) g(z)$ се намират в Ω.

Ако в /17/ имаме строго неравенство и някоя контурна точка на G е многократна нула на $f\left(\frac{d}{dz}\right) g(z)$, то тя е многократна нула и на $g(z)$

Тази теорема принадлежи на К.Дочев [39]. Случаят, когато Ω съвпада с реалната ос е бил разгледан по-рано от Обрешков [40].

Доказателството на Дочев се опира на теоремата на Грейс [38]. Ние ще се нуждаем само от първото твърдение в теоремата и ще използваме случая да дадем едно доказателство, което също се опира на теоремата на Грейс, но ни се струва по-директно от това на Дочев.

Доказателство. Очевидно е достатъчно да разгледаме само случаите $f(z) = z - r$, r - реално и $f(z) = z^2 - 2\rho z\cos\varphi + \rho^2$, където $\rho > 0$ и $\cos^2\varphi \ge \frac{n-1}{n}$.

Тъй като в първия случай теоремата е тривиална, ще разгледаме само втория случай

И така, нека $g(z)$ има нули само в Ω, но въпреки това полиномът

$$f\left(\frac{d}{dz}\right) g(z) = g''(z) - 2\rho\cos\varphi\, g'(z) + \rho^2 g(z)$$

има поне една нула z_0 извън Ω, т.е.

$$g''(z_0) - 2\rho\cos\varphi\, g'(z_0) + \rho^2 g(z_0) = 0$$

Да допуснем за определеност, че $\operatorname{Im} z_0 > 0$ и да въведем линейния функционал

$$L(h) = h''(z_0) - 2\rho\cos\varphi\, h'(z_0) + \rho^2 h(z_0)$$

и полинома $\varphi(t) = L_z[(z-t)^n] = n(n-1)(z_0-t)^{n-2} - 2\rho\cos\varphi\, n(z_0-t)^{n-1}$
$+ \rho^2(z_0-t)^n$

Понеже корените на уравнението $\varphi(t) = 0$ имат вида

$$t = z_0, \quad t = z_0 + \frac{n}{\rho}\left(\cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - \frac{n-1}{n}}\right)$$

и очевидно се съдържат в полуравнината $\operatorname{Im} t \geq \operatorname{Im} z_0 > q$
и освен това $L(g) = 0$, по теоремата на Грейс във формата на Сегьо [38]
и уравнението $g(z) = 0$ трябва да има поне един корен в тази полуравнина. Това обаче противоречи на направените предположения и теоремата е доказана.

Сега вече можем да докажем

Теорема 10. Нека $S(\theta)$ и $T(\theta)$ са тригонометричните полиноми от теорема 7 и нека $f(z)$ е реален полином с нули в множеството, дефинирано чрез неравенството

$$D:\ \frac{n}{2} \leq y^2 \leq \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2}, \quad (z = x+iy)$$

В такъв случай в полуравнината $\operatorname{Im}\theta \geq 0$ имаме

$$\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right| < \left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)T(\theta)\right|$$

Доказателство. Да разгледаме полинома

$$h(z) = z^2 - 2\rho z\cos\varphi + \rho^2, \ \rho > 0, \ \cos^2\varphi \geq \frac{2n-1}{2n}$$

нулите на който се намират в

$$G_{2n}:\ |\sin(\arg z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\ .$$

Да въведем отново полиномите $P(z)$ и $Q(z)$ чрез равенството /14/ и да изберем $\varepsilon > 0$ толкова малко, че в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\varepsilon$ да имаме

/18/ $\quad |P(z)| < |Q(z)|$

Нека сега $\mathfrak{M}$ се състои от полиномите от степен $\le 2n$ а $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ - от полиномите с нули в $K: \operatorname{Im} z \le -\varepsilon$.

Като се възползваме от /18/ и от току-що доказаното обобщение на теоремата на Пулен-Ермит /в нашия случай $\Omega = K$ / получаваме

$$\left| h\left(\frac{d}{dz}\right) P(z) \right| < \left| h\left(\frac{d}{dz}\right) Q(z) \right|, \quad \operatorname{Im} z > -\varepsilon,$$

откъдето, като изразим отново производните на $P(z)$ и $Q(z)$ чрез производните на $S_1(\theta)$ и $T_1(\theta)$ и положим $z = 0$, получаваме

$$\left| S''(\alpha) - \rho\cos\varphi\, S'(\alpha) + \left(\frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4}\right) S(\alpha) \right| < \left| T''(\alpha) - \rho\cos\varphi\, T'(\alpha) + \left(\frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4}\right) T(\alpha) \right|$$

Понеже $\alpha \in H$ беше произволно и всеки реален квадратен тричлен с нули в $\mathcal{D}$ може да се представи във вида

$$a\left(z^2 - \rho z\cos\varphi + \frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4}\right), \quad a = \mathrm{const} \neq 0, \ \rho > 0, \ \cos^2\varphi \ge \frac{2n-1}{2n}$$

теоремата е доказана.

Обединявайки теоремите 9 и 10 получаваме

Теорема 11. Нека

$$S(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu e^{i\nu\theta} \quad \text{и} \quad T(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \ a_{-n} \neq 0$$

удовлетворяват неравенството

$$|S(\theta)| < |T(\theta)|$$

за всяко реално θ и $T(\theta)$ не се анулира в полуравнината $\operatorname{Im}\theta > 0$. В такъв случай за всеки реален алгебричен полином с нули в областта

$$y^2 \le \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2} \qquad (z = x + iy)$$

е в сила неравенството

$$\left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) S(\theta) \right| < \left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) T(\theta) \right|, \quad \operatorname{Im}\theta \ge 0.$$

Частният случай $S(\theta) \equiv 0$ е интересен сам по себе си и води например до теоремата на Гаус–Люка [33].

§ 2. Вариации върху една теорема на Н.Обрешков

С помощта на подходяща интерполационна формула Боаз [28] получи следното интересно обобщение на неравенството на С.Н.Бернщайн.

Теорема. Нека $f(z) \in B_\sigma^1$ и нека върху реалната ос имаме $|f(x)| \le M$. В такъв случай е в сила неравенството

$$/19/ \quad \left| f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega} \right| \le 2M(ch^2\sigma y - \sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}$$

където x, y и ω са реални числа.[1]

Полагайки $\omega = \frac{\pi}{2}$ от /19/, получаваме

$$\left| \frac{f(x+iy) - f(x-iy)}{2y} \right| \le M \frac{sh\sigma y}{y}, \quad y \neq 0$$

и неравенството на Бернщайн следва след граничния преход $y \to 0$. Както показа самият Боаз [28], от /19/ произтичат и други интересни следствия.

Нашата основна задача в този параграф е да дадем ново доказателство на /19/, както и да получим няколко негови модификации и обобщения. Освен принципа на Де Бръойн, в нашите разсъждения основна роля ще играе една елементарна и добре известна теорема на Обрешков.

Теорема /Обрешков [27] /. Нека $\mathcal{D}$ е ивица в комплексната равнина и нека h е комплексно число с радиус вектор, перпендикулярен на контурните прави на ивицата. Тогава ако $f(z)$ е полином с нули в $\mathcal{D}$ то и нулите на полинома

$$F(z) = f(z+h) - \gamma f(z-h), \quad \text{където } |\gamma| = 1, \ h \neq 0$$

лежат в тази ивица.

Доказателство. Нека $z_1, z_2, \dots, z_n$ са нулите на $f(z)$, а z_0 е нула на $F(z)$

В такъв случай имаме

---

1) ~~В случа~~ За тригонометричните полиноми това неравенство е доказано в [47] и [46]

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0-h)}\right| = 1 \qquad \text{т.е.} \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z_0+h-z_k}{z_0-h-z_k}\right| = 1$$

Допускайки, че $z_0 \bar{\in} \mathcal{D}$ веднага стигаме до противоречие, защото тогава числата $\left|\frac{z_0+h-z_k}{z_0-h-z_k}\right|$ $k = 1, 2, \ldots, n$ са едновременно по-големи или по-малки от единица.

Следващата теорема на Обрешков се доказва по същия начин.

Теорема 12. Нека нулите на полинома $f(z)$ лежат в полуравнината $\Im m z \leq a$ и нека числата h и k удовлетворяват условията $0 \leq k \leq h,\ h > 0$. Тогава нулите на полинома

$f(z+hi) - \gamma f(z-ki), |\gamma| \leq 1$ също се намират в полуравнината $\Im m z \leq a$.

Нашият основен резултат в този параграф се съдържа в

Теорема 13. Нека

$$S(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} b_\nu e^{i\nu\theta}, \quad T(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \quad a_{-n} \neq 0$$

и нека $T(\theta) \neq 0$ в полуравнината $\Im m \theta > 0$ /С други думи, нека $T(\theta)$ е мажоранта./ Тогава, ако върху реалната ос имаме

/20/ $\quad |S(\theta)| \leq |T(\theta)|$

и $S(\theta)$ и $T(\theta)$ са линейно независими, в полуравнината $H: \Im m \theta > 0$ е в сила неравенството

/21/ $\quad |S(\theta+\lambda i) - \tau S(\theta-\mu i)| < |T(\theta+\lambda i) - \tau T(\theta-\mu i)|$

където $0 \leq \mu \leq \lambda,\ \lambda \neq 0$ и $\quad |\tau| \leq \left(\frac{ch\frac{\lambda}{2}}{ch\frac{\mu}{2}}\right)^{2n}$

Неравенството /21/ очевидно означава, че операторът

$S(\theta) \to S(\theta+\lambda i) - \tau S(\theta-\mu i)$ действуващ в линейното пространство на тригонометричните полиноми от ред $\leq n$ е монотонен. С помощта на резултатите на Левин [22] може да се установи, че като оператор действуващ в линейното пространство $E = \bigcup_{\sigma \geq 0} E_\sigma^1$ той не притежава това свойство.

Доказателство. Най-напред, преминавайки към единичния кръг чрез субституцията $w = e^{i\theta}$, с помощта на принципа за максимума получаваме неравенството $|S(\theta)| < |T(\theta)|$ за всяко θ от H. Да вземем произволно $\alpha \in H$ и да го фиксираме. В такъв случай за полиномите

$$S_1(\theta) = S(\theta+\alpha), \quad T_1(\theta) = T(\theta+\alpha)$$

очевидно имаме

/22/ $$|S_1(\theta)| < |T_1(\theta)| \qquad \text{за } \operatorname{Im}\theta > -\operatorname{Im}\alpha.$$

По-нататък, полагайки $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ намираме

/23/ $$S_1(\theta) = \frac{P(z)}{(1+z^2)^n}, \quad T_1(\theta) = \frac{Q(z)}{(1+z^2)^n}$$

където $P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми от степен ненадминаваща $2n$. Понеже функцията $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ изобразява H в $H \setminus \{i\}$ и $Q(i) = 4^n a_{-n} e^{-in\alpha} \neq 0$, от /23/ получаваме

/24/ $$|P(z)| < |Q(z)|, \quad \operatorname{Im} z \geq 0$$

/Да припомним, че с H сме означили полуравнината $\operatorname{Im}\theta > 0$ така че имаме $\operatorname{Im}\alpha > 0$ /.

Нещо повече релацията

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| = \lim_{\theta \to +\pi} \left|\frac{S_1(\theta)}{T_1(\theta)}\right| = \left|\frac{S(\pi+\alpha)}{T(\pi+\alpha)}\right| < 1, \ x\text{-реално}$$

показва, че /24/ е в сила и в полуравнината $\operatorname{Im} z \geq -\varepsilon$, стига $\varepsilon > 0$ да бъде достатъчно малко. Да изберем едно такова

ε и да означим с K полуравнината $\Im z \le -\varepsilon$. Нека $\mathfrak{M}$ се състои от полиномите от степен $\le 2n$, а $\mathfrak{N}, \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ от тези от тях, които не се анулират извън K. Според теорема 12 за оператора

$$\lambda(f) = f(z+hi) - \gamma f(z-ki), \quad 0 \le k \le h, \, h>0, \, |\gamma| \le 1,$$

който действува от $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ имаме $\lambda(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$. Следователно, имайки пред вид неравенството

$$|P(z)| < |Q(z)|, \quad \Im z > -\varepsilon,$$

с помощта на принципа на Де Брьойн получаваме

/25/ $$|P(z+hi) - \gamma P(z-ki)| < |Q(z+hi) - \gamma Q(z-ki)|, \Im z > -\varepsilon$$

и в частност в полуравнината $\Im z \ge 0$.

Нека сега реалните числа λ и μ, $0 \le \mu \le \lambda, \lambda > 0$, са произволни. Като положим в /25/ $z=0$, $h = -i\,tg\frac{\lambda i}{2} = tgh\frac{\lambda}{2}$

$k = -i\,tg\frac{\mu i}{2} = tgh\frac{\mu}{2}$, получаваме

$$\left|S(\alpha+\lambda i) - \gamma\left(\frac{\cosh\frac{\lambda}{2}}{\cosh\frac{\mu}{2}}\right)^n S(\alpha-\mu i)\right| < \left|T(\alpha+\lambda i) - \gamma\left(\frac{\cosh\frac{\lambda}{2}}{\cosh\frac{\mu}{2}}\right)^n T(\alpha-\mu i)\right|,$$

с което теоремата е доказана.

Следствие 1. Като положим в /21/ $\tau = 1$ и разделим на $\lambda - \mu \neq 0$ след граничния преход $\lambda \to 0, \mu \to 0$ получаваме неравенството

$$|S'(\theta)| \le |T'(\theta)|, \quad \Im\theta \ge 0,$$

което доказахме и в предния параграф. По-нататък, като приложим /21/ към полиномите $e^{-iw}S(\theta)$ и $e^{-iw}T(\theta)$ с $\tau = -e^{2iw}$, w -реално, получаваме

/26/ $$|e^{-iw}S(\theta+\lambda i) + e^{iw}S(\theta-\mu i)| < |e^{-iw}T(\theta+\lambda i) + e^{iw}T(\theta-\mu i)|,$$

където $\operatorname{Im}\theta>0,\ 0\le\mu\le\lambda.$

Следствие 2. Нека $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{m} c_k z^{m-k}$ е даден полином.

С негова помощ да дефинираме оператора

$$L_f(R)(\theta)=\sum_{k=0}^{m} c_k R(\theta+(m-k)\lambda i-k\mu i),\ 0\le\mu\le\lambda,\ \lambda>0$$

където $R(\theta)$ е тригонометричен полином.

Ако $S(\theta)$ и $T(\theta)$ удовлетворяват предположенията на теорема 13 и нулите на $f(z)$ лежат в кръга $|z|\le\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\mu}{2}}\right)^{2n}$, в полуравнината $\operatorname{Im}\theta>0$ имаме

/27/ $$|L_f(S)(\theta)|<|L_f(T)(\theta)|,\ \operatorname{Im}\theta>0.$$

Това твърдение се доказва чрез няколкократното прилагане на теорема 13 с $\tau=\gamma_k,\ k=1,2,\dots,m$, където $\{\gamma_k\}$ са корените на $f(z)$

От /27/ на свой ред произтича

Следствие 3. Ако тригонометричният полином $T(\theta)$ е мажоранта и $L_f(T)(\theta)$ е мажоранта.

Доказателство. Имаме

$$T(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta},\ a_{-n}\ne 0,\ T(\theta)\ne 0 \text{ за } \operatorname{Im}\theta>0.$$

Прилагайки /27/ към двойката $(S(\theta),T(\theta))$ където $S(\theta)\equiv 0$ заключаваме, че $L_f(T)(\theta)$ не се анулира в полуравнината $\operatorname{Im}\theta>0$. Тъй като лесно се вижда, че имаме

$$L_f(T)(\theta)=\sum_{-n}^{n} A_k e^{ik\theta},$$

където

$$A_{-n}=a_{-n}e^{-\mu n m}f(e^{(\lambda+\mu)n})\ne 0,$$

следствие 3 е доказано.

Сега вече можем да докажем

Теорема 14. Ако тригонометричният полином $T(\theta)$ е мажоранта и $L(T)(\theta)$ дефиниран чрез равенството

$$/28/ \quad L(T)(\theta)=\int_{\theta-\mu i}^{\theta+\lambda i} T(t)dt, \quad 0\le\mu\le\lambda,\ \lambda>0$$

има същото свойство.

Тази теорема е тригонометричен аналог на една теорема на Уейснър [41].

Доказателство. Лесно се вижда, че $L(T)(\theta)$ има вида

$$L(T)(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} B_\nu e^{i\nu\theta}, \quad B_{-n}\neq 0$$

От друга страна, понеже нулите на полинома $\sum_{\nu=0}^{m} z^{m-\nu}$ лежат на окръжността $|z|=1$, според следствие 3 нулите на Римановите суми

$$T_m(\theta)=\frac{(\lambda+\mu)i}{m}\sum_{\nu=0}^{m} T\left(\theta+\frac{\lambda i}{m}(m-\nu)-\frac{\mu\nu}{m}i\right)$$

лежат в полуравнината $\operatorname{Im}\theta\le 0$ и твърдението следва от теоремата на Хурвиц.

Теорема 15. Нека тригонометричните полиноми $S(\theta)$ и $T(\theta)$ удовлетворяват предположенията на теорема 13 и нека операторът L е дефиниран чрез /28/. В такъв случай е в сила неравенството

$$|L(S)(\theta)|<|L(T)(\theta)|, \quad \operatorname{Im}\theta>0.$$

Доказателство. Нека $\mathfrak{M}$ е линейното пространство на тригонометричните полиноми от ред $\le n$ а $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ се състои от тези от тях, които не се анулират в полуравнината $\operatorname{Im}\theta>0$. Тъй като в $\Im m\,\theta>0$ имаме $|S(\theta)|<|T(\theta)|$, използувайки теорема 14 и принципа на Де Брьойн, завършваме доказателството.

Дефиниция. Тригонометричните полиноми от вида

$$\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}, \quad a_n \neq 0,\ a_{-n}\neq 0$$

ще наричаме уравновесени.

За уравновесените тригонометрични полиноми е в сила теорема, аналогична на теоремата на Обрешков, формулирана в началото на този параграф.

Теорема 16. Нека $T(\theta)$ е уравновесен тригонометричен полином с нули в ивицата $\Omega: a\le \Im m\,\theta\le b$. Тогава с нулите на полинома $N(\theta)\equiv T(\theta+\lambda i)-\gamma T(\theta-\lambda i)$, $|\gamma|=1$, $\lambda>0$ лежат в същата ивица.

Доказателство. Очевидно $T(\theta+bi)$ е мажоранта. Прилагайки теорема 13 към двойката $S_1(\theta)\equiv 0$ и $T_1(\theta)=T(\theta+bi)$ заключаваме, че $N(\theta)$ не се анулира в полуравнината $\Im m\,\theta>b$. Тъй като и полиномът $T(-\theta+bi)$ е мажоранта, по същите съображения $N(\theta)$ не се анулира и за $\Im m\,\theta<a$.

От тази теорема още веднъж следва нашата "теорема на Гаус-Люка" за тригонометрични полиноми. Наистина достатъчно е в израза $\dfrac{T(\theta+\lambda i)-T(\theta-\lambda i)}{\lambda}$ да извършим граничния преход $\lambda\to 0$ и да се възползуваме от теоремата на Хурвиц.

Теорема 17. Ако $T(\theta)$ е уравновесен и има нули само в ивицата Ω, то и полиномът

$$\int_{\theta-\lambda i}^{\theta+\lambda i} T(t)\,dt, \quad \lambda>0$$

има същото свойство.

Доказателство. Използвайки няколко пъти теорема 16 с $r = z_k$ $k = 1, 2, \ldots, m$ където z_k са корените на уравнението $\sum_{\nu=0}^{m} z^\nu = 0$, не е трудно да се убедим, че интегралните суми

$$T_m(\theta) = \frac{2\lambda i}{m} \sum_{\nu=0}^{m} T\left(\theta + \frac{\lambda i}{m}(m-2\nu)\right)$$

се анулират само в Ω след което теоремата следва от теоремата на Хурвиц.

След казаното дотук е ясно, че от теорема 13 могат да се извлекат редица резултати и за целите функции от експоненциален тип, които не са тригонометрични полиноми.

За краткост тук ще се ограничим с най-простите приложения, при които не възникват въпроси, свързани с възможността да се апроксимират целите функции от една или друга класа с тригонометрични полиноми, нулите на които лежат в полуравнината $\Im m\, z \leq 0$. Надявайки се да се върнем към тези въпроси на друго място, тук ще формулираме само резултатите, които се получават с помощта на следната добре известна

Теорема /Левитан [42]. Вж. също [43] /. Нека $f(z) \in B_\sigma^1$ и нека върху реалната ос имаме $|f(x)| \leq M$. Тогава съществува редица от тригонометрични полиноми

$$f_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_{\nu,n} e^{i\frac{\nu}{n}\sigma z},$$

която клони към $f(z)$ равномерно върху ограничените подмножества в комплексната равнина, като върху реалната ос за всяко n е в сила неравенството

$$|f_n(x)| \leq M.$$

И така, нека сега $f(z)\in B^1_\sigma$ и нека $|f(x)|\le M$ върху реалната ос. Като приложим /26/ към двойката $f_n(\frac{n}{\sigma}\theta)$ и $Me^{-in\theta}$ получаваме

/29/
$$\left|e^{-i\omega}f_n\left(\frac{n}{\sigma}(\theta_n+\lambda_n i)\right)+e^{i\omega}f_n\left(\frac{n}{\sigma}(\theta_n-\mu_n i)\right)\right| \le M\left|e^{-i\omega}e^{-in(\theta_n+\lambda_n i)}+e^{i\omega}e^{-in(\theta_n-\mu_n i)}\right|$$

където сме положили за краткост $\theta_n=\frac{\sigma z}{n}$, $\lambda_n=\frac{\sigma\lambda}{n}$, $\mu_n=\frac{\sigma\mu}{n}$ и $0\le\mu\le\lambda$, $\lambda>0$, $\Im m\, z\ge 0$.

Извършвайки в /29/ граничния преход $n\to\infty$ получаваме

/30/
$$\left|e^{-i\omega}f(z+\lambda i)+e^{i\omega}f(z-\mu i)\right| \le M\left|e^{-i\omega}e^{-i\sigma(z+\lambda i)}+e^{i\omega}e^{-i\sigma(z-\mu i)}\right|,$$

което съдържа неравенството на Боаз.

Прилагайки /30/ с $\omega=\frac{\pi}{2}$ към функциите $f(z)$ и $f(-z)$ получаваме съответно

$$|f(x+iy)-f(x)|\le M(e^{\sigma y}-1),\ y>0$$

и

$$|f(-x-iy)-f(-x)|\le M(e^{\sigma y}-1),\ y>0$$

откъдето, понеже x е произволно реално число, следва окончателното неравенство

/31/
$$|f(x+iy)-f(x)|\le M(e^{\sigma|y|}-1) \qquad x, y \text{ -реални.}$$

По същия начин от теорема 15 може да се извлече неравенството

/32/
$$\left|\int_{z-\mu i}^{z+\lambda i} f(t)\,dt\right| \le M\left|\int_{z-\mu i}^{z+\lambda i} e^{-i\sigma t}\,dt\right| = \frac{M}{\sigma}\left|e^{\sigma(y+\lambda)}-e^{\sigma(y-\mu)}\right|$$

където $0 \le \lambda \le \mu$, $y = \Im m z \ge 0$.

Неравенствата /31/ и /32/ са точни, защото за $f(z) = e^{-i\sigma z}$ се превръщат в равенства.

Прилагайки k пъти неравенството на Бернщайн за всяка функция $f(z) \in B^1_\sigma$, за която $|f(x)| \le M$ получаваме

$$|f^{(k)}(x)| \le \sigma^k M$$

което, както показва функцията $f(z) = \sin \sigma z$ е точно за всяко k

И неравенствата /31/ и /32/ притежават същото свойство, т. е. неравенствата, които се получават чрез няколкократното им прилагане, са точни.

Например от /31/ следва

$$|f(x+2iy) - 2f(x+iy) + f(x)| \le M(e^{\sigma|y|} - 1)^2$$

в което равенство се достига за $f(z) = M e^{-i\sigma z}$.

§ 3. Няколко оценки в пространствата L_p

Както е известно, повечето оценки за максимум-нормата $\sup\limits_{R^1} |f(x)|$ на функциите от експоненциален тип, получени с помощта на интерполационни функции, се пренасят без изменения и за нормите

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{p,a} = \sup_{s \in R^1} \left(\int_s^{a+s} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$a > 0, \quad p \ge 1,$$

които са инвариантни относно транслации, успоредни на реалната ос.

За съжаление далеч не във всички случаи точните оценки за максимума-нормата се получават с интерполационни методи - например в случаите, разгледани в § 1 и § 2 на тази глава, не са известни интерполационни формули, които да водят до целта.

Търсейки изход от това положение Стейн [35] доказа следната

Теорема. Нека $T(f)$ и $S(f)$ са два линейни оператора, инвариантни относно транслации, успоредни на реалната ос, действуващи от B^1_σ в B^1_σ, такива,че $\|T(f)\|_\infty \leq A\|f\|_\infty$ $\|S(f)\|_\infty \leq B\|f\|_\infty$ и освен това за всяко $f \in B^1_\sigma$ имаме

/33/ $$\|T(f)\|_\infty \leq C_\sigma \|S(f)\|_\infty$$

/тук сме положили $\|f\|_\infty = \sup_{R^1} (|f(x)|)$. В такъв случай за елементите от $B^1_\sigma \cap L_p(R^1)$ е в сила неравенството

/34/ $$\|T(f)\|_p \leq C_\sigma \|S(f)\|_p, \quad p \geq 1.$$

При това, ако се знае, че в /33/ равенство се достига само за функции от вида

$$f(z) = Ae^{i\sigma z} + Be^{-i\sigma z},$$

то в /34/ равенство се достига само за функцията $f(z) \equiv 0$.

Доказателството на Стейн е твърде просто. То се базира на неравенството на Хьолдер и на едно интегрално представяне, което е частен случай от това, което ни дава лема 6, § 2, гл.1.

Въпреки всичките си достойнства, теоремата на Стейн, схващана буквално, е неудобна за използване в редица случаи - например, когато се разглеждат тригонометрични полиноми, защото един тригонометричен полином принадлежи на $L_p(-\infty, +\infty)$, $p \geq 1$ само когато се анулира тъждествено. Естествената норма в този случай е $\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$, която благодарение на периодичността на подинтегралната функция може да се запише като $\|f\|_{p,2\pi}$

Теоремата на Стейн лесно се пренася и за този случай - нещо повече, може да се докаже теорема, която да се отнася до всички норми инвариантни относно транслации, успоредни на реалната ос. Ние обаче няма да направим това, защото и тази теорема няма да обхва~~ща~~не всички случаи, които ни интересуват и ще се задоволим с директното установяване на няколко L_p неравенства с метода на Стейн.

Теорема 18. Нека

$$S(\theta)=\sum_{-n}^{n} b_\nu e^{i\nu\theta}$$

е произволен тригонометричен полином от n -ти ред, а $f(z)$ е полином с нули в полуравнината $\Im z\geq 0$. В такъв случай за всяко $p\geq 1$ е в сила неравенството

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\leq |f(-in)|\left(\int_0^{2\pi}|S(\theta)|^p d\theta\right)^{1/p} \tag{35}$$

Доказателство.[1] Да въведем тригонометричният полином

$$\tilde{S}(\theta)=\int_0^{2\pi} S(\theta+t)g(t)\,dt$$

където $g(t)\in L_q[0,2\pi]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и удовлетворява условието

$$\int_0^{2\pi}|g(t)|^q dt=1$$

Да разгледаме линейните оператори

$$L_1(S)=f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta) \quad \text{и} \quad L_2(S)=f(-in)\,S(\theta),$$

които действуват в пространството на тригонометричните полиноми

[1] За краткост ще се ограничим със случая $p>1$. Случаят $p=1$ се разглежда аналогично, но по-просто.

от ред $\le n$. Като си спомним, че според теорема 7 от § 1, гл.2 за всеки полином от ред $\le n$ имаме

/36/ $$\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right| \le |f(-in)| \max_{0\le\theta\le 2\pi}|S(\theta)|$$

получаваме

/37/ $$\left|\int_0^{2\pi} f\left(\frac{d}{d\theta}\right)[S(\theta+t)g(t)]\,dt\right| \le |f(-in)| \max_{0\le\theta\le 2\pi}|\tilde{S}(\theta)|.$$

От друга страна, оценявайки $\tilde{S}(\theta)$ с помощта на неравенството на Хьолдер, намираме

$$\max_{[0,2\pi]}|\tilde{S}(\theta)| \le \left(\int_0^{2\pi}|S(\theta+t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{2\pi}|g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{2\pi}|S(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

понеже $S(\theta)$ има период 2π. По този начин получихме оценката

$$\left|\int_0^{2\pi}\left[f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta+t)\right] g(t)\,dt\right| \le |f(-in)|\left(\int_0^{2\pi}|S(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

откъдето, като положим $\theta = 0$ и вземем пред вид, че $g(t) \in L_q[0,2\pi]$ беше подчинена на единственото условие $\int_0^{2\pi}|g|^q dt = 1$, намираме

/38/ $$\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|^p d\theta\right)^{1/p} \le |f(-in)|\left(\int_0^{2\pi}|S(\theta)|^p d\theta\right)^{1/p}, p\ge 1.$$

С това теоремата е доказана.

В случая $f(z) = z$ се получава L_p аналогът на неравенството на Бернщайн, който се дължи на Зигмунд [44].

Теорема 19. Нека $S(\theta)$ е произволен тригонометричен полином от ред $\le n$ и нека нулите на реалния алгебричен полином лежат в областта, дефинирана с неравенството

$$y^2 \le \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2} \qquad (x+iy=z).$$

В такъв случай имаме

/39/ $$\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(\frac{d}{d\theta}\right)S(\theta)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le |f(in)| \left(\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^p d\theta\right)^{1/p}, \; p \ge 1$$

Теоремата се доказва по същия начин въз основа на теорема 11 от § 1, гл.2.

С помощта на същите съображения от /31/ § 2 за всеки тригонометричен полином от ред $\le n$ получаваме неравенството

/40/ $$\left(\int_0^{2\pi} |f(x+iy)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(e^{n|y|}-1\right)\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \; p \ge 1$$

Неравенствата /38/, /39/ и /40/ са точни - функцията e^{inz} ги обръща в тъждества.

Ще завършим с две L_p оценки за функции от експоненциален тип, които не са непременно тригонометрични полиноми.

Теорема /С.Н.Бернщайн [20, т.2,стр.396]. Нека $f(z)$ е реална функция от експоненциален тип $\le \sigma$, която е монотонна върху реалната ос и удовлетворява неравенството $\sup_{R^1} |f(x)| \le 1$

В такъв случай имаме

/41/ $$|f'(x)| \le \frac{\sigma}{\pi}, \quad -\infty < x < \infty,$$

като знак равенство може да се достигне само за едно единствено x.

Неравенството /41/ е очевидно едно прецизиране на неравенството на Бернщайн в случая, когато се разглеждат функции, удовлетворяващи допълнителните изисквания, формулирани в теоремата.

Ние ще докажем L_p аналога на тази теорема.

Теорема 20. Нека $f(z)$ е реална функция от експоненциален тип $\le \sigma$, която е монотонна върху реалната ос, и нека

$$/42/\qquad \sup_{s\in R^1}\left(\int_s^{a+s}|f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le M\ ,\ a>0\ ,\ p\ge 1$$

В такъв случай имаме

$$\sup_s\left(\int_s^{a+s}|f'(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{\sigma}{\pi}\sup_s\left(\int_s^{a+s}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},\ p\ge 1$$

Доказателство[1]. Да допуснем за определеност, че $f'(x)\ge 0$ и да разгледаме функцията

$$F(z)=\int_s^{a+s} f(z+t)g(t)dt$$

където s е реално и фиксирано, а

$$g(t)=\frac{\left(f'(t)\right)^{p-1}}{\left(\int_s^{a+s}|f'(x)|^p dx\right)^{1/q}}\ \ge 0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ ,\ p>1$$

Не е трудно да се види, че от /42/ следва ограничеността на $f(z)$ върху реалната ос.

Наистина по условие имаме $\int_0^a |f(s+t)|^p dt\le M^p$ за всяко реално s. Прилагайки теоремата за средните стойности, получаваме

$$\int_0^a |f(s+t)|^p dt = a|f(\xi_t+t)|^p\le M^p,\ 0\le \xi_t\le a$$

т.е. във всеки от интервалите $[ka,(k+1)a]$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ намерихме по една точка ξ_k, за която $|f(\xi_k)|\le Ma^{-\frac{1}{p}}$. Понеже без огра-

[1] Отново ще разгледаме само случая $p>1$.

ничение на общността можем да си мислим, че $a \leq \frac{1}{\sigma}$) ограничеността на $f(z)$ следва от една важна теорема на Дафин и Шефер [4, стр. 191].

Сега вече е ясно, че $F(z)$ удовлетворява всички предположения на теоремата на Бернщайн /в частност $F'(x) \geq 0$ / Следователно

/43/ $$\left| \int_S^{a+S} f'(x+t)g(t)dt \right| \leq \frac{\sigma}{\pi} \sup_{R^1} |F(x)|$$

По-нататък, понеже

$$|F(x)| \leq \left(\int_S^{a+S} |f(x+t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_S^{a+S} |g(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \sup_S \left(\int_S^{a+S} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

от /43/ получаваме

$$\left| \int_S^{a+S} f'(t)g(t)dt \right| \leq \frac{\sigma}{\pi} \sup_S \left(\int_S^{a+S} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

или записано по-подробно

/44/ $$\left(\int_S^{a+S} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \frac{\sigma}{\pi} \sup_S \left(\int_S^{a+S} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Тъй като S в лявата страна на неравенството е произволно, теоремата е доказана.

Сега да предположим допълнително, че $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < \infty$

в такъв случай (44) ни дава

$$\left(\int_{s}^{a+s} |f'(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{\sigma}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Оттук, полагайки $s=-\frac{a}{2}$, като оставим a да клони към $+\infty$ получаваме

/45/ $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\sigma}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p>1$$

Въпросът кои са функциите, за които /45/ се превръща в равенство остава открит. Вероятно $f(z)\equiv 0$ е единствената такава функция. Ясно е обаче, че константата $\frac{\sigma}{\pi}$ в /45/ не може да се замени с по-малка.[1]

На Ахиезер [43, стр.365] се дължи следната

Теорема. Нека $f(z)$ е реална цяла функция, монотонно растяща в интервала $[0,+\infty)$, за която са в сила неравенствата

/46/ $$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^{\frac{1}{2}}}, \quad \sigma \geq 0, \ \varepsilon>0$$

и

$$\sup_{0\leq x<\infty} |f(x)| \leq 1$$

В такъв случай имаме

$$f'(x) \leq \frac{\sigma^2}{8}, \quad x\geq 0,$$

като неравенството е точно.

Ще завършим като докажем L_p аналога на тази теорема.

Теорема 21. Нека $f(z)$ е цяла функция от тип $\leq\sigma$ и ред $\frac{1}{2}$, /т.е. функцията удовлетворява /46/ и нека

---

1) В смисъл, че не съществува по-малка константа за която (45) е в сила за всяко $p\geq 1$.

$$\sup_{s}\left(\int_{s}^{a+s} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \; a>0, \; s\geq 0$$

В такъв случай имаме

$$\sup_{s\geq 0}\left(\int_{s}^{a+s} |f'(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{\sigma^2}{8} \sup_{s\geq 0}\left(\int_{s}^{a+s} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Доказателство. Въвеждаме функцията

$$F(z) = \int_{s}^{a+s} f(z+t) g(t) dt, \quad a>0,$$

където $s \geq 0$ е фиксирано, а $g(t)$ е дефинирана, както в теорема 20.

Очевидно $F(z)$ е функция от експоненциален тип $\leq\sigma$ и ред $\frac{1}{2}$, която е реална и монотонно растяща върху реалната ос. За да можем да приложим теоремата на Ахиезер, остава да покажем, че тя е ограничена за $x \geq 0$ Очевидно, достатъчно е да установим, че $f(z)$ има това свойство. За тази цел да разгледаме функцията $f(z^2)$, която очевидно принадлежи на E_{σ}^{1} и за която имаме

$$\int_{s}^{a+s} |f(x^2)|^p dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{a+s}} |f(t)|^p \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2}\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{a}+\sqrt{s}} |f(t)|^p dt \leq M_1$$

за всички стойности на $s \geq 1$. Понеже

$$\int_{-s}^{a-s} |f(x^2)|^p dx = \int_{s-a}^{s} |f(x^2)|^p dx, \quad s \geq 0$$

доказахме, че

$$\sup_{R^1} \int_s^{a+s} |f(x)|^p dx \le M_2$$

и следователно $f(x^2)$ е ограничена за $x \in R^1$.

Разсъждавайки, както в предната теорема, завършваме доказателството.

По същия начин се установява и неравенството

$$\left(\int_0^\infty |f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\sigma^2}{8} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

§4. Още един поглед върху неравенството на Бернщайн.

На Кронекер принадлежи една забележителна теорема в теорията на Диофантовите приближения, която хвърля нова светлина върху неравенството на Бернщайн.

Теорема на Кронекер [45, стр. 181]. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са реални числа, линейно независими над полето на рационалните числа. По-нататък, нека $\varepsilon > 0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са произволни реални числа. Тогава съществува такова реално x, че са в сила неравенствата

$$\left| e^{i\lambda_j x} - e^{i\alpha_j} \right| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тази теорема може да се изкаже в следната еквивалентна форма:

Теорема [45, стр. 181]. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са реални числа, линейно независими над полето на рационалните, $\lambda_0 = 0$, а $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ са произволни комплексни числа. В такъв случай

$$\sup_{x \in R^1} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j e^{i\lambda_j x} \right| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

За някои класи от цели функции теоремата на Кронекер прави неравенството на Бернщайн очевидно и води до обобщения недостъпни за методите използвани досега.

Дефиниция. Нека

/47/ $$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\lambda_\nu z}$$

където числата $\{\lambda_\nu\},\ \nu=0,\pm 1,\dots$ са реални и $\sum_{-\infty}^{+\infty}|a_\nu|<\infty$

Множеството $\{\lambda_\nu\},\ \nu=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ се нарича спектър на $f(z)$.

Очевидно ако спектърът на $f(z)$ се съдържа в интервала $[-\sigma,\sigma]$, то $f(z)\in B^1_\sigma$.

Теорема 22. Нека спектърът Δ на $f(z)$ се съдържа в интервала $[-\sigma,\sigma]$. Нека $\lambda_0=0$ и всяка крайна система от числа $\{\lambda_\nu\}\in\Delta,\ \nu\neq 0$ е линейно независима над полето на рационалните числа.

В такъв случай за всеки полином $g(z)$ имаме

$$\left|g\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right|\leq M\,A(\Delta)$$

където $M=\sup_{R^1}|f(x)|$ и $A(\Delta)=\sup_{\nu}|g(i\lambda_\nu)|$

Доказателство. Да разгледаме експоненциалната сума

$$f_n(x)=\sum_{-n}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}$$

Според теоремата на Кронекер имаме

$$\sup_{R^1}|f_n(x)|=\sum_{-n}^{n}|a_\nu|$$

По същите съображения

$$\sup_{R^1}\left|g\left(\frac{d}{dx}\right)f_n(x)\right|=\sum_{-n}^{n}|g(i\lambda_\nu)||a_\nu|\leq M\,A(\Delta)$$

Понеже очевидно $g\left(\frac{d}{dx}\right)f_n(x)$ клони равномерно към $g\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)$ върху реалната ос, теоремата е доказана.

Следствие. Нека $g(z)$ е полином с реални коефициенти с нули в областта $\mathcal{D}$ дефинирана с неравенството

$$y^2 \leq x^2 + \frac{\sigma^2}{2} \qquad (z = x + iy)$$

В такъв случай имаме

$$\sup_{R^1} \left| g\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) \right| \leq |g(i\sigma)| \sup_{R^1} |f(x)|$$

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случаите $g(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha}), \alpha \in \mathcal{D}$ и $g(z) = z - \alpha$, α - реално. Понеже втория случай е тривиален, ще разгледаме само първия. И така нека $g(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$. Понеже имаме

$$|g(it)|^2 = (t^2 - |\alpha|^2)^2 + 4(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 t^2$$

неравенството

$$|g(it)| \leq |g(i\sigma)| \quad , \quad -\sigma \leq t \leq \sigma,$$

от което се нуждаем е равносилно с неравенството

$$(t^2 - |\alpha|^2)^2 + 4(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 t^2 \leq (\sigma^2 - |\alpha|^2)^2 + 4(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 \sigma^2$$

т.е. с неравенството

$$2|\alpha|^2 - 4(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 \leq \sigma^2 + t^2,$$

което, след като въведем означенията $\mathrm{Re}\,\alpha = x$, $\mathrm{Im}\,\alpha = y$ взема вида

$$y^2 \leq x^2 + \frac{\sigma^2 + t^2}{2} \quad , \quad -\sigma \leq t \leq \sigma$$

и очевидно е вярно, защото $\alpha \in \mathcal{D}$.

С това формулираното следствие е доказано.

Полученият резултат ни кара да предполагаме, че теорема **11** е вярна при по-общи предположения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.A.C.Paley and N.Wiener, Fourier transforms in the complex domain, AMS publication, New York, 1934
2. M.Plancherel et G.Polya, Fonctions entieres et integrales de Fourier multiples, Comment.Math.Helv.9, 224-248/1937/, 110-163 10/1937/.
3. L.Schwartz, Theorie des distributions, Paris, Hermann, 1951.
4. R.P.Boas, Entire functions, New York, Academic Pres, 1954.
5. L.Hörmander, Linear partial diff.operators, Berlin, Springer, 1963
6. И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Москва, 1959
7. Г.Е.Шилов, Математический анализ, второй специальный курс, Москва Москва 1965
8. Г.Е.Шилов, Математический анализ, специальный курс, Москава 1961.
9. A.Zygmund, Trigonometric Series, vol.2, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
10. N.Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.
11. R.P.Boas, Representations for entire functions of exp.type, Ann.of.Math./2/, 39, 269-289/1938/, correction ibid 40, 948/1938/.
12. Н.Данфорд и Дж.Шварц, Линейные операторы, Общая теория, Москва, 1962/Превод от английски/.
13. S.Bernstein, Leçons sur les proprietés extremales et la meilleure approximation de fonctions analytiques d'une variable reelle, Paris, 1926.
14. C.L.Siegel, Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein Extremalproblem, Acta Math.65/1935/, 307-323.
15. L.Tschakaloff, Zweite Lösung der Aufgabe 105, Jahresbericht der DMV, 43, 11-13/1934/
    G.Szegö, Lösung der Aufgabe 105, ibid, 10-11.

16.S.P.Jain,An analogue of a theorem of Phragmen-Lindelöf, J.Indian Math.Soc.19,241-245 /1932/

17.J.Korevaar,An inequality for entire functions of exp.type , Niew Arch.Wiskunde /2/,23,55-62 /1949/.

18.С.М.Николский,Неравенства для целых функций конечной степени и их применения,Труды математическото института имени Стеклова,38,244-278 /1951/

19.S.Bernstein,Sur une propriete des fonctions entieres,C,R.Acad. Sci.Paris,t.176/1923/,1603-1605.

20.С.Н.Бернштейн,Собрание сочинения,т.1 и 2,Москва 1952.

21.Н.И.Ахиезер,О некоторых свойствах целых трансцендентных функций конечной степени,ДАН СССР 63,№5,1948,475-478.

22.Б.Я.Левин,Распределение корней целых функций,Москва,1956.

23.N.G.De Bruijn,Inequalities concerning polynomials in the complex domain,Nederl.Acad.Wetensch.Proc.50/1949/,1265-1272.

24.К.Дочев,Об одной теореме С.Н.Бернштейна,ДАН СССР,146,№1, 17-19,1962.

25.Т.Аргирова и Т.Генчев,Сборник от задачи по теория на аналитичните функции,София 1968.

26.N.Obrechkoff,Sur les zeros des polynômes,C.R.Acad.Sci.Paris, 209/1939/,1270-1272.

27.N.Obrechkoff,Sur les racines des equations algebriques,Tohoku Math.J.38/1933/,93-100.

28.R.P.Boas,Inequalities for functions of exp.type,Math.Scand. 4/1956/,29-32.

29.T.G.Genchev,A Gauss-Lucas' type theorem on trigonometric polynomials,C.R.Acad.Bulg.Sci.4,1975.

30.T.G.Genchev,On the integrability of the entire functions of exp.type,to appear in C.R.Acad.Bulg.Sci.9,1975.

31.T.G.Genchev,Inequalities for entire functions of exp.type, to appear in Proc.Amer.Math.Sos.1975.

32.T.G.Genchev,Remarks on Wiener-Paley-Schwartz theorem,to appear in Serdica.

33 Т. Генчев, Об одном обобщении неравенства С.Н.Бернштейна, под печат в ДАН СССР, 1975

34.T.G.Genchev,Entire functions with polynomial growth on $\mathbb{R}^n_x$,
to appear in J.of Math.Anal.and Applications,

35.E.M.Stein,Functions of exp.type,Ann.of Math.65/1957/,582-592.

36.P.Turan,Über die Ableitung von Polynomen,Composito Math.
7/1939/,89-95.

37.P.D.Lax,Proof of a conjecture of P.Erdos on the derivative of
a polynomial,Bull.Amer.Math.Sos.50/1944/,509-513.

38.Н.Обрешков,Нули на полиномите,София 1963.

39.К.Дочев,Върху една теорема на Н.Обрешков,Изв.на мат.инст.на БАН,
т.VI,1962,83-88.

40.Н.Обрешков,Върху някои теореми за нулите на реалните полиноми,
Изв.на мат.инст.на БАН,т.IV,кн.2,1960,17-41.

41.L.Weisner,On the regional location of the zeros of certain
functions,Tohoku Math.J.44/1937/,175-178.

42.Б.М.Левитан,Об одном обобщении неравенств С.Н.Бернштейна и
H. Bohr'a ,ДАН СССР,15/1937/

43.Н.И.Ахиезер,Лекции по теории аппроксимации,Москва 1965.

44.A.Zygmund,A remark on conjugate functions,Proc.London Math.Soc.
(2),34,392-400,1932.

45.Y.Katznelson,An introduction to harmonic analysis,New York,1968

46. K. Дочев, Mathematica (Cluj), Vol 7(30), 2, 1965, pp. 205-209

47. K. Дочев, О некоторых экстремальных свойствах многочленов, ДАН СССР, 153, №3, 519-521

48. Н.Н. Мейман, Диф. неравенства и некоторые вопросы распределения нулей целых и однозначных анал. ф-ций, УМН, 3, 1952, 3-62

СЪДЪРЖАНИЕ