Специализиран научен съвет
по информатика и приложна математика
при ВАК

Наташа Кирилова Дичева

Оптимално възстановяване на функции и интеграли върху двумерна област

Автореферат на дисертация

за присъждане на образователната и научна степен

доктор

по научната специалност 01.01.09

Научен консултант:
акад.проф.д.м.н. Борислав Боянов

София, 2001 г.

Специализиран научен съвет
по информатика и приложна математика
при ВАК

Наташа Кирилова Дичева

Оптимално възстановяване на функции и интеграли върху двумерна област

Автореферат на дисертация

за присъждане на образователната и научна степен
доктор
по научната специалност 01.01.09

Научен консултант:
акад.проф.д.м.н. Борислав Боянов

Рецензенти:
1. проф. д.м.н. Тодор Гичев
2. ст.н.с. д-р Владимир Христов

София, 2001 г.

Дисертационният труд е обсъден и препоръчан на СНС по информатика и приложна математика при ВАК за разкриване на процедура за защита на разширено заседание на кат.Висша математика при УАСГ-София на 09.11.2000г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 23.04.2001г. от 13:30 часа в Заседателната зала на Института по математика и информатика при БАН, ул. Акад. Г. Бончев бл.8, София, на открито заседание на СНС по информатика и приложна математика при ВАК.

Автор: Наташа Кирилова Дичева

Заглавие: Оптимално възстановяване на функции и интеграли върху двумерна област.

Актуалност на проблема и цел на дисертационния труд

Известни са два подхода при конструиране на оптимални апроксимационни формули. Исторически първият възникнал подход се основава на идеята дадена апроксимационна формула да бъде точна за алгебрични полиноми от възможно най-висока степен. Пример за този подход са класическите интерполационни схеми, квадратурни формули и др.

През 50-те години Колмогоров поставя задачата за намиране на квадратурни формули от определен тип, които са с минимална грешка върху даден клас от функции. Формира се нов подход, наречен оптимално възстановяване, който съчетава класическата математика с ефективни изчислителни методи и алгоритми. Главен проблем при оптималното възстановяване е да се конструират и характеризират най-добрите методи за възстановяване на линеен функционал за различни класове от функции.

Нека H е дадено линейно пространство. Предполагаме, че L и $L_1, \ldots, L_n$ са линейни функционали, дефинирани над H. Проблемът е да се намери най-добрия метод $S_* f$ за приближение на Lf на базата информация $Tf = (L_1 f, L_2 f, \ldots, L_n f)$, където f принадлежи на клас от функции B в H. Грешката на даден метод Sf се определя от

$$E(S) = \mathrm{sup_{f \in B}} |\mathrm{Lf - Sf}|.$$

Методът S_* се нарича най-добър метод за възстановяване на функционала Lf при информация Tf, ако неговата грешка е минимална измежду всички възможни методи:

$$E(T) := E_{S_*} = \mathrm{inf_S E(S)} = \mathrm{inf_S sup_{f \in B}} |\mathrm{Lf - Sf}|. \tag{1}$$

Ще цитираме известната теорема на Пеано, необходима понататък [11]:

Теорема на Peano. Ако $Fx, x \in C^q[a, b]$ е линеен функционал, който се анулира за полиноми от степен $q-1$, и $F((t-u)_+^{q-1})$

е интегруема по отношение на u, то съществува $K(u)$ такава, че

$$Fx = \int_a^b x^{(q)}(u)K(u)du.$$

Ще търсим оптимално възстановяване в смисъл на Сард [44], [45]. Нека даден линеен функционал $Lx, x \in C^q[a,b]$ се апроксимира чрез $Ax = \sum C_j x(a_j)$ с остатък $Rx = Lx - Ax$. Предполага се, че Rx се анулира за полиноми от степен $q-1$. Това е изпълнено, ако апроксимиращите функционали Ax, които се разглеждат, са точни за полиноми от степен $q-1$. За функционала на грешката Rx са изпълнени условията от теоремата на Пеано, откъдето

$$Rx = \int_a^b K(u)x^{(q)}(u)du.$$

От неравенството на Коши-Буняковски при ограничена L_2-норма на $q-$та производна следва

$$|Rx|^2 \leq c^2 \int_a^b K^2(u)du.$$

Тогава казваме, че апроксимиращият функционал $\hat{A}x$ е най-добър в смисъл на Сард, ако $\hat{A}x$ минимизира горния интеграл в смисъла на съответните им функции от Теоремата на Пеано, т.е.

$$\int_a^b \hat{K}^2(u)du \leq \int_a^b K^2(u)du.$$

В този смисъл ще търсим оптимално възстановяване и на линеен функционал от функция на две променливи.

През 1965 Смоляк [54] доказва съществуването на най-добър метод за оптимално възстановяване с линейна структура, което дава тласък на по-нататъшните изследвания.

Лема на Smolyak. Ако линейните функционали Lf и $L_jf, j = 1, 2, \ldots, n$ са дефинирани над изпъкнало и централно симетрично тяло B в линейно пространство и

$$\sup\{\mathrm{Lf}|\mathrm{f} \in \mathrm{B} : \mathrm{L_jf} = 0, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\} < \infty,$$

тогава съществуват реални числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такива, че се достига грешката $E(T)$ на най-добрия метод:

$$E(T) = \sup_{\mathrm{f} \in \mathrm{B}} |\mathrm{Lf} - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_j L_j f}|.$$

Редица статии третират този въпрос за клас от функции на една променлива [4],[5],[6],[7],[8], [9],[34],[35],[36]. Значително по-малко са изследванията за оптимално възстановяване на линеен функционал върху клас от функции на две променливи [32],[33],[38],[42].

Основна цел на дисертационния труд е да се намери оптимално възстановяване на линеен функционал за клас от функции на две променливи, което би могло да се алгоритмизира и реализира програмно за конкретни случаи. За целта се разглеждат се два типа линейни методи за оптимално възстановяване на линеен функционал върху клас на Соболево пространство $B = \{f \in W_2^{n,m}[a, A] \times [b, B] : \|f^{(n,m)}\| \leq 1\}$: линейни методи, точни върху пространството от блендинг-функции $B^{(n,m)}$, и произволни линейни методи, но при зададена допълнителна информация–следите на функцията върху една мрежа $G^{n,m}$. Оттук са изведени две апроксимационни формули за оптимално възстановяване на линеен функционал.

Доказан е аналог на Теоремата на Schoenberg за функция на две променливи, Като конкретно приложение на теоретичните резултати за оптимално възстановяване на произволен линеен функционал е получено оптимално възстановяване на функция, а също и оптимални кубатурни формули. Резултатите са тествани със собствени програми.

Структура на дисертацията

Дисертацията се състои от въведение, четири глави, цитирана литература от 61 заглавия, подредени по азбучен ред, като последните 4 статии са на автора и са означени по различен начин, и Приложения към Глава 2, 3 и 4. Приложенията се състоят от 23 графики и числени резултати от програми. Страниците на приложенията са номерирани отделно от основния текст . След всеки параграф или теорема има текст, поясняващ тестуването на резултат (теорема) с пример в Приложението към съответната глава.

Кратко съдържание на дисертационния труд

Основни понятия

Означаваме, както е общоприето, класа от непрекъснато диференцируеми функции с

$$C^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]} := \{f | f^{(k,l)} = \frac{d^{k+l}f}{dx^k dy^l} \text{ е непр.}, 0 \le k \le n, 0 \le l \le m\}.$$

Разглеждаме подпространството от диференцируеми функции на две променливи, за които смесената производна от ред (n, m) е нула:

$$B^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]} = \{f \in C^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]} | f^{(n,m)} \equiv 0\}. \tag{2}$$

Функциите от това подпространство наричаме **блендинг-функции** от ред (n, m).

Всяка блендинг–функция $b(x, y) \in B^{n,m)}_{[a,A]\times[b,B]}$ може да се представи като

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x)a_i(y) + \sum_{j=1}^{m} m_j(y)b_j(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} l_i(x) m_j(y),$$

където $l_i(x), m_j(y), i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$ са някакви базисни полиноми от π_{n-1} и π_{m-1} съответно. Тези функции се наричат още блендиращи интерполанти, тъй като решават следната интерполационна задача:

При дадени стойности

$$a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq A, \quad b \leq y_1 < \ldots < y_m \leq B$$

и при дадена функция $f(x,y)$ да се намери $b(x,y) \in B^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]}$, която интерполира f по мрежата

$$G^{n,m} = \{(x,y) \in [a,A] \times [b,B] | \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \prod_{j=1}^{m}(y - y_j) = 0\}, \quad (3)$$

т.е.

$$b(x_i, y) = f(x_i, y), y \in [b,B], i = 1,2,\ldots,n$$
$$b(x, y_j) = f(x, y_j), x \in [a,A], j = 1,2,\ldots,m.$$

Ако $l_i(x)$ и $m_j(y)$ са базисните полиноми на Лагранж, то блендинг-функцията

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) f(x_i, y) + \sum_{j=1}^{m} m_j(y) f(x, y_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) l_i(x) m_j(y), \quad (4)$$

е решение на горната задача.

Функциите

$$f(x_i, y), i = 1,2,\ldots,n, \quad f(x, y_j), j = 1,2,\ldots,m$$

се наричат **следи на функцията** f по мрежата $G^{n,m}$, а горната функция (4) наричаме **блендираща интерполанта по Лагранж** .

Функцията $s(x)$ се нарича **сплайн-функция** [11] от степен r с възли $x_1, \ldots, x_n$, ако $-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = \infty$ и

1. $s(x)$ върху (x_k, x_{k+1}) е полином от степен не по-голяма от r за $k = 0, 1, \ldots, n$;
2. $s(x), s'(x), \ldots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати в $(-\infty, \infty)$.

Под **естествен сплайн** [11]от степен $2r-1$ с възли $a_1, \ldots, a_n$ разбираме сплайн-функция от степен $2r-1$, чиято рестрикция върху $(-\infty, a_1)$ и (a_n, ∞) е полином от степен $r-1$.

Ще използваме също стандартното означение $z_+ =: \max(z, 0)$.

Под **В-сплайн с възли** $x_0, \ldots, x_r$ **от степен** $r-1$[11], разбираме разделената разлика за отсечената степен

$$B_{[x_0,\ldots,x_r]}(t) := (.-t)^{r-1}[x_0, \ldots, x_r].$$

Основни резултати

Глава 1 се състои от 3 параграфа.

В параграф 1.1 е разгледан случая за оптимално възстановяване на линеен функционал върху класа на Соболево пространство $B = \{f \in W_2^q[a,b] : \|f^{(q)}\| \leq 1\}$, чрез линейни методи, точни за полиноми от степен $q-1$, където се дефинира Соболевото пространство

$$W_2^q[a,b] := \{f \in C^{q-1}[a,b] : f^{(q-1)}\text{е абс. непр.}, \|f^{(q)}\| < \infty\}.$$

Резултатът е получен в явна форма и някои от изчислителните процедури са използвани по-нататък за двумерния случай:

Теорема 1.1. Грешката $E(T)$ и коефициентите $\{A_j\}$ на най-добрия линеен метод за възстановяване на Lf върху класа от функции B се получават от най-добрата линейна апроксимация на LK в пространството $S = \mathrm{span}\{\mathrm{L_j K}\}_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}}$, а именно

$$E(T) =: \inf_{\mathrm{C_j}} \|\mathrm{LK} - \sum \mathrm{C_j L_j K}\| = \|\mathrm{LK} - \sum \mathrm{A_j L_j K}\|,$$

където $K := K_t(x)$ е отсечената степен – ядро

$$K_t(x) = \frac{(x-t)_+^{q-1}}{(q-1)!}.$$

Въведено е по естествен начин скаларно произведение, пораждащо L_2–нормата. Най-добрата апроксимация е намерена чрез ортогонализация по Gramm - Schmidt на пространството S и коефициентите на оптималния линеен метод са получени в явен вид в Теорема 1.2.

Теорема 1.2.Оптималното възстановяване за Lf при базата информация $Tf = (L_1 f, \dots, L_n f)$ е

$$Lf \sim L\left(\sum_{j=1}^{n} L_j f \sum_{i=j}^{n} \frac{(K, Q_i K)}{(Q_i K, Q_i K)} f_{ij}\right),$$

Тук f_{ij} са константи и $Q_i K, k = 1, 2, \dots, n$ е намерената ортогонална база за S.

В 1.3 се възстановява оптимално линеен функционал върху клас от функции на две променливи. Предварително в 1.2 се доказват две формули от Тейлоров тип и теореми от типа на Пеано, които са известни и с друга формулировка [45].

Теорема 1.4 (Формула 1 от Тейлоров тип). Ако $f(x, y) \in C^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]}$, то

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k,0)}(a,y)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{i=0}^{m-1} f^{(0,i)}(x,b)\frac{(y-b)^i}{i!} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(k,i)}(a,b)\frac{(x-a)^k(y-b)^i}{k!i!} + \int_a^A\int_b^B K(x,t)K(y,\tau)f^{(n,m)}(t,\tau)dtd\tau,$$

където отсечената степен бележим с

$$K(x,t) := \frac{(x-t)_+^{n-1}}{(n-1)!},\quad K(y,\tau) := \frac{(y-\tau)_+^{m-1}}{(m-1)!}.$$

В Следствие 1.1 е получена Теорема от типа на Пеано за интегрално представяне на линейни функционали, които се анулират върху пространството от блендинг-функции:

Следствие 1.1 (Теорема 1 на Peano) Нека $f \in C^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]}$ и за линейния функционал L е изпълнено

$$Lp = 0, \quad \forall p \in B^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]}.$$

Ако $L(K(x,t)K(y,\tau))$ е интегруема, то

$$Lf = \int_a^A\int_b^B L(K(x,t)K(y,\tau))f^{(n,m)}dtd\tau.$$

Втората формула от Тейлоров тип също е известна и е от особена важност по-нататък. Тя представя всяка функция със степен на гладкост (n, m) като сума от своя блендираща интерполанта по една (n, m) мрежа и интегрален остатък, включващ грешката от приближението на отсечената степен с интерполационния полином на Лагранж по x и y съответно.

Теорема 1.5 (Формула 2 от Тейлоров тип). Ако $f(x, y) \in C^{n,m}_{[a,A]\times[b,B]}$ и $x_1, \ldots, x_n$ са в интервала $(a, A), y_1, \ldots y_m$ са в (b, B), тогава

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y) l_{nk}(x) + \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j) \bar{l}_{mj}(y) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) l_{ni}(x) \bar{l}_{mj}(y) + \int_a^A \int_b^B K_n(x, t) K_m(y, \tau) f^{(n,m)}(t, \tau) dt d\tau,$$

където $l_{nk}(x), \bar{l}_{mj}(y)$ са полиномите на Лагранж и

$$K_n(x, t) := K(x, t) - L_n(K(., t); x) = K(x, t) - \sum_{i=1}^{n} K(x_i, t) l_{ni}(x), \quad (5)$$

$$K_m(y, \tau) := K(y, \tau) - L_m(K(., \tau); y) = K(y, \tau) - \sum_{j=1}^{m} K(x, y_j) l_{mj}(y) \quad (6).$$

Следствие 1.3 е друг аналог на Теоремата на Пеано на базата на тази формула.

В параграф 1.3 при скаларно произведение

$$(f, g) := \int_a^A \int_b^B f(x, y) dx dy$$

е разгледан класа от функции на Соболево пространство с L_2-норма

$$B = \{f \in W_2^{n,m}[a, A] \times [b, B] : \|f^{(n,m)}\| \leq 1\}.$$

За този клас функции са разгледани два типа линейни методи: точни върху пространството от блендинг-функции и линейни методи без ограничения, но при допълнителна информация– зададени следи на функцията.

За първия тип методи е получено представяне в Теорема 1.6 за оптимално възстановяване на линеен функционал на базата на първата формула от Тейлоров тип и Следствие 1.1:

Теорема 1.6. Грешката $E(T)$ и коефициентите $\{A_j\}$ на най-добрия метод за възстановяване на Lf при зададена база $Tf = (L_1 f, \ldots, L_N f)$ върху класа B могат да се получат от най–добрата линейна апроксимация на $L(K_x K_y)$ в $S = \mathrm{span}\{\mathrm{L_j(K_x K_y)}\}, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$ и имат вида

$$Lf \sim \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=j}^{N} \frac{(L(K_x K_y), Q_i(K_x K_y))}{(Q_i(K_x K_y), Q_i(K_x K_y))} f_{ij} L_j f,$$

$$E(T) = \|L(K_x K_y) - \sum A_j L_j(K_x K_y)\|,$$

където за по-кратко означихме $K_x := K(x,t), K_y := K(y,\tau)$, а коефициентите f_{ij} се определят по аналогия с едномерния случай.

За втория тип линейни методи не налагаме ограничения, но изискваме допълнителна информация – зададени следи на функцията по мрежата $G^{n,m}$. При $f \in B$ се разглежда функцията $f_0 := f - b_f \in B$, към която се прилага функционала на грешката и съответните оценки отгоре. Доказва се, че

Теорема 1.7. Проблемът за намиране на най-добър линеен метод за оптимално възстановяване на Lf върху класа от функции B при горните предположения е еквивалентен с проблема за намиране на най-добра апроксимация на $L(K_n(x,t)K_m(y,\tau))$ в линейната обвивка $S = \mathrm{span}\{\mathrm{L_j(K_n K_m)}\}_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}}$, като K_n, K_m е грешката от приближението на отсечената степен с интерполационната формула на Лагранж, определени съответно с (5) и (6).

Теорема 1.8. Ако е известна блендиращата интерполанта b_f за всяко f, то оптималното възстановяване на Lf на базата информация $Tf = (L_1 f, L_2 f, \ldots, L_N f)$ върху класа B е

$$Lf \sim Lb_f + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=j}^{N} \frac{(L(K_n K_m), Q_i(K_n K_m))}{(Q_i(K_n K_m), Q_i(K_n K_m))} f_{ij} L_j(f - b_f),$$

Теорема 1.9 е аналог на теоремата на Shoenberg за функция на две променливи, която може да се използва за оптимално възстановяване на произволен функционал, ако е известно оптималното възстановяване на функцията при една и съща база информация:

Теорема 1.9. Нека е дадена базата информация

$$Tf = (L_1 f, \ldots, L_N f)$$

и $F_f(x, y)$ е оптималното възстановяване за f. Ако L е линеен функционал, то оптималното възстановяване за Lf при същата база Tf е LF_f.

Глава 2 се състои от 3 параграфа. Възстановява се функция на една променлива, като е намерено удобно за програмиране представяне

Теорема 2.1. Оптималното възстановяване за $f(x)$ от класа $B = \{f \in W_2^q[a, b] : \|f^{(q)} \leq 1\}$ в смисъл на Sard при дадена информация $Tf = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$ е естествения сплайн, интерполиращ тези точки , и се дава с

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{n} f(a_j) \sum_{i=j}^{n} f_{ij} \frac{\sum_{k=1}^{i} f_{ik} I_k(x)}{\sum_{s=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} f_{is} f_{ir} I_r(a_s)},$$

а интегралите $I_j(x)$ са

$$I_j(x) = \int_a^b (x - t)_+^{q-1} (a_j - t)_+^{q-1} dt.$$

Те участвуват в почти всички апроксимационни формули понататък като база функции. Пресмята се, че

$$I_j(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\binom{q-1}{k}}{2q - k - 1} (\mathrm{min(a_j, x) - a})^{\mathrm{2q-k-1}} |\mathrm{a_j - x}|^{\mathrm{k}}. \tag{7}$$

Показано е, че $I_k(x)$ е сплайн-функция с възел a_k от степен $2q-1$ за $x \leq a_k$ и от степен $q-1$ за $x \geq a_k$. Разгледани са още случаите на оптимално възстановяване на функция при зададени локални средни стойности и зададени първи n момента, т.е. ако

$$L_j f = \int\limits_{a_j}^{b_j} f(x)dx,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

или съответно

$$L_j f = \int_a^b f(x)x^j dx, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В параграф 2.2 се възстановява функция на две променливи по два начина:

1. Оптимално възстановяване на f чрез линейни методи, точни за блендинг-функции е

$$f \sim \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=j}^{N} f_{ij} f(a_j, b_j) \frac{\sum_{l=1}^{i} f_{il} I_n(x, a_l) I_m(y, b_l)}{\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i} f_{ir} f_{is} I_n(a_r, a_s) I_m(b_r, b_s)},$$

Интегралите I_n, I_m са от вида (7). В този случай се получава сплайн-повърхнина от степен $(2n-1, 2m-1)$..

2. Оптимално възстановяване чрез линеен метод при зададени дискретни стойности и допълнителна информация–следите на функцията върху една (n, m) мрежа. Явната формула е дадена в Теорема 2.3.

Теорема 2.3. Оптималното възстановяване на функция от класа B при зададени точки и нейни следи се дава с израза

$$f(x, y) \sim b_f(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=j}^{N} f_{ij} \frac{\sum_{k=1}^{i} f_{ik} S(x, a_k) S(y, b_k)}{\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i} f_{is} f_{ir} S(a_r, a_s) S(b_r, b_s)} (f(a_j, b_j) - b_f(a_j, b_j)),$$

където в $S(x, a_k)$ участвуват интегралите-сплайни $I_k(x)$ от вида (7), аналогично и в $S(y, b_k)$. На тази база се доказват някои свойства на получената интерполираща повърхнина в Теорема 2.4, напр. получената повърхнина е сума от блендиращата интерполанта и сплайн-повърхнина от степен $(2n-1, 2m-1)$.

Получените резултати са тествани със собствени програми на езика наMATLAB v.4 . Примерите са дадени графично, като има и разпечатка на получени числени резултати.

В Глава 3 се търси оптимално възстановяване на интеграли.

Най-напред е получена оптимална квадратурна формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx \sim \sum_{j=1}^n f(a_j) \sum_{i=j}^n f_{ij} \frac{\sum_{k=1}^i f_{ik} \int\limits_a^b I_k(x)dx}{\sum_{s=1}^i \sum_{r=1}^i f_{is} f_{ir} I_r(a_s)},$$

като участващите интеграли са пресметнати точно.

В 3.2 са получени две кубатурни формули:

Теорема 3.1. Оптималното възстановяване на интеграл по зададени стойности чрез линеен метод, точен върху пространството от блендинг- функции, е

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y)dxdy \sim$$

$$\sim \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N f_{ij} f(a_j, b_j) \frac{\sum_{l=1}^i f_{il} \int_a^A I_n(x, a_l)dx \int_b^B I_m(y, b_l)dy}{\sum_{r=1}^i \sum_{s=1}^i f_{ir} f_{is} I_n(a_r, a_s) I_m(b_r, b_s)}.$$

Всички членове тук са пресмятани преди, а двата интеграла в числителя също са пресметнати точно.

Теорема 3.2. Оптималното възстановяване на интеграл чрез произволен линеен метод по зададени дискретни стойности и следи на функцията е

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y)dxdy \sim \int_a^A \int_b^B b_f(x,y)dxdy +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N f_{ij} \frac{\sum_{k=1}^i f_{ik} \int_a^A S(x, a_k) \int_b^B S(y, b_k)}{\sum_{r=1}^i \sum_{s=1}^i f_{is} f_{ir} S(a_r, a_s) S(b_r, b_s)} (f(a_j, b_j) - b_f(a_j, b_j)),$$

В 3.3 е разгледана кубатурната формула

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y)dxdy \sim \int_a^A \int_b^B b_f(x,y)dxdy,$$

която е точна върху класа $B^{n,m}$. Задачата е да се намерят тези възли, при които грешката на тази формула е минимална. Доказано е в Лема 3.1, че тази задача се свежда до намиране на оптимални възли за еднократни интеграли

$$E^{*p} = \mathrm{infE}(\mathrm{x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m}) = \mathrm{inf_{x_1,\dots,x_n}} \int \mathrm{F(t)dt}\ \mathrm{inf_{y_1,\dots,y_n}} \int \Phi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Като приложение на този резултат в Теорема 3.3 се доказва, че оптималната блендираща мрежа за класа от функции

$$B = \{f(x,y), x \in [0,a], y \in [0,b], \|f^{(1,1)}\| \leq 1\}$$

се състои от средните линии на правоъгълната дефиниционна област. Намерен е вида на формулата и грешката. Този резултат е получен независимо и в [39] по друг начин.

В Глава 4 се изследва колокационната матрица от двумерни B-сплайни и начин за пресмятане на детерминантата ѝ в термините на новите B-сплайни, асоциирани с подразделяне на възлите (refinement). Първоначално поставената задача е да се търси характеризация на точките в равнината, за които интерполационния проблем чрез B-сплайни има решение.

В едномерния случай Schoenberg- Whithny [46, 47] намират условие за неособеност на колокационната матрица, а именно ако точките са подходящо разположени спрямо възлите (interlacing condition).В двумерния случай все още няма пълна характеризация на конфигурациите от точки, които могат да бъдат интерполирани, освен в някои частни случаи [16], [17], [19], [40].

Глава 4 се състои от 4 параграфа. В 4.1 се цитират известни теореми и се дефинира понятието подразделяне.

Нека $x_0 \leq \dots \leq x_r$ и $x = \{x_i\}_{i=0}^r$. Ще казваме, че $y = \{y_i\}_{i=1}^{N+r}, y_i \leq y_{i+1}$ е **подразделяне** за x, ако точките y се получават от x чрез добавяне на нови точки $\xi = \{\xi_i\}$, така че $x_0 < \xi_i < x_r$.

Дефинираме $B-$сплайн с възли $x_0, ..., x_r$ от ред r

$$B_{[x_0,...,x_r]}(t) := (. - t)_+^{r-1}[x_0, ..., x_r].$$

Важна е Теорема 4.2 [11], според която всеки В-сплайн с фиксирани възли може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на нови В-сплайни, асоциирани с подходящо подразделяне на възлите.

В параграф 4.2 се изследва колокационната матрица за двумерни В-сплайни. Теорема 4.5 е аналог на Теорема 4.4 за достатъчно гъсто подразделяне.

Теорема 4.5. Съществува достатъчно гъсто подразделяне $\hat{K}$ за правоъгълното деление $K = \{K_{ij}\}$, където

$$K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$$i = 1, 2, \ldots, M + r - 1, \;\; j = 1, 2, \ldots, N + s - 1,$$

така че за асоциираните с него В-сплайни $\{\hat{B}_{ij}(x, y)\}$ е в сила:

$$\hat{B}_{ij}(P_k) > 0 \Longrightarrow \hat{B}_{ij}(P_m) = 0 \;\; , \forall m \neq k.$$

Оттук следва и Теорема 4.6 за представяне на двумерен В-сплайн като линейна комбинация на нови В-сплайни.

Теорема 4. 6. Съществува достатъчно гъсто подразделяне $\hat{K}$ така че за съответните $\{\hat{B}_s(x, y)\}$ и за всяко $B_{ij}(x, y) = B_l(x, y)$ съществува представянето

$$B_l(x, y) = \sum_{s \in S_l} \gamma_s(l) \hat{B}_s(x, y), \quad \mathrm{supp B_l(x, y)} = \bigcup_{\mathrm{s \in S_l}} \mathrm{supp \hat{B}_s(x, y)},$$

където S_l е индексно множество за B_l.

Теорема 4.7 дава необходимо и едно достатъчно условие за максимален ранг на колокационната матрица. В хода на доказателството е получено представяне за произволен минор като линейна комбинация на нови В-сплайни, асоциирани с достатъчно гъсто подразделяне.

Теорема 4.7. Нека $\{x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{M+r}\}$ и $\{y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_{N+s}\}$ са редици от възли по осите Ox и Oy, респ. Да разгледаме правоъгълното деление

$$K = \{K_{ij}\}, K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$$i = 1, 2, ..., M + r - 1, \ \ j = 1, 2, ..., N + s - 1$$

и асоциираните с него тензорни B-сплайни $\{B_i(x,y)\}_{i=1}^{n}$, където $n = MN$. За произволни точки $P_k(z_k, t_k), k = 1, 2, ..., q$, където $q \leq n$, е изпълнено: Ако

$$\mathrm{rang}\{\mathrm{B_i(P_j)}\}_{\mathrm{i=1,j=1}}^{\mathrm{n,q}} = \mathrm{q},$$

то съществува поне една пермутация σ на числата $1, 2, \ldots, n$ такава, че $P_i \in \mathrm{suppB}_{\sigma(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{q}$. Обратно–ако съществува единствена пермутация σ на $\{1, 2, \ldots, n\}$ такава, че $P_i \in \mathrm{suppB}_{\sigma(\mathrm{i})}$, то $\mathrm{rang}\{\mathrm{B_i(P_j)}\} = \mathrm{q}$ (единствеността на σ е в смисъл, че ако τ е пермутация на $\{1, 2, \ldots, n\}$ със горното свойство, тогава $\sigma(i) = \tau(i), i = 1, 2, \ldots, q$). Нещо повече, съществува единствен ненулев минор $\Delta_{l_1 l_2 \ldots l_q}$ такъв, че

$$\mathrm{sign}\Delta_{\mathrm{l_1 l_2 \ldots l_q}} = \mathrm{sign}(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(\mathrm{q})).$$

Стойността на минора се пресмята от

$$\Delta_{l_1 l_2 \ldots l_q} = \sum_s \Gamma(s)\Delta(s), s = (s_1, s_2, \ldots, s_q), s_i \in S_{l_i}$$

където

$$\Delta(s) = (-1)^{\mathrm{sign}p} \hat{B}_{s_{p(1)}}(P_1) \hat{B}_{s_{p(2)}}(P_2) \ldots \hat{B}_{s_{p(q)}}(P_q),$$

В частност се получава стойността на детерминантата при квадратна матрица чрез B-сплайните, асоциирани с новото подразделяне.

В параграф 4.3 са дадени етапите на алгоритъма за пресмятане на детерминантата на квадратна колокационна матрица, а именно: достатъчно гъсто подразделяне, удовлетворяващо условието от Теорема 4.6; изчисляване на ненормирани двумерни В-сплайни чрез разделени разлики по триъгълна схема; пресмятане на коефициентите от изпъкналата линейна комбинация; изчисляване на детерминантата чрез новите В-сплайни.

В 4.4 – приложение към Глава 4, са дадени примери в резултат на разработена в диалогов режим програма на езика ТУРБО-ПАСЦАЛ.

Приноси на дисертацията

1. В явен вид е решена задачата за оптимално възстановяване на функция по точки, както и други частни случаи (по дадени първи моменти или дадени локални средни), за разлика от други резултати, при които се стига до система уравнения. Получени са числени и графични резултати от примери.

2. Освен линейни методи, точни върху пространството от блендиращи функции, за пръв път се разглеждат и произволни линейни методи при допълнителна информация– зададени следи на функцията.

3. В явна форма е решен проблема за оптимално възстановяване на линеен функционал върху клас от функции на две променливи. Нов резултат е аналога на теоремата на Schoenberg за функция на две променливи. Получени са числени и графични резултати за примери.

4. Възстановява се оптимално двукратен интеграл чрез точни върху блендинг-функциите линейни методи при дадени стойности и чрез произволни методи при дадени стойности и следи на функцията.

5. Задачата за намиране на оптимална мрежа, при която грешката от приближение на двукратния интеграл от функцията с интеграла от блендиращата интерполанта да е минимална, е сведена до намиране на оптимални възли за еднократни интеграли.

6. Изследвана е колокационната матрица в двумерния случай с цел намиране на аналози на условията на Schoeneberg-Whitney.Получено е необходимо и едно достатъчно условие за

разположение на точките, така че колокационната матрица да има максимален ранг. В хода на доказателството е намерено в частност и представяне за детерминантата чрез новите B-сплайни, получени в резултат на подходящо подразделяне. Резултатите са тествани със собствена програма.

Списък на публикациите по дисертацията:

[ND1]. N. K. Dicheva, "On the best recovery of lineat functionals in a certain class of bivariate functions", Numerical Functional Analysis and Optimization, iss.7&8 of vol.21 (2000).

[ND2]. N. K. Dicheva, " On the best recovery of a linear functional and its applications", Advances in Boundary Elements XXI, v. 6, 739–747, ed. C. A. Brebbia, H. Power, WIT Press 1999.

[ND3]. N. K. Dicheva, "Interpolation sets for tensor-product B-splines on scattered data", Proceed. of 4th Hellenic-European Conference on Computer Mathematics and its Applications, v. 2, 654–661, 24-26 September 1998, Athens, Hellas.

[ND4]. N. K. Dicheva, "Theorems of Peano's type for bivariate functions and optimal recovery of linear functionals", in "Approximation Theory and its Applications" (изпратена за публикуване).

Изказвам благодарност и признателност към научния ми консултант акад. Б. Боянов за всеотдайната му подкрепа и взискателност, за ценните съвети и полезните дискусии.

Литература (извадка)

4. B. Bojanov, Optimal methods of interpolation in $W^{(r)}L_q$, Compt. Acad. Bulg. Sci. t.27, 7(1974), 885–888.

5. Б. Боянов, Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций, Мат. заметки т.17, нум.4 (1975), 511–524.

6. B. D. Bojanov, Optimal recovery of differentiable functions, Math. USSR Sbornik 181, v. 3 (1990), pp. 334-353.

7. B. Bojanov, Optimal recovery of functions and integrals, in: Proceed. of the First European Congress of mathematics, Paris, July 6-10 1992, Birkhauser, Boston 1995.

8. B. Bojanov, G. Grozev, A note on the optimal recovery of functions in H^∞, J. Approx. Theory 53(1), 1988, pp. 67-77.

9. B. Bojanov, G. Grozev, A. Zensykbaev, Generalized Gaussian Quadrature Formulas for Weak Tchebychev Systems in: Optimal Recovery, B. Bojanov and H. Wozniakowski (eds.), Nova, New York, 1992.

10. B. Bojanov, On the total positivity of the truncated power kernel, Colloq. Math., 60/61 (1990), pp. 594–600.

11. B. Bojanov, H. A. Hakopian , A. A. Sahakian, Spline Functions and Multivariate Interpolations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

13. C. de Boor, R. de Vore, A geometric proof of total positivity for spline interpolation, Math. Comp. 45, 172(1985), 497–504.

14. C. de Boor, Total positivity of the spline collocation matrix, Indiana Univ., J. Math., 25 (1976), 541–551.

15. J. C. Cavendish, W. J. Gordon, C. A. Hall, Ritz-Galerkin approximations in blending function space, Numer. Math. 26, 1976, pp. 155–178.

16. C. K. Chui, T. X. He and R. H. Wang, Interpolation by bivariate linear splines, Alfred Haar Memorial Conference, North-Holland , Amsterdam, 1986.

17. C. K. Chui and T. X. He, On location of sample points for interpolation by bivariate C^1 quadratic splines, Numerical Methods of

Approximation Theory, ISNM 81, Birkhauser (1987), 30–43.

19. N. Dyn, D. Levin and S. Rippa, Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation, IMA J. Num. Anal. 10, (1990), 137–154.

21. M. Golomb, H. Weinberger, Optimal approximation and error bounds, in "On numerical approximation", Univ. of Wisc., 1958, 117–190.

25. W. Haussmann, B. Bojanov, D. Dryanov, G. Nikolov, Best one-sided L^1- approximation by blending functions, in: W. Haussmann, K. Jetter and M. Reimer, Ed., Advances in Multivariate Approximation (Wiley-VCH, Berlin, 1999), pp. 85-106.

28. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Наука 1967, Москва.

32. L. E. Mansfield, Optimal Approximations and Error Bounds in Spaces of Bivariate Functions, J. Approx. theory 5 (1972), pp.77–96.

33. L. E. Mansfield, On the Optimal Approximation of Linear Functionals in Spaces of Bivariate Functions, SIAM J. Numer. Anal. 8 (1971), pp.115–126.

34. C. Michelli and T. Rivlin , Lectures on optimal recovery, Lecture Notes in Mathematics, v. 1129, Proceedings of Numerical Analysis Lancaster, England, 1984.

35. C. Michelli, T. Rivlin and S. Winograd, The Optimal Recovery of Smooth Functions, Numer. Math. 26 (1976), 191-200.

36. C. Michelli and T. Rivlin, Optimal estimation in approximation theory, Plenum Press, New York, 1976.

38. G. Nielson, Bivariate Spline Functions and the Approximation of Linear Functionals, Numer.Math. 21 (1973), pp. 138–160.

39. И. Николова, Интерполация с блендинг-функции (дипл. работа), Софийски университет, 1999г.

40. G. Nürnberger and T. Riessinger, Bivariate spline interpolation at grid points, Numer. Math., 1995.

42. D. Ritter, Two Dimensional Spline Dunctions and best Approximation of Linear Functionals, J. Approx. Theory 3 (1970), pp.352–368.

44. A. Sard , Integral representation of remainders, Duke Math. J., 15(1948), 333-345.

45. A. Sard , Linear approximation, Amer. Math. Soc., Math.

Surveys, 9, 1963.

46. I. J. Schoenberg , On the interpolation by spline functions and their minimal properties, Proc. Conference on Approximatiom Theory, Oberwolfach, ISNM, 5(1964), 109–129.

47. I. J. Schoenberg , A. Whithny , Sur la positivite des determinants de translations des fonctions de frequence de Polya avec une application a une proble me d'interpolation par les fonctions "spline", Compt. Rend., 228 (1949), pp. 1996–1998.

48. I. J. Schoenberg , A. Whithny , On Polya frequency functions, III. The positivity of translation determinants with application to the interpolation problem by spline curves, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), pp. 246–259.

54. S. A. Smolyak , On the optimal recovery of functions and functionals of them, Ph. D. Thesis, Moscow State University, 1965.

[ND1]. N. K. Dicheva, "On the best recovery of lineat functionals in a certain class of bivariate functions", Numerical Functional Analysis and Optimization, iss.7&8 of vol.21 (2000). (приета за публикуване)

[ND2]. N. K. Dicheva, " On the best recovery of a linear functional and its applications", Advances in Boundary Elements XXI, v. 6, 739–747, ed. C. A. Brebbia, H. Power, WIT Press 1999.

[ND3]. N. K. Dicheva, "Interpolation sets for tensor-product B-splines on scattered data", Proceed. of 4th Hellenic-European Conference on Computer Mathematics and its Applications, v. 2, 654–661, 24-26 September 1998, Athens, Hellas.

[ND4]. N. K. Dicheva, "Theorems of Peano's type for bivariate functions and optimal recovery of linear functionals", in "Approximation Theory and its Applications" (изпратена за публикуване).