СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА COMPMATH: РЕШАВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ С КОМПЮТЪР

THE COMPMATH COMPETITION: SOLVING MATH PROBLEMS WITH COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS

Stefka Bouyuklieva
Faculty of Mathematics and Informatics,
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Turnovo
stefka@ts.uni-vt.bg

Stoyan Kapralov
Technical University - Gabrovo
s.kapralov@tugab.bg

Abstract
The CompMath competition is presented. Several problems are presented with multiple solutions with computer algebra system Mathematica.

Keywords: Math competition; Computer Algebra System.

ВЪВЕДЕНИЕ

Математическото образование и по-общо STEM образованието са от голямо значение за обществото. В същото време е очевидно, че съвременното математическо образование е в дълбока криза и че тя изисква голяма промяна от преподаването на техники за ръчно изчисление към техники за компютърно базирани решения.

CompMath е ежегодно математическо състезание за студенти [1], [2], което има за цел да повиши интереса на студентите към системите за компютърна алгебра, както и да създаде условия за споделяне на опит и добри практики между академичния състав.

Олимпиадата CompMath няма еквивалент на глобално ниво и представлява съществена образователна иновация.

Състезанието CompMath е създадено през 2011 г. и се провежда всяка есен с домакинството на различни български университети.

Състезателите са разделени в две групи според специалността си:

• Група А - математика, информатика и компютърни науки

• Група B - инженерни и естествени науки.

Състезателите следва да решат 30 математически задачи с помощта на система за компютърна алгебра или числен анализ като Maple, Mathematica, Maxima, MATLAB, MuPad, Derive, Python или Julia. Състезателите не трябва да подават хартиени решения на проблемите, а файлове, в които са представени решения в избраната компютърна система.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Целта на този доклад е да покаже, че много задачи могат да се решат по различни начини и с помощта на различни функции и команди от системата за компютърна алгебра Mathematica.

Задача 1. Да се намерят последните три цифри в десетичния запис на числото $(\ldots(7^7)^7\ldots)^7$, като в дадения израз участват 2012 седмици.

<u>Решение</u>

Това е задача от курса по теория на числата, която всяка година даваме като упражнение към темата за числови сравнения. Там обаче търсим само последните 2 цифри. Оказва се, че ако имаме нечетен брой седмици, последните 2 цифри са 0 и 7, а ако седмиците са четен брой, тези цифри са 4 и 3. Какво става, когато търсим последните 3 цифри. Предлагаме 3 начина за решаване на задачата (и трите с пакета Mathematica).

1. Последните три цифри на числото образуват остатъка при деление на 1000.

   Следователно търсим числото x, за което

   $$A = (\ldots(7^7)^7\ldots)^7 = 7^{7^{2011}} \equiv x(\mathrm{mod}\ 1000), 0 \le x \le 999.$$

   Ще използваме теоремата на Ойлер, т.к. числата 7 и 1000 са взаимно прости:

   $1000 = 2^3.5^3 \Longrightarrow \varphi(1000) = 2^2.5^2.1.4 = 400 \Longrightarrow 7^{400} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 1000)$

   Намираме остатъка от делението на 7^{2011} на 400 и получаваме

   Mod[7^2011,400]

   343

   Това означава, че $7^{2011} = 400q + 343$ и

   $$7^{7^{2011}} = 7^{400q}.7^{343} \equiv 7^{343} \equiv x(\mathrm{mod}\ 1000), 0 \le x \le 999.$$

   Пресмятаме директно 7^{343} и получаваме

   7^343

   **738971560674035081319925619640107974886235108114114659630967565531876
   736742421922080529071408825089219929308973163441884672025222547863039
   358658807678772112256781682843204466078584905553063549348194459998515
   844759804303104492420908670191558255947791283553807749950491245334083
   41373887572343**

   Следователно последните 3 цифри, които търсим, са 343 ($x = 343$).

2. Търсим периода на 7^k по модул 1000 (през колко стойности на k последните 3 цифри се повтарят).

   Table[Mod[7^k, 1000], {k,50}]

{7,49,343,401,807,649,543,801,607,249,743,201,407,849,943,601,207,449,143,1,7,49,343,401,807,649,543,801,607,249,743,201,407,849,943,601,207,449,143,1,7,49,343,401,807,649,543,801,607,249}

Виждаме, че периодът е 20, т.е. mod(7^k, 1000) == mod(7^(k+20), 1000). Това означава всъщност, че $7^{20} \equiv 1(\bmod 1000)$. Нататък решаваме задачата по подобен на предния начин, т.е. намираме остатъка от делението на 7^{2011} на 20 и получаваме

Mod[7^2011,20]

3

7^3

343

3. Третият начин е най-кратък и използва цикъл Do

a=7; Do[a=Mod[a^7,1000],{2011}]; Print[a]

343

Задача 2. Да се намерят всички четирицифрени числа, квадратът на които завършва на 2016.

Решение

Do[If[Mod[n^2,10000]==2016,Print[n]],{n,1000,9999}]

1504
3496
4004
5996
6504
8496
9004

Задача 3. Да се намерят естествените числа a и b, ако сумата им е 5432, а най-малкото им общо кратно е 223020.

Решение

$\mathbf{Do[If[LCM[\boldsymbol{a}, 5432 - \boldsymbol{a}] == 223020, Print[\boldsymbol{a}, ", ", 5432 - \boldsymbol{a}],], \{\boldsymbol{a}, 5431\}]}$

1652,3780,

3780,1652,

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число n, за което $100^n < n!$.
Кое е по-голямо: 100^{300} или $300!$?

Решение

Ще използваме цикъл While

$\boldsymbol{n} \coloneqq \mathbf{2}; \mathbf{While}[\mathbf{100}^{\boldsymbol{n}} > \boldsymbol{n}!, \mathbf{2}; \boldsymbol{n}++]; \mathbf{Print}[\boldsymbol{n}]$

269

Това означава, че 269 е най-малкото естествено число, за което $100^n < n!$.
Следователно $100^{300} < 300!$.
Тази задача може да бъде решена и директно, т.е.

```
100^300>300!
100^300<300!
    False
    True
```

Това означава, че първото неравенство е грешно, а второто е вярно.

Задача 5. Дадено е множеството от естествени числа $S = \{1,2,\dots,2017\}$. Колко са 2-елементните подмножества на S, за които произведението на двете числа не се дели на 3? Колко са 3-елементните подмножества на S, за които произведението на трите числа се дели на 4?

Решение

За първата част използваме вложени цикли For

```
s:=0;For[i=1,i<=2017,i++,For[j=i+1,j<=2017,j++,If[Mod[i j,3]==0,,s++]]]
s
903840
```

Втората част би могла да се реши също с вложени цикли, но предлагаме друго решение, което използва формулата за комбинации от 2017 елемента 3-ти клас. В нея от броя на всички тройки изваждаме броя на тройките, образувани от четни числа, както и тези, в които две от числата са четни.

```
Binomial[2017,3] − Binomial[2017 − Floor[2017/2], 3]
        − Binomial[2017 − Floor[2017/2], 2] ∗ (Floor[2017/2] − Floor[2017/4])
938588952
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В доклада са разгледани няколко задачи, давани на Студентската олимпиада по компютърна математика. Представени са по няколко различни решения със системата Mathematica. През 2019 г. Олимпиадата се проведе за осми път. Наблюденията през годините показват, че сред най-успешните представили се студенти са тези, които използват системата Mathematica.

БЛАГОДАРНОСТИ

This work was supported in part by Grant 1909C/2020 of the Technical University of Gabrovo, and Grant FSD-31-299-05/05.05.2020 of St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo.

ЛИТЕРАТУРА

[1] CompMath, www.compmath.eu, Accessed 05/06/2020.
[2] Kapralov S., Manev M.. 2015. A New Brand of Math Competition for University Students, In *Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015,* Bitola, Macedonia, April 24-26.
[3] Borwein, Jonathan, Skerritt, Matthew P. 2012. *An Introduction to Modern Mathematical Computing With Mathematica®,* Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer-Verlag New York, https://www.springer.com/gp/book/9781461442523