БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Принцип за субординация на обобщени дробни еволюционни уравнения

Емилия Григорова Бажлекова

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
"ДОКТОР НА НАУКИТЕ"

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5. Математика,
Научна специалност: "Математически анализ"

София, 2022

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от звеното на секция “Анализ, геометрия и топология” на Института по математика и информатика - Българска академия на науките (ИМИ – БАН), с разширение: акад. Олег Мушкаров, проф. д.м.н. Вирджиния Кирякова, проф. д.м.н. Цвятко Рангелов, проф. д-р Евгения Попова (ИМИ – БАН).

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 15 ноември 2022 г. от 14 ч. в зала 478 на Института по математика и информатика, ул. “Акад. Г. Бончев”, бл. 8, София, на открито заседание на научно жури, определено със заповед № 216 / 20.07.2022 г. на Директора на ИМИ.

НАУЧНО ЖУРИ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ЗАЩИТАТА:

1. Проф. дн Йорданка Панева-Коновска, ИМИ – БАН
2. Проф. дмн Вирджиния Кирякова, ИМИ – БАН
3. Проф. дмн Цвятко Рангелов, ИМИ – БАН
4. Проф. д-р Мария Дачева, Институт по механика – БАН
5. Проф. дн Миглена Колева, РУ “А. Кънчев”
6. Проф. д-р Георги Венков - ФПМИ, ТУ – София
7. Проф. д-р Красимира Проданова - ФПМИ, ТУ – София

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ – БАН и са публикувани на интернет страницата на ИМИ:

`http://www.math.bas.bg/IMIdocs/ZRASRB/degrees_doctor_current.php`

I. УВОД

През последните десетилетия значителен научен интерес се проявява към така нареченото *дробно смятане*, което позволява интегриране и диференциране от произволен ред, не непременно целочислен. До голяма степен това се дължи на приложенията на дробното смятане за математическото моделиране на редица процеси с памет в различни области като физика, биология, дори социология.

Първите идеи за дробно смятане датират още от края на XVII век и са свързани с името на Готфрид Лайбниц. Почти три века по-късно дробното смятане започва да се използва интензивно за описване на еволюцията на различни реални системи с помощта на *дробни еволюционни уравнения*, т.е. еволюционни уравнения, в които целочислените производни по времето или пространството са заменени с оператори от дробен ред. Те се използват за моделиране на аномална дифузия, топлообмен в материали с памет, вълни във вискозоеластични среди и др.

За моделиране на някои комплексни системи се оказва по-подходящо използването на обобщения на класическите дробни производни, например дробни производни от разпределен ред или по-общи интегро-диференциални оператори от конволюционен тип. Така се стига до голямо многообразие обобщени дробни еволюционни уравнения. Това поражда необходимостта от подредба в множеството от такива уравнения и от намиране на начини за тяхното изследване, решаване и класификация.

Много полезен в тази насока се оказва т.нар. *принцип за субординация*. Най-общо, този принцип се състои в следното: при дадени две задачи на Коши (P) и (P_*), задачата (P) се нарича подчинена на задачата (P_*) ако тя е разрешима винаги когато (P_*) е разрешима и решението $u(x,t)$ на (P) се представя чрез решението $u_*(x,t)$ на (P_*) чрез интегралната зависимост

$$u(x,t) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau) u_*(x,\tau)\, d\tau,$$

където ядрото $\varphi(t,\tau)$ е вероятностна плътност по отношение на $\tau \geq 0$ когато $t > 0$ се разглежда като параметър, т.е.

$$\varphi(t,\tau) \geq 0, \quad \int_0^\infty \varphi(t,\tau)\, d\tau = 1. \tag{0.1}$$

Под разрешимост на задачата разбираме, че тя е коректно поставена, т.е. има единствено решение, което зависи непрекъснато от началните условия.

Принципът за субординация дава възможност да се представят решенията на сложни уравнения чрез решенията на по-прости класически уравнения и е полезен инструмент за доказване на разрешимост на задачата, намиране на оценки за решението, установяване на неговото асимптотично поведение и други свойства. Наред с това, чрез принципа за субординация се установява "йерархия" сред множеството на обобщени дробни еволюционни уравнения, която е важна за правилното класифициране и оценка на физическия смисъл на съответните математически модели.

Настоящата дисертация е посветена на изучаването на принципа за субординация за обобщени дробни еволюционни уравнения. Разработена е методология, която позволява установяване на субординационна зависимост между две уравнения и по този начин помага за класифициране на тези уравнения в две основни групи: уравнения описващи субдифузия и дифузионно-вълнови уравнения. Изследвани са редица конкретни уравнения, които се срещат в научната литература.

Основните математически инструменти, които се използват в проведените изследвания, са теорията на операторите и специалните функции на дробното смятане, апаратът на трансформацията на Лаплас и теорията на функциите на Бернщайн и специални класове функции свързани с тях.

II. СТРУКТУРА И КРАТЪК ОБЗОР НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертационият труд съдържа 200 страници. Той се състои от увод, осем глави (разпределени в 31 секции), заключителни бележки, използвана литература и азбучен указател (индекс). Библиографията съдържа 110 заглавия. Номерацията на теоремите е с две числа, като първото означава номера на главата, а второто е поредният номер в самата глава. Номерацията на формулите, дефинициите, твърденията, забележките, примерите и фигурите следва същия принцип. Текстът е на английски език.

Дисертацията е резултат на научните изследвания на автора, проведени през последните седем години (2015-2021). Тя се основава на 11 статии, публикувани през този период: [B1]-[B11], дадени в секция III на този автореферат.

Следва кратък обзор на дисертационния труд като за всяка глава в него ще отбележим кои от публикациите са използвани.

Уводът съдържа мотивите за проведените изследвания, като са дадени примери на различни типове принципи за субординация. **Глава 1** съдържа означения, дефиниции и основни свойства на операторите за дробно интегриране и диференциране, трансформацията на Лаплас, функциите на Митаг-Лефлер и някои функции от типа на Райт. В **Глава 2**, след въведение в теорията на функциите на Бернщайн и интегралните уравнения на Волтера, доказваме две общи теореми за субординация. **Глава 3** ([B5] и [B9]) е посветена на детайлно изучаване на принципа за субординация за еволюционни уравнения с дробни производни по времето и по пространството. Като приложение са получени интегрални представяния за фундаменталното решение и някои явни представяния чрез специални функции. Остатъкът от дисертацията разглежда обобщени еволюционни уравнения с дробни оператори по времето. За да демонстрираме важната роля на принципа за субординация при изучаването на тези уравнения, в **Глава 4** ([B10]) е разгледано дробното уравнение на Джефри за топлопроводността. В **Глава 5** ([B1], [B2] и [B3]) са получени резултати за субординация на уравнения за субдифузия от разпределен ред и за по-общи уравнения с ядра на паметта. Изведени са полезни оценки в скаларния случай. В **Глава 6** ([B6]) се изучава мултиномната функция на Митаг-Лефлер, която е свързана с решаването на уравнения на релаксация с няколко производни по времето от различен (дробен) ред. Последните две глави разглеждат уравнения, описващи явления, които са междинни между дифузия и разпространение на вълни. В **Глава 7** ([B4] и [B7]) е дискутиран и частично решен един отворен проблем относно интерпретацията на фундаменталното решение на дифузионно-вълнови уравнения от разпределен ред като вероятностна плътност. Това свойство на фундаменталното решение е важно както за физическия смисъл на модела, така и за установяване на субординация по отношение на вълновото уравнение. В **Глава 8** ([B4], [B8] и [B11]) се разглеждат уравнения, описващи разпространението на вълни във вискозоеластични среди с напълно монотонни модули на релаксация. Разгледани са обобщени дробни модели на Максуел и Зенер, както и един нов модел с модул на релаксация, който се представя чрез напълно монотонна биномна функция на Митаг-Лефлер. Частният случай на дробен модел на Джефри е изследван подробно и е обсъден физическият смисъл на формулата за субординация. Дисертацията завършва с резюме на основните научни приноси.

III. ПУБЛИКАЦИИ ПО ДИСЕРТАЦИЯТА

[B1] E. Bazhlekova (2015), Completely monotone functions and some classes of fractional evolution equations. *Integral Transforms and Special Functions*, 26 (9) 737-752; **IF: 0.528** – **Q3** (Web of Science) – **30т.**
16 цитирания в Scopus

[B2] E. Bazhlekova (2015), Subordination principle for a class of fractional order differential equations. *Mathematics* (MDPI), 3 (2) 412-427; индексирана в Web of Science и Scopus – **12т.**
13 цитирания в Scopus

[B3] E. Bazhlekova (2018), Estimates for a general fractional relaxation equation and application to an inverse source problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41 (18) 9018-9026; **IF: 1.533** – **Q2** (Web of Science) – **40т.**
4 цитирания в Scopus

[B4] E. Bazhlekova (2018), Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21 (4) 869-900; **IF: 3.514** – **Q1**(Web of Science) – **50т.**
19 цитирания в Scopus

[B5] E. Bazhlekova (2019), Subordination principle for space-time fractional evolution equations and some applications. *Integral Transforms and Special Functions*, 30 (6) 431-452;**IF: 0.705** – **Q3** (Web of Science) – **30т.**

8 цитирания в Scopus

[B6] E. Bazhlekova (2021), Completely monotone multinomial Mittag-Leffler type functions and diffusion equations with multiple time-derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24 (1) 88-111; **IF: 3.17** – **Q1**(Web of Science) – **50т.**
3 цитирания в Scopus

[B7] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov (2018), Subordination approach to multi-term time-fractional diffusion-wave equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (Elsevier), 339, 179-192; **IF: 1.883** – **Q1**(Web of Science) – **50т.**
14 цитирания в Scopus

[B8] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov (2018), Complete monotonicity of the relaxation moduli of distributed-order fractional Zener model. *AIP Conference Proceedings*, 2048, art.no. 050008; **SJR: 0.182** – **20т.**
3 цитирания в Scopus

[B9] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov (2019), Subordination approach to space-time fractional diffusion. *Mathematics* (MDPI), 7(5) art.no. 415; **IF: 1.747** – **Q1** (Web of Science) – **50т.**
7 цитирания в Scopus

[B10] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov (2020), Transition from diffusion to wave propagation in fractional Jeffreys-type heat conduction equation. *Fractal and Fractional* (MDPI), 4(3), art.no. 32; **IF: 3.313** – **Q1**(Web of Science) – **50т.**
3 цитирания в Scopus

[B11] E. Bazhlekova, S. Pshenichnov (2021), Wave propagation in viscoelastic half-space with memory functions of Mittag-Leffler type. *International Journal of Applied Mathematics*, 34(3) 423-440; **SJR: 0.268** – Q3 (Scopus) – **20т.**

Всеки отбелязан импакт фактор, импакт ранг или квартил към публикациите се отнася за годината на публикуване на съответната статия. Дадени са и точките, изчислени според правилата за професионално направление 4.5. Математика в Правилника на БАН за прилагане на ЗРАСРБ. Към всяка статия е приложен и съответния брой цитирания, намерени в базата данни Скопус, като са изключени автоцитиранията.

От представените **11** публикации **8** са в издания с IF (общ IF: 16.4). От тях **5** са в Q1 (250 т.), **1** в Q2 (40 т.), **2** в Q3 (60 т.) - общо **350** точки. Публикации, които са в издания с SJR – **2** бр. – **40** т. Една публикация е в издание, индексирано на Web of Science и Scopus, но без IF/SJR за годината на публикуване – **12** т. Общо от всички публикации по дисертацията: **402** точки.

Цитиранията на публикациите по дисертацията намерени в базата данни Scopus са **90**. Те носят общо **540** точки (по 6т. на цитиране съгласно Правилника на БАН за прилагане на ЗРАСРБ).

От публикациите 6 са самостоятелни, а 5 са в съавторство с един автор. Аналитичните резултати във всички публикации са получени от дисертанта.

Приносът на съавторите в публикации [B7]-[B11] се състои в уточняване на математическия модел, числени пресмятания и визуализация на резултатите. В статиите [B9] и [B10] е отбелязан приносът на отделните автори. В дисертацията са описани само резултати, които са получени от дисертанта. Единствено изключение правят представените фигури (Фигури 4.1, 7.1-7.3 и 8.1). Те са дадени с цел визуализация на поведението на аналитично изведените решения и не се разглеждат като принос на дисертанта.

Нито една от представените публикации не е използвана в други дисертации или конкурси, както на дисертанта, така и на съавторите. Всичките 11 статии са публикувани след приключване на последната процедура на дисертанта (която е за заемане на академичната длъжност доцент през 2014г.).

IV. СЪДЪРЖАНИЕ И ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Ще проследим съдържанието и основните резултати на дисертационния труд по глави.

1 Оператори и специални функции на дробното смятане

Глава 1, състояща се от 5 секции, съдържа предварителна информация. Дефинирани са операторите на дробно интегриране и диференциране, както и някои специални функции, тясно свързани с дробното смятане. Дадени са техните основни свойства.

Множествата от положителни цели, реални и комплексни числа се означават съответно с $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C},\ \Re z > 0\}$.

Нека X е Банахово пространство. За $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ означаваме с $C([a,b]; X)$ пространството на непрекъснати функции $f : [a,b] \to X$. Пространството от функции $f : \mathbb{R}_+ \to X$, които са интегрируеми в смисъл на Бохнер върху всеки интервал $[0, \tau]$, $\tau > 0$, се означава с $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$. За краткост, $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) := L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$.

Трансформацията на Лаплас на функция $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$ се дефинира по следния начин

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \quad \Re s > 0.$$

Нека $\alpha > 0$ и $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Дефинираме

$$\omega_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0,\ \alpha > 0, \tag{1.1}$$

където $\Gamma(\cdot)$ означава функцията Гама. Освен това полагаме $\omega_0(t) = \delta(t)$, където δ е делта функцията на Дирак.

За $u:\mathbb{R}_+\to X$ дефинираме *дробна производна на Риман-Лиувил* от ред α чрез равенството [15, 25]

$$(D_t^\alpha u)(t)=\frac{d^m}{dt^m}\int_0^t \omega_{m-\alpha}(t-\tau)u(\tau)\,d\tau,\ t>0.$$

Дробна производна на Капуто се дефинира чрез равенството [15, 25]

$$({}^C D_t^\alpha u)(t)=\int_0^t \omega_{m-\alpha}(t-\tau)u^{(m)}(\tau)\,d\tau,\ t>0.$$

За $\alpha=m\in\mathbb{N}$ имаме $D_t^m={}^C D_t^m=\frac{d^m}{dt^m}$.

Функцията на Митаг-Лефлер е цяла функция, дефинирана със следното развитие в ред [12, 15, 20]

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{1.2}$$

В частност означаваме $E_\alpha(z):=E_{\alpha,1}(z)$.

Функцията на Прабхакар (или функция на Митаг-Лефлер с три параметъра) е цяла функция, която се дефинира както следва [27, 10]

$$E_{\alpha,\beta}^\delta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta)_k}{k!}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad z\in\mathbb{C},\ \alpha\in\mathbb{R}_+,\ \beta,\delta\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

където $(\delta)_k$ обозначава символа на Поххамер

$$(\delta)_k=\frac{\Gamma(\delta+k)}{\Gamma(\delta)}=\delta(\delta+1)\dots(\delta+k-1),\quad k\in\mathbb{N},\quad (\delta)_0=1. \tag{1.4}$$

В частния случай $\delta=1$ получаваме $E_{\alpha,\beta}(z)=E_{\alpha,\beta}^1(z)$.

Функцията на Майнарди (наричана още М-Райт функция) е цяла функция от типа на Райт, дефинирана чрез реда [20, 12]

$$M_\gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\gamma n+1-\gamma)},\quad 0<\gamma<1,\ z\in\mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Тя е свързана с функцията на Митаг-Лефлер $E_\gamma(\cdot)$ чрез равенството

$$\mathcal{L}\{M_\gamma(\tau)\}(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}M_\gamma(\tau)\,d\tau=E_\gamma(-s),\quad 0<\gamma<1. \tag{1.6}$$

Функцията $L_\gamma(\cdot)$, дефинирана посредством нейната Лапласова трансформация

$$\mathcal{L}\{L_\gamma(\tau)\}(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}L_\gamma(\tau)\,d\tau=\exp(-s^\gamma),\quad 0<\gamma<1, \tag{1.7}$$

се нарича плътност на стабилно разпределение на Леви [9, 21, 22]. Тя е свързана с функцията на Майнарди чрез равенството [20, 26]

$$L_\gamma(z)=\gamma z^{-\gamma-1}M_\gamma\left(z^{-\gamma}\right),\quad 0<\gamma<1,\quad z\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]. \tag{1.8}$$

Едностранна вероятностна плътност наричаме функция, дефинирана върху $\mathbb{R}_+$, и удовлетворяваща условията

$$\varphi(\tau) \geq 0, \quad \tau \geq 0; \qquad \int_0^\infty \varphi(\tau)\, d\tau = 1. \tag{1.9}$$

Функциите $M_\gamma(\tau)$ и $L_\gamma(\tau)$ са едностранни вероятностни плътности.

Подробна информация за дробното смятане и функциите на Митаг-Лефлер се съдържа в монографиите [12, 15, 25]. Обзор на специални функции, свързани с дробното смятане може да се намери в [16, 17].

2 Въведение в принципа за субординация

В Глава 2 (4 секции) първо даваме дефинициите и основните свойства на функциите на Бернщайн и свързаните с тях специални класове функции, които играят важна роля в дисертацията. С цел унифициран подход към многообразието от еволюционни уравнения съдържащи дробни производни използваме теорията на абстрактните уравнения на Волтера, кратко въведение към които е дадено след това. Накрая доказваме две общи теореми за субординация, които ще се използват по-нататък в дисертацията.

2.1 Функции на Бернщайн

Четири специални класа функции играят съществена роля в тази дисертация: класовете на напълно монотонни функции ($\mathcal{CMF}$), функции на Бернщайн ($\mathcal{BF}$), функции на Стилтес ($\mathcal{SF}$) и напълно Бернщайнови функции ($\mathcal{CBF}$). Последният клас се среща в литературата и под други имена, например функции на Неванлина. В дисертацията се придържаме към терминологията в монографията [30].

В следващите дефиниции за функцията ϕ предполагаме $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Функцията ϕ се нарича напълно монотонна функция ($\mathcal{CMF}$), ако е безкрайно диференцируема и

$$(-1)^n \phi^{(n)}(t) \geq 0, \qquad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Съгласно Теоремата на Бернщайн, една функция е напълно монотонна, тогава и само тогава когато може да бъде представена като трансформация на Лаплас на неотрицателна (обобщена) функция.

Класът $\mathcal{BF}$ от функции на Бернщайн се състои от всички функции $\phi \geq 0$, такива, че $\phi'(t) \in \mathcal{CMF}$.

Класът на функциите на Стилтес ($\mathcal{SF}$) се състои от всички функции [18]

$$\phi(s) = \frac{a}{s} + b + \int_0^\infty e^{-s\tau} \psi(\tau)\, d\tau, \quad s > 0, \tag{2.2}$$

където $a, b \geq 0$, $\psi \in \mathcal{CMF}$ и трансформацията на Лаплас на ψ съществува за всяко $s > 0$.

Една функция ϕ се нарича напълно Бернщайнова ($\phi \in \mathcal{CBF}$) тогава и само тогава когато $\phi(s)/s \in \mathcal{SF},\ s > 0$.

В сила са включванията $\mathcal{SF} \subset \mathcal{CMF}$ и $\mathcal{CBF} \subset \mathcal{BF}$.

Елементарни примери на функции на Стилтес и напълно Бернщайнови функции са следните:

$$s^{-\alpha} \in \mathcal{SF}, \quad s^{\alpha} \in \mathcal{CBF}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Така дефинираните функции притежават редица интересни свойства [30]. Селекция на свойства, които съществено се използват в дисертацията, са дадени в Секция 2.1.

2.2 Абстрактни интегрални уравнения на Волтера

Нека X е Банахово пространство с норма $\|.\|$ и нека $A : D(A) \to X$ е затворен линеен оператор дефиниран навсякъде гъсто в X.

Нека $\alpha > 0$ и $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Разглеждаме задачата на Коши за дробното еволюционно уравнение:

$$\begin{aligned} &{}^{C}D_t^{\alpha} u(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ &u(0) = v \in X,\ u^{(k)}(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В скаларния случай когато $X = \mathbb{R}$, а операторът A е просто умножение с константа, $A = -\lambda$, $\lambda > 0$, решението на (2.3) се задава с функцията на Митаг-Лефлер: $u(t) = u(0)E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$. То описва дробна (бавна) релаксация при $\alpha \in (0,1)$ и затихващи осцилации при $\alpha \in (1,2)$.

Класическата задача на Коши за уравнение от първи ред е частен случай на (2.3) за $\alpha = 1$:

$$u'(t) = Au(t), \quad t > 0; \quad u(0) = v \in X, \tag{2.4}$$

а при $\alpha = 2$ се получава задачата на Коши за уравнение от втори ред

$$u''(t) = Au(t), \quad t > 0; \quad u(0) = v \in X,\ u'(0) = 0. \tag{2.5}$$

Да разгледаме абстрактното интегрално уравнение на Волтера

$$u(t) = \int_0^t k(t-\tau)Au(\tau)\, d\tau + f(t), \quad t > 0, \tag{2.6}$$

с ядро $k(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Нека да отбележим, че (2.3) може да се запише като интегрално уравнение на Волтера с ядро $k(t) = \omega_{\alpha}(t)$, където функцията $\omega_{\alpha}(t)$ е дефинирана в (1.1). Еквивалентен запис във вид на интегрално уравнение (2.6) имат и по-общите уравнения, които се разглеждат в дисертацията. Затова за тяхното изучаване използваме теорията за абстрактни уравнения на Волтера развита в монографията [28]. Ще дадем първо няколко основни дефиниции.

Дефиниция 2.1. *Една функция $u \in C(\mathbb{R}_+; X)$ се нарича силно решение на уравнението (2.6) ако $u \in C(\mathbb{R}_+; D(A))$ и (2.6) е изпълнено върху $\mathbb{R}_+$.*

Дефиниция 2.2. *Задачата (2.6) се нарича коректно поставена ако за всяко $v \in D(A)$ съществува единствено силно решение $u(t;v)$ на*

$$u(t) = v + \int_0^t k(t-\tau)Au(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0, \quad v \in D(A), \tag{2.7}$$

и от $\{v_n\} \subset D(A)$, $v_n \to 0$ следва $u(t;v_n) \to 0$ в X, равномерно върху всеки компактен интервал.

Нека задачата (2.6) е коректно поставена. Тогава операторът на решението $S(t)$ за (2.6) се дефинира както обикновено:

$$S(t)v = u(t;v), \quad v \in X,\ t \geq 0.$$

Операторът на решението $S(t)$ се нарича ограничен ако съществува константа $C \geq 1$ така че

$$\|S(t)\| \leq C \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Дефиниция 2.3. *Операторът на решението $S(t)$ се нарича ограничен аналитичен оператор на решението с ъгъл $\theta_0 \in (0, \pi/2]$ ако функцията $S(\cdot)$ притежава аналитично продължение $S(z)$ в сектора $|\arg z| < \theta_0$, което е ограничено върху всеки подсектор $|\arg z| \leq \theta$, където $\theta < \theta_0$.*

В случая когато класическата задача (2.4) е коректно поставена, операторът на решението $S_1(t)$ е силно непрекъсната (C_0-) полугрупа. Казва се, че операторът A поражда C_0 - полугрупа. В случая на задача (2.5) операторът на решението $S_2(t)$ е силно непрекъсната косинусова операторна функция [2].

2.3 Общи теореми за субординация

Следните две общи теореми са доказани в Секция 2.4.

Теорема 2.1. *Нека задачата на Коши (2.3) е коректно поставена за някое α, $0 < \alpha \leq 2$, и има ограничен оператор на решението $S_\alpha(t)$. За ядрото $k(t)$ на интегралното уравнение на Волтера (2.6) предполагаме, че $k(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, Лапласовата трансформация $\widehat{k}(s)$ съществува за $s > 0$, $\widehat{k}(s) \neq 0$ и функцията $g(s) = (\widehat{k}(s))^{-1}$ удовлетворява условието*

$$g(s)^{1/\alpha} \in \mathcal{CBF}, \quad s > 0. \tag{2.8}$$

Тогава задачата (2.6) е също коректно поставена и има ограничен оператор на решението $S(t)$, който е свързан с $S_\alpha(t)$ посредством равенството

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau) S_\alpha(\tau)\,d\tau, \quad t > 0, \tag{2.9}$$

където

$$\varphi(t,\tau) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{g(s)^{1/\alpha}}{s} \exp\left(st - \tau g(s)^{1/\alpha}\right)\,ds, \quad c > 0.$$

Ядрото на субординация $\varphi(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност относно $\tau \geq 0$ (при $t > 0$ разглеждано като параметър), т.е.

$$\varphi(t,\tau) \geq 0, \quad \int_0^\infty \varphi(t,\tau)\,d\tau = 1. \tag{2.10}$$

Нека да отбележим, че Теорема 2.1 се основава на следното представяне за Лапласовата трансформацоя на ядрото $\varphi(t,\tau)$

$$\widehat{\varphi}(s,\tau) = \frac{g(s)^{1/\alpha}}{s} \exp\left(-\tau g(s)^{1/\alpha}\right), \quad s,\tau > 0. \tag{2.11}$$

От условието (2.8) следва $\widehat{\varphi}(s,\tau) \in \mathcal{CMF}$ по отношение на $s > 0$ (ако τ се разглежда като параметър), което по теоремата на Бернщайн е еквивалентно на $\varphi(t,\tau) \geq 0$. Това съждение стои в основата на изследванията в тази дисертация. Целта е да намерим (най-малкото) α, за което (2.8) е изпълнено (нека да имаме в предвид, че ако (2.8) е изпълнено за някое $\alpha = \alpha_*$, то е изпълнено и за всяко $\alpha > \alpha_*$). Най-общо, Теорема 2.1 свежда въпроса за субординация към задача за функции на Бернщайн.

Във втората теорема разглеждаме случая когато подчиненият оператор на решението е ограничен аналитичен и определяме сектора на аналитичност.

Теорема 2.2. *Нека условията на Теорема 2.1 са изпълнени и*

$$|\arg\{g(s)^{1/\beta}\}| \leq |\arg s|, \quad 0 < \beta < \alpha, \ s \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]. \tag{2.12}$$

Тогава $S(t)$ е ограничен аналитичен оператор на решението с ъгъл

$$\theta_* = \min\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{2.13}$$

Ако освен това $S_\alpha(t)$ е ограничен аналитичен оператор с ъгъл $\phi_0 \in (0, \pi/2]$ то ъгълът на $S(t)$ е

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{\alpha}{\beta}\phi_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{2.14}$$

3 Еволюционни уравнения, които са дробни едновременно по пространството и по времето

Глава 3 (състояща се от 5 секции) е посветена на принципа за субординация за уравнението с дробна производна на Капуто от ред $\beta \in (0,1)$ и оператор $-(-A)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, където A поражда C_0 - полугрупа в Банахово пространство. Установяват са някои свойства на ядрото на субординация и се извеждат представяния чрез функцията на Майнарди M_β и екстремалните стабилни плътности на Леви L_α. Намира се секторът на аналитичност на оператора на решението като се вземе предвид асимптотичното поведение на ядрото на субординация.

Формулите за субординация се прилагат към многомерното пространствено-времево дробно дифузионно уравнение, за да се получат интегрални представяния за фундаменталните решения, така както и решения в затворена вид в някои специални случаи.

Разглеждаме задачата

$$ {}^{C}D_t^{\beta} u(t) = -(-A)^{\alpha} u(t), \ t > 0; \quad u(0) = v \in X; \qquad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \tag{3.1} $$

където операторът A поражда C_0 - полугрупа в Банахово пространство X и операторът $-(-A)^{\alpha}$ е дефиниран по формулата на Балакришнан [6, 31]

$$ (-A)^{\alpha} v = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} (\lambda - A)^{-1} (-Av) \, d\lambda, \quad v \in D(A). \tag{3.2} $$

В тази глава използваме означение с два индекса $S_{\alpha,\beta}(t)$ за оператора на решението на (3.1). Съгласно направените предположения за оператора A класическата задача (2.4) е коректно поставена със съответен оператор на решението $S_{1,1}(t)$.

3.1 Формула за субординация

Прилагайки последователно два известни резултата за субординация по пространството и по времето ([31] и [7]), се извежда следната теорема.

Теорема 3.1. *Ако операторът A поражда ограничена C_0-полугрупа $S_{1,1}(t)$ тогава задачата (3.1) е коректно поставена и има ограничен оператор на решението $S_{\alpha,\beta}(t)$, който притежава следното интегрално представяне*

$$ S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^{\infty} \psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) S_{1,1}(\tau) \, d\tau, \quad t > 0. \tag{3.3} $$

Ядрото на субординация $\psi_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност по отношение на $\tau \geq 0$ (т.е. удовлетворява (2.10)). Слеедните равенства са в сила

$$ \int_0^{\infty} \psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) e^{-\lambda\tau} \, d\tau = E_{\beta}(-\lambda^{\alpha} t^{\beta}), \tag{3.4} $$

и

$$ \int_0^{\infty} \psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) e^{-st} \, dt = s^{\beta-1} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-s^{\beta} \tau^{\alpha}). \tag{3.5} $$

По-нататък в тази глава усилията са насочени за получаване на представяния за ядрото на субординация $\psi_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ и за изследване на неговите свойства, както и свойствата на подчинения оператор $S_{\alpha,\beta}(t)$. Получени са следните резултати:

Теорема 3.2. *Ядрото на субординация се задава чрез формулата*

$$ \psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) = t^{-\beta/\alpha} K_{\alpha,\beta}(\tau t^{-\beta/\alpha}), $$

където функцията $K_{\alpha,\beta}$ има следните представяния

$$K_{\alpha,\beta}(r) = \int_0^\infty \sigma^{-1/\alpha} L_\alpha(r\sigma^{-1/\alpha}) M_\beta(\sigma)\, d\sigma, \tag{3.6}$$

$$K_{\alpha,\beta}(r) = \int_0^\infty \sigma^{\beta/\alpha} L_\alpha(r\sigma^{\beta/\alpha}) L_\beta(\sigma)\, d\sigma, \tag{3.7}$$

$$K_{\alpha,\beta}(r) = \alpha r^{\alpha-1} \int_0^\infty \sigma M_\alpha(\sigma) M_\beta(\sigma r^\alpha)\, d\sigma. \tag{3.8}$$

Тук L_α е екстремалната стабилна плътност на Леви (1.7), а M_β е функцията на Майнарди (1.5). Освен това, в частния случай $\alpha = \beta$ е в сила

$$K_{\alpha,\alpha}(r) = \frac{1}{\pi} \frac{r^{\alpha-1} \sin \alpha\pi}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos \alpha\pi + 1}. \tag{3.9}$$

Теорема 3.3. *Нека $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$ и $\alpha\beta \ne 1$. Тогава ядрото $\psi_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ има следното интегрално представяне*

$$\psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) = \frac{\tau^{\alpha-1}}{\pi} \int_0^\infty r^{\beta-1} \left(C_\beta(r,t) I_{\alpha,\beta}(r,\tau) + S_\beta(r,t) R_{\alpha,\beta}(r,\tau) \right) dr, \tag{3.10}$$

където $C_\beta(r,t) = \cos(rt + \beta\pi/2)$, $S_\beta(r,t) = \sin(rt + \beta\pi/2)$ и

$$I_{\alpha,\beta}(r,\tau) = \Im\{\tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\tau^\alpha r^\beta e^{i\beta\pi/2})\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \tau^{\alpha k+\alpha-1} r^{\beta k} \sin k\beta\pi/2}{\Gamma(\alpha k + \alpha)},$$

$$R_{\alpha,\beta}(r,\tau) = \Re\{\tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\tau^\alpha r^\beta e^{i\beta\pi/2})\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \tau^{\alpha k+\alpha-1} r^{\beta k} \cos k\beta\pi/2}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}.$$

Теорема 3.4. *Нека $0 < \alpha, \beta \le 1$, $\alpha\beta \ne 1$ и*

$$\theta_0 = \min\left\{ \frac{(2-\alpha-\beta)\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{3.11}$$

Тогава за всяко $\tau > 0$ функцията $\psi_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ като функция на t притежава аналитично продължение в сектора $|\arg t| < \theta_0$, което е ограничено върху всеки подсектор $|\arg t| \le \theta$, $0 < \theta < \theta_0$.

Последният резултат за аналитичност на ядрото води до аналитичност на подчиненото решение в по-голям сектор в комплексната равнина, в сравнение с решението на оригиналната задача (2.4).

Теорема 3.5. *Ако $0 < \alpha, \beta \le 1$, $\alpha\beta \ne 1$ и операторът A поражда ограничена аналитична полугрупа $S_{1,1}(t)$ с ъгъл $\phi_0 \in (0, \pi/2]$, тогава $S_{\alpha,\beta}(t)$ е ограничен аналитичен оператор на решението с ъгъл θ_0, където*

$$\theta_0 = \min\left\{ \frac{\alpha\phi_0}{\beta} + \frac{(2-\alpha-\beta)\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{3.12}$$

В граничния случай $\phi_0 = 0$ ($S_{1,1}(t)$ е само от клас C_0, а не аналитична полугрупа), то подчиненият оператор на решението $S_{\alpha,\beta}(t)$ е отново аналитичен. От (3.12) получаваме сектора на аналитичност на $S_{\alpha,\beta}(t)$, който при $\phi_0 = 0$ съвпада със сектора на аналитичност на ядрото (3.11). Следователно, подчиненото решение е винаги аналитично, независимо от това дали решението на (2.4) има това свойство.

3.2 Многомерно фундаментално решение

Нека да приложим формулата за субординация (3.3) за намиране на решението на следния основен частен случай на абстрактната задача на Коши (3.1)

$$ {}^C D_t^\beta u(\mathbf{x}, t) = -(-\Delta)^\alpha u(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad u(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}); \tag{3.13} $$

където $0 < \alpha, \beta \le 1$, ${}^C D_t^\beta$ е производната на Капуто, а Δ е оператора на Лаплас в $\mathbb{R}^n$. Операторът на решението $S_{\alpha,\beta}(t)$ на задачата на Коши (3.13) се задава чрез

$$ (S_{\alpha,\beta}(t)v)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_{\alpha,\beta,n}(\mathbf{y}, t) v(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \ \ v \in X, \ \ t > 0, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, $$

където $\mathcal{G}_{\alpha,\beta,n}(\mathbf{x}, t)$ е съответната функция на Грийн (фундаментално решение). Следователно, формулата за субординация (3.3) може да се запише като връзка между функциите на Грийн по следния начин

$$ \mathcal{G}_{\alpha,\beta,n}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty \psi_{\alpha,\beta}(t, \tau) \mathcal{G}_{1,1,n}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.14} $$

Известно е, че [2]

$$ \mathcal{G}_{1,1,n}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0. \tag{3.15} $$

Формулите (3.14) и (3.15) са използвани за получаване на представяния за функцията на Грийн $\mathcal{G}_{\alpha,\beta,n}(\mathbf{x}, t)$. По този начин в частния случай $\alpha = \beta = 1/2$ получаваме явното представяне

$$ \mathcal{G}_{1/2,1/2,n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^n \pi^{n/2+1} t^{n/2}} U\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right), \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.16} $$

където U е конфлуентната хипергеометрична функция на Трикоми ([1], Eq. 13.2.5)

$$ U(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \xi^{a-1} (1 + \xi)^{c-a-1} e^{-z\xi}\, d\xi, \ a > 0, z > 0. \tag{3.17} $$

От формулите (3.14) и (3.15) са изведени и следните интегрални представяния на $\mathcal{G}_{\alpha,\beta,n}$ за $n = 1, 2, 3$:

Теорема 3.6. *Нека* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *и* $\alpha\beta \ne 1$. *Тогава*

$$\mathcal{G}_{\alpha,\beta,1}(x,t) = \frac{2\alpha}{\beta}\frac{t^\beta}{\pi|x|}\int_0^\infty \sin(|x|\sigma)\sigma^{2\alpha-1}E_{\beta,\beta}(-\sigma^{2\alpha}t^\beta)\,d\sigma,$$

$$\mathcal{G}_{\alpha,\beta,2}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|^2}\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2\theta}\left(1+\int_0^\infty \cos(|\mathbf{x}|\sigma\cos\theta)H_{\alpha,\beta}(\sigma,t)\,d\sigma\right)d\theta,$$

$$\mathcal{G}_{\alpha,\beta,3}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|^3}\int_0^\infty \sin(|\mathbf{x}|\sigma)H_{\alpha,\beta}(\sigma,t)\,d\sigma.$$

Функцията $H_{\alpha,\beta}$ *се дефинира по следния начин чрез функции на Митаг-Лефлер*

$$H_{\alpha,\beta}(\sigma,t) = \mu\sigma^{2\alpha-1}t^\beta\left((1+\mu)\,E_{\beta,\beta}(-\sigma^{2\alpha}t^\beta) + \mu E_{\beta,\beta-1}(-\sigma^{2\alpha}t^\beta)\right), \tag{3.18}$$

където $\mu = 2\alpha/\beta$.

4 Преход от дифузия към разпространение на вълни

В Глава 4 (състояща се от 4 секции) се изучава дробното уравнение на топлопроводността от типа на Джефри. Това е еволюционно уравнение, съдържащо дробни производни на Риман-Лиувил по времето, което в зависимост от параметрите на модела удовлетворява два различни принципа за субординация и, съответно, два фундаментално различни типа поведение: режим на дифузия и режим на разпространение на вълни. Извеждат се интегрални представяния за функцията на Грийн на едномерната задача на Коши. Показва се, че функцията на Грийн представлява вероятностна плътност по пространствената променлива, която еволюира във времето. Тя е унимодална в режима на дифузия и бимодална в режима на вълново разпространение. Разгледаният пример илюстрира как принципът за субординация е тясно свързан с физическите свойства на даден модел.

4.1 Теореми за субординация

Разглеждаме уравнението

$$(1+aD_t^\alpha)\,u'(t) = (1+bD_t^\alpha)\,Au(t), \quad t>0, \tag{4.1}$$

с начални условия $u(0) = v$ и $u'(0) = 0$, където D_t^α е дробната производна на Риман-Лиувил от ред $\alpha \in (0,1]$, $a, b \ge 0$, и A е линеен затворен оператор в Банахово пространство. Когато A е втора производна по пространствената променлива, то (4.1) е дробното уравнение на топлопроводността от типа на Джефри [5], Chapter 7.

Задачата (4.1) се записва като интегрално уравнение на Волтера (2.7) с характеристична функция

$$g(s) = (\widehat{k}(s))^{-1} = \frac{s(1+as^\alpha)}{1+bs^\alpha}, \quad s>0,$$

като при $a = b$ се получава класическата задача (2.4). Определяща роля в изследването имат свойствата:

$$g(s)/s \in \mathcal{SF} \ \text{ for } \ a < b; \qquad g(s)/s \in \mathcal{CBF} \ \text{ for } \ a > b.$$

От тях следва:

Твърдение 4.1. *Нека $0 < \alpha \leq 1$ и $a, b \geq 0$. Тогава $\sqrt{g(s)} \in \mathcal{CBF}$. Ако освен това предположим $0 \leq a < b$, то $g(s) \in \mathcal{CBF}$.*

Това твърдение заедно с Теорема 2.1 води до следните две теореми за субординация.

Теорема 4.1. *Нека $a, b \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Нека операторът A поражда ограничена силно непрекъсната косинусова операторна функция $S_2(t)$. Тогава задачата (4.1) е коректно поставена и операторът на решението $S(t)$ удовлетворява равенството*

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi_1(t,\tau) S_2(\tau)\, d\tau, \quad t > 0, \tag{4.2}$$

където ядрото $\varphi_1(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност, дефинирана посредством Лапласовата трансформация

$$\widehat{\varphi}_1(s,\tau) = \frac{\sqrt{g(s)}}{s} \exp\left(-\tau\sqrt{g(s)}\right), \quad s, \tau > 0. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Нека $0 \leq a < b$ и $0 < \alpha \leq 1$. Да предположим, че A поражда ограничена C_0-полугрупа $S_1(t)$. Тогава задачата (4.1) е коректно поставена и операторът на решението $S(t)$ удовлетворява равенството*

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi_2(t,\tau) S_1(\tau)\, d\tau, \quad t > 0.$$

Ядрото $\varphi_2(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност, дефинирана посредством Лапласовата трансформация

$$\widehat{\varphi}_2(s,\tau) = \frac{g(s)}{s} \exp\left(-\tau g(s)\right), \quad s, \tau > 0.$$

Тези две теореми показват, че при $a < b$ уравнението (4.1) е подчинено на уравнението от първи ред (2.4), докато при $a > b$ то е подчинено на уравнението от втори ред (2.5). Това съответства на съществено различни свойства на решението, както ще видим с примера на едномерната задача на Коши по-долу.

Тъй като при $a > b \geq 0$ е изпълнено свойството

$$g(s)^{1/(\alpha+1)} \in \mathcal{CBF}, \quad s > 0, \tag{4.4}$$

то в този случай е в сила следният по-прецизен резултат:

Теорема 4.3. *Нека $a > b \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Предполагаме, че задачата на Коши за дробното еволюционно уравнение (2.3) от ред $\alpha + 1$ е коректно поставена и* *има ограничен оператор на решението $S_{\alpha+1}(t)$. Тогава задачата (4.1) е коректно поставена с оператор на решението $S(t)$ удовлетворяващ равенството*

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau) S_{\alpha+1}(\tau)\, d\tau, \quad t > 0.$$

Ядрото $\varphi(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност, дефинирана посредством Лапласовата трансформация

$$\widehat{\varphi}(s,\tau) = \frac{g(s)^{1/(\alpha+1)}}{s} \exp\left(-\tau g(s)^{1/(\alpha+1)}\right), \quad s,\tau > 0.$$

В случая на дробен модел, $0 < \alpha < 1$, този резултат е по-силен от формулирания в Теорема 4.1.

4.2 Едномерно фундаментално решение

Като частен пример на (4.1) разглеждаме задачата

$$(1 + aD_t^\alpha)\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = (1 + bD_t^\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{4.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0, \quad t > 0. \tag{4.7}$$

Чрез използване на трансформация на Лаплас по t и трансформация на Фурие по x се получава следният резултат:

$$\widehat{\mathcal{G}}(x,s) = \frac{\sqrt{g(s)}}{2s} \exp\left(-|x|\sqrt{g(s)}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Нека да обърнем внимание на връзката със субординационното ядро, чиято Лапласова трансформация е дадена в (4.3).

Прилагайки формулата за обръщане на трансформацията на Лаплас към (4.8) се получава интегрално представяне за фундаменталното решение чрез елементарни функции.

Теорема 4.4. *Фундаменталното решение $\mathcal{G}(x,t)$ на задачата на Коши (4.5)-(4.6)-(4.7) има интегралното представяне за $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $t > 0$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \exp\left(-|x|K^-(r)\right)\left(K^-(r)\sin\left(rt - |x|K^+(r)\right)\right. \\ &+ \left. K^+(r)\cos\left(rt - |x|K^+(r)\right)\right)\frac{dr}{r}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Функциите $K^\pm(r)$ се задават с равенствата

$$K^\pm(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^{1/2}\left(\left(A^2(r) + B^2(r)\right)^{1/2} \pm A(r)\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

където

$$A(r) = \frac{(a-b)r^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1+2br^\alpha\cos(\alpha\pi/2)+b^2r^{2\alpha}},$$

$$B(r) = \frac{1+(a+b)r^\alpha \cos(\alpha\pi/2)+abr^{2\alpha}}{1+2br^\alpha\cos(\alpha\pi/2)+b^2r^{2\alpha}}.$$

Интегралното представяне (4.9) е подходящо за числено пресмятане и визуализация на решението. При $a < b$ се наблюдава режим на дифузия, докато при $a > b$ поведението е дифузионно-вълново. Наблюдаваното поведение е аналогично на поведението на решението на дробното дифузионно-вълново уравнение (2.3) с $A = \partial^2/\partial x^2$, при което режимът на дифузия е при $0 < \alpha \le 1$, а вълновият режим е при $1 < \alpha \le 2$.

За краткост, по-нататък в дисертацията наричаме обобщени уравнения за субдифузия тези, които са подчинени на уравнението от първи ред (2.4), а уравненията, които са подчинени на уравнението от втори ред (2.5), но не са обобщени уравнения за субдифузия, наричаме обобщени дифузионно-вълнови уравнения.

5 Обобщени уравнения за субдифузия

В Глава 5 (състояща се от 4 секции) се разглежда първо абстрактната задача на Коши за дробни еволюционни уравненията от разпределен ред в интервала $[0, 1]$ с непрекъснато или дискретно разпределение на редовете на дробните производни по времето. Частният случай на задача (4.1) с $a = 0$ и $b > 0$ е изучен детайлно. След това се изследва проблемът с обща конволюционна производна и се установяват два вида теореми за субординация. Принципът за субординация в скаларния случай се прилага за извеждане на полезни оценки за функциите на релаксация, които обобщават аналогични резултати за функции на Митаг-Лефлер. Като илюстрация на приложението на тези оценки, се доказва единственост и устойчивост за една инверсна задача.

5.1 Уравнения с обобщена конволюционна производна

Обобщената конволюционна производна от типа на Капуто е въведена в [18] във вида

$$({}^C\mathbb{D}_t^{(\kappa)} f)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \kappa(t-\tau)f(\tau)\,d\tau - \kappa(t)f(0), \quad t > 0, \tag{5.1}$$

където $\kappa(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ е неотрицателна функция. За ядрото $\kappa(t)$ предполагаме, че неговата Лапласова трансформация $\widehat{\kappa}(s)$ съществува за всяко $s > 0$ и

$$\widehat{\kappa}(s) \in \mathcal{SF} \quad \text{and} \quad \lim_{s\to+\infty} s\widehat{\kappa}(s) = +\infty, \tag{5.2}$$

където $\mathcal{SF}$ е класа на Стилтесови функции.

Разглеждаме задачата на Коши

$$ {}^{C}\mathbb{D}_t^{(\kappa)} u(t) = Au(t), \quad t > 0; \quad u(0) = a \in X, \tag{5.3} $$

където ${}^{C}\mathbb{D}_t^{(\kappa)}$ е обобщената конволюционна производна (5.1), а A оператор, който поражда ограничена C_0-полугрупа.

Нека да отбележим, че в оригиналната дефиниция на обобщена дробна производна в [18] са наложени допълнителни ограничения върху граничното поведение на функцията $\widehat{\kappa}(s)$. За да включим някои важни за практиката уравнения (като например (4.1) с $0 \leq a < b$ или разгледаните в следващата глава (6.1) и (6.2) с $\alpha = 1$), ние предполагаме само изискванията (5.2). Те са достатъчни, за да бъде в сила общата теорема за субординация Теорема 2.1 в частния случай $\alpha = 1$.

Следният допълнителен резултат се получава от формулата на Пост-Уидър за обръщане на трансформацията на Лаплас:

Теорема 5.1. *Ако операторът A поражда ограничена C_0-полугрупа и ядрото $\kappa(t)$ удовлетворява (5.2) то задачата (5.3) е коректно поставена и нейното решение $u(t)$ има представянето*

$$ u(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} (n/t)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=1}^{k} b_{n,k,p} (n/t) \left(g(n/t) - A\right)^{-(p+1)} u(0). \tag{5.4} $$

Тук $g(s) = s\widehat{\kappa}(s)$ и функциите $b_{n,k,p}(s) \geq 0$ са дефинирани по следния начин

$$ b_{n,k,p}(s) = (-1)^{n+p} \binom{n}{k} \left(\frac{g(s)}{s}\right)^{(n-k)} a_{k,p}(s) p!, \quad s > 0, \tag{5.5} $$

където $a_{k,p}(s)$ се задават чрез рекурентната зависимост

$$ \begin{aligned} & a_{k+1,p}(s) = a_{k,p-1}(s) g'(s) + a'_{k,p}(s), \quad 1 \leq p \leq k+1, \ k \geq 1, \\ & a_{k,0} = a_{k,k+1} \equiv 0, \quad a_{1,1}(s) = g'(s). \end{aligned} \tag{5.6} $$

Формула (5.4) обобщава експоненциалното представяне

$$ u(t) = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-n} u(0) $$

за решението на класическата задача на Коши (2.4).

5.2 Функции на релаксация

Да разгледаме сега уравнението на релаксация с обща конволюционна производна (5.1)

$$ {}^{C}\mathbb{D}_t^{(\kappa)} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad \lambda > 0, \quad t > 0; \quad u(0) = a \in \mathbb{R}. \tag{5.7} $$

Означаваме с $u(t;\lambda)$ и $v(t;\lambda)$ решенията съответстващи на $a = 1$, $f \equiv 0$, и $a = 0$, $f(t) = \delta(t)$, където $\delta(t)$ е функцията на Дирак. Функциите $u(t;\lambda)$ и $v(t;\lambda)$ се наричат функции на релаксация.

Решението на (5.7) се представя по следния начин

$$u(t) = au(t;\lambda) + \int_0^t v(\tau;\lambda) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{5.8}$$

В частния случай когато ${}^C\mathbb{D}_t^{(\kappa)}$ е дробната производна на Капуто ${}^C D_t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, функциите на релаксация се представят чрез функции на Митаг-Лефлер: $u(t;\lambda) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ и $v(t;\lambda) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$. Следващите две теореми обобщават някои свойства на тези функции.

Теорема 5.2. *За функциите на релаксация $u(t;\lambda)$ и $v(t;\lambda)$ са в сила интегралните представяния*

$$u(t;\lambda) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau) e^{-\lambda\tau}\, d\tau, \quad t > 0, \tag{5.9}$$

$$v(t;\lambda) = \int_0^\infty \psi(t,\tau) e^{-\lambda\tau}\, d\tau, \quad t > 0, \tag{5.10}$$

където функциите $\varphi(t,\tau)$ и $\psi(t,\tau)$ удовлетворяват свойствата

$$\varphi(t,\tau) \geq 0,\ \psi(t,\tau) \geq 0; \quad \int_0^\infty \varphi(t,\tau)\, d\tau = 1,\ \int_0^\infty \psi(t,\tau)\, d\tau = k(t). \tag{5.11}$$

Тук $k(t)$ е резолвентното ядро на $\kappa(t)$, т.е. $(k * \kappa)(t) = 1$.

Теорема 5.3. *За всяко $\lambda > 0$ функциите $u(t;\lambda)$ и $v(t;\lambda)$ като функции на t има аналитично продължение в $\mathbb{C}_+$. За $t > 0$ те имат свойствата*

$$u(t;\lambda), v(t;\lambda) \in \mathcal{CMF}; \tag{5.12}$$

$$u(0;\lambda) = 1; \quad 0 < u(t;\lambda) < 1, \quad v(t;\lambda) > 0; \tag{5.13}$$

$$\frac{d}{dt} u(t;\lambda) = -\lambda v(t;\lambda). \tag{5.14}$$

Освен това

$$u(t;\lambda) \leq \frac{1}{1 + \lambda(1 * k)(t)}, \tag{5.15}$$

където $k(t)$ е резолвентното ядро на $\kappa(t)$, т.е. $(k * \kappa)(t) = 1$.

За всяко $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ и $t > 0$

$$u(t;\lambda) \leq u(t;\lambda_0), \quad v(t;\lambda) \leq v(t;\lambda_0), \tag{5.16}$$

и

$$C \leq \lambda \int_0^T v(t;\lambda)\, dt < 1, \quad T > 0, \tag{5.17}$$

където константата $C = 1 - u(T;\lambda_0) > 0$ не зависи от λ.

Оценките в Теорема 5.3 са много полезни при изследване на гранични задачи с помощта на развитие по собствени функции.

6 Мултиномни функции от Митаг-Лефлеров тип

В Глава 6 (състояща се от 3 секции) продължаваме изучаването на еволюционните уравнения с няколко производни по времето от различни редове в интервала $(0, 1]$. Главният акцент сега е върху мултиномната функция на Митаг-Лефлер, която се появява в представянето на техните решения. Изследват се основните свойства на тази функция и нейното обобщение от типа на Прабхакар. Намерени са условия за параметрите, при които функцията е напълно монотонна. Установени са някои субординационни равенства. Като конкретни примери, релаксационните функции за уравнения с няколко времеви производни са изследвани подробно. Получените резултати обобщават известни свойства на класическата функция на Митаг-Лефлер.

6.1 Мултиномна функция на Митаг-Лефлер

Различни типове многоиндексни обобщения на класическата функция на Митаг-Лефлер (1.2) се разглеждат в литературата (напр. [16, 17, 24] и монографиите [12, 23]). Едно такова обобщение е мултиномната функция на Митаг-Лефлер

$$E_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=k \\ k_1\geq 0,\ldots,k_m\geq 0}} \frac{k!}{k_1!\ldots k_m!} \frac{\prod_{j=1}^{m} z_j^{k_j}}{\Gamma\left(\beta + \sum_{j=1}^{m} \mu_j k_j\right)},$$

където $z_j \in \mathbb{C}$, $\mu_j > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$. Тази функция е въведена в [14, 19], където се използва за решаване на многочленни дробни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. По-точно, следната функция на една променлива t участва в изразяване на решенията:

$$\mathcal{E}_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}(t; a_1,\ldots,a_m) = t^{\beta-1} E_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}(-a_1 t^{\mu_1},\ldots,-a_m t^{\mu_m}).$$

Да разгледаме следните две многочленни уравнения: с производни на Капуто

$$^{C}D_t^{\alpha} u(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j \, ^{C}D_t^{\alpha_j} u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \tag{6.1}$$

и с производни на Риман-Лиувил

$$u'(t) = D_t^{1-\alpha} Au(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j \, D_t^{1-\alpha_j} Au(t) + f(t), \quad t > 0, \tag{6.2}$$

където $1 \geq \alpha > \alpha_1 > ... > \alpha_m > 0$, $b_j > 0$, $j = 1, ..., m$, а A е оператор пораждащ C_0 полугрупа. От Теорема 2.1 извеждаме следния резултат за субординация:

Теорема 6.1. *Ако задачата на Коши (2.3) притежава ограничен оператор на решението $S_\alpha(t)$, то задачите (6.1), съотв. (6.2), са коректно поставени и техните оператори на решенията се представят чрез равенството*

$$S(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t,\tau) S_\alpha(\tau)\, d\tau, \quad t > 0.$$

Ядрото $\varphi(t,\tau)$ е едностранна вероятностна плътност относно $\tau \geq 0$ дефинирана посредством Лапласовата трансформация (2.11), където

$$g(s) = s^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m} b_j s^{\alpha_j}$$

в случая на уравнение (6.1) и

$$g(s) = \left(s^{-\alpha} + \sum_{j=1}^{m} b_j s^{-\alpha_j} \right)^{-1}$$

в случая на уравнение (6.2).

В скаларния случай ($A = -\lambda$, където $\lambda > 0$ е константа) решенията на (6.1) и (6.2) се представят във вида

$$u(t) = u_n(t;\lambda) + \int_0^t v_n(t-\tau;\lambda) f(\tau)\, d\tau, \quad n = 1, 2,$$

където $n = 1$ за уравнение (6.1), $n = 2$ за уравнение (6.2) и

$$\begin{aligned} u_1(t;\lambda) &= 1 - \lambda \mathcal{E}_{(\alpha,\alpha-\alpha_1,\ldots,\alpha-\alpha_m),\alpha+1}\left(t;\lambda,b_1,\ldots,b_m\right), && (6.3) \\ v_1(t;\lambda) &= \mathcal{E}_{(\alpha,\alpha-\alpha_1,\ldots,\alpha-\alpha_m),\alpha}\left(t;\lambda,b_1,\ldots,b_m\right), && (6.4) \\ u_2(t;\lambda) &= v_2(t;\lambda) = \mathcal{E}_{(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_m),1}\left(t;\lambda,\lambda b_1,\ldots,\lambda b_m\right). && (6.5) \end{aligned}$$

Следващото представяне е получено като допълнителен резултат от разглежданията в тази глава.

Теорема 6.2. *Нека $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha_j < \alpha$, $\lambda > 0$, $b_j > 0$, $j = 1,\ldots,m$. Тогава*

$$\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_m),\beta}\left(t;\lambda,b_1,\ldots,b_m\right) = \int_0^{\infty} \phi(t,\tau) e^{-\lambda\tau}\, d\tau, \quad t > 0, \tag{6.6}$$

където ядрото $\phi(t,\tau) \geq 0$ има представянето

$$\phi(t,\tau) = \omega_{\beta-\alpha}(t) * h_{\alpha}(t,\tau) * h_{\alpha-\alpha_1}(t, b_1\tau) * \ldots * h_{\alpha-\alpha_m}(t, b_m\tau).$$

Тук $*$ е Лапласовата конволюция по отношение на променливата t, функцията $\omega_{\alpha}(t)$ е дефинирана в (1.1) и

$$h_{\alpha}(t,\sigma) = \sigma^{-1/\alpha} L_{\alpha}\left(t\sigma^{-1/\alpha}\right),$$

където $L_{\alpha}(\cdot)$ е вероятностната плътност на Леви (1.7).

6.2 Мултиномна функция на Прабхакар

Нека за краткост да използваме векторното означение $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$.

Мултиномната функция на Прабхакар се дефинира по следния начин [8]

$$E_{\vec{\mu},\beta}^{\delta}(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=k \\ k_1\geq 0,\ldots,k_m\geq 0}} \frac{(\delta)_k}{k_1!\cdots k_m!} \frac{\prod_{j=1}^{m} z_j^{k_j}}{\Gamma\left(\beta+\sum_{j=1}^{m}\mu_j k_j\right)}, \tag{6.7}$$

където $z_j \in \mathbb{C}$, $\mu_j, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, $\mu_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Тук $(\delta)_k$ означава символа на Поххамер (1.4). Полагаме

$$\mathcal{E}_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}^{\delta}(t; a_1, \ldots, a_m) = t^{\beta-1} E_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}^{\delta}(-a_1 t^{\mu_1}, \ldots, -a_m t^{\mu_m}). \tag{6.8}$$

Някои по-важни резултати за функцията (6.8) са следните:

Теорема 6.3. *Трансформацията на Лаплас $\widehat{\mathcal{E}}_{\vec{\mu},\beta}^{\delta}(s;\vec{a})$ на функцията $\mathcal{E}_{\vec{\mu},\beta}^{\delta}(t;\vec{a})$ се задава чрез равенството*

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\vec{\mu},\beta}^{\delta}(s;\vec{a}) := \mathcal{L}\left\{\mathcal{E}_{\vec{\mu},\beta}^{\delta}(t;\vec{a})\right\}(s) = \frac{s^{-\beta}}{\left(1+\sum_{j=1}^{m} a_j s^{-\mu_j}\right)^{\delta}}, \quad s \in \mathbb{C}_+. \tag{6.9}$$

Основавайки се на Теорема 6.3 и свойствата на Бернщайновите функции, е доказан следният резултат за напълна монотонност:

Теорема 6.4. *Нека $0 < \mu_j \leq 1$, $a_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, и $0 < \mu_* \delta \leq \beta \leq 1$, където $\mu_* = \max_{j=1,\ldots,m}\{\mu_j\}$. Тогава*

$$\mathcal{E}_{(\mu_1,\ldots,\mu_m),\beta}^{\delta}(t; a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{CMF}, \quad t > 0. \tag{6.10}$$

Това е един от основните резултати в тази глава.

Като пример за приложение на функциите на Прабхакар (6.8) с $\delta \neq 1$, чрез такива функции са изразени моментите на фундаменталните решения на задачите на Коши за уравнения (6.1) и (6.2) в случая $A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

В последните две глави изучаваме принципа на субординация за обобщени дифузионно-вълнови уравнения с дробни производни по времето. В литературата са разглеждани различни линейни обобщения на дробното дифузионно-вълново уравнение (2.3) с $1 < \alpha < 2$, като най-изучаваните примери са дробните дифузионно-вълнови уравнения от разпределен ред и различни уравнения, моделиращи разпространението на вълни във вискозоеластични среди.

7 Дифузионно-вълнови уравнения от разпределен ред

Глава 7 (състояща се от 2 секции) е посветена на дифузионно-вълнови уравнения с дробни производни на Капуто, чиито редове са дискретно или непрекъснато разпределени в интервала $(0, 2]$. Първо обсъждаме един отворен проблем относно интерпретацията на фундаменталното решение на съответната едномерна задача на Коши като пространствена вероятностна плътност. След това подробно се изследва принципът на субординация за многочленно дифузионно-вълново уравнение.

7.1 Кога фундаменталното решение е вероятностна плътност?

Разглеждаме уравнението от разпределен ред

$$\int_0^2 \mu(\beta) {}^C D_t^\beta u(x,t)\, d\beta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{7.1}$$

където $\mu(\beta)$ е неотрицателна функция, такава че

$$\operatorname{supp} \mu \,\cap\, (1,2] \neq \emptyset.$$

Задачата на Коши за (7.1) с начални условия $u(x,0) = v(x)$ и $u_t(x,0) = 0$ се изучава в [13] с основен фокус върху интерпретацията на фундаменталното решение $\mathcal{G}(x,t)$ като вероятностна плътност относно $x \in \mathbb{R}$ (при $t > 0$ разглеждано като параметър), т.е. удовлетворяващо:

$$\mathcal{G}(x,t) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x,t)\, dx = 1. \tag{7.2}$$

Значението на свойствата (7.2) за стохастичната интерпретация на уравнението (7.1) и за неговия физически смисъл е обяснено в [11]. Същевременно, изпълнението на тези условия осигурява съществуване на субординация за уравнения от типа (7.1) по отношение на задачата на Коши от втори ред. Това е така поради следната взаимовръзка между ядрото $\varphi(t,\tau)$ в субординационното равенство (7.6) по-долу и фундаменталното решение $\mathcal{G}(x,t)$:

$$\varphi(t,\tau) = 2\mathcal{G}(x,t), \quad \text{при} \quad \tau = x \geq 0.$$

Нека да отбележим, че $\mathcal{G}(-x,t) = \mathcal{G}(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$.

Достатъчно условие фундаменталното решение на (7.1) да удовлетворява свойствата (7.2) е $g(s)^{1/2} \in \mathcal{CBF}$, където

$$g(s) = \int_0^2 \mu(\beta) s^\beta\, d\beta, \quad s > 0. \tag{7.3}$$

В [13] се доказва, че ако $\operatorname{supp} \mu \subseteq [1,2]$ то $g(s)^{1/2} \in \mathcal{CBF}$ и следователно свойствата (7.2) са изпълнени. Същевременно се поставя въпроса дали това условие за функцията μ не може да се отслаби. Ние доказваме, че носителят на тегловната функция може да бъде произволен подинтервал на $[0,2]$ с дължина не повече от 1.

Твърдение 7.1. *Нека* $\operatorname{supp} \mu \subseteq [\alpha - 1, \alpha]$, $1 < \alpha \leq 2$. *Тогава* $g(s)^{1/2} \in \mathcal{CBF}$.

Твърдение 7.1 се отнася както за непрекъсната, така и за дискретна тегловна функция μ. Следващото твърдение дава един специален пример на функция на теглото, в който условието за нейния носител може още да се отслаби. В разгледания случай носителят на функцията на теглото може да бъде всеки подинтервал на интервала $[0,2]$.

Твърдение 7.2. *Нека $a > 0$ и $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le 2$. Ако $\mu(\beta) = a^\beta$ за $\beta \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и $\mu(\beta) = 0$ за $\beta \in (0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, 2]$, то $g(s)^{1/2} \in \mathcal{CBF}$.*

Тези две твърдения отговарят частично на въпроса поставен в [13]. За попрецизни резултати случаите на непрекъснато и дискретно разпределение трябва да се разглеждат отделно.

В остатъка от тази глава се изучава детайлно уравнения с дискретно разпределение на редовете на производните в интервал $[\alpha - 1, \alpha]$, където $\alpha \in (1, 2]$.

7.2 Многочленно дифузионно-вълново уравнение

Разглеждаме уравнението

$$c\,{}^C\!D_t^\alpha u(t) + \sum_{j=1}^m c_j\,{}^C\!D_t^{\alpha_j} u(t) = Au(t), \quad u(0) = a \in X,\ u'(0) = 0, \tag{7.4}$$

където операторът A поражда силно непрекъсната косинусова функция $S_2(t)$. За параметрите α, α_j, c, c_j, предполагаме, че удовлетворяват следните условия

$$\begin{array}{l} \alpha \in (1,2], \quad \alpha > \alpha_1 > \cdots > \alpha_m > 0, \quad \alpha - \alpha_m \le 1, \\ c > 0, \quad c_j > 0, \quad j = 1, \cdots, m. \end{array} \tag{7.5}$$

Прилагайки общата Теорема 2.1 получаваме следния резултат:

Теорема 7.1. *Задачата (7.4) е коректно поставена и има ограничен оператор на решението $S(t)$, който е свързан с $S_2(t)$ чрез равенството*

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau) S_2(\tau)\, d\tau, \quad t > 0. \tag{7.6}$$

Ядрото $\varphi(t,\tau)$ е вероятностна плътност по τ и има представянето

$$\begin{aligned} \varphi(t,\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\tau K^+(r)\right) \left(K^+(r) \sin\left(rt - \tau K^-(r)\right)\right. \\ &+ \left. K^-(r) \cos\left(rt - \tau K^-(r)\right)\right) \frac{dr}{r}, \quad t, \tau > 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

където $K^\pm(r)$ са дефинирани по следния начин

$$\begin{aligned} K^\pm(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(A^2(r) + B^2(r)\right)^{1/2} \pm A(r) \right)^{1/2}; \\ A(r) &= cr^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + \sum_{j=1}^m c_j r^{\alpha_j} \cos(\alpha_j \pi/2), \\ B(r) &= cr^\alpha \sin(\alpha\pi/2) + \sum_{j=1}^m c_j r^{\alpha_j} \sin(\alpha_j \pi/2). \end{aligned}$$

Отново е изпълнено и по-силното твърдение, че операторът на решението $S(t)$ е подчинен на $S_\alpha(t)$, където α е най-големият ред на производна по времето в уравнението (7.4). В допълнение имаме следните различия в случаите $\alpha = 2$ и $1 < \alpha < 2$:

Теорема 7.2. *Ако $1 < \alpha < 2$, то операторът на решението $S(t)$ на задача (7.4) е ограничен аналитичен с ъгъл*

$$\theta_0 = \frac{(2-\alpha)\pi}{2\alpha}.$$

Ако $\alpha = 2$, то за ядрото $\varphi(t,\tau)$ в (7.6) е изпълнено $\varphi(t,\tau) = 0$ за $\tau > t/\sqrt{c}$.

8 Разпространение на вълни в линейни вискозоеластични среди

В Глава 8 (състояща се от 4 секции) се разисква принципът за субординация за уравнения, моделиращи разпространението на вълни в линейни вискозоеластични среди. Разглеждат се различни конститутивни закони, които представляват дробни обобщения на някои класически модели. За всички модели се доказва, че модулът на релаксация е напълно монотонна функция. По-подробно са изследвани задачи за разпространение на вълни във вискозоеластичен флуид с дробния модел на Джефри и са дадени някои приложения на принципа за субординация, както и неговата физическа интерпретация. Главата завършва с кратък коментар относно дефиницията на класа на обобщените дробни дифузионно-вълнови уравнения.

Свойствата на един линеен вискозоеластичен модел се задават чрез линейна зависимост между напрежението σ и деформацията ε. Ние разглеждаме едномерния случай, в който $\sigma = \sigma(x,t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$. Модулът на релаксация $G(t)$ се дефинира чрез равенството

$$\sigma(x,t) = \int_0^t G(t-\tau)\dot{\varepsilon}(x,\tau)\,d\tau, \quad t > 0, \tag{8.1}$$

където точката традиционно означава първа производна по времето.

За да има физически смисъл един модел, модулът на релаксация $G(t)$ трябва да удовлетворява условията $G(t) \geq 0$ и $G'(t) \leq 0$. В много случаи се оказва, че тези две условия водят до по-силното свойство $G(t) \in \mathcal{CMF}$. В дисертацията това е доказано за дробните закони на Максуел, Джефри и обобщения дробен закон на Зенер.

8.1 Дробен модел на Зенер от разпределен ред

Да разгледаме по-подробно обобщения дробния модел на Зенер от разпределен ред, който е зададен с конститутивното уравнение [4]

$$\int_0^1 p_\sigma(\alpha) D_t^\alpha \sigma(x,t)\,d\alpha = \int_0^1 p_\varepsilon(\alpha) D_t^\alpha \varepsilon(x,t)\,d\alpha, \tag{8.2}$$

където $p_\sigma(\alpha)$ и $p_\varepsilon(\alpha)$ са неотрицателни тегловни функции. Този модел е изучен в [5], Chapter 3, без да се дискутира напълната монотонност на съответния модул на релаксация. Разглеждат се два случая: многочленният дробен модел на Зенер

$$\sum_{n=0}^{N} a_n D_t^{\alpha_n}\sigma(x,t) = \sum_{n=0}^{N} b_n D_t^{\alpha_n}\varepsilon(x,t), \tag{8.3}$$

където $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N < 1,\ a_n, b_n > 0,\quad n = 0, 1, ..., N$, и

$$\frac{a_0}{b_0} \ge \frac{a_1}{b_1} \ge \cdots \ge \frac{a_N}{b_N}, \tag{8.4}$$

и случаят със степенни тегловни функции

$$p_\sigma(\alpha) = a^\alpha,\quad p_\varepsilon(\alpha) = b^\alpha, \qquad 0 < a < b. \tag{8.5}$$

Доказваме следните две теореми, в които се установява, че $G(t) \in \mathcal{CMF}$ посредством представянето ѝ като трансформация на Лаплас на неотрицателна функция.

Теорема 8.1. *Ако условията (8.4) са изпълнени, то модулът на релаксация $G(t)$ на модела (8.3) е напълно монотонна функция и е в сила представянето*

$$G(t) = \frac{b_0}{a_0} + \int_0^\infty e^{-rt} K(r)\, dr, \tag{8.6}$$

където

$$K(r) = \frac{1}{\pi r} \frac{\sum_{0\le i<j\le N} (a_i b_j - a_j b_i) r^{\alpha_i+\alpha_j} \sin(\alpha_j - \alpha_i)\pi}{\left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^{\alpha_n} \cos\alpha_n\pi\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^{\alpha_n} \sin\alpha_n\pi\right)^2} \ge 0. \tag{8.7}$$

Теорема 8.2. *Модулът на релаксация $G(t)$ на модела (8.2)-(8.5) е напълно монотонна функция, за която е в сила представянето*

$$G(t) = 1 + \int_0^\infty e^{-rt} K(r)\, dr, \tag{8.8}$$

където

$$K(r) = \frac{(br+1)(\ln b - \ln a)}{r(ar+1)\left(\ln^2(br) + \pi^2\right)} \ge 0. \tag{8.9}$$

8.2 Субординация

Благодарение на свойството $G(t) \in \mathcal{CMF}$ е възможно да формулираме субординационна зависимост между съответното дифузионно-вълново уравнение и класическото вълново уравнение. Това се дължи на факта, че разпространението на вълни във вискозоеластична среда с функция на релаксация $G(t)$ се задава с интегрално уравнение от вида

$$u(x,t) = \int_0^t k(t-\tau) u_{xx}(x,\tau)\, d\tau + f(x,t), \tag{8.10}$$

където $k(t) = \int_0^t G(\tau)\, d\tau$. Тогава за функцията $g(s)$ в Теорема 2.1 имаме

$$g(s) = (\widehat{k}(s))^{-1} = \frac{s}{\widehat{G}(s)}. \tag{8.11}$$

Според свойствата на Бернщайновите функции, от $G(t) \in \mathcal{CMF}$ следва $\widehat{G}(s) \in \mathcal{SF}$. Следователно, $g(s)$ е произведение на две функции от класа $\mathcal{CBF}$ (s и $1/\widehat{G}(s)$), което показва, че $g(s)^{1/2} \in \mathcal{CBF}$. Това означава, че условията на общата Теорема 2.1 са изпълнени за $\alpha = 2$ и уравнението (8.10) е подчинено на класическото вълново уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ със същите начални и гранични условия.

Следователно, физическият смисъл на формулата за субординация в този случай е, че тя разделя решението на дифузионно-вълновото уравнение (8.10) на две части, като едната (вероятностната плътност) зависи само от параметрите на вискозоеластичната среда, а втората (решението на класическото вълново уравнение) зависи само от зададените начални и гранични условия.

8.3 Обобщени дифузионно-вълнови уравнения

По аналогия на обобщените дробни уравнения за субдифузия, разгледани в Глава 5, в работата [29] се предлага обобщени дифузионно-вълнови уравнения да се наричат уравнения от вида

$$\int_0^t \eta(t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(x,\tau)\, d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t),$$

където $\widehat{\eta}(s) \in \mathcal{SF}$. Това предложение се основава на факта, че конволюционната производна по времето вляво е обобщение на производната на Капуто от ред $\alpha \in (1,2)$, която отговаря на $\widehat{\eta}(s) = s^{\alpha-2}$.

Оказва се, че тази дефиниция отговаря точно на уравнение от вида (8.10) с $G(t) \in \mathcal{CMF}$. Това обаче е само един тесен клас дифузионно-вълнови уравнения, който не включва много уравнения описващи дифузионно-вълнови процеси. В края на главата са дадени примери на уравнения, които не са от този вид, но въпреки това са подчинени по принципа за субординация на класическото вълново уравнение и следователно описват междинни процеси между дифузия и разпространение на вълни. Един такъв пример е уравнение с две дробни производни по времето от редове α и α_1, такива че $\alpha \in (1,2), \alpha_1 \in (0,1), \alpha - \alpha_1 \leq 1$.

Тези наблюдения дават основание за разширяване на дефиницията за обобщено дифузионно-вълново уравнение, предложена в [29], като един възможен начин е дефиницията да се основава на принципа за субординация: обобщени дифузионно-вълнови уравнения са всички уравнения, които са подчинени по принципа за субординация на класическото вълново уравнение, но не са уравнения на субдифузия.

V. АВТОРСКА СПРАВКА ЗА НАУЧНИТЕ ПРИНОСИ

По мнение на автора основните приноси на дисертационния труд са следните:

- Разработена е обща методология за установяване на субординационна зависимост между едно линейно еволюционно уравнение от общ вид и линейно еволюционно уравнение от дробен или целочислен ред. Въпросът за субординация между двете уравнения се свежда до задачата да се установи дали дадена характеристична функция е от класа на напълно Бернщайновите функции.

- Установени са субординационни зависимости за редица уравнения с дробни производни по времето, които се срещат в научната литература. Тези представяния разделят решението на две части: субординационно ядро (функция, която е вероятностна плътност и съдържа цялата информация за операторите, действащи по времето) и решението на едно по-просто уравнение от цял или дробен ред (съдържащо информация за геометрията на задачата чрез наложените начални и гранични условия).

- Изучен е принципът за субординация за уравнения, които са дробни по пространството и по времето (Глава 3). Получени са различни представяния за субординационното ядро и са изследвани неговите свойства. Определен е секторът от комплексната равнина, в който подчиненото решение е ограничено аналитично. Използвайки равенството за субординация са изведени интегрални представяния за n-мерното фундаментално решение, $n = 1, 2, 3$, така както и явни формули в някои специални случаи.

- Подробно са изучени еволюционни уравнения с дробния конститутивен закон на Джефри (Глава 4 и Секция 8.3). Въз основа на този модел е показана взаимовръзката между принципа за субординация и физическия смисъл на едно еволюционно уравнение.

- Установени са субординационни зависимости за решенията на уравнения описващи аномална дифузия (Глава 5). Получена е явна формула за апроксимация на решението, която обобщава експоненциалната формула за C_0-полугрупи. Като приложение на формулата за субординация е изведена полезна двустранна оценка за решението на обобщеното уравнение на релаксация, която е използвана за изследването на една инверсна задача.

- Въвежда се и се изследва мултиномна функция от типа на Прабхакар (Глава 6). Намерени са условия, при които функцията е напълно монотонна. Това свойство позволява мултиномната функция на Прабхакар да се използва за дефиниране на модел, който обобщава известни модели на релаксация (Секция 8.2.4).

- Частично е разрешен въпросът за условията, при които едномерното фундаментално решение на дифузионно-вълновото уравнение от разпределен ред е вероятностна плътност (Секция 7.1). Класът на позволените тегловни функции е разширен от такива с носител съдържащ се в интервала $[1, 2]$ до функции с носител, съдържащ се в интервала $[a, a + 1]$, $0 < a \leq 1$. Установено е, че в специални случаи това условие може още да се отслаби.

- Принципът за субординация на дифузионно-вълнови уравнения с няколко производни по времето от различен (дробен) ред е изучен детайлно (Секция 7.2). Получено е интегрално представяне на субординационното ядро. Разгледани са случаите на крайна и безкрайна скорост на разпространение на вълната.

- Изследван е модулът на релаксация за някои обобщени дробни вискозоеластични модели, дефинирани в литературата. За дробните модели на Максуел, Джефри и модела на Зенер от разпределен ред се доказва, че имат физически смисъл тогава и само тогава когато съответният модул на релаксация е напълно монотонна функция (Секция 8.2). Това свойство играе важна роля за установяване на принцип на субординация за съответните вълнови уравнения.

- Въз основа принципа за субординация се дефинират два основни класа обобщени дробни еволюционни уравнения: уравнения описващи субдифузия (подчинени на класическото дифузионно уравнение) и дифузионно-вълнови уравнения (подчинени на класическото вълново уравнение, които не са субдифузионни уравнения). Този начин на класификация е физически коректен и разширява дефинициите на тези два класа, предложени в литературата, като позволява да се включат някои важни физически смислени модели.

VI. АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Изследванията по дисертацията са представяни на повече от 10 международни научни конференции, сред които:

- International Conference on “Fractional Differentiation and its Applications”, Нови Сад, Сърбия (2016);

- 8th International conference “Transform Methods & Special Functions”, София (2017);

- “Математически дни в София” (2017);

- 15th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Солун, Гърция (2017);

както и на следните международни форуми проведени в Нови Сад, Сърбия:

“Pannonian Mathematical Modelling” (2015), “Applications of Generalized Functions in Harmonic Analysis, Mechanics, Stochastics and PDE” (2017) и “Topics in Fractional Calculus and Time-Frequency Analysis” (2020).

Освен това, получените резултати са докладвани на общия семинар "Анализ, геометрия и топология" в ИМИ-БАН (2015г.), на годишните научни сесии на секция "Анализ, геометрия и топология" при ИМИ-БАН, както и пред семинара по Математическо моделиране на ФМИ-СУ през 2015, 2017 и 2019 г.

Достоверност на резултатите

За потвърждаване на достоверността на някои от изведените аналитични формули са използвани различни способи. Първо, проверено е дали има качествено съответствие с очакваното поведение на съответната величина, така че получената формула да има физически смисъл (например, фундаменталното решение трябва винаги да представлява вероятностно разпределение, модулът на релаксация трябва да е положителна и нерастяща функция). Второ, някои от намерените аналитични резултати са проверени като са използвани за числено пресмятане и получените числени резултати са сравнени с такива на други автори (например резултати от Глава 4 са сравнени в публикация [B10] с резултати от монографията [5]) или с резултати получени чрез друг числен метод (например сравненията дадени във Фиг. 8.1). Освен това са правени числени сравнения с вече известни аналитични фурмули в някои частни случаи.

Участие в научни проекти

Резултатите, включени в дисертацията, са установени в рамките на следните научни проекти:

- проект към Фонд Научни Изследвания (ФНИ): "Теоретично и числено изследване на нелинейни математически модели" (2014-2017);

- проект по ННП "Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността" (2018-2021);

- международен проект по ОП "Наука и образование за интелигентен растеж": "Център за върхови постижения по информатика и информационни и комуникационни технологии" (2018-2023);

- проект към ФНИ с Русия "Изследване на динамичното поведение на деформируеми тела при отчитане на ефектите на наследственост на материала" (2020-2023);

- три проекта по двустранен научен договор между Българската академия на науките и Сръбската академия на науките и изкуствата: "Математическо моделиране чрез интегрално-трансформационни методи, частни диференциални уравнения, специални и обобщени функции" (2012-2016), "Аналитични и числени методи за диференциални и интегрални уравнения и математически модели от произволен (дробен или цял) ред" (2017-2019) и "Оператори, диференциални уравнения и специални функции на дробното смятане – числени методи и приложения" (2020-2022).

Благодарности

Преди всичко бих искала да изразя своята голяма благодарност към чл.-кор. И. Димовски и проф. В. Кирякова, които насочиха научните ми интереси към дробното смятане преди повече от четвърт век и оттогава непрекъснато ме подкрепят и насърчават.

Особено съм признателна на проф. В. Кирякова за създадения от нея международен център на дробното смятане в ИМИ (научното списание "Fractional Calculus and Applied Analysis", традиционната конференция "Transform Methods & Special Functions", двустранни сътрудничества по ЕБР), което оказа много благоприятно влияние върху моята кариера.

Огромно благодаря на проф. Й. Панева-Коновска за полезните препоръки, отзивчивостта и ценната помощ при оформянето на този труд.

Признателна съм и на всички останали колеги от секция "Анализ, геометрия и топология" за създадения благоприятен работен микроклимат и за подкрепата по време на предварителната защита.

Емилия Бажлекова, доц. д-р
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

Литература

[1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* New York, Dover (1964).

[2] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Birkhäuser, Basel (2011).

[3] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier, Amsterdam (2005).

[4] T. Atanacković, On a distributed derivative model of a viscoelastic body. *C. R. Mécanique*, **331** (2003), 687-692.

[5] T. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, D. Zorica, *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes.* John Wiley & Sons, London (2014).

[6] A.V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific J. Math.* **10** (1961), 419-437.

[7] E. Bazhlekova, Subordination principle for fractional evolution equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **3**, No 3 (2000), 213-230.

[8] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov, Identification of a space-dependent source term in a nonlocal problem for the general time-fractional diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math.* **386** (2021), Art. # 113213.

[9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* vol. 2, Wiley, New York (1971).

[10] A. Giusti, I. Colombaro, R. Garra, R. Garrappa, F. Polito, M. Popolizio, F. Mainardi, A practical guide to Prabhakar fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **23** (2020) 9-54.

[11] R. Gorenflo, Stochastic processes related to time-fractional diffusion-wave equation. *Commun. Appl. Ind. Math.* **6**, No 2 (2015), e-531.

[12] R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi, S. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* 2nd Ed., Springer, Berlin- Heidelberg (2020).

[13] R. Gorenflo, Y. Luchko, M. Stojanović, Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **16** (2013), 297-316.

[14] S.B. Hadid, Y. Luchko, An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order. *Panam. Math. J.* **6**, No 1 (1996), 57-73.

[15] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics studies, Elsevier, Amsterdam (2006).

[16] V. Kiryakova, Unified approach to fractional calculus images of special functions - a survey. *Mathematics,* **8**, No 12 (2020), Art. # 2260.

[17] V. Kiryakova, A guide to special functions in fractional calculus. *Mathematics,* **9**, No 1 (2021), Art. # 106.

[18] A. Kochubei, General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes. *Integr. Equ. Oper. Theory*, **71** (2011), 583-600.

[19] Yu. Luchko, R. Gorenflo, An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Acta Math. Vietnamica,* **24** (1999), 207-233.

[20] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity.* Imperial College Press, London (2010).

[21] F. Mainardi, Yu. Luchko, G. Pagnini, The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **4** (2001), 153-192.

[22] J. Mikusiński, On the function whose Laplace-transform is $\exp(-s^\alpha)$. *Stud. Math.* **18** (1959), 191-198.

[23] J. Paneva-Konovska, *From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence.* World Sci. Publ., London (2016).

[24] J. Paneva-Konovska, V. Kiryakova, On the multi-index Mittag-Leffler functions and their Mellin transforms. *Int. J. Appl. Math.* **33** No 4 (2020), 549-571.

[25] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* San Diego: Academic Press (1999).

[26] H. Pollard, The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_a(-x)$. *Bull Amer Math Soc.* **54** No 12 (1948), 1115-1116.

[27] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.* **19**, No 1 (1971), 7-15.

[28] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin (1993).

[29] T. Sandev, Z. Tomovski, J.L.A. Dubbeldam, A. Chechkin, Generalized diffusion-wave equation with memory kernel. *J. Phys. A Math. Theor.* **52** No 1 (2019), Art. # 015201.

[30] R. Schilling, R. Song, Z. Vondraček, *Bernstein Functions: Theory and Applications.* De Gruyter, Berlin (2010).

[31] K. Yosida, *Functional Analysis.* Berlin: Springer-Verlag (1965).