Глобална регулярност на нелинейните дисперсивни уравнения и оценките на Strichartz .

Evgeni Y. Ovcharov

16 януари 2023 г.

Глава 1

Introduction

Оценките на Strichartz са вид априорни оценки за решенията на голям клас линейни частични диференциални уравнения, чието общо свойство е, че техните решения са склонни да се разпръскват във времето. Първоначално такива оценки бяха доказани от R. Strichartz [11] в края на 1970 г. за вълновото уравнение, но по-късно изследователите ги разшириха и за други дисперсионни уравнения. Оригиналният метод на доказателство се основава на наскоро откритите от Стайн и Томас фундаментални резултати за ограничителните свойства на многомерното преобразуване на Фурие. Техниките обаче се основават на тежък хармоничен анализ и оценките са ограничени до специални случаи. В своята статия [10] Печър показа, че експонентите за време и пространство не е необходимо да са равни и по този начин предостави повечето от оценките Strichartz за хомогенното уравнение в специалния контекст на уравнението на Клайн-Гордън. Следващият голям напредък в метода се появи в Ginibre и Velo [5], които изобретиха по-просто и по-гъвкаво доказателство, което разчиташе само на принципа на дуалността във функционалния анализ. В края на 80-те години на миналия век Яджима разшири метода до уравнения с нехомогенни членове, за да обхване различни показатели за време и пространство. Тези идеи бяха финализирани в средата на 90-те години на миналия век в статиите на Линдблад и Соге [9] и Джинибре и Вело [6]. Днес ядрото на тези техники е известно като TT^*-метод.

До средата на 1990 г. Strichartz оценките станаха стандартен инструмент в анализа на Schrödinger и вълновите уравнения и постепенно станаха познати на изследователите, работещи извън тези две уравнения. Например, през 1996 г. излезе кратката статия на Кастела и Пертам [2], където те доказват някои хомогенни Strichartz оценки за кинетичното транспортно уравнение.

Следващият пробив идва през 1997 г., когато Кийл и Тао [8] донасят дългоочакваното обединение в теорията. Авторите изясниха фундаменталното свойство на мащабирането в оценките, представиха метода на абстрактно ниво и дадоха някои нови инструменти, базирани на интерполация на билинейна форма и мащабиращи инвариантни декомпозиции, които днес са в основата на изучаването на оценките на крайната точка и нехомогенните оценки. В статия от 2005 г. Фоши [4] даде допълнително усъвършенстване на метода чрез въвеждане на двоично разлагане на Уитни, което е по-ефективно от оригиналното на [8] в нехомогенната среда.

Означаваме с $U(t)$ непрекъснатата линейна еволюционна група на линейно хомогенно диференциално уравнение. Двете най-важни свойства на $U(t)$ са

- дисперсионната оценка:

$$\|U(t)f\|_{L^\infty_x} \lesssim \frac{1}{|t|^\sigma} \|f\|_{L^1_x}, \quad t \in \mathbb{R},\ \forall f \in L^1(X;d\mu) \tag{1.1}$$

- енергийната оценка

$$\|U(t)f\|_{L^2_x} \lesssim \|f\|_{L^2_x}, \quad t \in \mathbb{R},\ \forall f \in L^2(X;d\mu) \tag{1.2}$$

където $\sigma > 0$ е скоростта на затихване, f е началният профил на вълната и чрез $L^p = L^p(X;d\mu)$ ние обозначаваме пространството на Лебег L^p над някакво мерно пространство $(X, d\mu)$. Двете неравенства по-горе отразяват физическия феномен, че амплитудата на вълната намалява с времето (уравнение (1.1)), докато нейната обща енергия остава постоянна (в случай на равенство в уравнението (1.2)).

Хомогенните Strichartz оценки имат формата

$$\|U(t)f\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|f\|_{L^2_x}, \qquad \forall f \in L^2_x.$$

Към нехомогенното уравнение свързваме следния оператор

$$W(t)F = \int_{-\infty}^{t} U(t-s)F(s)ds. \tag{1.3}$$

При предположението, че $\operatorname{supp} F \subseteq [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, (1.3) дава формулата на Дюамел на фундаменталното решение на нехомогенното PDE. Нехомогенните Strichartz оценки имат формата

$$\|W(t)F\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|F\|_{L^{\tilde{q}'}_t L^{\tilde{r}'}_x}, \tag{1.4}$$

където с $L^q_t L^r_x$ означаваме пространството на Лебег $L^q(\mathbb{R}; L^r(X;d\mu))$. В продължението показваме, че хомогенните Strichartz оценки могат да бъдат идентифицирани като специален подклас на нехомогенните, вижте Теорема 1.0.2. От тази гледна точка изследването на нехомогенните Strichartz оценки ще бъде нашата основна цел. Нормите на Лебег в дисперсивните и енергийните неравенства ще бъдат подходящо обобщени до норми на Лебег с векторни стойности и норми за абстрактно банахово пространство в следващите глави. Ще проучим явната форма на оценките Strichartz за конкретни уравнения и ще докажем нови оценки Strichartz , които ще ни помогнат да докажем съществуването на решения на нелинейни PDE.

В този раздел представяме някои случаи на еквивалентност между две дадени Strichartz оценки. За да направите това, нека първо представим означенията. Разгледайте две абстрактни банахови пространства $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Да предположим, че двойственото сдвояване $\langle \cdot, \cdot \rangle$ за тези две пространства е едно и също и че $\mathcal{B}_1$ и ${\mathcal{B}_2}^*$ имат общо плътно подмножество $\mathcal{S}$. Ние дефинираме присъединеното $U^*(t) : \mathcal{S} \to {\mathcal{B}_1}^*$ към $U(t) : \mathcal{S} \to \mathcal{B}_2$ чрез

$$\langle U(t)f, g \rangle = \langle f, U^*(t)g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{S}.$$

Типичен пример е $\mathcal{B}_1 = L^p$, $\mathcal{B}_2 = L^q$, които имат една и съща двойственост $\langle f, g \rangle = \int fg dx$ и $\mathcal{S}$ се приема като клас на Шварц на $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.0.1 (Лемата за дуалността). *Следните две оценки за $W(t)$ са еквивалентни*

$$\|W(t)F\|_{L_t^q(\mathbb{R};\mathcal{B}_2)} \lesssim \|F\|_{L_t^p(\mathbb{R};\mathcal{B}_1)} \, ,$$
$$\|W(t)F\|_{L^{p'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_1}^*)} \lesssim \|F\|_{L^{q'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_2}^*)} \, ,$$

за $1 \leq p, q \leq \infty$, когато и двете са инвариантни към трансформацията $U(t) \leftrightarrow U(-t)$.

Theorem 1.0.2 (Теорема за еквивалентността). **A.** *Следните три оценки са еквивалентни*

$$\begin{aligned} \|U(t)f\|_{L_t^q(\mathbb{R};\mathcal{B}_2)} &\lesssim \|f\|_{\mathcal{B}_1} \, , & \forall f \in \mathcal{B}_1, \\ \|W(t)F\|_{L_t^q(\mathbb{R};\mathcal{B}_2)} &\lesssim \|F\|_{L_t^1(\mathbb{R};\mathcal{B}_1)} \, , & \forall F \in L^1(\mathbb{R};\mathcal{B}_1), \\ \|W(t)F\|_{L^\infty(\mathbb{R};{\mathcal{B}_1}^*)} &\lesssim \|F\|_{L^{q'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_2}^*)} \, , & \forall F \in L^{q'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_2}^*). \end{aligned}$$

B. *Ако $\mathcal{B}_1$ е хилбертово пространство, хомогенната оценка по-горе е еквивалентна на*

$$\|W(t)F\|_{L_t^q(\mathbb{R};\mathcal{B}_2)} \lesssim \|F\|_{L^{q'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_2}^*)} \, , \quad \forall F \in L^{q'}(\mathbb{R};{\mathcal{B}_2}^*).$$

всеки пъп, когато $q > 2$. В случая, когато $q = 2$ можем само да твърдим, че хомогенната оценка се подразбира от последната нехомогенна оценка.

Глава 2

Оценки на Стрихартц за кинетично транспортното уравнение

Основната цел на тази глава е да проучи диапазона на валидност на оценките на Strichartz за уравнението на кинетичния транспорт (КТ)

$$\partial_t u(t,x,v) + v \cdot \nabla_x u(t,x,v) = F(t,x,v), \quad (t,x,v) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$
$$u(0,x,v) = f(x,v). \tag{2.2}$$

Всички оценки, които доказваме в продължението, включват следните два основни оператора

$$U(t)f = f(x - tv, v), \quad W(t)F = \int_0^t U(t-s)F(s)ds, \tag{2.3}$$

които разлагат решението u на задачата на Коши за линейното уравнение на КТ (2.1), (2.2) на хомогенна и нееднородна част

$$u(t) = U(t)f + W(t)F.$$

Хомогенните оценки на Strichartz имат формата

$$\|U(t)f\|_{L_t^q L_x^r L_v^p} \lesssim \|f\|_{L_{x,v}^a}, \tag{2.4}$$

където под $L_t^q L_x^r L_v^p$ имаме предвид $L^q([0,\infty); L^r(\mathbb{R}^n; L^p(\mathbb{R}^n)))$. Нееднородните оценки имат формата

$$\|W(t)F\|_{L_t^q L_x^r L_v^p} \lesssim \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'} L_v^{\tilde{p}'}}. \tag{2.5}$$

Нека сега опишем диапазона на валидност на хомогенните оценки. Следвайки Кийл и Тао [8], ще наречем показателите на Лебег, за които оценката (2.4) е валидна за всяка $f \in L_{x,v}^a$ *admissible*.

Definition 2.0.1. Казваме че триплетът (q, r, p) е *KT-admissible*, ако

$$\frac{1}{q} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right), \quad a \stackrel{def}{=} \mathrm{HM}(p, r), \tag{2.6}$$

$$1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad p^*(a) \leq p \leq a, \quad a \leq r \leq r^*(a), \tag{2.7}$$

с изключение на $n = 1$, $(q, r, p) = (a, \infty, a/2)$.

В горната дефиниция използваме съкращението $\mathrm{HM}(p, r)$ да означаваме хармоничното средно на p и r, т.е. $a = \mathrm{HM}(p, r)$ винаги когато

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right).$$

За удобство ние също изчислихме точната долна граница p^* до p и точната горна граница r^* до r, които са дадени в

Definition 2.0.2. Set

$$\begin{cases} p^*(a) = \frac{na}{n+1}, & r^*(a) = \frac{na}{n-1}, \quad \text{if} \quad \frac{n+1}{n} \leq a \leq \infty, \\ p^*(a) = 1, & r^*(a) = \frac{a}{2-a}, \quad \text{if} \quad 1 \leq a \leq \frac{n+1}{n}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Използвахме конвенцията, че $1/0 = \infty$, т.е. за $n = 1$, $r^*(a) = \infty$. Освен това в този текст винаги ще използваме конвенцията $1/\infty = 0$ и $1/0 = \infty$ в контекста на показателите на Лебег.

За да опишем обхвата на нехомогенните оценки, ще ни трябват следващите две определения. Следвайки Фоши [4], ние ще наречем експонентната тройка (q, r, p) *KT-acceptable*, ако тя удовлетворява определено условие, което е необходимо за валидността на нехомогенните оценки на формата (2.5) за всяка дясна страна $F \in L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'} L_v^{\tilde{p}'}$.

Definition 2.0.3. Казваме че триплетът (q, r, p) от показатели е *KT-acceptable* ако

$$\frac{1}{q} < n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad 1 \leq p < r \leq \infty, \tag{2.9}$$

или ако $q = \infty$, $1 \leq p = r \leq \infty$.

Имайте предвид, че KT-acceptable тройка винаги е KT-admissibl. По-късно ще видим, че това условие е необходимо както за валидността на обобщените хомогенни оценки, така и на нехомогенните оценки. За да опишем допълнително обхвата на валидност на нехомогенните оценки, даваме следното

Definition 2.0.4. Казваме че два KT-acceptable триплети (q, r, p) и $(\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{p})$ от показатели са *jointly KT-acceptable* са

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = n\left(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}}\right), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{HM}(p, r) = \mathrm{HM}(\tilde{p}', \tilde{r}'), \tag{2.11}$$

и ако показателите удовлетворяват

(i)

$$\frac{n-1}{p'} < \frac{n}{\tilde{r}}, \quad \frac{n-1}{\tilde{p}'} < \frac{n}{r}, \tag{2.12}$$

за $r, \tilde{r} \neq \infty$.

(ii) ако $r = \infty$ тогава $(1/q, 1/r, 1/p, 1/\tilde{q}, 1/\tilde{r}, 1/\tilde{p}) \in \Sigma_1 \cup B$,

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 = \{(\mu, 0, \kappa, \nu, 1-\kappa, 1) \;:\; 0 < \mu, \nu < 1,\ 0 < \mu + \nu < 1,\ \kappa = (\mu + \nu)/n\}, \\ &B = (0, 0, 0, 0, 1, 1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

(iii) ако $\tilde{r} = \infty$ тогава $(1/q, 1/r, 1/p, 1/\tilde{q}, 1/\tilde{r}, 1/\tilde{p}) \in \Sigma_2 \cup C$,

$$\begin{aligned} &\Sigma_2 = \{(\mu, 1-\kappa, 1, \nu, 0, \kappa) \;:\; 0 < \mu, \nu < 1,\ 0 < \mu + \nu < 1,\ \kappa = (\mu + \nu)/n\}, \\ &C = (0, 1, 1, 0, 0, 0). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Глава 3

Приложения към химичния хемотаксис

Хемотаксисът е процес, при който бактериите или по-общо казано клетките променят състоянието си на движение, реагирайки на присъствието на химично вещество, наречено хемоатрактант, приближавайки се до химически благоприятни среди и избягвайки неблагоприятни. Като цяло движението на бактериите се състои от две различни фази, фаза на движение и фаза на преобръщане. Фазата на бягане се състои от насочено движение по права линия, докато фазата на „преобръщане“ е преориентирането в нова посока.

Означаваме хемоатрактанта $S(t,x)$ в момент $t \in [0,\infty)$ и позиция $x \in \mathbb{R}^n$. Клетъчната плътност във фазовото пространство се обозначава с $u(t,x,v)$ и нейният интеграл върху всички възможни скорости, който се приема, че е ограниченото множество $V \subset \mathbb{R}^n$, е клетъчната плътност

$$\rho(t,x) = \int_{v \in V} u(t,x,v)dv$$

във физическото пространство.

Кинетичният модел на хемотаксис, предложен от Othmer-Dunbar-Alt, виж напр. [3], чете

$$\partial_t u(t,x,v) + v \cdot \nabla_x u(t,x,v) = \int_{v' \in V} T[S](t,x,v,v')u(t,x,v')dv', \tag{3.1}$$

$$- \int_{v' \in V} T[S](t,x,v',v)u(t,x,v)dv', \quad t > 0,\, x \in \ R^n, v \in V$$

$$- \Delta_x S(t,x) + S(t,x) = \rho(t,x) \stackrel{def}{=} \int_{v \in V} u(t,x,v)dv, \tag{3.2}$$

$$u(0,x,v) = f(x,v) \geq 0. \tag{3.3}$$

Тук операторът за свободен транспорт $\partial_t u(t,x,v) + v \cdot \nabla_x u(t,x,v)$ описва свободното движение на бактериите, които имат скорост $v \in V$. Дясната страна на (3.1) обозначава оператор на разсейване, чийто първи член описва завиване в посока v, а вторият член завъртане в посока v. По-конкретно, в този модел падането (преориентирането) е процес на Поасон със скорост

$$\lambda[S] = \int_V T[S](t,x,v',v)dv',$$

и $T[S](t,x,v',v)/\lambda[S]$ е плътността на вероятността за промяна на скоростта от v до v', като се има предвид, че се получава преориентация за клетка в позиция x, скорост v и време t.

Проблемът на Коши (3.1)-(3.3) е изследван за първи път в [3] (2004), където е доказано глобалното съществуване в измерение $n = 3$ за неотрицателни начални данни $f \in L^1 \cap L^\infty$ при предположението, че въртящото се ядро удовлетворява структурното условие

$$0 \leq T[S](t,x,v,v') \leq C(1 + S(t,x+v) + S(t,x-v')).$$

Значението на члена $S(t,x-v')$ е, че клетките измерват концентрацията на химикала S в позиция $x - v'$, преди да променят посоката си в позиция x, поради ефект на вътрешна памет. Значението на члена $S(t,x+v)$ е, че клетките могат да измерват концентрацията на място $x + v$ благодарение на цензорни издатини.

Въпреки това, въз основа на експериментални данни, се смята, че преориентацията на бактериите зависи от промените в концентрацията на хемоатрактанта. По този начин, в по-реалистичен модел, въртящото се ядро трябва да зависи не само от S, но и от неговия градиент ∇S (променливите x). Нека разгледаме най-общото условие за T

$$\begin{aligned} 0 \leq T[S](t,x,v,v') \leq C_1 + C_2 S(t,x+v) + C_3 S(t,x-v') + \\ C_4|\nabla S(t,x+v)| + C_5|\nabla S(t,x-v')|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Методът на [3] беше адаптиран в [7], за да включва обръщане на ядра, удовлетворяващи

$$0 \leq T[S](t,x,v,v') \leq C(1 + S(t,x+v) + |\nabla S(t,x+v)|),$$

или

$$0 \leq T[S](t,x,v,v') \leq C(1 + S(t,x-v') + |\nabla S(t,x-v')|),$$

при същите предположения за първоначалните данни.

Първият успешен опит да се разгледа най-общото ядро в 3d, т.е. (3.4), беше направен в [1]. Авторите заменят условието (3.4) (с $C_1 = 0$) с по-общото

$$\|T[S](t,\cdot,\cdot,\cdot)\|_{L^r_x L^{p_1}_v L^{p_2}_{v'}} \lesssim_{|V|,p_1,p_2} \|S(t,\ cdot)\|_{L^r_x} + \|\nabla S(t,\cdot)\|_{L^r_x}, \tag{3.5}$$

винаги, когато $r \geq p_1, p_2$, вижте [1, Теорема 3]. Те установяват съществуването на глобално слабо решение за достатъчно малки начални данни

$f \in L^1 \cap L^a$, където $a \in [3/2, 2]$. Авторите обаче не доказват уникалността на решението и работят в класове данни, които не са запазени от еволюцията на системата. Новата характеристика на техния подход е използването на Strichartz оценки за кинетичното транспортно уравнение, получено в [2]. Ние ще адаптираме техния метод, но въз основа на по-големия набор от нехомогенни Strichartz оценки, които извличаме в настоящата работа. Нашето доказателство ще използва по-деликатни оценки на пространство-времето на хемоатрактанта S, за разлика от доказателството в [1], което използва оценки на S само за фиксирано време и използва двоен аргумент за стартиране. Тъй като нашата цел е да покажем глобалната коректност на решението, трябва да вземем предвид разликите $T[S_1] - T[S_2]$, заедно със структурното условие (3.5) налагаме естественото условие

$$\|T[S_1](t,\cdot,\cdot,\cdot) - T[S_2](t,\cdot,\cdot,\cdot)\|_{L^r_x L^{p_1}_v L^{p_2}_{v'}} \lesssim_{absV,p_1,p_2} \|S_1(t,\cdot) - S_2(t,\cdot)\|_{L^r_x} + \|\nabla S_1(t,\cdot) - \nabla S_2(t,\cdot)\|_{L^r_x}, \quad (3.6)$$

всеки път, когато $r \geq p_1, p_2$.

Нашият резултат е представен в

Theorem 3.0.1. *Проблемът на Коши* (3.1)-(3.3), (3.5), (3.6) *е глобално добре поставен за малки данни $f \geq 0$ в клас $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times V) \cap L^a(\mathbb{R}^n \times V)$ за $3n/4 < a < 3$ и $n = 2, 3$. По-конкретно, за всяко $3n/4 < a < 3$ съществува фиксирана положителна константа M, зависеща само от размерността на пространството n, константите в структурните условия* (3.5), (3.6) *и върху показателя на Лебег a, така че когато $\|f\|_{L^a_{x,v}} < M$, разглежданият проблем допуска уникално неотрицателно решение*

$$u(t) \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^n \times V) \cap L^a(\mathbb{R}^n \times V))$$

за което

$$\|\rho\|_{L^3_t L^{3na/(3n-a)}_x} < \infty, \quad \|S\|_{L^3_t L^\infty_x} + \|\nabla S\|_{L^3_t L^\infty_x} < \infty.$$

Библиография

[1] Nikolaos Bournaveas, Vincent Calvez, Susana Gutiérrez, and Benoît Perthame. Global existence for a kinetic model of chemotaxis via dispersion and Strichartz estimates. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(1-3):79–95, 2008.

[2] F. Castella and B. Perthame. Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I(332):535–540, 1996.

[3] Fabio A. C. C. Chalub, Peter A. Markowich, Benoît Perthame, and Christian Schmeiser. Kinetic models for chemotaxis and their drift-diffusion limits. *Monatsh. Math.*, 142(1-2):123–141, 2004.

[4] Damiano Foschi. Inhomogeneous Strichartz estimates. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2(1):1–24, 2005.

[5] J. Ginibre and G. Velo. Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl.*, (9) 64(4):363–401., 1985.

[6] J. Ginibre and G. Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. *J. Funct. Anal.*, 133(1):50–68., 1995.

[7] Hyung Ju Hwang, Kyungkeun Kang, and Angela Stevens. Global solutions of nonlinear transport equations for chemosensitive movement. *SIAM J. Math. Anal.*, 36(4):1177–1199, 2005.

[8] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998.

[9] Hans Lindblad and Christopher D. Sogge. On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations. *J. Funct. Anal.*, 130(2):357–426, 1995.

[10] Hartmut Pecher. Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation. *Math. Z.*, 185(2):261–270, 1984.

[11] R.S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44:705–714, 1977.