ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА ПРИ БАН

Детелина Кирилова Камбурова

Вариационни принципи за supinf задачи с ограничения и равновесие в некооперативни игри

ДИСЕРТАЦИЯ

за образователна и научна степен
доктор
докторска програма Изследване на операциите

Научен ръководител:
акад. Юлиан Ревалски

София, 2023 г.

Съдържание

Увод

Съществуват три основни типа пазарна структура - монопол, олигопол и свободна конкуренция. При монопола има една фирма на пазара, липсва конкуренция. Фирмата монопол еднолично избира количеството стока, което произвежда и продава, както и цената на тази стока. Монополите са нежелателни, тъй като цените на предлаганите продукти са завишени и в редица държави са обект на регулация. При свободната конкуренция голям брой независими фирми предлагат на пазара идентична стока. Поради големия брой на фирмите, никоя от тях не може еднолично да повлияе на пазарните процеси. Най-разпространената пазарна структура е олигополът - пазар, в който участват малък брой фирми, конкуриращи се за хомогенен (идентичен) продукт. Производственият план на всяка фирма може да повлияе на крайната цена и произведеното количество на стоката. Изучаването на стратегиите на участниците в пазарната структура, при която действието на всеки участник повлиява на реакциите на останалите участници, е предмет на теория на игрите.

За изучаване на олигополистичните пазари се използват два основни модела - йерархичен модел (Stackelberg) и нейерархични модели (Cournot и Bertrand). При нейерархичните модели фирмите влизат на пазара едновременно. Cournot (1838) [11] предполага, че фирмата избира предварително количеството продукция, което ще предложи на пазара. Цената на стоката се определя от общото количество продукция на пазара и е еднаква за всяка фирма. Bertrand (1883) [6] предлага модел, в който всяка фирма избира различна цена за дадена стока. Количеството, което предлага на пазара зависи от тази цена. Кой от двата модела да се използва, се определя от конкретния пазар след наблюдение. Ако фирмите избират какво количество да пускат на пазара, се използва модел на Cournot, ако избират цена - модела на Bertrand.

Най-често обаче фирмите влизат последователно на пазара и тогава се прилага йерархичния, двустъпков модел на Stackelberg (1934) [49]. Участниците се конкурират с произведеното количество. Една от фирмите (водещата) първа избира количеството, което ще предложи на пазара. Впоследствие другата фирма (последователят) оптимизира функцията си на печалба в зависимост от стратегията на лидера. В литературата съществуват и смесени модели - дуопол на Cournot с два периода [43], пазар с един лидер и $N \geq 2$ последователи [45], както и неговата стохастична версия [18].

Математическият апарат, с който се изучават всички тези модели, е теория на игрите - математическият език на икономиката. Взаимодействието между двете дисциплини, икономика и математика, дава тласък на развитието на теория на игрите. Някои от основните понятия, теореми и методи използвани в теория на игрите, са предложени за първи път от икономисти. Равновесието на Cournot (1838) е равновесие на Nash (1951) [38] на разгледания от него модел. Обратна индукция (анализ на играта от края към началото) е приложена от Stackelberg за изучаването на йерархичния модел на дуопол. Работата на Friedman (1971) [23] поставя основите за извеждане на резултати свързани с равновесие по Nash в повтарящи се игри.

В тази дисертация са представени, както резултати свързани с пазарно равновесие, така и резултати в областта на вариационния анализ, чието изучаване е продиктувано от нуждите на икономическото моделиране.

В глава 1 се разглежда хомогенен (фирмите на пазара предлагат идентична стока) олигопол на Cournot с (-1)-вдлъбната ценова функция. Много резултати в литературата гарантират съществуването на единствено равновесие на Cournot. Един от първите резултати е на Murphy et al. (1982) [37], и предполага вдлъбнатост на функцията на приходите и изпъкналост на функцията на разходите. Amir (1996) [3] разглежда модела на Cournot в случая на логаритмично вдлъбната ценова функция $p(q)$. Deneckere и Kovenock (1999) [16], получават съществуване и единственост на равновесие, като поставят условия директно върху функцията на търсене $D(p)$, което съответства на изпъкналост на реципрочната на ценовата функция $1/p(q)$. Този резултат е изложен отново в концепцията на ρ-вдлъбнатост на $p(q)$ в [4]. В последните два резултата, [16] и [4], се предполага съществуване на непрекъсната производна от втори ред. Бивдлъбнатост е условие върху обратната функция на търсенето, което съответства на вдлъбнатост след едновременна параметризация на цената и количеството. Разглежда се следната фамилия от трансформации:

$$\varphi_\alpha = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{\alpha}, & \text{ако } \alpha \neq 0 \\ \ln(x), & \text{ако } \alpha = 0 \end{cases}$$

Ценовата функция p е (α, β)-бивдлъбната, ако $\varphi_\alpha \circ P \circ {\varphi_\beta}^{-1}$ е вдлъбната функция, където ${\varphi_\beta}^{-1}$ е обратната на φ_β. Ewerhart (2014) [21] използва това понятие, за да анализира модела на Cournot. Теоремата за съществуване в тази статия допуска стойности на α в интервала $[0, 1]$ в негладкия случай и в интервала $(-\infty, 0)$ в случая на двукратно диференцируема функция. von Mouche и Quartieri (2013) [47] въвеждат понятието интегрирана ценова гъвкавост (integrated price flexibility), като

$$L_p(y) := y \ln(p(y)) - \int_0^y \ln(p(\xi)) d\xi.$$

В случая на изпъкнала интегрирана ценова гъвкавост те извеждат резултати, свързани със съществуване и единственост на равновесие по Cournot.

(-1)-вдлъбнатостта на ценовата функция съответства на $(-1, 1)$-бивдлъбнатост, т.е. на случая $\alpha < 0$. Доказани са някои свойства на функцията на печалбата в случай на (-1)-вдлъбнатост на ценовата функция без да се предполага диференцируемост и се доказва теорема за съществуване в негладкия случай със изпъкнала функция на разходите. Използван е подхода в [47] и [48] за получаването на просто доказателство на теоремата за единственост в гладкия случай с $(-1)/N$-вдлъбната ценова функция и строго изпъкнала функция на разходите, където N е броят фирми на пазара, без да се предполага двукратна диференцируемост. Съществуване и единственост на равновесието при логаритмично вдлъбната (0-вдлъбната) ценова функция е следствие на представения тук резултат. Показано е също, че вдлъбнатата интегрирана ценова гъвкавост, предположена в [47] не влече (-1)-вдлъбнатост и обратно.

В основата на модела на Stackelberg за дуопол е двустъпковата оптимизация. Състои се от решаването на две оптимизационни задачи - на лидера и на последователя. Водещият играч (лидерът) прави своя избор първи с цел да максимизира печалбата си. Той трябва да вземе предвид стратегията на втория играч (последовател). Ако играта е кооперативна, предполагаме, че последователят избира в полза на лидера и се решава така наречената оптимистична двустъпкова задача. Резултати свързани с условия за оптималност на тези задачи могат да се намерят в [14] и [15]. Ако играта е некооперативна, лидерът трябва да се предпази от възможно най-лошата за него ситуация. Глава 2 е посветена на supinf задачите с ограничения. Едно от приложенията на тези задачи е намиране на гарантираната печалба, която водещият играч може да си осигури дори и при най-неизгоден за него ход от страна на последователя. Тяхната най-обща формулировка е следната

$$(P) \qquad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Kx} f(x, y),$$

където X и Y са напълно регулярни топологични пространства, $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ е разширена реалнозначна функция, а $K : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение с непразни образи. Очевидно е, че без допълнителни предположения за функцията f, за пространствата X и Y, както и за многозначното изображение K, задачата (P) може да няма решение. Главната цел на тази глава е да се намерят условията, които позволяват пертурбации на функцията f с подходящи непрекъснати функции по такъв начин, че задачата (P) за смутената функция да има решение. Такъв тип резултати са известни в оптимизацията като вариационни принципи за съответния клас от задачи.

В литературата са известни повече резултати за вариационни принципи на функция на една променлива: вариационен принцип на Ekeland (1974) [20], за полунепрекъснати отдолу функции смутени с функцията на разстоянието в метрични пространства; вариационен принцип на Stegall (1978) [46] - за смущения на полунепрекъснати отдолу функции с линейни непрекъснати функции в Банахови пространства със свойство на Radon-Nikodym; гладки вариационни принципи в Банахови пространства на Borwein-Preiss (1987) [7] и Deville-Godefroy-Zizler (1993) [17]; непрекъснат вариационен принцип в напълно регулярни Хаусдорфови топологични пространства на Čoban-Kenderov-Revalski (1989) [10] и непрекъснат вариационен принцип в напълно регулярни топологични пространства на Kenderov-Revalski (2010) [34].

Резултати за функции на две променливи са получени от McLinden в [36] (като се използва вариационният принцип на Ekeland [20]) и в случай на supinf задача без ограничения (т.е. когато $K(x) = Y$ за всяко $x \in X$) от Kenderov и Revalski в [35]. Вариационни принципи за някои класове оптимизационни задачи с ограничения са получени от Ioffe et al. в [28].

Както по-горе е отбелязано, supinf задачите имат връзка с игрите от типа "водач-последовател". Пространството от стратегии на водещия играч е X, а последователят избира от $K(x)$. Печалбата на лидера се дава от функцията f. Задачата на Stackelberg е частен случай на supinf задачаите, за които $K(x) = \operatorname{argmax} \{k(x,y), y \in Y\}$, където k е дадена функция.

Глава 3 е посветена на произволни игри в смесени стратегии с функции на печалба, на които не е наложено условие за непрекъснатост. Нуждата от разглеждане на такъв тип игри е продиктувана от задачи за съществуване на равновесие в стандартни икономически игри. Липсата на равновесие в прости икономически ситуации е забелязана още от Edgewoth (1925) [19] в неговата критика на модела на Bertand за дуопол. Оттук следва, че едно или повече от условията в класическите теореми за съществуване е нарушено. Условията включват непрекъснатост, квазивдлъбнатост и компактност. Всеки играч има изпъкнало и компактно пространство от стратегии и функция на печалба, която е непрекъсната и квазивдлъбната по собствената си стратегия.

Започват да се разглеждат игри с по-слабо условие за непрекъснатост и заедно с квазивдлъбнатостта се установява съществуване на равновесие. Reny (1999) [39], доказва съществуване на равновесие по Nash в чисти стратегии, ако играта е компактна, квазивдлъбната, с осигурена печалба и реципрочно полунепрекъсната отгоре[1]. Bagh и Jofre (2006) [5] показват, че условието за реципрочна полунепрекъснатост отгоре в резултата на Reny може да бъде заменено с по-слабото условие на слаба реципрочна полунепрекъснатост отгоре [5]. Allison et al. (2018) [2] получават достатъчно условие за слаба реципрочна полунепрекъснатост отгоре на игра в смесени стратегии.

Dasgupta и Maskin (1986) [12], дават две условия, които осигуряват съществуването на равновесие в чисти стратегии за компактна и квазивдлъбната игра - игра със слабо осигурена печалба (по-слаба форма на игра с осигурена печалба, Дефиниция 3.2.1) и полунепрекъснатост отгоре на функцията на печалбата. Carmona 2008 [8] подобрява техния резултат, като въвежда понятието за слаба полунепрекъснатост отгоре и доказва съществуване на равновесие в чисти стратегии, ако играта е квазивдлъбната, компактна, със слабо осигурена печалба и слабо полунепрекъсната отгоре.

Ако условието за квазивдлъбнатост е нарушено, може да се

[1]Една игра е с осигурена печалба, ако при дадена обща стратегия x, всеки играч може да намери стартегия $\hat{x}_i$, при която печалбата му е близо до тази в x дори другите играчи да се отклонят малко от x. Дадена игра е реципрочно полунепрекъсната отгоре, ако при спадане на печалбата на един от играчите, печалбата на друг се увеличава.

премине към смесени стратегии. Смесените стратегии трансформират всяка игра в квазивдлъбната игра, [9].

Allison и Lepore (2014) [1], въвеждат понятието за игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (disjoint payoff matching (DPM), Дефиниция 3.1.2). Те показват, че дадена игра в смесени стратегии е с осигурена печалба. Това свойство се доказва, като се разглеждат характеристиките на играта в чисти стратегии и не се работи с вероятностни мерки. В дисертацията е въведена дефиниция за игра със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM), Дефиниция 3.2.1). Тя е по-обща от дефиницията за DPM дадена в [1]. Наистина, всяка игра, която удовлетворява условието за DPM, удовлетворява и условието за WDPM. Доказано е, че WDPM може да замести условието за слаба осигуреност на печалбата при игра в смесени стратегии в резултатите за съществуване на равновесие на Carmona, [8] и Dasgupta и Maskin, [12].

Глава 1

Равновесие по Cournot в случая на (-1)-вдлъбната функция

В настоящата глава се разглежда клас от хомогенни олигополи на Cournot. Изведени са свойства на функцията на печалбата в случай на (-1)-вдлъбната ценова функция, които се прилагат за доказване на съществуване на равновесие в непрекъснатия и недиференцируем случай и единственост в гладкия случай с $(-1/N)$-вдлъбната ценова функция, където N е броят фирми на пазара.

1.1 Означения. Предварителни резултати

Модел на олигопол на Cournot е игра с пълна информация, в която N играчи (фирми), произвеждат хомогенен (идентичен) продукт и се конкурират чрез произведеното от тях количество. Всяка фирма прави разходи $c_i(x_i)$ за производството на количеството $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., N$. Пазарната цена $p(x)$ е функция на общото производство $x_1 + ... + x_N$. Означаваме с $X = X_1 \times ... \times X_N$, където X_i е множеството от стратегии на играча i. Да припомним, че ако играч

i избира $x_i \in X_i$ с вероятност 1 казваме, че играе в чиста стратегия. Играта е в смесени стратегии, ако е дефинирано вероятностно разпределение върху множеството от чисти стратегии на всеки играч. В настоящата глава разглеждаме само игри в чисти стратегии. Означаваме с x_{-i} елемент от множеството $X_{-i} = \prod_{k \in n, k \neq i} X_k$, $i = 1, ..., N$. Нека $\widetilde{N} = \{1, ..., N\}$. Тогава печалбата на i-тата фирма е

$$f_i(x_i, x_{-i}) = x_i p \left(x_i + \sum_{j \in \widetilde{N}, j \neq i} x_j \right) - c_i(x_i).$$

Равновесието по Nash за такъв олигопол се нарича равновесие по Cournot.

Дефиниция 1.1.1 *Точка $x^* \in X$ се нарича равновесна по Cournot-Nash, ако за всяко $i \in \widetilde{N}$ е изпълнено $f_i(x^*) \geq f_i(x_i, x^*_{-i})$ за всяко $x_i \in X_i$.*

Означаваме с $\mathbb{R}_{>0}$ множеството от всички положителни числа, а с $\mathbb{R}_{\geq 0}$ - множеството от неотрицателните числа. Лявата и дясна производна на дадена функция бележим с d^- и d^+. Сума на Nash е функцията $\sigma : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, където E е множеството от точки на равновесие $e = (e_1, ..., e_N)$. Тя съпоставя на всяка равновесна точка e сумата от нейните координати, $\sigma(e) = \Sigma_{i=1}^{N} e_i$. Да припомним, че дадена функция f с дефиниционно множество M се нарича инективна, ако от $f(m_1) \neq f(m_2)$ следва, че $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in M$. Ще представим някои резултати от [47], необходими за нашите разглеждания.

Лема 1.1.2 *(von Mouche и Quartieri (2013) [47]) Предполагаме, че всяка функция на разходите, c_i, $i \in \widetilde{N}$, е изпъкнала и:*

- *функцията p има лява и дясна производна във всяка точка $x \in \mathbb{R}_{>0}$;*
- *$d^+p(x) \leq d^-p(x) \leq 0$ (за всяко $x \in \mathbb{R}_{>0}$);*

- *p е строго намаляваща.*

Ако съществува повече от една точка на равновесие, тогава 0 не е точка на равновесие.

Теорема 1.1.3 *(von Mouche и Quartieri (2013) [47]) Предполагаме, че всяка функция на разходите е строго изпъкнала и:*

- *p е диференцируема отляво и отдясно във всяка точка $x \in \mathbb{R}_{>0}$;*
- *$d^{-}p(x) \leq d^{+}p(x) \leq 0$ $(x \in \mathbb{R}_{>0})$.*

Тогава сумите на Nash са инективни.

Едно от условията в много резултати за съществуване на равновесие е квазивдлъбнатост.

Дефиниция 1.1.4 *Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$, дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича квазивдлъбната, ако за всяко $x_1 \in \Omega$, $x_2 \in \Omega$ и $\lambda \in [0, 1]$ е изпълнено неравенството*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Необходимо и достатъчно условие за квазивдлъбнатост на функция f, е множеството $\{x|f(x) \geq \alpha\}$ да е изпъкнало за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$. Следната теорема е класически резултат за съществуване на равновесие в чисти стратегии. Тя е формулирана в [24] като директно следствие на резултатите на Debreu (1952) [13], Glicksberg (1952) [26], Fan (1952) [22].

Теорема 1.1.5 *(Debreu-Glicksberg-Fan) Разглеждаме игра с $N \geq 2$ играчи със стратегии $x_i \in X_i$, $i = 1, ..., N$. Ако:*

- *X_i, $i = 1, ..., N$ са непразни, компактни, изпъкнали множества в крайномерни евклидови пространства;*

- *всички функции на печалба са непрекъснати върху произведението $X_1 \times ... \times X_N$;*
- *всички функции на печалба са квазивдлъбнати функции на x_i върху X_i, когато всички останали стратегии са фиксирани.*

Тогава съществува поне една точка на равновесие в чисти стратегии.

1.2 Обобщена вдлъбнатост на функции

Преходът от квазивдлъбнатост към вдлъбнатост се прави като се въведе понятието за обобщена вдлъбнатост.

Дефиниция 1.2.1 *(Shapiro et al. (2021) [44]) Функция $p : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича α-вдлъбната, където $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, ако за всички $x, y \in \Omega$ и всяко $\lambda \in [0, 1]$ следните неравенства са изпълнени:*

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq m_\alpha(p(x), p(y), \lambda),$$

където $m_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times [0, 1] \to R$ се дефинира като:

$$m_\alpha(a, b, \lambda) := \begin{cases} a^\lambda b^{1-\lambda}, & \text{ако } \alpha = 0 \\ \max\{a, b\}, & \text{ако } \alpha = \infty \\ \min\{a, b\}, & \text{ако } \alpha = -\infty \\ (\lambda a^\alpha + (1 - \lambda)b^\alpha)^{1/\alpha}, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ако $\alpha = 0$, функцията е логаритмично вдлъбната, а при $\alpha = 1$ функцията е вдлъбната. Квазивдлъбнатост се получава при $\alpha = -\infty$.

От лемата по-долу следва, че всяка функция, която е α-вдлъбната е и β-вдлъбната за $\alpha \geq \beta$.

Лема 1.2.2 *(Shapiro et al. (2021) [44]) Изображението* $\alpha \to m_\alpha(a,b,\lambda)$ *е ненамаляващо и непрекъснато.*

Ще разглеждаме $(-1/n)$-вдлъбнатите функции, $n \geq 1$:

Дефиниция 1.2.3 *Функция* $p : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ *дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича* $(-1/n)$*-вдлъбната,* $n \geq 1$*, ако за всяко* $x, y \in \Omega$ *и всяко* $\lambda \in [0,1]$ *е изпълнено неравенството:*

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq (\lambda (p(x))^{-1/n} + (1-\lambda)(p(y))^{-1/n})^{-n}.$$

От Лема 1.2.2 следва, че всички вдлъбнати ($\alpha = 1$) и всички логаритмично вдлъбнати ($\alpha = 0$) функции са $(-1/n)$-вдлъбнати. Ясно е, че дадена положителна функция $p(\cdot)$ е $(-1/n)$-вдлъбната тогава и само тогава, когато функцията $1/p(\cdot)^{1/n}$ е изпъкнала.

Дефиниция 1.2.4 *Функция* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *дефинирана върху изпъкнало подмножество на линейно пространство се нарича средноточково изпъкнала (вдлъбната), ако за всяко* $x_1, x_2 \in \Omega$ *е изпълнено*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq (\geq) \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Теорема 1.2.5 *(Jensen (1905) [29]) Ако функция* $p(\cdot)$ *е непрекъсната и средноточково изпъкнала (вдлъбната), тя е изпъкнала (вдлъбната).*

От Теорема 1.2.5 следва, че една непрекъсната функция е изпъкнала (вдлъбната) тогава и само тогава, когато е средноточково изпъкнала (вдлъбната).

Теорема 1.2.6 *Нека функцията* $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *е строго намаляваща, непрекъсната и* $(-1/n)$*-вдлъбната,* $n \geq 1$ *и нека* $k \geq 0$*. Ако функцията* $xp(x+k)^{1/n}$ *е строго растяща в интервал* $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}_{\geq 0}$*, то тя е* $xp(x+k)^{1/n}$ *е строго вдлъбната в същия интервал.*

Доказателство. Да допуснем, че $x\left[p(x+k)\right]^{1/n}$ не е строго средноточково вдлъбната в интервала, където е строго растяща, т.е. съществуват $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 < x_2$ такива, че

$$x_1\left[p(x_1+k)\right]^{1/n} < x_2\left[p(x_2+k)\right]^{1/n} \tag{1.1}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n} \leq$$

$$\frac{x_1\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}+x_2\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}{2}. \tag{1.2}$$

Функцията p е непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната, следователно $1/[p(x+k)]^{1/n}$, $k \geq 0$ е изпъкнала и средноточково изпъкнала. Получаваме

$$\frac{1}{\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}}+\frac{1}{\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}\right).$$

Следователно,

$$\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n} \geq \frac{2\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}{\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}+\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}. \tag{1.3}$$

От (1.2) и (1.3), получаваме

$$\frac{x_1+x_2}{2}\frac{2\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}{\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}+\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}} \leq$$

$$\frac{x_1\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}+x_2\left[p(x_2+k)\right]^{1/n}}{2},$$

откъдето следва

$$2(x_1+x_2)\left[p(x_1+k)\right]^{1/n}\left[p(x_2+k)\right]^{1/n} \leq$$

$$x_1[p(x_1+k)]^{2/n}+x_2[p(x_2+k)]^{2/n}+(x_1+x_2)[p(x_1+k)]^{1/n}[p(x_2+k)]^{1/n},$$

$$(x_1+x_2)[p(x_1+k)]^{1/n}[p(x_2+k)]^{1/n} \leq x_1[p(x_1+k)]^{2/n}+x_2[p(x_2+k)]^{2/n},$$

или

$$x_1([p(x_1+k)]^{2/n}-[p(x_1+k)]^{1/n}[p(x_2+k)]^{1/n}) \geq$$

$$x_2([p(x_2+k)]^{1/n}([p(x_2+k)]^{1/n}-[p(x_2+k)]^{2/n}).$$

Разделяме на $[p(x_1+k)]^{1/n}-[p(x_2+k)]^{1/n}>0$ (неравенството е строго от предположението, че p е строго намаляваща функция) и получаваме

$$x_1[p(x_1+k)]^{1/n}\geq x_2[p(x_2+k)]^{1/n}.$$

Последното неравенство е в противоречие с (1.1). □

Теорема 1.2.7 *Нека $p:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n\geq 1$ и нека $k\geq 0$. Тогава, ако функцията $xp(x+k)^{1/n}$ има екстремум по-голям от 0, той е глобален максимум.*

Доказателство. Първо ще докажем, че $xp(x+k)^{1/n}$ не притежава локален минимум $x^*>0$ такъв, че $x^*p(x^*+k)^{1/n}\leq xp(x+k)^{1/n}$, където x е в малка околност на x^* и неравенството е строго поне за $x>x^*$ или $x<x^*$. Предполагаме, че $x^*=(x_1+x_2)/2$ е локален минимум и $x_1,x_2>0$ са такива, че

$$\frac{x_1+x_2}{2}\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}<[p(x_1+k)]^{1/n}x_1, \tag{1.4}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}\leq p(x_2+k)^{1/n}x_2. \tag{1.5}$$

От (1.4), получаваме

$$(x_1+x_2)\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}<2[p(x_1+k)]^{1/n}x_1 \mid :x_2>0$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}<2\frac{x_1}{x_2}[p(x_1+k)]^{1/n}$$

$$0<\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}<$$

$$\frac{x_1}{x_2}\left(2p(x_1+k)^{1/n}-\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}\right)$$

и

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{[p(\frac{x_1+x_2}{2}+k)]^{1/n}}{2[p(x_1+k)]^{1/n} - \left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}. \tag{1.6}$$

От (1.5) имаме, че

$$\frac{x_1}{x_2}\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n} \leq 2[p(x_2+k)]^{1/n} - \left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n},$$

$$0 < \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{2[p(x_2+k)]^{1/n} - \left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}{\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}. \tag{1.7}$$

От (1.6) и (1.7):

$$\frac{\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}{2[p(x_1+k)]^{1/n} - \left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}} <$$

$$\frac{2[p(x_2+k)]^{1/n} - \left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}{\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n}}$$

или

$$\left[p\left(\frac{x_1+x_2}{2}+k\right)\right]^{1/n} <$$

$$\frac{2[p(x_1+k)]^{1/n}[p(x_2+k)]^{1/n}}{[p(x_1+k)]^{1/n}+[p(x_2+k)]^{1/n}}.$$

Последното неравенство е в противоречие с (1.3).
Ако $xp(x+k)^{1/n}$ е намаляваща в околност на $x=0$ за $x>0$, ще бъде намаляваща за всяко $x>0$, тъй като в противен случай ще е налице локален минимум. Ако $xp(x+k)^{1/n}$ е растяща около 0 и има локален максимум x^*, $xp(x+k)^{1/n}$, ще бъде намаляваща за всяко $x > x^*$ и x^* е глобален максимум. □

Следствие 1.2.8 *Нека $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n \geq 1$, $k \geq 0$ и нека $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ е изпъкнала и растяща функция. Тогава функцията $xp(x+k)^{1/n} - c(x)$ е квазивдлъбната.*

Доказателство. От доказателството на Теорема 1.2.7 и от Теорема 1.2.6 следва, че за $g(x) := xp(x+k)^{1/n} - c(x)$ има три възможности:

- g е намаляваща за всяко $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
- g е растяща и следователно вдлъбната за всяко $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
- съществува $\hat{x}$, такова, че g е вдлъбната за $x \in [0, \hat{x}]$ и намаляваща за $x \geq \hat{x}$;

Следователно $\{x | g(x) \geq \alpha\}$ е изпъкнало множество за всяко $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и g е квазивдлъбната функция. $\square$

Да забележим, че съществуването на лява и дясна производна във всяка точка от $\mathbb{R}_{>0}$ за положителна (-1)-вдлъбната функция p следва от това, че нейната реципрочна $1/p$ е изпъкнала и от свойствата на изпъкналите функции.

Следствие 1.2.9 *Нека $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и $(-1/n)$-вдлъбната функция, $n \geq 1$. Ако $0 \leq x_1 < x_2$, $k \geq 0$, $1 \leq s \leq n$, тогава от $x_2 d^- p(x_2 + k) + sp(x_2 + k) > 0$, следва че $x_1 d^+ p(x_1 + k) + sp(x_1 + k) > x_2 d^- p(x_2 + k) + sp(x_2 + k)$.*

Доказателство. Ако p е $(-1/n)$-вдлъбната, тя е и $(-1/s)$-вдлъбната за $1 \leq s \leq n$ съгласно Лема 1.2.2. От Теорема 1.2.6 и Теорема 1.2.7, следва, че ако има интервал, в който функцията $xp(x+k)^{1/s}$ е растяща, той е единствен и неговата лява граница е 0. Нещо повече, функцията $xp(x+k)^{1/s}$ е строго вдлъбната в този интервал. Следователно, ако $0 < x_1 \leq x_2$, $k \geq 0$, то

$$d^-(x_2 p(x_2 + k)^{1/s}) > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x_2 d^- p(x_2 + k) + sp(x_2 + k)}{s} p(x_2 + k)^{1/s - 1} > 0,$$

което е

$$x_2 d^- p(x_2 + k) + sp(x_2 + k) > 0,$$

откъдето следва, че

$$d^+(xp(x+k)^{1/s})(x_1) > d^-(xp(x+k)^{1/s})(x_2),$$

или

$$[p(x_1+k)]^{1/s-1}\frac{x_1d^+p(x_1+k)+sp(x_1+k)}{s} >$$
$$p(x_2+k)^{1/s-1}\frac{x_2d^-p(x_2+k)+sp(x_2+k)}{s}.$$

Тъй като $p(x)$ е строго намаляваща и $s \geq 1$, имаме

$$[p(x_1+k)]^{1/s-1} \leq [p(x_2+k)]^{1/s-1}$$

и

$$x_1d^+p(x_1+k)+sp(x_1+k) > x_2d^-p(x_2+k)+sp(x_2+k),$$

което трябваше да се докаже. $\square$

1.3 Съществуване и единственост на равновесие

Теорема 1.3.1 *Нека всяка функция на разходите $c_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i \in \tilde{N}$, е непрекъсната, изпъкнала и строго растяща, а $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната и (-1)-вдлъбната функция. Тогава съществува поне една точка на равновесие по Cournot-Nash.*

Доказателство. От Следствие 1.2.8 следва, че $x_ip(x_i+k) - c_i(x_i)$ е квазивдлъбната функция. Тъй като p е положителна, (-1)-вдлъбната и намаляваща $\Rightarrow 1/p$ е положителна, изпъкнала и растяща, следователно за всяко $x_i^0 \geq 0$ съществува допирателна права $a(x_i^0)x_i + b(x_i^0)$ такава, че: $1/p(x_i) \geq a(x_i^0)x_i + b(x_i^0)$. Равенство имаме при $x_i = x_i^0$. От това, че функцията $1/p$ е положителна и строго растяща следва $a(x_i^0) \geq 0$, $a(x_i^0)x_i + b(x_i^0) > 0$ за всяко $x \geq x_i^0$. Допълнително, съществува $\bar{x}_i{}^0$ такова, че $a(\bar{x}_i{}^0) > 0$, Тогава

$$\limsup_{x_i \to \infty} x_i p(x_i + k) - c_i(x_i) \leq \limsup_{x_i \to \infty} x_i p(x_i) - c_i(x_i) \leq$$
$$\lim_{x_i \to \infty} x_i \frac{1}{a(\bar{x}_i{}^0)x_i + b(\bar{x}_i{}^0)} - c_i(x_i) = -\infty.$$

Следователно съществува $A_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ такова, че: $x_i p(x_i + k) - c_i(x_i) \leq -c_i(0)$ за всяко $x_i \geq A_i$ и ефективната стратегия на всяка фирма се съдържа в интервала $[0, A_i]$.

Условията на Теорема 1.1.5 са изпълнени и следователно съществува поне една точка на равновесие по Cournot-Nash. $\square$

Теорема 1.3.2 *Предполагаме, че всяка функция на разходите* $c_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i \in \tilde{N}$ *е строго изпъкнала и растяща, а* $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *е строго намаляваща, непрекъсната и* $(-1/N)$*-вдлъбната функция,* $N \geq 2$*. Тогава сумите на Nash* σ *са константни.*

Доказателство. От това, че p е (-1)-вдлъбната следва, че $1/p$ е изпъкнала и за $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$d^- \frac{1}{p(x)} \leq d^+ \frac{1}{p(x)} \ \Rightarrow \ d^- p(x) \geq d^+ p(x).$$

От тук следва, че направените предположения в Лема 1.1.2 са изпълнени.

Както и в доказателството на Теорема 2 в [47], предполагаме, че a и b са точки на равновесие такива, че

$$x_a = \sum_{l \in \widetilde{N}} a_l < \sum_{l \in \widetilde{N}} b_l = x_b.$$

Нека $J = \{l \in \widetilde{N} | a_l < b_l\}$, $\widetilde{x_a} = \sum_{l \in J} a_l$, $\widetilde{x_b} = \sum_{l \in J} b_l$. Означаваме с s - сумата на елементите на J, $s := |J|$, при това $1 \leq s \leq n$, $x_a > 0$ (Лема 1.1.2) $x_b > 0$, $b_i > 0$, $i \in J$, $\widetilde{x_a} \leq x_a$, $\widetilde{x_b} \leq x_b$, $\widetilde{x_a} < \widetilde{x_b}$, $\widetilde{x_b} - \widetilde{x_a} \geq x_b - x_a$.

Тъй като a и b са точки на равновесие, за $i \in J$ получаваме

$$d^+ p(x_a) a_i + p(x_a) - d^+ c_i(a_i) \leq 0 \leq d^- p(x_b) b_i + p(x_b) - d^- c_i(b_i),$$

или

$$d^+p(x_a)\widetilde{x_a} + sp(x_a) - \sum_{i\in J} d^+c_i(a_i) \le 0 \le$$

$$d^-p(x_b)\widetilde{x_b} + sp(x_b) - \sum_{i\in J} d^-c_i(b_i).$$

От строгата изпъкналост на функцията c_i и от $a_i < b_i$, за $i \in J$, следва, че $d^+c_i(a_i) < d^-c_i(b_i)$, за $i \in J$. След сумиране по $i \in J$ получаваме

$$-\sum_{i\in J} d^+c_i(a_i) > -\sum_{i\in J} d^-c_i(b_i),$$

откъдето следва неравенството:

$$d^+p(x_a)\widetilde{x_a} + sp(x_a) \le 0 < d^-p(x_b)\widetilde{x_b} + sp(x_b). \tag{1.8}$$

Разглеждаме точките $x_1 := x_a - (x_b - \widetilde{x_b}) \ge 0$, $x_2 := \widetilde{x_b} > 0$. Тъй като $x_1 < x_2$ и $k := x_b - \widetilde{x_b} > 0$, от Следствие 1.2.9 имаме, че

$$(x_a - (x_b - \widetilde{x_b}))d^+p(x_a) + sp(x_a) > \widetilde{x_b}d^-p(x_b) + sp(x_b) \ge 0,$$

От $\widetilde{x_b} - \widetilde{x_a} \ge x_b - x_a$ следва, че $x_a - (x_b - \widetilde{x_b}) \ge \widetilde{x_a}$. Функцията p е строго намаляваща, следователно

$$\widetilde{x_a}d^+p(x_a) \ge (x_a - (x_b - \widetilde{x_b}))d^+p(x_a),$$

$$\widetilde{x_a}d^+p(x_a) + sp(x_a) > \widetilde{x_b}d^-p(x_b) + sp(x_b).$$

Последното неравенство е в противоречие с (1.8). □

Следствие 1.3.3 *Предполагаме, че всяка функция на разходите $c_i : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $i \in \tilde{N}$ е непрекъсната, строго изпъкнала и растяща, а $p : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ е строго намаляваща, непрекъсната, диференцируема, $(-1/N)$-вдлъбната функция. Тогава съществува единствена точка на равновесие.*

Доказателство. Директно следствие е от Теорема 1.1.3, Теорема 1.3.2 и Теорема 1.3.1. □

Както отбелязахме в увода, този резултат не е еквивалентен на резултата, представен в [47]. Като пример за функция, която е (-1)-вдлъбната, но не е с изпъкнала интегрирана ценова гъвкавост за всяко $x \in \mathbb{R}$ може да се посочи функцията $p(x) = \frac{1}{(x+30)\ln(x+1.1)}$. В този случай функцията на печалбата е квазивдлъбната (но не е вдлъбната). Като пример за функция, която е с изпъкнала интегрирана гъвкавост, но не е (-1)-вдлъбната, може да се посочи функцията $(x+1)^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$. По тази причина Теорема 1.3.2 и Следствие 1.3.3 не са следствие, нито обобщение на резултатите в [47]. В Теоремата 3.3 за съществуване на равновесие в [21] се предполага, че функциите на приходи и разходи са два пъти диференцируеми, а представената тук Теорема 1.3.1 за съществуване включва негладки в общия случай функции.

Глава 2

Смущения на supinf задачи с ограничения

В глава 2 изследваме вариационни принципи на inf и supinf задачи с ограничения. Разглежданите функции са дефинирани в напълно регулярни топологични пространства. Едно топологично пространство X се нарича напълно регулярно, ако за всяко затворено множество $C \in X$ и всяка точка $x \in X \backslash C$ съществува непрекъсната функция $f : X \to [0,1]$ такава, че $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ за всяко $y \in C$.

2.1 Предварителни резултати

Разглеждаме следната supinf задача с ограничения

$$(P) \qquad \sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} f(x,y),$$

където X и Y са напълно регулярни топологични пространства, $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ е разширена реалнозначна функция и $K : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение с непразни образи. Решение на задачата (P) се нарича всяка двойка $(x_0, y_0) \in X \times Y$ такава, че $y_0 \in K(x_0)$ и:

$$f(x_0, y_0) = \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} f(x, y).$$

В тази глава изследваме при какви условия задачата (P) е коректно поставена. Преди да въведем понятието коректно поставена supinf задача, нека да припомним, че задачата да се минимизира функцията $h : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, където Z е топологично пространство, се нарича коректно поставена, ако съществува единствено решение $z_0 \in Z$ и всяка минимизираща редица (z_n) (т.е. такава, че $h(z_n) \to h(z_0)$) е сходяща към z_0. Еквивалентно, всяка минимизираща редица на h клони към единствения минимум на h върху Z. Аналогично, за дадена функция $h : Z \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ съответната максимизационна задача е коректно поставена, ако минимизационната задача за $-h$ е коректно поставена.

Дефиниция 2.1.1 *(Kenderov и Lucchetti (1996) [33]) Задачата (P) се нарича sup-коректно поставена, ако задачта да се максимизира $v(\cdot) := \inf_{y \in K(\cdot)} f(\cdot, y)$ върху X е sup-коректно поставена.*

Като аналог на минимизираща редица се въвежда понятието оптимизираща редица за задачата (P):

Дефиниция 2.1.2 *(Kenderov и Lucchetti (1996) [33]) Редицата $(x_n, y_n) \in X \times Y$ се нарича оптимизираща за (P), ако:*

1. $y_n \in (Kx_n)$ *за всяко* n;
2. $v(x_n) \to v_f := \sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} f(x, y)$;
3. $f(x_n, y_n) \to v_f$.

Дефиниция 2.1.3 *(Kenderov и Lucchetti (1996) [33]) Задачата (P) се нарича коректно поставена, ако (P) има единствено решение (x_0, y_0) и всяка оптимизираща за (P) редица клони към него.*

Ще изследваме при какви условия задачата (P) е коректно поставена в случай, че стойността ѝ v_f е крайна. Очевидно е, че ако (P) е коректно поставена задача с единствено решение (x_0, y_0), то (P) е sup-коректно поставена с единствено решение x_0. Обратното, в общия случай, не е вярно, както се вижда от следните два примера. Нека $f(x, y) := x - |y|$.

Пример 2.1.4

$$\sup_{x\in[0,1]} \inf_{y\in(-1,1)} (x - |y|) = \sup_{x\in[0,1]} (x - 1) = 0,$$

Задачата е sup-коректно поставена с единствено решение $x_0 = 1$ и стойност $v_f = 0$, но няма точка (x_0, y_0), такава, че $f(x_0, y_0) = 0$.

Пример 2.1.5

$$\sup_{x\in[0,1]} \inf_{y\in[-1,1]} (x - |y|) = \sup_{x\in[0,1]} (x - 1) = 0,$$

Задачата е sup-коректно поставена с единствено решение $x_0 = 1$, но не е коректно поставена, тъй като има две решения $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

Ще припомним дефинициите за полунепрекъснатост отдолу и отгоре на многозначно изображение и ще продължим с лема, която гарантира полунепрекъснатост отгоре на $v(\cdot) = \inf\{f(\cdot, y), y \in K(\cdot)\}$ при някои предположения за непрекъснатост на f и K.

Дефиниция 2.1.6 *Многозначно изображение $K : X \rightrightarrows Y$ се нарича полунепрекъснато отдолу в $x \in X$, ако за всяко $V \subset Y$, което е отворено и такова, че $K(x) \cap V \neq \emptyset$, съществува отворена околност U на x такава, че за всяко $x' \in U$, $K(x') \cap V \neq \emptyset$.*

Изображението K се нарича полунепрекъснато отдолу, ако е полунепрекъснато във всяка точка от X.

Дефиниция 2.1.7 *Многозначно изображение* $K : X \rightrightarrows Y$ *се нарича полунепрекъснато отгоре в* $x \in X$*, ако за всяко* $V \subset Y$*, което е отворено и такова, че* $K(x) \subset V$*, съществува отворена околност* U *на* x *такава, че за всяко* $x' \in U$*,* $K(x') \subset V$*.*

Изображението K *се нарича полунепрекъснато отгоре, ако е полунепрекъснато във всяка точка от* X*.*

Нека $f : Z \to [-\infty, \infty]$ е разширена реалнозначна функция, тогава $\mathrm{dom}(f) := \{z \in Z : f(z) \in \mathbb{R}\}$. Функцията f се нарича собствена, ако $\mathrm{dom}(f)$ е непразно множество. Следният резултат е добре известен, но тук ще представим негово доказателство за пълнота на изложението.

Лема 2.1.8 *Нека* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *е полунепрекъсната отгоре функция, за която* $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ *и нека* $K : X \rightrightarrows Y$ *е полунепрекъснато отдолу изображение с непразни образи. Тогава* $v(\cdot) = \inf\{f(\cdot, y), y \in K(\cdot)\}$ *е полунепрекъсната отгоре функция в* X*.*

Доказателство. Избираме $x_0 \in X$ и $t \in \mathbb{R}$ такива, че $v(x_0) = \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) < t$. Тогава, за някое $y_0 \in K(x_0)$ е изпълнено $f(x_0, y_0) < t$. Тъй като f е полунепрекъсната отгоре в (x_0, y_0), съществуват отворени околности U на x_0 и V на y_0 такива, че $f(x, y) < t$ за всяко $(x, y) \in U \times V$. От $y_0 \in K(x_0) \cap V$ и полунепрекъснатостта на K в x_0, U може да бъде избрано по такъв начин, че $K(x) \cap V \neq \emptyset$ за всяко $x \in U$. И сега, ако $x \in U$, нека да вземем $y_x \in K(x) \cap V$. Тогава получаваме,

$$v(x) = \inf_{y \in K(x)} f(x, y) \leq f(x, y_x) < t,$$

откъдето следва, че $v(\cdot)$ е полунепрекъсната отгоре в X. $\square$

2.2 Вариационен принцип за inf задачи с ограничения и негово приложение във вариационния принцип на Ekeland и Теоремата на Caristi

Нека Z е напълно регулярно топологично пространство. Означаваме с $C(Z)$ пространството от всички непрекъснати, ограничени, реалнозначни функции дефинирани върху Z. Пространството $C(Z)$ с равномерната норма $||g||_{Z,\infty} := \sup\{|g(z)| : z \in Z\}, g \in C(Z)$, е реално банахово пространство.

Ще докажем един вариационен принцип за inf задачи с ограничения, който по-късно ще използваме. Показваме, че с него могат да бъдат доказани вариационния принциип на Ekeland и Теоремата на Caristi в пълни метрични пространства. Нека първо формулираме вариационен принцип за inf задачи без ограничения в напълно регулярни топологични пространства.

Лема 2.2.1 *(Kenderov и Revalski (2010) [34]) Нека $h : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната и ограничена отдолу функция, дефинирана в напълно регулярно топологично пространство Z. Нека $z_0 \in \mathrm{dom}(h)$ и $\varepsilon > 0$ са такива, че $h(z_0) < \inf_Z h + \varepsilon$. Тогава, съществува непрекъсната ограничена функция $g : Z \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(z_0) = 0$, $||g||_{Z,\infty} \leq \varepsilon$ такава, че функцията $h + g$ достига минимума си върху Z в z_0. Допълнително, g може да бъде избрана такава, че $||g||_{Z,\infty} = h(z_0) - \inf_Z h$.*

Да отбележим, че в лемата по-горе става дума за оптимизация без ограничения, т.е. когато се търси минимум върху цялото пространство Z. Ще докажем вариант на този резултат в случая на оптимизация с ограничения, т.е. когато търсеният минимум е върху подмножество на Z.

Лема 2.2.2 *Нека $h : Z \to (-\infty, +\infty]$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, дефинирана в напълно регулярно топологично пространство Z. Нека A е затворено подмножество на Z, $A \cap \mathrm{dom}(h) \neq \emptyset$ и h е ограничена отдолу върху A. Ако $z_0 \in A \cap \mathrm{dom}(h)$ и $\varepsilon > 0$ са такива, че $h(z_0) < \inf_{\mathrm{A}} h + \varepsilon$, то съществува непрекъсната ограничена функция $g : Z \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(z_0) = 0$, $||g||_{Z,\infty} \leq \varepsilon$ такава, че функцията $h + g$ достига минимума си върху* A *в z_0. Допълнително, g може да бъде избрана такава, че $||g||_{Z,\infty} = h(z_0) - \inf_A h$.*

Доказателство. Дефинираме $h' : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ като

$$h'(y) := \begin{cases} h(z), & \text{ако } z \in A, \\ +\infty, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Може лесно да се провери, че функцията h' е собствена и полунепрекъсната отдолу и $\inf_Z h' = \inf_A h' = \inf_A h$. От тук следва, че h' е ограничена отдолу върху Z и $h'(z_0) < \inf_Z h' + \varepsilon$. Прилагаме Лема 2.2.1 за функцията h' и точката z_0 и получаваме функция $g \in C(Z)$, за която е в сила заключението на лемата. $\square$

Всяко метрично пространство е напълно регулярно топологично пространство относно топологията породена от метриката в това пространство. С помощта на Лема 2.2.2 ще докажем два резултата в пълни метрични пространства - Теоремата на Caristi за неподвижна точка и вариационния принцип на Ekeland.

Теорема 2.2.3 *Нека (X, d) е пълно метрично пространство и $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната и ограничена отдолу функция. Тогава*

a) *(Теорема на Caristi за неподвижна точка) ако $T : X \to X$ е изображение, което се доминира от функцията f, т.е. удовлетворява условието*

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx), \text{ за всяко } x \in X,$$

то T има неподвижна точка;

б) *(Вариационен принцип на Ekeland) за произволно* $\varepsilon > 0$ *и* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *съществува* $v \in X$ *такова, че:*

$$f(v) \leq f(x_0) - \varepsilon d(x_0, v)$$

и за всяко $x \neq v$,

$$f(v) < f(x) + \varepsilon d(v, x).$$

Доказателство. Разглеждаме многозначното изображение $S : X \rightrightarrows X$ дефинирано като

$$S(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq f(x) - f(y)\}.$$

Очевидно $x \in S(x)$ и следователно $S(x) \neq \emptyset$ за всяко $x \in X$. От $y \in S(x)$ следва, че $f(y) \leq f(x)$. Нека вземем произволно $y \in S(x)$ и $z \in S(y)$. Тогава $d(y, z) \leq f(y) - f(z)$ и следователно $f(z) \leq f(y) \leq f(x)$. От неравенството на триъгълника

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq f(x) - f(y) + f(y) - f(z) = f(x) - f(z),$$

т.е. $z \in S(x)$ и $S(S(x)) \subseteq S(x)$.
Ще построим редица $(x_n)_n$ в X индуктивно, започвайки от точка $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Предполагаме, че x_n е намерена и избираме $x_{n+1} \in S(x_n)$ такава, че

$$f(x_{n+1}) < \inf_{z \in S(x_n)} f(z) + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Функцията f е полунепрекъсната отдолу и следователно $S(x_n)$ са затворени множества за всяко $n \in \mathbb{N}$. Допълнително, f е ограничена отдолу върху $S(x_n)$, тъй като е ограничена върху цялото пространство X и $S(x_n) \subseteq \operatorname{dom} f$, защото $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Условията на Лема 2.2.2 за функцията f върху множеството $A := S(x_n)$, точката $z_0 := x_{n+1}$ и $\varepsilon := 1/n$ са изпълнени. Следователно съществува непрекъсната функция $g_n : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g_n(x_{n+1}) = 0$ такава, че

$$f(x_{n+1}) \leq f(y) + g_n(y), \text{ за всяко } \ y \in S(x_n),$$

$$||g_n||_{X,\infty} \leq \frac{1}{n}.$$

Ще докажем, че множествата $S(x_n) = \{y \in X : d(x_n, y) \leq f(x_n) - f(y)\}$ имат диаметър, клонящ към 0 при $n \to \infty$. За произволно $y \in S(x_{n+1}) \subset S(x_n)$ имаме, че:

$$d(x_{n+1}, y) + f(y) \leq f(x_{n+1}) \leq f(y) + g_n(y),$$

т.е. $d(x_{n+1}, y) \leq g_n(y)$ за $y \in S(x_{n+1})$. Тогава

$$\sup_{y \in S(x_{n+1})} d(x_{n+1}, y) \leq \sup_{y \in S(x_{n+1})} g_n(y) \leq \sup_{y \in X} g_n(y) \leq \frac{1}{n},$$

$$\operatorname{diam}(S(x_{n+1})) \leq \frac{2}{n} \to 0.$$

Следователно $\{S(x_n)\}$ е редица от вложени едно в друго затворени множества

$$S(x_0) \supseteq S(x_1) \supseteq ... \supseteq S(x_n) \supseteq ...$$

с диаметър, клонящ към 0 при $n \to \infty$. От теоремата на Cantor за вложени затворени множества в пълни метрични пространства следва

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S(x_n) = \{v\},$$

т.е. сечението съдържа единствена точка. Тогава от $v \in S(x_n)$, за всяко n, следва, че $S(v) \subseteq S(x_n)$, за всяко n. Тъй като

$$v \in S(v) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} S(x_n) = \{v\},$$

получаваме $S(v) = \{v\}$.

За да докажем а) забелязваме, че от $d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$ за всяко $x \in X$, следва, че $T(x) \in S(x)$, за всяко $x \in X$. Полагаме $x = v$ и $T(v) = v$.

За да докажем б) прилагаме получения резултат за функцията f върху метричното пространство (X, d'), където $d'(x, y) = \varepsilon d(x, y)$,

$x \in X$, $y \in X$. От $v \in S(x_0)$, следва $f(v) \leq f(x_0) - \varepsilon d(x_0, v)$. Тъй като единствената точка, която принадлежи на образа на $S(v)$ е v, то за всяко $x \neq v$ имаме $f(v) < f(x) + \varepsilon d(v, x)$.

$\square$

2.3 Вариационни принципи за supinf задачи с ограничения

Ще разгледаме основния в тази глава въпрос за намирането на условия, при които след смущение на дадена функция на две променливи с непрекъсната функция, supinf задачата (P) за смутена функция има решение. Оттук нататък ще приемем, че функцията $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ и изображението $K : X \rightrightarrows Y$ удовлетворяват следните предположения.

(П1) $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е полунепрекъсната отгоре за $(x, y) \in X \times Y$;

(П2) $K : X \rightrightarrows Y$ е полунепрекъснато отдолу в X многозначно изображение със затворени непразни образи;

(П3) функцията $v(\cdot) := \inf_{y \in K(\cdot)} f(\cdot, y)$ е ограничена отгоре в X и е собствена като функция със стойности в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;

(П4) за всяко $x \in X$ функцията $f(x, \cdot)$ е полунепрекъсната отдолу в Y.

Да отбележим, че от (П3) следва, че стойността v_f на supinf задачата (P) е крайна. Предположенията П3 и П4 са разгледани в [35] в случая, когато $K(x) = Y$ за всяко $x \in X$.

Първо ще докажем вариационен принцип за supinf задачи с ограничения. Той показва, че можем да направим произволно малко смущение на функция на две променливи, която заедно с изображението K удовлетворява предположенията (П1)-(П4), по такъв начин, че supinf задачата да има решение за смутената функция. Разглежданото смущение е разлика на непрекъснати функции, дефинирани съответно в Y и X. Доказателството следва това на Твърдение 2.6 от [35], където разгледаният случай е без ограничения.

Теорема 2.3.1 *Нека* $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ *е функция, която заедно с многозначното изображение* K *удовлетворява предположенията от* (П1) *до* (П4). *Нека* $\varepsilon > 0$ *и* $x_0 \in X$ *са такива, че* $v(x_0) > \sup_{x\in X} v(x) - \varepsilon$ *и нека* $\delta > 0$ *и* $y_0 \in K(x_0)$ *са такива, че* $f(x_0, y_0) < \inf_{y\in K(x_0)} f(x_0, y) + \delta$. *Тогава, съществуват непрекъснати ограничени функции* $q : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *и* $p : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *такива, че*

$$q(x_0) = p(y_0) = 0,\ ||q||_{X,\infty} \leq \varepsilon,\ ||p||_{Y,\infty} \leq \delta$$

и supinf задачата

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)} \{f(x, y) - q(x) + p(y)\}$$

има решение (x_0, y_0).

Доказателство. Разглеждаме функцията $v(x) = \inf_{y\in K(x)} f(x, y)$, $x \in X$. От предположенията на теоремата следва, че тя е собствена като функция със стойности в $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, ограничена отгоре (предположение (П3)) и полунепрекъсната отгоре (Лема 2.1.8) функция. Тогава от Лема 2.2.1, приложена за функцията $-v(\cdot)$ и точката x_0, съществува непрекъсната и ограничена функция $q : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ такава, че $q(x_0) = 0$, $||q||_{X,\infty} \leq \varepsilon$ и функцията $v(\cdot) - q(\cdot)$ достига максимума си в X в x_0.
От предположение (П3) (v е собствена като функция със стойности в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и ограничена отгоре) следва, че $v(x_0) = \inf_{y\in K(x_0)} f(x_0, y)$ е крайно число. Оттук, $f(x_0, \cdot)$ е ограничена отдолу в $K(x_0)$, собствена, и от (П4) полунепрекъсната отдолу функция в Y такава, че $K(x_0) \cap \mathrm{dom}(f(x_0, \cdot)) \neq \emptyset$. Тогава, тъй като $K(x_0)$ е затворено множество в Y, от Лема 2.2.2, приложена за функцията $f(x_0, \cdot)$, точката y_0 и множеството $K(x_0)$, съществува непрекъсната

ограничена функция $p : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ такава, че $p(y_0) = 0$, $||p||_{Y,\infty} \leq \varepsilon$ и функцията $f(x_0, \cdot) + p(\cdot)$ достига минимума си в $K(x_0)$ в y_0. Освен това, $||p||_{Y,\infty} = f(x_0, y_0) - \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) =: c \geq 0$.
Избираме произволно $x \in X$ и го фиксираме. За получените по-горе функции имаме, че

$$
\begin{aligned}
&\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) - q(x) + p(y)\} - c = \\
&\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + p(y) - c\} - q(x) \leq \\
&\inf_{y\in K(x)} f(x,y) - q(x) = v(x) - q(x) \leq \\
&v(x_0) - q(x_0) = v(x_0),
\end{aligned}
$$

като последното неравенство е изпълнено, защото $v(\cdot) - q(\cdot)$ достига максимума си в X в x_0 и поради това, че $q(x_0) = 0$.
От веригата неравенства и дефиницията на константата c получаваме за всяко $x \in X$, че

$$
\begin{aligned}
&\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) - q(x) + p(y)\} \leq v(x_0) + c = \\
&\inf_{y\in K(x_0)} f(x_0,y) + c = f(x_0,y_0) = \\
&f(x_0,y_0) + p(y_0) = \inf_{y\in K(x_0)}\{f(x_0,y) + p(y)\} = \\
&\inf_{y\in K(x_0)}\{f(x_0,y) - q(x_0) + p(y)\},
\end{aligned}
$$

като използваме факта, че функцията $f(x_0, \cdot) + p(\cdot)$ достига минимума си върху $K(\mathrm{x}_0)$ в y_0 и $q(x_0) = p(y_0) = 0$.
От двете вериги неравенства и равенства следва, че (x_0, y_0) е решение на supinf задачата за функцията $f(x,y) - q(x) + p(y)$, $(x,y) \in X \times Y$, и изображението K, което трябваше да се докаже. $\square$

Илюстрираме Теорема 2.3.1 със следния пример, в който намираме функциите q и p експлицитно.

Пример 2.3.2 *Нека* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *е дефинирана като* $f(x,y) = -|x-y|$, $X = (0,1]$, $Y = [0,1]$ *и* $K(x) = \{0 \leq y \leq x\}$. *Функцията* f *заедно с изображението* K *удовлетворяват предположенията* (П1)-(П4). *От* $v(x) = \inf_{y\in K(x)}\{-|x-y|\} = -x$ *следва, че* $\sup_{x\in X} v(x) = \sup_{x\in X}(-x) = 0$. *Нека* $0 < y_0 < \delta < x_0 < \varepsilon < 1$, *тогава* $y_0 \in K(x_0)$, $v(x_0) > \sup_{x\in X} v(x) - \varepsilon$. *За стойността на*

f в точката (x_0, y_0) получаваме $f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 < \delta - x_0 = \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) + \delta$.
Ще построим функциите на смущение така, както е направено в доказателството на Лема 2.1 в [34]. Нека $\gamma := f(x_0, y_0) - \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) = y_0 - x_0 + x_0 = y_0$. За функцията p разглеждаме множествата

$$P_n := \{y \in K(x_0) : f(x_0, y) \leq \inf_{y \in K(x_0)} f(x_0, y) + \gamma - \frac{\gamma}{2^n},\ n \geq 1\},$$

т.е.

$$P_n = \{0 \leq y \leq x_0 : y \leq y_0 - \frac{y_0}{2^n},\ n \geq 1\}.$$

Всяко множество P_n е непразно, затворено и $y_0 \notin P_n$, за всяко $n \geq 1$, и освен това

$$P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n \subset ... \quad n \geq 1.$$

От доказателството на Лема 2.1 в [34] и от Лема 2.2.2 следва, че търсената функция на смущение е

$$p(y) := y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} p_n(y),$$

където $p_n : Y \to [0, 1]$ са непрекъснати функции такива, че $p_n(y_0) = 0$ и $p_n|_{P_n} \equiv 1$. Като използваме метриката в даденото пространство, можем построим функциите p_n по следния начин

$$p_n(y) := \frac{d(y_0, y)}{d(y_0, y) + d(y, P_n)},\ n \geq 1,$$

където $d(y, P_n) = \inf_{\widetilde{y} \in P_n} d(y, \widetilde{y})$, $n \geq 1$. За всяко p_n получаваме

$$p_n(y) = \frac{|y - y_0|}{|y - y_0| + \max\{0, y - y_0 + \frac{y_0}{2^n}\}},\ n \geq 1.$$

Аналогично построяваме множествата Q_n и функцията q. Означаваме с $\eta := \sup_X v - v(x_0) = x_0$.

$$Q_n := \{x \in (0, 1] : x \leq x_0 - \frac{x_0}{2^n},\ n \geq 1\},$$

$$q_n(x) := \frac{|x - x_0|}{|x - x_0| + \max\{0, x - x_0 + \frac{x_0}{2^n}\}},\ n \geq 1,\ x \in (0, 1]$$

$$q(x) := x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} q_n(x),\ x \in (0, 1].$$

Така построените q и p не са единствените, които удовлетворяват заключението на Теорема 2.3.1. Дефинираме функциите $\tilde{q} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $\tilde{p} : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ като

$$\tilde{p}(y) := \begin{cases} 0, & \text{ако } y > y_0 \\ y_0 - y, & \text{ако } 0 \leq y \leq y_0 \end{cases}$$

и

$$\tilde{q}(x) := \begin{cases} 0, & \text{ако } x > x_0 \\ x_0 - x, & \text{ако } 0 < x \leq x_0. \end{cases}$$

Наистина, тези функции удовлетворяват заключението на Теорема 2.3.1, $\tilde{q}(x_0) = \tilde{p}(y_0) = 0$ и $||\tilde{q}||_{X,\infty} = x_0 \leq \varepsilon$, $||\tilde{p}||_{Y,\infty} = y_0 \leq \delta$. За функцията $\tilde{v}(x) = \inf_{y \in K(x)}\{f(x, y) + \tilde{p}(y)\}$ получаваме

а) $0 \leq y \leq y_0 \Rightarrow \tilde{p}(y) = y_0 - y \Rightarrow$

$$\tilde{v}(x) = \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + \tilde{p}(y)\} =$$

$$\inf_{y \in K(x)} \{y - x + y_0 - y\} = y_0 - x;$$

б) $y_0 \leq y \Rightarrow \tilde{p}(y) = 0 \Rightarrow$

$$\tilde{v}(x) = \inf_{y \in K(x)} \{f(x, y) + \tilde{p}(y)\} = \inf_{y \in K(x)} \{y - x\} = y_0 - x.$$

Тогава

в) $0 \leq x \leq x_0 \Rightarrow \tilde{q}(x) = x_0 - x \Rightarrow$

$$\sup_{x \in X} \{\tilde{v}(x) - \tilde{q}(x)\} = \sup_{x \in X} \{y_0 - x - x_0 + x\} = y_0 - x_0;$$

г) $x_0 \leq x \Rightarrow \tilde{q}(x) = 0 \Rightarrow$

$$\sup_{x \in X} \{\tilde{v}(x) - \tilde{q}(x)\} = \sup_{x \in X} \{y_0 - x\} = y_0 - x_0.$$

Следователно,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y)-\tilde{q}(x)+\tilde{p}(y)\}=y_0-x_0=f(x_0,y_0).$$

Забележка 2.3.3 *Ако функцията $f : X\times Y\to[-\infty,+\infty]$ и многозначното изображение $K : X\rightrightarrows Y$ удовлетворяват предположенията от* (П1) *до* (П4)*, то:*

- *ако $\varepsilon>0$, $\delta>0$ са произволни, лесно се вижда, че точките x_0 и y_0 от формулировката на Теорема 2.3.1 винаги съществуват и*

- *ако g е непрекъсната и ограничена функция в $X\times Y$, тогава функцията $f+g$ и изображението K удовлетворяват предположенията* (П1)-(П4).

Да означим като $C(X)\times C(Y)$ декартовото произведение на нормираните със съответните sup-норми пространства $C(X)$ и $C(Y)$. Следващият резултат е следствие от Теорема 2.3.1, което получаваме, като вземем предвид двата коментара по-горе и свойствата на sup-нормите.

Теорема 2.3.4 *Нека $f : X\times Y\to[-\infty,+\infty]$ е реална функция, която заедно с многозначното изображение $K : X\rightrightarrows Y$, удовлетворява предположенията от* (П1) *до* (П4)*. Тогава*

а) *Множеството $\{(q,p)\in C(X)\times C(Y)$: supinf задачата има решение за функцията $f(x,y)+q(x)+p(y),(x,y)\in X\times Y\}$ е гъсто подмножество на $C(X)\times C(Y)$;*

б) *Множеството $\{u\in C(X\times Y)$: supinf задачата има решение за функцията $f(x,y)+u(x,y),(x,y)\in X\times Y\}$ е гъсто подмножество на $(C(X\times Y),||\cdot||_{X\times Y,\infty})$.*

Доказателство. а) Предполагаме, че supinf задачата, породена от функцията $f(x,y)+q(x)+p(y)$ няма решение. Ще намерим точка $(\hat{q},\hat{p}) \in C(X)\times C(Y)$ произволно близко до (q,p), такава, че supinf задачата породена от функцията $f(x,y)+\hat{q}(x)+\hat{p}(y)$ има решение. Като се има предвид Забележка 2.3.3 за произволни $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и съответните $x_0 \in X$, $y_0 \in K(x_0)$, можем да приложим Теорема 2.3.1 за функцията $f(x,y)+q(x)+p(y)$ и изображението K. Тогава съществуват $q' \in C(X)$ и $p' \in C(Y)$ такива, че $q'(x_0) = p'(y_0) = 0$, $||q'||_{X,\infty} \leq \varepsilon$, $||p'||_{Y,\infty} \leq \delta$ и supinf задачата $\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y)+q(x)-q'(x)+p(y)+p'(y)\}$ има решение в (x_0,y_0). Полагаме $\hat{q}(x) := q(x)-q'(x)$ и $\hat{p}(y) := p(y)+p'(y)$ и имаме, че

$$||\hat{q}-q||_{X,\infty} \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad ||\hat{p}-p||_{Y,\infty} \leq \delta.$$

б) Доказваме аналогично на **а)**.

$\square$

Твърденията а) и б) на Теорема 2.3.4 представляват "гъсти" вариационни принципи за supinf задачи с ограничения.

2.4

Коректна поставеност на supinf задачите

В този раздел ще докажем характеризация на коректно поставените supinf задачи с ограничения. Преди това ще представим резултат свързан със sup-коректност. Той показва, че в някои случаи (например, в метрични пространства) можем да получим такива смущения, че получената задача има решение и е sup-коректно поставена. Да припомним, че за дадена целева функция $f : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ и изображение $K : X \rightrightarrows Y$ sup-коректността на съответната supinf задача (P) е коректността на максимизационната задача за функцията $v(x) = \inf_{y\in K(x)} f(x,y)$, $x \in X$.

Едно от условията за sup-коректност е свързано с понятието за изброима локална база в дадена точка. Да припомним, че точка x има изброима локална база в топологично пространство X, ако съществува редица от отворени околности на x $(U_k)_{k\geq 1}$ в X, такива че за всяка околност U на x съществува $k \in \mathbb{N}$, такова че $U_k \in U$.

При доказване на следващия резултат следваме доказателството на Твърдение 2.10 от [35].

Теорема 2.4.1 *Нека за $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$, $K : X \rightrightarrows Y$, x_0 и y_0 са изпълнени предположеннията от Теорема 2.3.1 и нека x_0 има изброима локална база в X. Тогава съществуват $q : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $p : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, такива, че*

$$q(x_0) = p(y_0) = 0,\ ||q||_{X,\infty} \leq \varepsilon,\ ||p||_{Y,\infty} \leq \delta$$

и supinf задачата

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)} \{f(x,y) - q(x) + p(y)\}$$

има решение в (x_0, y_0). Смутената задача е sup-коректно поставена с единствено sup-решение x_0.

Доказателство. От Теорема 2.3.1 следва, че съществуват непрекъснати функции $q \in C(X)$ and $p \in C(Y)$, такива че $q(x_0) = p(y_0) = 0$, $||q||_{X,\infty} \leq \varepsilon$, $||p||_{Y,\infty} \leq \delta$ и supinf задачата $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Kx}\{f(x,y) - q(x) + p(y)\}$ има решение в (x_0, y_0). Нещо повече $\gamma := ||q||_{X,\infty} = \sup_X v(x) - v(x_0) < \varepsilon$ (от Лема 2.2.1).

Избираме $\gamma' > 0$ такова, че $\gamma + \gamma' < \varepsilon$. Нека $(U_k)_{k\geq 1}$ е изброима база от отворени множества на x_0 в X и $q_k : X \to [0, 1]$ са непрекъснати функции, такива че $q_k(x_0) = 0$ и $q_k|_{X\setminus U_k} \equiv 1$. Разглеждаме следния ред:

$$q_0(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} q_k(x),\ x \in X.$$

Като вземем предвид, че $|\frac{q_k(x)}{2^k}| \leq \frac{1}{2^k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ е сходящ числов ред, то редът $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k(x)}{2^k}$ е равномерно сходящ в $(C(X), ||\cdot||_{X,\infty})$ и следователно функцията q_0 е добре дефинирана, непрекъсната и ограничена в X със стойности в $[0,1]$. Означаваме $q' := \gamma' q_0$. Да забележим, че $||q'+q||_{X,\infty} \le \gamma + \gamma' < \varepsilon$. Нека

$$v_1(x) := \inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) - q(x) + p(y)\},\ (x,y)\in X\times Y$$

и

$$v_2(x) := \inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) - q(x) - q'(x) + p(y)\},\ (x,y)\in X\times Y.$$

За всяко $x\in X$, $v_2(x) = v_1(x) - q'(x) \le v_1(x)$. От $v_2(x_0) = v_1(x_0) = \sup_{x\in X} v_1(x)$ следва, че $\sup_{x\in X} v_2(x) = v_2(x_0) = f(x_0,y_0)$ и оттук (x_0,y_0) е решение на supinf задачата, породена от функцията $f(x,y)-q(x)-q'(x)+p(y)$. Нека $(x_n)_n \subset X$ е максимизираща редица за функцията v_2. Ако x_n не клони към x_0, т.е. $x_n \nrightarrow x_0$, съществува $i_0\in\mathbb{N}$ и подредица (без да преномерираме) $(x_n)_n$, такава че $x_n \notin U_{i_0}$ за всяко n. От $v_2(x_n) = v_1(x_n) - q'(x_n)$, $\sup_{x\in X} v_1(x) = \sup_{x\in X} v_2(x)$, $q'(x_n)\ge 0$ следва $q'(x_n)\to 0$. Последното е в противоречие с $x_n\notin U_{i_0}$ за всяко n, тъй като оттук би следвало $q'(x_n) \ge \gamma'\Sigma_{k=i_0}^{\infty}\frac{1}{2^k} > 0$ за всяко n. $\square$

По-нататък ще изследваме по-силното понятие за коректност на supinf задачите, дефинирано в началото на тази глава. Нека $S_f : C(X)\times C(Y) \rightrightarrows X\times Y$ е многозначното изображение, което на всяка двойка функции $(q,p)\in C(X)\times C(Y)$ съпоставя (възможно празното) множество от решения на задачата $\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y)+q(x)+p(y)\}$.

Теорема 2.4.2 *Нека за $f : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ и $K : X \rightrightarrows Y$ са изпълнени предположенията от* (П1) *до* (П4). *Тогава, изображението S_f е еднозначно и полунепрекъснато отгоре в $(q,p)\in C(X)\times C(Y)$, тогава и само тогава, когато supinf задачата $\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y)+q(x)+p(y)\}$ е коректно поставена.*

Доказателство. Предполагаме, че изображението S_f е еднозначно и полунепрекъснато отгоре в $(q,p) \in C(X) \times C(Y)$, а (x_0, y_0) е единственото решение на съответната supinf задача, т.е. $(x_0, y_0) = S_f(q,p)$. Нека $((x_n, y_n))_n \in X \times Y$ е оптимизираща редица за supinf задачата $\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x,y) + q(x) + p(y)\}$. Според дефиницията на такава редица следните три условия са изпълнени (тук с v_f е означена стойността на supinf задачата породена от функцията $f(x,y) + q(x) + p(y)$, $(x,y) \in X \times Y$):

1. $y_n \in K(x_n)$ за всяко n;
2. $v(x_n) = \inf_{y \in K(x_n)} \{f(x_n, y) + q(x_n) + p(y)\} \to v_f = \sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} \{f(x,y) + q(x) + p(y))\}$;
3. $f(x_n, y_n) + q(x_n) + p(y_n) \to v_f$.

Предполагаме, че $((x_n, y_n))_n$ не клони към (x_0, y_0). Като преминем към подредица (без да преномерираме), предполагаме, че съществуват отворени околности U на x_0 и V на y_0 такива, че $(x_n, y_n) \notin U \times V$, за всяко n.

От друга страна, от това, че S_f е полунепрекъснато отгоре в (q,p), съществува $\varepsilon > 0$ такова, че от $||q' - q||_{X,\infty} \leq \varepsilon$, $||p' - p||_{Y,\infty} \leq \varepsilon$, $q' \in C(X)$, $p' \in C(Y)$, следва $S_f(q', p') \subset U \times V$.

Нека n е достатъчно голямо и такова, че:

$$v_f - v(x_n) < \varepsilon/2$$

и

$$|v_f - f(x_n, y_n) - q(x_n) - p(y_n)| < \varepsilon/2.$$

Като се комбинират горните две неравенства, се получава

$$f(x_n, y_n) + q(x_n) + p(y_n) < v(x_n) + \varepsilon =$$

$$\inf_{y \in K(x_n)} \{f(x_n, y) + q(x_n) + p(y)\} + \varepsilon.$$

Избираме толкова голямо n, за което се удовлетворяват последните неравенства и прилагаме Теорема 2.3.1 за

- функцията $f(x,y) + q(x) + p(y), (x,y) \in X \times Y$ (тази функция удовлетворява предположенията от (П1) до (П4) заедно с изображението K съгласно Забележка 2.3.3);

- точката x_n с числото $\varepsilon/2$ (т.е. $v(x_n) > \sup_{x\in X} v(x) - \varepsilon/2$)

- точката $y_n \in K(x_n)$ с числото ε (т.е. $f(x_n,y_n)+q(x_n)+p(y_n) < \inf_{y\in K(x_n)}\{f(x_n,y)+q(x_n)+p(y)\}+\varepsilon$).

Тогава съществуват функции $q_n \in C(X)$ и $p_n \in C(Y)$ такива, че $||q_n||_{X,\infty} \leq \varepsilon/2$, $||p_n||_{Y,\infty} \leq \varepsilon$ и задачата $\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + q(x)-q_n(x)+p(y)+p_n(y)\}$ има решение (x_n,y_n). Но $||q-q_n-q||_{X,\infty} \leq \varepsilon/2$, $||p+p_n-p||_{Y,\infty} \leq \varepsilon$ и $(x_n,y_n) \in S_f(q-q_n, p+p_n) \subset U \times V$. Получаваме противоречие с предположението, че $(x_n,y_n) \notin U \times V$.

Обратно, да предположим, че за функцията $f(x,y) + q(x) + p(y), (x,y) \in X \times Y, (q,p) \in C(X)\times C(Y)$ и изображението K, supinf задачата е коректно поставена с единствено решение (x_0,y_0). Оттук $S_f(q,p) = \{(x_0,y_0)\}$. Предполагаме, че S_f не е полунепрекъснато отдолу изображение в (q,p). Тогава съществуват отворени околности U на x_0 и V на y_0 такива, че за всяко $n \geq 1$, съществуват $q_n \in C(X)$ и $p_n \in C(Y)$ такива, че $||q_n - q||_{X,\infty} < 1/n$, $||p_n - p||_{Y,\infty} < 1/n$, и $S_f(q_n,p_n)$ не се съдържа в $U \times V$, т.е. за всяко n съществува точка $(x_n,y_n) \in S_f(q_n,p_n)\setminus(U\times V)$.
Тъй като за всяко $n \geq 1$, (x_n,y_n) е решение на supinf задачата за функцията $f(x,y)+q_n(x)+p_n(y)$, $(x,y) \in X \times Y$, и изображението $K : X \rightrightarrows Y$, то за всяко $n \geq 1$, $y_n \in K(x_n)$ имаме, че

$$\begin{aligned}
&f(x_n,y_n) + q_n(x_n) + p_n(y_n) = \\
&\inf_{y\in K(x_n)}\{f(x_n,y) + q_n(x_n) + p_n(y)\} = \\
&\sup_{x\in X}\inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + q_n(x) + p_n(y)\}.
\end{aligned}$$

За краткост, за всяко $n \geq 1$, използваме следните означения:

$$\alpha_n := f(x_n,y_n) + q_n(x_n) + p_n(y_n),$$

$$v_n(x_n) := \inf_{y\in K(x_n)}\{f(x_n,y) + q_n(x_n) + p_n(y)\},$$

$$v_n := \sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)} \{f(x,y) + q_n(x) + p_n(y)\}.$$

Да забележим, че $\alpha_n = v_n(x_n) = v_n$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. От факта, че q_n и p_n клонят равномерно съответно към q и p в съответните пространства следва, че:

- v_n клони към $v_f = \sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + q(x) + p(y)\}$;
- $|v_n(x_n) - v(x_n)| < \varepsilon$, за достатъчно големи n;
- $|\alpha_n - f(x_n, y_n) - q(x_n) - p(y_n)| < \varepsilon$, за достатъчно големи n.

Следователно $((x_n, y_n))_n$ е оптимизираща редица за supinf задачата, породена от функцията $f(x,y)+q(x)+p(y)$, $(x,y) \in X \times Y$, и изображението K. Това обаче е в противоречие с коректността на supinf задачата, тъй като $((x_n, y_n))_n$ не клони към единственото решение (x_0, y_0). $\square$

В последното доказателство, освен равномерна сходимост, това, което се използва, за да бъдат изпълнени предположенията на Теорема 2.3.1, е фактът, че ако $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ и изображението $K : X \rightrightarrows Y$ удовлетворяват предположенията от (П1) до (П4) и $(q,p) \in C(X) \times C(Y)$, то според Забележка 2.3.3, функцията $f(x,y) + q(x) + p(y), (x,y) \in X \times Y$ също удовлетворява предположенията от (П1) до (П4) заедно с изображението K. Това показва, че резултатът представен по-долу, се доказва като Теорема 2.4.2.

Теорема 2.4.3 *Нека за $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ и $K : X \rightrightarrows Y$ са изпълнени предположенията от Теорема 2.3.1. Тогава, изображението $\tilde{S}_f : (C(X \times Y), ||\cdot||_\infty) :\rightrightarrows X \times Y$ съпоставящо на всяко $u \in C(X \times Y)$ (възможно празното) множество от решенията на задачата $\sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + u(x,y)\}$ е еднозначно и полунепрекъснато отгоре в $u \in C(X \times Y)$, тогава и само тогава, когато supinf задачата $\sup_{x\in X} \inf_{y\in K(x)}\{f(x,y) + u(x,y)\}$ е поставена коректно.*

Глава 3

Игри със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване

В тази глава въвеждаме понятието слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching, WDPM) и го използваме, за да докажем слаба полунепрекъснатост на дадена игра в смесени стратегии. Това е условие за съществуване на равновесие в резултатите на Carmona [8] и Dasgupta и Maskin [12]. Даваме и пример, в който се използва полученият резултат за доказване на съществуване на равновесие.

3.1 Означения. Предварителни резултати

Разглеждаме игра G с краен брой играчи, която означаваме с $(X_i, u_i)_{i=1}^n$. Играта се състои от n играчи, с множество от стратегии X_i, което е компактно хаусдорфово пространство. Функцията на печалбата на всеки играч i е борелева и ограничена функция $u_i : X \to \mathbf{R}$, където $X = \prod_{i \in n} X_i$. Означаваме с x_{-i} елемент от множеството $X_{-i} = \prod_{k \in n, k \neq i} X_k$. Играта в смесени стратегии означаваме с $\bar{G} = (M_i, U_i)_{i=1}^n$, като пространството на стратегии на всеки играч i е M_i – множеството от регулярни вероятностни мерки върху борелевите подмножества на X_i. Да припомним, че дадена вероятностна мярка μ се нарича регулярна, ако за всяко борелево множество E е изпълнено $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V$ – отворено множество$\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K$ – затворено множество$\}$. Ако $C_c(X_i)$ е пространството от непрекъснати функции с компактен носител, от Теоремата на Riesz (Теорема 2.14 в [41]) на всеки елемент от спрегнатото пространство на $C_c(X_i)$ може да се съпостави единствен елемент от пространството от регулярни борелеви мерки върху X_i – B_i. Единичното кълбо на B_i е компактно в слабата* топология според Теоремата на Banach-Alaoglu (Теорема 3.15 [42]), а M_i е затворено и изпъкнало негово подмонжество и следователно също е компактно. Функцията на печалбата е $U_i(\mu) := \int_X u_i(x) d\mu,\ \mu \in M = \prod_{i \in n} M_i$. Играта в смесени стратегии е квазивдлъбната. Следва от изпъкналостта на M_i и $U_i(\lambda\mu_i' + (1-\lambda)\mu_i'', \mu_{-i}) = \lambda U_i(\mu_i', \mu_{-i}) + (1-\lambda) U_i(\mu_i'', \mu_{-i})$, където $\mu_i', \mu_i'' \in M_i$, $\mu_{-i} \in M_{-i}$, $\lambda \in [0,1]$. Ако $\mu_i \in M_i$, носителят на μ_i е $\mathrm{supp}(\mu_i) = \{x_i \in X_i : \mu_i(N_{x_i}) > 0$ за всяка отворена околност N_{x_i} на $x_i\}$.

Равновесие по Nash в смесени стратегии е наборът от стратегии $\mu^* \in M$ такъв, че $U_i(\mu_i, \mu_{-i}^*) \leq U_i(\mu_i^*, \mu_{-i}^*)$, за всяко $\mu_i \in M_i$ и всеки играч i.

Дефинираме изображението на прекъснатост така, както е направено в [1]:

$$d_i(x_i) := \{x_{-i} \in X_{-i} : u_i \text{ е прекъсната по } x_{-i} \text{ в } x = (x_i, x_{-i})\}.$$

Дефиниция 3.1.1 *(Reny (1999) [39]) Игра G се нарича игра с осигурена печалба, ако за всяко $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $i \in \{1, ..., n\}$, съществуват $\hat{x}_i \in X_i$ и околност $N(x_{-i})$ на x_{-i} такива, че $u_i(\hat{x}_i, x_{-i}') \geq$*

$u_i(x) - \varepsilon$ за всяко $x'_{-i} \in N(x_{-i})$.

Дефиницията дадена по-долу е за игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (disjoint payoff matching (DPM)). Дефиницията за DPM има две части. Първо, всеки играч може да намери отклонение от всяка своя стратегия x_i, което му носи поне същата печалба, както в x_i. Второ, общите точки на прекъсване на отклоненията са ограничени за всяко x_i.

Дефиниция 3.1.2 *(Allison и Lepore (2014) [1]) Игра G удовлетворява DPM, ако за всяко $x_i \in X_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, съществува редица от отклонения $(x_i^k)_k \in X_i$ такава, че*
(i) $\liminf_k \; u_i(x_i^k, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ за всяко $x_{-i} \in X_{-i}$,
(ii) $\operatorname*{Lim\,sup}_k \; d_i(x_i^k) = \emptyset$.

Да припомним, че ако A_n е редица от множества, то множеството $\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m$ се състои от всички точки, които принадлежат на безкраен брой множества A_n, а множеството $\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m$ се състои всички точки, които принадлежат на всички с изключение на краен брой множества A_n. Ако $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, тогава $\operatorname{Lim\,sup} A_n = \emptyset$. Връзката между двете граници на множества е следната $\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} A_n \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n$. Повече информация за граници на множества може да се намери в [40].

Една игра се нарича компактна, ако всеки играч има компактно пространство от стратегии.

Теорема 3.1.3 *(Allison и Lepore (2014) [1]) Ако G е компактна игра и удовлетворява DPM, тогава $\bar{G}$ е игра с осигурена печалба.*

В [8] Carmona доказва еквивалентостта на двете дефиниции, дадени по-долу, за игра със слабо осигурена печалба:

Дефиниция 3.1.4 *Игра G се нарича игра със слабо осигурена печалба, ако $v_i(x_{-i}) := \sup_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i})$ е полунепрекъсната отдолу функция за всяко $i \in \{1, ..., n\}$.*

Дефиниция 3.1.5 *Игра G се нарича игра със слабо осигурена печалба, ако за всяко $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $i \in \{1, ..., n\}$, съществува околност $N(x_{-i})$ на x_{-i} със следното свойство: за всяко $x'_{-i} \in N(x_{-i})$ съществува $\hat{x}_i \in X_i$ такова, че $u_i(\hat{x}_i, x'_{-i}) \geq u_i(x) - \varepsilon$.*

Ако $\hat{x}_i$ е едно и също за всяко x'_{-i}, тогава свойството слабо осигурена печалба е еквивалентно на свойството осигурена печалба.

Свойството слабо осигурена печалба е едно от условията, които осигуряват съществуване на равновесие в резултата на Dasgupta и Maskin [12]. Да припомним, че игра G се нарича полунепрекъсната отгоре, ако функцията на печалба u_i на всеки играч $i \in \{1, ..., n\}$, е полунепрекъсната отгоре за всяко x.

Теорема 3.1.6 *(Dasgupta и Maskin (1986) [12]) Ако игра G е компактна, квазивдлъбната, полунепрекъсната отгоре и със слабо осигурена печалба, тогава съществува равновесие по Nash в чисти стратегии.*

3.2 Слаба осигуреност на печалбата в смесени стратегии

За дадена функция $f : X_{-i} \to X_i$ дефинираме

$$D_i(f) := \{z|\ u_i(f(z), z) \text{ е прекъсната в } z\}.$$

Дефиницията за игри със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM)), която ние предлагаме, може да се използва за доказването на свойството слаба осигуреност на печалбата за игрите в смесени стратегии.

Дефиниция 3.2.1 *Игра G удовлетворява WDPM, ако за всяко $x_i \in X_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, съществува редица от борелеви функции $(T^k_{x_i})_k : X_{-i} \to X_i$ такава, че*
(i) $\liminf\limits_k \ u_i(T^k_{x_i}(x_{-i}), x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ *за всяко* $x_{-i} \in X_{-i}$,
(ii) $\operatorname*{Lim\,sup}\limits_k \ D_i(T^k_{x_i}) = \emptyset$.

Това условие се проверява лесно и няма нужда да се работи с произволни вероятностни мерки, за да се докаже валидността му. Забележете, че от Теорема 1.12 в [41] следва, че $u_i(T^k_{x_i}(z), z)$ е измерима функция. В частност, ако $T^k_{x_i}(x_{-i}) = x^k_i$ ($x^k_i \in X_i$) за всяко x_{-i}, то свойството WDPM е еквивалентно на свойството DPM. В случай, че $u_i(x_i, x_{-i})$ е непрекъсната като функция на x_{-i} в x_i, WDPM е изпълнено тривиално, като $T^k_{x_i}(x_{-i}) = x_i$ за всяко x_{-i}. Допълнително, ако $D_i(T^k_{x_i}) \cap D_i(T^l_{x_i}) = \emptyset$, за $k \neq l$, то $\operatorname*{Lim\,sup}\limits_k \ D_i(T^k_{x_i}) = \emptyset$.

Теорема 3.2.2 *Ако G е компактна игра, която удовлетворява WDPM, тогава $\bar{G}$ е игра със слабо осигурена печалба.*

За доказателството на теоремата ще следваме Allison и Lepore [1]. Първо ще докажем

Лема 3.2.3 *Нека компактната игра G удовлетворява WDPM. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$, $x_i \in X_i$ и $\mu_i \in M_i$, съществуват борелева функция $T_{x_i} : X_{-i} \to X_i$, и компактно множество $K \subset X_{-i} \backslash D_i(T_{x_i})$ такива, че*
(i) $u_i(T_{x_i}(x_{-i}), x_{-i}) > u_i(x_i, x_{-i}) - \varepsilon$ *за всяко* $x_{-i} \in K$,
(ii) $\mu_{-i}(X_{-i} \backslash K) < \varepsilon$.

Доказателство. Нека G удовлетворява WDPM. Разглеждаме произволен играч $i \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon > 0$ и $\mu_{-i} \in M_{-i}$. Означаваме

$$E_k = \{x_{-i} \in X_{-i} : u_i(T^k_{x_i}(x_{-i}), x_{-i}) > u_i(x) - \varepsilon\},$$

където $(T^k_{x_i})_k$ е редицата от функции от Дефиниция 3.2.1. Тогава

$$\operatorname*{Lim\,inf}\limits_k \ E_k = X_{-i}, \quad \text{и} \quad \mu_{-i}(\operatorname*{Lim\,inf}\limits_k \ E_k) = 1.$$

Тъй като $\operatorname{Lim\,sup}_k \ D_i(T^k_{x_i}) = \emptyset$, то

$$\mu_{-i}(\operatorname{Lim\,sup}_k \ D_i(T^k_{x_i})) = 0.$$

От Твърдение 5, раздел 9 в [27] следва, че

$$\mu_{-i}(\operatorname{Lim\,inf}_k \ E_k) \leq \operatorname{Lim\,inf}_k \ \mu_{-i}(E_k)$$

и

$$\mu_{-i}(\operatorname{Lim\,sup}_k \ D_i(T^k_{x_i})) \geq \operatorname{Lim\,sup}_k \ \mu_{-i}(D_i(T^k_{x_i})).$$

От тук получаваме

$$\operatorname{Lim\,inf}_k \ \mu_{-i}(E_k) = 1 \ \text{ и } \ \operatorname{Lim\,sup}_k \ \mu_{-i}(D_i(T^k_{x_i})) = 0.$$

Следователно съществува k такова, че $\mu_{-i}(E_k) > 1 - \varepsilon/3$ и $\mu_{-i}(D_i(T^k_{x_i})) < \varepsilon/3$. От регулярността на μ_{-i} можем да изберем затворено (и следователно компактно) подмножество $K \subset E_k \backslash D_i(T^k_{x_i})$ такова, че $\mu_{-i}(K) > \mu_{-i}(E_k \backslash D_i(T^k_{x_i})) - \varepsilon/3$. Оттук $\mu_{-i}(X_{-i} \backslash K) < \varepsilon$, което трябваше да се докаже. $\square$

Доказателство на Теорема 3.2.2. Нека $\varepsilon > 0$ и предполагаме, че $\mu \in M$. За всеки играч i съществува стратегия $\bar{x}_i \in \operatorname{supp}(\mu_i)$ такава, че

$$\int u_i(\bar{x}_i, x_{-i}) d\mu_{-i} \geq \int u_i(x) d\mu. \tag{3.1}$$

От WDPM и Лема 3.2.3 следва, че съществуват функция $T_{\bar{x}_i}(x_{-i})$ и множество $K(\varepsilon) \subset X_{-i} \backslash D_i(T_{\bar{x}_i})$ такива, че

$$u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) > u_i(\bar{x}_i, x_{-i}) - \varepsilon/6 \quad \text{за всяко} \quad x_{-i} \in K(\varepsilon)$$

и

$$\mu_{-i}(X_{-i} \backslash K(\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{6m_i},$$

където $m_i := \sup |u_i|$. Следователно

$$\int_{K(\varepsilon)} u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\mu_{-i} > \int_{K(\varepsilon)} u_i(\bar{x}_i, x_{-i}) d\mu_{-i} - \varepsilon/6. \tag{3.2}$$

По-нататък имаме, че

$$\int_{X_{-i}\setminus K(\varepsilon)} u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i})d\mu_{-i} - \int_{X_{-i}\setminus K(\varepsilon)} u_i(\bar{x}_i,x_{-i})d\mu_{-i} \geq$$

$$-\int_{X_{-i}\setminus K(\varepsilon)} (|u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i})| + |u_i(\bar{x}_i,x_{-i})|)d\mu_{-i} \geq$$

$$-2m_i\mu(X_{-i}\setminus K(\varepsilon)) > -\frac{2\varepsilon}{6} \tag{3.3}$$

Като използваме (3.2) и (3.3) получаваме, че

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i})d\mu_{-i} > \int u_i(\bar{x}_i,x_{-i})d\mu_{-i} - \varepsilon/2. \tag{3.4}$$

Дефинираме

$$\underline{u_i}(x_{-i}) := \sup_{N\in N(x_{-i})} \inf_{x'_{-i}\in N} u_i(T_{\bar{x}_i}(x'_{-i}),x'_{-i}),$$

където $N(x_{-i})$ са отворените множества в X_{-i} съдържащи x_{-i}. Тази функция е регуляризация отдолу на функцията $u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i})$ и следователно е полунепрекъсната отдолу. От Твърдение 5.1 в [39] следва, че $\int \underline{u_i}(x_{-i})d\mu_{-i}$ е полунепрекъсната отдолу по μ_{-i}. Тогава, съществува околност $N(\mu_{-i})$ такава, че за всяко $\lambda_{-i} \in N(\mu_{-i})$,

$$\int \underline{u_i}(x_{-i})d\lambda_{-i} > \int \underline{u_i}(x_{-i})d\mu_{-i} - \varepsilon/6. \tag{3.5}$$

Тъй като m_i е горна граница за $\underline{u_i}$ и u_i, имаме, че

$$\int_{X_{-i}\setminus K(\varepsilon)} (\underline{u_i}(x_{-i}) - u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i}))d\mu_{-i} \geq$$

$$-\int_{X_{-i}\setminus K(\varepsilon)} (|\underline{u_i}(x_{-i})| + |u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}),x_{-i})|)d\mu_{-i} \geq$$

$$-2m_i\mu_{-i}(X_{-i}\setminus K(\varepsilon)) > -2\varepsilon/6.$$

От това, че $u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i})$ е непрекъсната по x_{-i} за всяко $x_{-i} \in K(\varepsilon)$, имаме, че $\underline{u_i}(x_{-i}) = u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i})$ върху $K(\varepsilon)$. Следователно,

$$\int \underline{u_i}(x_{-i}) d\mu_{-i} = \int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\mu_{-i} +$$

$$\int_{X_{-i} \setminus K(\varepsilon)} (\underline{u_i}(x_{-i}) - u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i})) d\mu_{-i} >$$

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\mu_{-i} - 2\varepsilon/6 \tag{3.6}$$

Като използваме, че $\underline{u_i}(x_{-i}) \leq u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i})$ и комбинираме (3.5) и (3.6) се получава, че за всяко $\lambda_{-i} \in N(\mu_{-i})$,

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\lambda_{-i} \geq \int \underline{u_i}(x_{-i}) d\lambda_{-i} > \int \underline{u_i}(x_{-i}) d\mu_{-i} - \varepsilon/6 >$$

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\mu_{-i} - \varepsilon/2. \tag{3.7}$$

От (3.1), (3.4) и (3.7) следва, че за всяко $\lambda_{-i} \in N(\mu_{-i})$,

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\lambda_{-i} > \int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\mu_{-i} - \varepsilon/2 >$$

$$\int u_i(\overline{x}_i, x_{-i}) d\mu_{-i} - \varepsilon \geq \int u_i d\mu - \varepsilon.$$

Дефинираме борелевата мярка $\lambda_i \in M_i(X_i)$, както следва: за всяко борелево множество $E_i \in X_i$, $\lambda_i(E_i) = \lambda_{-i}(E_{-i})$, където $E_{-i} = \{x_{-i} \in X_{-i} | T_{\bar{x}_i}(x_{-i}) \in E_i\}$. От Теорема С в раздел 39 на книгата на Halmos (1974) [27] получаваме

$$\int u_i(T_{\bar{x}_i}(x_{-i}), x_{-i}) d\lambda_{-i} = \int u_i(x_i, x_{-i}) d\lambda_i d\lambda_{-i}.$$

За всяко $\mu \in M$, $\varepsilon > 0$, и i, съществува околност $N(\mu_{-i})$ на μ_{-i} такава, че всяко $\lambda_{-i} \in N(\mu_{-i})$ съществува $\lambda_i \in M_i(X_i)$ такова, че

$$\int u(x_i, x_{-i}) d\lambda_i d\lambda_{-i} > \int u_i d\mu - \varepsilon.$$

Следователно играта в смесени стратегии $\overline{G}$ е игра със слабо осигурена печалба, което трябваше да се докаже. $\square$

В дадения по-долу пример показваме, че играта удовлетворява WDPM и следователно е игра със слабо осигурена печалба в смесени стратегии. Допълнително, функциите на печалбата са полунепрекъснати отгоре и като използваме резултата на Dasgupta и Maskin [12], доказваме съществуване на равновесие в смесени стратегии.

Пример 3.2.4 *Нека играта има двама играчи с пространства на стратегии* $X_1 = X_2 = [0,1]$ *и функции на печалба,* $i = 1,2$

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} f_i(x_i, x_{-i}), & x_i \geq x_{-i}, \\ q_i(x_i, x_{-i}), & x_i < x_{-i} < x_i + 1/2, \\ g_i(x_i, x_{-i}), & x_{-i} \geq x_i + 1/2. \end{cases}$$

Предполагаме, че за $i = 1,2$ *функциите* f_i, q_i, g_i *са непрекъснати по* $x = (x_i, x_{-i})$,

$$\min_{x_i = x_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \geq \max_{x_i < x_{-i} < x_i + 1/2} q_i(x_i, x_{-i})$$

и

$$\min_{x_i + 1/2 = x_{-i}} g_i(x_i, x_{-i}) \geq \max_{x_i < x_{-i} < x_i + 1/2} q_i(x_i, x_{-i}),$$

както и че $f_i(1/2, 1/2) = g_i(0, 1/2)$. *За всяко* $x_i \in [0,1)$ *дефинираме редицата от функции* $(T^k_{x_i})_k$

- $x_i = 0$, $\varepsilon^k_0 \searrow 0$, $1/2 - \varepsilon^1_0 > \varepsilon^1_0$, $\varepsilon^p_0 \neq \varepsilon^m_0, p \neq m$:

$$T^k_0(x_{-i}) = \begin{cases} x_{-i}, & 0 \leq x_{-i} < \varepsilon^k_0 \quad \text{или} \quad 1/2 - \varepsilon^k_0 < x_{-i} \leq 1/2, \\ x_i, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

$$D(T^k_0) = \{\varepsilon^k_0\} \cup \{1/2 - \varepsilon^k_0\}, \forall k = 0,1,2...$$

Според предположенията за ε^k_0 *имаме, че*

$$D(T^p_0) \cap D(T^m_0) = \emptyset \text{ при } p \neq m.$$

- $x_i \in (0, 1/2]$, $\varepsilon^k_{x_i} \searrow 0$, $1/2 - \varepsilon^1_{x_i} > \varepsilon^1_{x_i}$, $\varepsilon^p_{x_i} \neq \varepsilon^m_{x_i}, p \neq m$:

$$T^k_{x_i}(x_{-i}) = \begin{cases} x_{-i}, & x_i \leq x_{-i} < x_i + \varepsilon^k_{x_i}, \\ x_{-i} - 1/2, & x_i + 1/2 - \varepsilon^k_{x_i} < x_{-i} \leq x_i + 1/2, \\ x_i, & \textit{в противен случай.} \end{cases}$$

$$D(T^k_{x_i}) = \{x_i + \varepsilon^k_{x_i}\} \cup \{x_i + 1/2 - \varepsilon^k_{x_i}\}, \forall k = 0, 1, 2...$$

Според предположенията за $\varepsilon^k_{x_i}$ имаме, че

$$D(T^p_{x_i}) \cap D(T^m_{x_i}) = \emptyset \ \textit{ при } p \neq m.$$

- $x_i \in (1/2, 1)$, $\varepsilon^k_{x_i} \searrow 0$, $\varepsilon^k_{x_i} \neq \varepsilon^m_{x_i}, m \neq n$, $x_i + \varepsilon^0_{x_i} < 1$:

$$T^k_{x_i}(x_{-i}) = \begin{cases} x_{-i}, & x_i \leq x_{-i} < x_i + \varepsilon^k_{x_i}, \\ x_i, & \textit{в противен случай.} \end{cases}$$

$$D(T^k_{x_i}) = \{x_i + \varepsilon^k_{x_i}\}, \forall k = 0, 1, 2...$$

Според предположенията за $\varepsilon^1_{x_i}$ имаме, че

$$D(T^p_{x_i}) \cap D(T^m_{x_i}) = \emptyset \quad \textit{при} \quad p \neq m.$$

- *За $x_i = 1$ функцията $u_i(1, x_{-i})$ е непрекъсната за всяко $x_{-i} \in [0, 1]$.*

При това, $\liminf\limits_k u_i(T^k_{x_i}(x_{-i}), x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ за всяко $x_{-i} \in X_{-i}$ и предположенията за WDPM са изпълнени. Съществуването на равновесие следва от полунепрекъснатостта отгоре на играта в чисти стратегии следователно и в смесени стратегии (Твърдение 5.1 [39]) и резултата на Dasgupta и Maskin от 1986 [12].

Заключителни бележки

Приносите в настоящата дисертация са изложени изчерпателно в първа, втора и трета глава и са публикувани в статиите [31], [25], [32], [30].

Основни приноси на дисертацията

В Глава 1 е разгледан модел на Cournot и са изведени някои свойства на функцията на печалбата в случай на (-1)-вдлъбната ценова функция. С помощта на тези свойства е доказано съществуване на равновесие в случай на (-1)-вдлъбната и непрекъсната ценова функция. Ако N е броят на фирмите на пазара и функцията на цената е $(-1/N)$-вдлъбната и непрекъсната, е доказано, че сумите на Nash са константни. Ако предположенията до тук са изпълнени и освен това функцията на цената е диференцируема, точката на равновесие е единствена. При доказателството за единственост на равновесие е използвана техниката, разработена от von Mouche и Quartieri в [47], но резултатът представен в настоящата дисертация не е еквивалентен на техния резултат. Дадени са примери, които показват, че свойството изпъкнала интегрирана ценова гъвкавост, дефинирано в [47] не е следствие, нито обобщение на (-1)-вдлъбнатост. Съществуване и единственост на равновесието при логаритмично вдлъбната (0-вдлъбната) ценова функция е следствие на представения тук резултат. В теоремата за съществуване на равновесие в [21] Ewerhart предполага, че функциите на приходи и разходи са два пъти диференцируеми, а представената Теорема 1.3.1 за съществуване е за негладки в общия случай функции. Резултатите от Глава 1 са публикувани в [31].

В Глава 2 са разгледани вариационни принципи за inf и за supinf задачи с ограничения в напълно регулярни топологични пространства. Резултатите в тази глава се основават на вариационните принципи за inf и supinf задачи без ограничения, разгледани от Kenderov и Revalski в [34] и [35]. Изведени са условия, които позволяват пертурбации на дадена функция с подходящи непрекъснати функции по такъв начин, че оптимизационната задача с ограничения за смутената функция да има решение. С помощта на вариационния принцип за inf задачи с ограничения е доказан вариационният принцип на Ekeland и теоремата за неподвижна точка на Caristi в метрични пространства. Даден е пример, който илюстрира вариационния принцип за supinf задачи. Изведен е резултат за sup-коректност, като се използва понятието за изброима локална база в дадена точка. Направена е характеризация на коректно поставените supinf задачи. Резултатите от Глава 2 са публикувани в [25] и [32].

В Глава 3 се разглеждат некооперативни игри в общ вид без условие за непрекъснатост на функцията на печалбата. Въведена е дефиниция за игра със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване (weak disjoint payoff matching (WDPM)). Показано е, че въведеното от Allison и Lepore в [1] условие за игра DPM, е частен случай на WDPM. Доказано е, че ако една игра удовлетворява условието WDPM, тя е със слабо осигурена печалба в смесени стратегии. Слаба осигуреност на печалбата е условие за съществуване на равновесие в резултатите на Carmona [8] и Dasgupta и Maskin [12]. Предимството на условието WDPM е, че няма нужда да се работи с вероятностни мерки, за да се докаже валидността му. Даден е пример на игра, която удовлетворява WDPM. Резултатите от Глава 3 са публикувани в [30].

Публикации свързани с дисертацията

Резултатите от дисертацията са публикувани в следните статии, включени в библиографията със съответните номера:

[25] Gaumont D., **Kamburova D.**, Revalski J.P., *Perturbations of supinf problems with constraints*, Vietnam Journal of Mathematics, (2019), **47(3)**, 659–667 ISSN: 2305-221X (Print) 2305-2228 (Online), SJR 0.375

[31] Kamburova D., Marinov R., *Cournot equilibrium in case of (-1)-concave price function*, Mathematica, (2019), **61(2)**, 138–145, ISSN (print) : 1222-9016, ISSN (online): 2601-744X, SJR 0.223

[32] Kamburova D., Marinov R., *A Note on Ekeland's Variational Principle and Caristi's Fixed Point Theorem*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, (2022), **64**, 23–28., ISSN (print) : 1312-5192, ISSN (online): 1314-5673, SJR 0.293

[30] Kamburova D., *Weak payoff security in mixed strategies*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2020), **73(4)**, 467–474, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, IF 0.378, SJR 0.244

Апробация на резултатите

Получените резултати са представени в следните изнесени лично доклади:

[1] Детелина Камбурова, "Perturbations of supinf problems with constraints", доклад пред семинара по Изследване на операциите, ИМИ - БАН 26.03.2019;

[2] Детелина Камбурова, "Weakly payoff secure games in mixed strategies", доклад пред семинара по Оптимизация, Софийски университет „Св. Климент Охридски“ – Факултет по Математика и Информатика, 07.06.2019;

[3] Детелина Камбурова, "Вариационни принципи за Supinf задачи с ограничения", доклад на II Интердисциплинарен докторантски форум, хотел „Самоков”, Боровец, 29-31 август 2019;

[4] Detelina Kamburova, "Variational Principles for Supinf Problems with Constraints", XXI International Conference Geometry, Integrability and Qunatization, Varna, Bulgaria 3-8 June 2019;

Декларация за оригиналност

Декларирам, че настоящата работа включва резултати получени от мен заедно с посочени от мен съавтори и не съм използвала чужди резултати, без да посоча техния автор и източник.

Благодарности

Бих искала да изразя дълбоката си признателност към моя научен ръководител акад. Юлиан Ревалски, без когото тази работа не би била възможна, за отделеното време и за подкрепата, която ми оказа.

Считам за приятен свой дълг да благодаря на колегите от секция ИОВС на ИМИ при БАН, катедра ВОИС на ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски както и на колегите от катедра Математика и Физика на ТУ–Варна за отзивчивостта им и интереса им към моята работа.

Библиография

[1] Allison B. A., Lepore J. J., *Verifying payoff security in the mixed extension of discontinuous games*, Journal of Economic Theory, (2014), **152**, 291–303.

[2] Allison B. A., Bagh A. and Lepore, J. J., *Sufficient conditions for weak reciprocal upper semi-continuity in mixed extensions of games*, Journal of Mathematical Economics, (2018), **74**, 99–107.

[3] Amir R., *Cournot oligopoly and the theory of supermodular games*, Games and Economic Behavior, (1996), **15(2)**, 132-148.

[4] Anderson S. P., Renault R., *Efficiency and surplus bounds in Cournot competition*, Journal of Economic Theory, (2003), **113(2)**, 253-264.

[5] Bagh A., Jofre A., *Reciprocal upper semicontinuity and better reply secure games: a comment*, Econometrica, (2006), **74(6)**, 1715–1721.

[6] Bertrand J., *Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses Journal de Savants*, (1883), **67**, 499–508.

[7] Borwein J. M., Preiss D., *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and differentiability of convex functions*, Transactions of the American Mathematical Society, (1987), **303(2)**, 517–527.

[8] Carmona G., *An existence result for discontinuous games*, Journal of Economic Theory, (2009), **144(3)**, 1333–1340.

[9] Carmona G., *Existence and stability of Nash equilibrium*, (2012), Singapore, World Scientific.

[10] Čoban M. M., Kenderov P. S., Revalski J. P., *Generic well-posedness of optimization problems in topological spaces*, Mathematika, (1989), **36**, 301–324.

[11] Cournot, A. *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*, (1838), Paris, Hachette.

[12] Dasgupta P., Maskin E., *The Existence of Equilibrium of Discontinuous Economic Games*, I: Theory, Review of Economics Studies, (1986), **53(1)**, 1–26.

[13] Debreu H., *A Social Equilibrium Existence Theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, (1952), **38(10)**, 886-893.

[14] Dempe S., *Foundations of bilevel programming*, (2002), Springer Science & Business Media.

[15] Dempe S., Dutta J., Mordukhovich B.S., *New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming*, Optimization, (2007), **56(5-6)**, 577-604.

[16] Deneckere R., Kovenock D., *Direct demand-based Cournot existence and uniqueness conditions*, (1999), Purdue University, mimeo.

[17] Deville R., Godefroy G., Zizler V., *A smooth variational principle with applications to Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions*, Journal of Functional Analysis, (1993), **111(1)**, 197–212.

[18] De Wolf, D., Smeers Y., *A stochastic version of a Stackelberg-Nash-Cournot equilibrium model*, Management Science, (1997), **43(2)**, 190-197.

[19] Edgeworth F. Y., *Papers relating to political economy*, (1925), Royal economic society by Macmillan and Company, limited.

[20] Ekeland I., *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1974), **47(2)**, 324-53.

[21] Ewerhart C., *Cournot games with biconcave demand*, Games and Economic Behavior, (2014), **85**, 37-47.

[22] Fan K., *Fixed Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, (1952), **38(2)**, 121-126.

[23] Friedman J. W., *A non-cooperative equilibrium for supergames*, The Review of Economic Studies, (1971), **38(1)**, 1-12.

[24] Fudenberg D., Tirole J., *Game theory*, (1991), MIT press.

[25] Gaumont D., Kamburova D., Revalski J.P., *Perturbations of supinf problems with constraints*, Vietnam Journal of Mathematics, (2019), **47(3)**, 659–667.

[26] Glicksberg I. L., *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*, Proceedings of the American Mathematical Society, (1952), **3(1)**, 170-174.

[27] Halmos P. R., *Measure Theory*, (1974), New York, Springer-Verlag.

[28] Ioffe A. D., Lucchetti R. E., Revalski J. P., *A variational principle for problems with functional constraints*, SIAM Journal on Optimization, (2002), **12(2)**, 461-478.

[29] Jensen, J. L. W. V., *Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelvaerdier* Nyt tidsskrift for matematik, (1905), **16**: 49-68.

[30] Kamburova D., *Weak payoff security in mixed strategies*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2020), **73(4)**, 467–474.

[31] Kamburova D., Marinov R., *Cournot equilibrium in case of (-1)-concave price function*, Mathematica, (2019), **61(2)**, 138–145.

[32] Kamburova D., Marinov R., *A Note on Ekeland's Variational Principle and Caristi's Fixed Point Theorem*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, (2022), **64**, 23–28.

[33] Kenderov P., Lucchetti R., *Generic well-posedness of supinf problems*, (1996), Bulletin of Australian Mathematical Society, **54**, 5–25.

[34] Kenderov P., Revalski J. P., *Dense existence of solutions of perturbed optimization problems and topological games*, (2010), Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, **63(7)**, 937–942.

[35] Kenderov P., Revalski J. P., *Variational principles for supinf problems*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, (2017), **70(12)**, 1635-1642.

[36] McLinden L., *An application of Ekeland's theorem to minimax problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (1982), **6(2)**, 189-196.

[37] Murphy F. H., Sherali H. D., Soyster A. L., *A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium*, Mathematical Programming, (1982), **24(1)**, 92-106.

[38] Nash J, *Non-cooperative games*, Annals of mathematics, (1951), 286-295.

[39] Reny P. J., *On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games*, Econometrica, (1999), **67(5)**, 1029–1056.

[40] Resnick S. I., *A Probability path*, (2003), Birkhauser Verlag AG.

[41] Rudin W., *Real and complex analysis, Singapore*, (1987), McGraw-Hill.

[42] Rudin W. *Functional analysis 2nd ed.*, (1991), International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York.

[43] Saloner G., *Cournot duopoly with two production periods*, Journal of Economic Theory, (1987), **42(1)**, 183-187.

[44] Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A., *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*, (2021), Society for Industrial and Applied Mathematics.

[45] Sherali H. D., Soyster A. L., Murphy F. H., *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations*, Operations research, (1983), **31(2)**, 253-276.

[46] Stegall C., *Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces*, Mathematische Annalen, (1978), **236(2)**, 171-176.

[47] von Mouche P., Quartieri F., *On the Uniqueness of Cournot Equilibrium in Case of Concave Itegrated Price Flexibility*, Journal of Global Optimization, (2013), **57**, 707-718.

[48] von Mouche P., Quartieri F., *Cournot Equilibrium Uniqueness in Case of Concave Industry Revenue: A Simple Proof*, Economics Bulletin, (2015), **35(2)**, 1299-1305.

[49] von Stackelberg H., *Market Structure and Equilibrium*, (2011), Springer.