МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

400 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА БЛЕЗ ПАСКАЛ

Петър Попиванов

Тази статия е посветена на 400-годишнината от рождението на великия френски философ, мистик и математик Блез Паскал. Последователно се спираме на кратки биографични данни от неговия живот, на високо ценения от философите негов принос в християнската философия, теология и гносеология, и най-сетне, на неговото впечатляващо дело в математиката, включително създаването на първата изчислителна машина, на забележителните му постижения в теорията на вероятностите, които продължават да се развиват и до наши дни, на красивите му теореми за шестоъгълници, вписани в конични сечения, и техните елегантни доказателства. Споменали сме и някои негови резултати в областта на физиката.

Източник: `http://www.thocp.net/biographies/pascal_blaise.html`

Великият френски философ, мистик и математик Блез Паскал (Blaise Pascal) е роден на 19.06.1623 г. в град Клермон-Феран и е починал в Париж на 19.08.1662 г. Отличаващият се с крехко здраве учен и мислител е създал впечатляващо творчество за скъпернически отпуснатите му от съдбата години. Събраните му съчинения излязоха в обем от 14 тома през периода 1908–1923 г., а списъкът на изследванията и коментарите за него заема цели 5 тома. Колко ли още много нови материали са се появили през последните 100 години! Паскал произхожда от дворянско семейство, но на т. нар. „дворяни на мантията“. Това означава, че съгласно въведената от крал Франсоа I практика, позициите в съдебните учреждения се продават и закупилите ги лица стават потомствени дворяни. Семейство Паскал е станало дворянско 150 години преди раждането на Блез. Баща му Етиен има безспорни математически интереси и е откривател на една интересна крива от 4 степен, известна в литературата като „охлюв на Паскал“. Етиен овдовява на 38 г. с 2 дъщери и един син на 2,5 години. Малката му дъщеря Жаклин е още бебе, значително по-късно се замонашва и между братът и сестрата се установяват близки, сърдечни отношения през следващите десетилетия.

Малкият Паскал проявявал страстен интерес към математиката и баща му воден от желанието да предпази болнавото си дете от ранно интелектуално напрежение, скрил от него всички домашни книги по математика. От 1631 г. семейството живее в Париж. Гениалното дете съвсем самостоятелно стига до редица теореми от класическата геометрия. Известно е, че сам е доказал т. 32 от „Началата“ на Евклид, а именно, че сумата от ъглите в триъгълника е равна на два прави ъгъла. Тогава баща му проявил разбиране и толерантност и сам му предложил по-късно да се запознае подробно с „Началата“. Резултатите не закъсняват. 16-годишният Б. Паскал написва знаменития „Опит за конусните сечения“ – шедьовър на 53 реда, който отдавна е влязъл в златния фонд на математиката. Тук са споменати т. нар. теореми на Паскал, които и досега се изучават в курсовете по геометрия (проективна геометрия). Ж. Дезарг (1591–1662 г.) високо оценява тези теореми. От това съчинение се е заинтересувал и великият математик и философ Рене Декарт (1596–1650 г.) Значително по-късно Блез пише през 1654 г. трактата си „Пълен труд за конусните сечения“, където подробно развива идеите от началния анонс.

Паскал създава и изчислителна машина, на която посвещава цели 5 години (1640–1645 г.) от живота си. Принципът е добре известен – в технически план важна роля играе предавката чрез въртеливо движение на зъбчати колела. С екип от сътрудници Б. Паскал изработва повече от 50 модела на машината, преди да стигне до окончателния вариант. Касае се за суматор. Машината е събудила голям интерес, включително при демонстрациите на нейната работа. През 1649 г. той получава от краля „Привилегия върху аритметичната машина“ – своеобразно авторско право за производството и продажбата ѝ.

Изследователите на Паскал, и особено фройдистите, дискутират въпроса за жените в живота на Паскал. Някои сочат познанството и връзката му около 1656 г. с Шарлота, 20-годишна, сестра на херцог Роан (има и кореспонденция с нея), но други считат, че „безспорната любов в живота на Б. Паскал е сестра му Жаклин“.

Ще се опитам накратко да опиша основните интереси на френския учен по неговите години (възраст):

1) Изследвания върху конусните сечения: 13–16 г. и около 31 г.

2) Изчислителна машина: 17–22 г.

3) Изследвания по физика: 23–25 г.

Заедно с Торичели изучават атмосферното налягане чрез поставяне на живак в тръбичка (изменението на височината на живачен стълб). Лично Паскал прави опити в родния си край Оверн, доказвайки, че атмосферното налягане се изменя (намалява) с височината. Така се появява барометърът и идеята за уред за измерване на височината по „барометричен път“ – така нареченият в наше време уред алтиметър.

4) Теорията на вероятностите и Б. Паскал: 30–32 г.

В този тематичен кръг той е стимулиран около 1654 г. от Кавалера А. де Мере (хазартен играч), макар и на нивото на елементарни задачи – как да се хвърлят зарчетата, за да се падне максимален брой точки и как да се раздели залогът между играчите, ако играта не е приключила. Паскал намира комбинациите от n елемента от k-ти клас с брой $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, събира и умножава вероятности, оперира с понятието *математическо очакване.* От това време са „Трактат за аритметичния триъгълник“ и „Трактат по комбинаторика“. Ще напомня само класическата дефиниция на численото значение на вероятността. *Вероятността е равна на отношението между броя на случаите, които са благоприятни за осъществяване на дадено събитие, и общия брой (всички) „равновъзможни“ случаи.* В по-сложните случаи тази дефиниция изисква статистически подход.

5) След 1655 г., т.е. след 32-годишна възраст се посвещава изцяло на християнската философия. Ще спомена само сентенцията му (често неточно цитирана) „Човек е мислеща тръстика“.

Ще отделя специално внимание на неговия принос в математиката по-късно, а сега ще се спра на философските му размишления. Ще дефинирам необходимите понятия, за да стане ясно как е ситуирано неговото дело около средата на XVI в. във френския обществен живот.

I. Паскал и философията. Блез Паскал е един от най-видните представители на духа на Пор-Роял[1]. Като янсенист[2] той атакува в своите „Писма на един провинциалист“ (1657) йезуитите за техните многобройни прегрешения и специално за техния пробабилизъм[3]. Сам изтъкнат математик, той вижда границите на математиката и на рационализма изобщо в това, че не съумяват да отговорят на въпросите какво е нашето място в света и кой е пътят към душевния мир. Поради това, според Паскал, великите умове, дори когато са усвоили цялото възможно знание, се връ-

[1]Пор-Роял е манастир на ордена на цистерианците, разположен югозападно от Версай, основан през 1204 г. и преместен по времето на А. Арно в парижкото предградие Сен Жак. (А. Арно (1612 – 1694 г.) е теолог и янсенист. Последовател на Декарт, но под силното влияние на Паскал, той пише в съавторство с последния „Граматика на Пор-Роял“ (1660 г.) и т. нар. логика на Пор-Роял – „Изкуството да се мисли“. През 1667 г. издава „Новите елементи на геометрията“. Арно е високо ценен от Г. Лайбниц (1646 – 1716 г.) и е кореспондирал с него.). След 1640 г. става средище на янсенизма. Манастирът е изгорен до основи през 1710 г. по заповед на крал Луи XIV. Орденът е забранен през 1730 г. от крал Луи XV, а е преследван и от държавата, и от църквата.

[2]Янсенизмът е католическо теологично движение, наречено на името на холандския теолог Корнелий Янсенсус (1585 – 1638 г.). В основния си труд, отпечатан през 1640 г., той се придържа към учението на Августин (Августин Блажени (354 – 430 г.)), отдава голямо признание и възвеличава учението за предопределението: „Човек е предопределен от Бога за блаженство или вечни мъки“. Янсен остро критикува йезуитството. Янсенистите се считат за най-ревностните представители на духа на католицизма. Главните положения в Янсенистката доктрина са: Божественото предопределение на богоизбраните, греховността на човека, покаянието, отричането от света, враждебността към изкуството.

[3]Пробабилизмът се тълкува като гледната точка на вероятността. Това е философско течение, което счита, че единствената стойност на знанието е вероятностната, защото истинното е непознаваемо.

щат назад към незнанието и се отдават на тайнството на Откровението и Божията милост. Истината се основава на една *logique du Coeur* (повеля на сърцето, любов – в български превод) и на субективното изживяване на мистичното присъствие на Бога. Така мисленето на Паскал стига до мистичното отдаване в Божиите ръце, което е особено ясно видно в посмъртно публикуваното през 1669 г. негово съчинение „Размишления върху религията".

Пробабилизмът е морален принцип, според който един закон може да бъде тълкуван така, както е най-благоприятно за проявите на човешката свобода, когато в негова полза говорят основателни и сериозни причини, когато законодателят не е искал да наложи никакви съвместими с подобни прояви задължения. Борбата на Паскал срещу пробабилизма на йезуитите е срещу едно учение, според което християнинът може да смята за „пробабилно" („приемливо") всяко мнение на който и да е доктор по теология и може да се позовава в действията си на него, дори и когато е в противоречие с повелите на Евангелието, на папата, на църковните отци или на църковните събори. Ако по едно и също положение има повече от едно, различаващи се едно от друго становища, той (християнинът) би имал правото да избере по-изгодното, по-благоприятното за него. При йезуитите действа „пробабилността" на двойните стандарти, която Паскал илюстрира с два примера.

а) Йезуитът Васкес в „Трактата за милостинята" освобождава богатите от задължението да помагат на бедните (спомнете си Евангелските слова „Давайте милостиня от вашите излишъци") с витийското тълкуване на думата „излишък": „Това, което светските хора заделят настрана, за да подобрят своето положение, а и това на своите родственици, се нарича излишък. Затова едва ли някога ще се намери излишък у светските хора (миряните), даже и при кралете." Ще рече, „излишъкът" е всъщност „недостиг"...

б) В едно от своите писма Паскал казва, че йезуитите, ако не могат да удържат човека от някое непозволено действие, то могат да оправдаят порочността на действието с чистотата на целта. Примерът тук е с отцеубийството, но не от лоши намерения, а за наследяване на имуществото (напомня „Братя Карамазови", отчасти „Престъпление и наказание"). В тази връзка той пише: „Не знам даже не е ли по-малко неприятно да бъдеш убит от развилнелите се тълпи, отколкото да съзнаваш, че добросъвестно те заколват религиозни хора".

Ето три интересни мисли на Паскал:

„Ние постигаме истината не само с разума, но и със сърцето".

„Всичко, което превъзхожда геометрията, превъзхожда и нас".

„Неумението да се изучава човека ни заставя да изучаваме всичко останало".

В неголемия трактат „За геометричния ум и изкуството да убеждаваш" Паскал споделя убеждението на философите-рационалисти в безспорното преимущество на аксиоматично-дедуктивния метод, на математическия метод на познанието.

За прецизност на изложението ще споделя тук някои резерви на френския мислител по отношение на математиката. В писмо до Пиер де Ферма (1601 – 1665 г.) от 1660 г. той пише: „Мога искрено да Ви призная, че считам геометрията за най-възвишеното упражнение за ума, но едновременно с това я намирам за толкова безполезна, че констатирам по-малко различия между човека, който е само геометър, и този, който е изкусен занаятчия".

Ще завърша тази „философско-религиозна и гносеологична" част на експозето с точния цитат на гореспоменатата мисъл на Паскал: „Човекът е най-слабата тръстика в природата, но мислеща тръстика. (...) Цялото наше достойнство е събрано в мисълта. Само тя ни възвисява, а не пространството и времето, които не можем да запълним“. Ще добавя още „Сърцето има свои закони, които разумът не познава“ и „Сърцето чувства Бога, а не разума“.

II. Паскал и математиката. 1. Ще се опитам да представя в актуален вид някои от приносните резултати на Паскал, а и на много други математици от 17 в. в областта на теорията на вероятностите, които, подходящо (до)развити, са познати понастоящем под общото име „разпределение на Паскал“. Последното представлява дискретното разпределение на вероятностите на случайната величина X, приемаща стойности $k = 0,\ 1,\ \ldots$, т.е. $k \in \mathbb{N}_0$, по формулата

$$P\{X = k\} = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k,$$

където $0 < p < 1$ и $r \in \mathbb{N}$ са параметри. Както е общоприето, с N означаваме множеството на естествените числа. Известно е, че пораждащата функция $P(z)$ и характеристичната функция $f(t)$ на Паскаловото разпределение се задават с формулите

$$\begin{aligned} P(z) &= p^r (1-qz)^{-r} \\ f(t) &= p^r \left(1-qe^{it}\right)^{-r}, \qquad q = 1-p. \end{aligned}$$

Математическото очакване и дисперсия на този процес са $r\dfrac{q}{p}$ и съответно $\dfrac{rq}{p^2}$. Разпределението на Паскал възниква в Бернулиевата схема на тестване с вероятност за благоприятен изход („успех“) p и с вероятност за неблагоприятен изход („неуспех“) $q = 1 - p$, като разпределение на броя на „неуспехите“ до настъпването на r-тия „успех“. Нека $r = 1$. Тогава възниква т. нар. геометрично разпределение, чието име идва от пораждащата функция $P(z) = \dfrac{p}{1-qz}$, която е сума на геометрична прогресия. Да предположим, че $r > 1$. В този случай Паскаловото разпределение съвпада с разпределението на сумата на няколко независими случайни величини, които притежават еднакво геометрично разпределение с параметър p. И така, сумата от независимите случайни величини $X_1, X_2,\ \ldots,\ X_n$ с разпределения на Паскал с параметри $p,\ r_1,\ \ldots,\ r_n$ респективно, има Паскалово разпределение с параметри p и $r_1 + \ldots + r_n$. Функцията на разпределение $F(k)$ на Паскаловото разпределение при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ се изразява чрез т. нар. *бета разпределение* или в крайна сметка чрез непълната бета функция на Ойлер $B_{m,n}(x)$, $m \in$ N, $n \in$ N$_0$, $0 < x < 1$.

Функцията на бета разпределението ни дава възможност да намерим стойностите на функцията на биномното разпределение по формулата

$$B_{n-m,m+1}(1-p) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 \le m \le n,$$

защото за биномното разпределение

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ще кажа няколко думи за триъгълника на Паскал, който е тясно свързан с комбинаториката и доказателството на биномната формула. Паскал намира за пръв път индуктивно някои свойства на биномните коефициенти, а значи и формулата. Триъгълникът представлява триъгълна таблица от числа с формата на равнобедрен триъгълник, която е запълнена с естествени числа (биномни коефициенти от съвременно гледище). На най-горния първи ред с един елемент стои числото 1. По бедрата също стоят единици, а всяко от останалите вътрешни за триъгълника числа е сума от двете числа, разположени вляво и вдясно над него. Следователно, на $n+1$-вия хоризонтален ред ще стоят биномните коефициенти $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Очевидно конструкцията е индуктивна: $n \to n+1$, $n = 1$, защото $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

В работата на Паскал от 1654 г. таблицата е завъртяна на $\frac{\pi}{4}$ (вж. фиг. 1).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1
\end{array}
$$

Фиг. 1

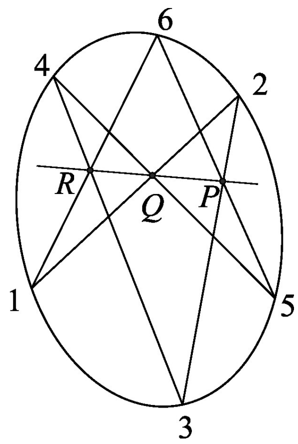
2. Ще пристъпя към формулировката на знаменитата теорема (по-скоро серия от теореми) на Паскал за едно свойство на равнинен шестоъгълник (петоъгълник), вписан в конусно сечение. Както знаем, кривите от 2 степен, или конусните сечения, са: точка, двойка различни прави, двойна права, елипса, хипербола и парабола. В класическата литература се говори за мистични шестоъгълник и петоъгълник. Най-сетне ще спомена, че кривите от втора степен се определят от 5 точки, докато през 5 точки в една равнина, никои три от които не са колинеарни, минава точно една крива от 2 степен. Ако имаме двойка прави, поне 3 от всеки 5 точки върху нея са колинеарни. И досега тази теорема на Паскал впечатлява с изяществото си и с геометричната красота. Докато Декарт свежда геометричните изследвания към алгебрични (аналитична геометрия), Паскал остава верен на геометричния подход (в древногръцки дух).

И така, нека в една крива в равнината от втора степен е вписан шестоъгълник с върхове 1, 2, 3, 4, 5, 6, никои три от които не са колинеарни, т.е. кривата е елипса, хипербола или парабола. Да допуснем, че те са различни и с (12) да означим правата през 1, 2, с (54) правата през 5, 4, а с (12)(54) бележим пресечната им точка. Ако точките 1 и 2 съвпадат, (бележим тук като $1 = 2$), то a означава тангентата към кривата през т. 1.

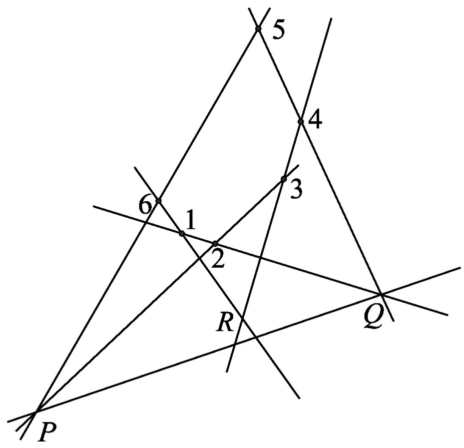
Теорема на Паскал. *Необходимото и достатъчно условие (НДУ) шестте различни точки от една равнина* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *никои три от които не са колинеарни, да лежат върху една крива от втора степен, е точките* $Q = (12)(45)$, $P = (23)(56)$ *и* $R = (34)(61)$ *да лежат на една права.*

Шестте точки в горната теорема са равноправни, т.е. всяка двойка от тях може да играе ролята на 1, 2. (12) и (45) наричаме срещуположни страни и т.н.

Ние сме илюстрирали горната теорема с 6 точки на фиг. 2 и фиг. 3 и сме построили пресечните точки P, Q, R. Понеже те не лежат на една права (на Фиг. 3), около шестоъгълника не може да се опише крива от втора степен. Теоремата на Паскал остава вярна, ако 2 съседни точки съвпадат, но конфигурацията е пак равнинна.

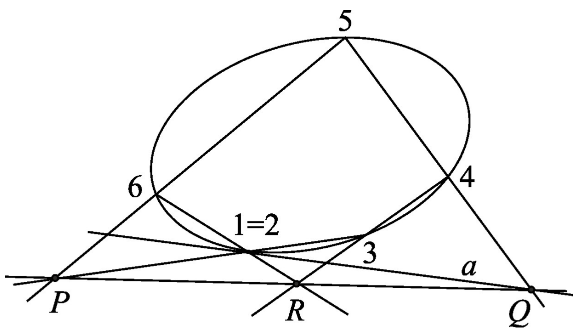


Фиг. 2



Фиг. 3

Следствие 1 от Теоремата на Паскал. *Нека никои* 3 *точки от петте* 1, 3, 4, 5, 6 *не лежат на една права, а* $\boldsymbol{a}$ *е права през т.* 1. *Тогава НДУ петте точки да лежат върху една крива от втора степен, която да се допира до правата* $\boldsymbol{a}$ *в т.* 1, *е трите точки* $Q = \boldsymbol{a}(45)$, $P = (23)(56)$, $R = (34)(61)$ *да лежат на една права (вж. фиг.* 4*).*

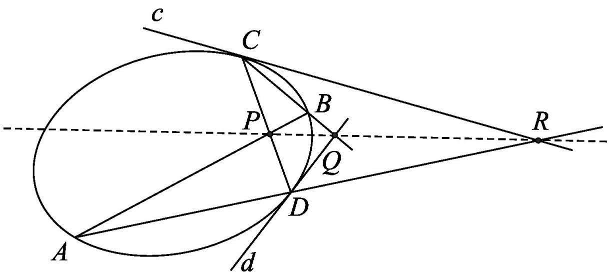


Фиг. 4

Нека сега съвпадат съседните точки $C = 1 = 2$, $D = 4 = 5$ и никои 3 от точките C, $B = 3$, D, $A = 6$ не лежат на една права. Да означим с c права през т. C и с d права през т. D.

При тези предположения е валидно Следствие 2.

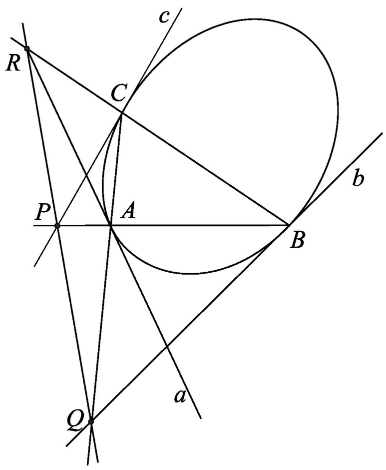
Следствие 2. *НДУ четириъгълникът в равнината* $ABCD$ *да бъде вписан в конусно сечение, което да се допира до правата* c *в точка* C *и до* d *в точка* D, *е* *точките* $c\,(AD) = R$, $d\,(CB) = Q$ *и* $(AB)\,(CD) = P$ *да лежат на една права (вж. фиг.* 5*).*



Фиг. 5

Да предположим сега, че четирите последователни точки $1 = 2 = 3 = 4 = A$, $B = 5$, $C = 6$, като A, B, C са неколинеарни. Нека a е права през т. A, b е права през т. B и c през т. C.

Следствие 3. *НДУ точките* A, B, C *да бъдат вписани в крива от втора степен, която да се допира до правата* a *в т.* A, *до* b *в т.* B *и до* c *в т.* C *е трите точки* $a\,(BC) = R$, $\quad b\,(AC) = Q$, $c\,(AB) = P$ *да лежат на една права (вж. фиг.* 6*).*



фиг. 6

За двойка различни прави теоремата на Паскал съвпада с т. нар. аксиома на Пап от III в. н. е.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Матеев. Проективна геометрия. София, Наука и изкуство, 1959 [A. Mateev. Projective geometry. Sofia, Nauka i izkustvo, 1959].
[2] Г. Стрельцова. Блез Паскаль. Москва, Мысль, 1979 [G. Strel'tsova. Blaise Pascal, Moskva, Misl, 1979] (in Russian).
[3] Математическая энциклопедия, т. 1–5, Москва, Советская энциклопедия 1977–1985. [Encyclopaedia of Math., vol. 1–5, Moskva, Soviet Encyclopaedia, 1977–1985] (in Russian).
[4] Х. Шмит, Г. Шишков. Философски речник. София, УИ „Св. Климент Охридски", 1997 [H. Schmidt, G. Schischkoff. Sofia, St. Kl. Okhridski edition, 1997] (in Bulgarian).
[5] E. Picard. Pascal mathématicien et physicien. Paris, Gauthier-Villars, 1923 (in French).

Петър Попиванов
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Георги Бончев, блок 8
1113 София, България
e-mail: popivano@math.bas.bg

400$^{\text{th}}$ ANNIVERSARY OF BLAISE PASCAL

Peter Popivanov

This paper is devoted to the 400th anniversary of the great French philosopher, mystic and mathematician Blaise Pascal. We propose here several short biographical data, a glance at his highly appreciated by the philosophers contributions to Christian philosophy, theology and gnosiology and, finally, we discuss his outstanding achievements in mathematics. It concerns Pascal's remarkable results in the Probability theory – an intensively developing area till now – and his nice theorems (from aesthetical point of view) on hexagons inscribed in conic sections in the plane. His computing machine and interesting results in physics (pressure of fluids) are also discussed.