WALSH FUNCTIONS AND WALSH TRANSFORM. MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND SOME APPLICATIONS

Paskal Piperkov

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria

ppiperkov@math.bas.bg

ФУНКЦИИ И ТРАНСФОРМАЦИЯ НА УОЛШ. МАТЕМАТИЧЕСКИ ОСНОВИ И НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Abstract: *The purpose of this article is to popularize the Walsh functions. A methodology for teaching of Walsh functions is presented. The Descrete Walsh-Hadamard transform is described as well as their applications.*

Keywords: *Walsh Function; Descrete Walsh-Hadamard Transform.*

Въведение

Функциите на Уолш възникват като дискретен аналог на затворените и ортонормирани системи от тригонометричните функции, функциите на Щурм-Лиувил и Льожандър, а съответната трансформация – като аналог на трансформацията на Фурие. През 1923 г. Уолш [20] предлага система от реални функции, които:

1) са дефинирани в интервала (0; 1);

2) са константи във всеки от краен брой подинтервали, на които дефиниционният (0; 1) е разделен;

3) приемат стойности 1 и –1 с изключение на краен брой точки на прекъсване, в които функциите приемат стойност 0.

Други основни свойства на предложената система от функции са:

4) m-тата функция има m–1 нули (и промени на знака) вътре в дефиниционния интервал.

5) Всяка функция е четна или нечетна спрямо точката $x = \frac{1}{2}$ в зависимост от четността на броя на точките на прекъсване.

6) Няма подинтервал на дефиниционния, в който някоя от функциите да се анулира.

7) Системата от функции е абсолютно ограничена (uniformly bounded).

8) Всяка непрекъсната функция с ограничена вариация може да бъде представена като граница на ред от функции от системата.

Дискретната трансформация на Уолш, по аналогия с дискретната трансформация на Фурие, определя коефициентите от представянето на вектора от стойностите на дадена дискретна функция като линейна комбинация на функции на Уолш. За целта най-удобно е да се използва т. нар. „естествена номерация" на функциите на Уолш, при което трансформационната матрица е Адамарова от тип Силвестър [2]. Затова и трансформацията се нарича трансформация на Уолш-Адамар. Известни са бързи алгоритми за пресмятане, при което изчислителната трудност се намалява от $O(2^n.2^n)$ на $O(n.2^n)$.

Целта на статията е да предложи методика за изучаване на функциите на Уолш и дискретната трансформация на Уолш-Адамар. Обучаеми могат да бъдат студенти и докторанти с интереси в хармоничния анализ и дискретната математика.

Функции на Уолш

Множеството от функции на Уолш се дефинира рекурентно, както следва:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_2^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{4},\ \ \frac{3}{4} < x < 1, \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{4},\ \ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2},\ \ \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi_{n+1}^{(2k-1)}(x) = \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k+1}\varphi_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi_{n+1}^{(2k)}(x) = \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k}\varphi_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1},\ \ n = 2, 3, \cdots$$

Функциите могат да се додефинират в точките от интервала (0; 1), в които съгласно горните формули нямат стойност, със средноаритметичното на лявата и дясната граница в съответната точка. Функциите могат да бъдат периодично продължени, като стойността в целочислен аргумент се определя от средноаритметичното на границите в 0 и 1.

Поредният номер в номерацията на Уолш е m=1 за φ_0, m=2 за φ_1 и $m=2^{n-1}+k$ за $\varphi_n^{(k)}$, където n=2, 3, ... и k=1, 2, ..., 2^{n-1}. За удобство, функциите се означават по броя на нулите им с $\mathrm{wal}_w(m-1, x)$ [1].

Лема 1. Нека N е естествено число. Изпълнено е

$$(7)\qquad wal_w(N,x) = wal_w\left(\lfloor\tfrac{N}{2}\rfloor,2x\right) \text{ при } 0 < x < \tfrac{1}{2}$$

$$(8)\qquad wal_w(N,x) = \epsilon\, wal_w\left(\lfloor\tfrac{N}{2}\rfloor,2x-1\right) \text{ при } \tfrac{1}{2} < x < 1$$

където ϵ е 1 или –1.

Доказателство. Непосредствено се проверява, че

$$(9)\qquad wal_w(0,x) = \varphi_0(x) = \begin{cases} wal_w(0,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ wal_w(0,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1, \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(10)\qquad wal_w(1,x) = \varphi_1(x) = \begin{cases} wal_w(0,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -wal_w(0,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$(11)\qquad wal_w(2,x) = \varphi_2^{(1)}(x) = \begin{cases} wal_w(1,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -wal_w(1,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1, \\ -1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(12)\qquad wal_w(3,x) = \varphi_2^{(2)}(x) = \begin{cases} wal_w(1,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ wal_w(1,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Равенствата (5) и (6) могат да се преформулират така

(13)

$$wal_w(2^n+2k-2,x) = \begin{cases} wal_w(2^{n-1}+k-1,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^k wal_w(2^{n-1}+k-1,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

(14)

$$wal_w(2^{n-1}+k-1,x) = \begin{cases} wal_w(2^{n-1}+k-1,2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^k wal_w(2^{n-1}+k-1,2x-1), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Твърдението следва по индукция.

Лема 2. Функциите на Уолш са ортогонални в Хилбертовото пространство $L^2[0; 1]$.

Доказателство. Индукция. Ортогоналността на функциите φ_0 и φ_1 се проверява непосредствено. Нека е фиксирано $N>1$ и функциите $wal_w(m-1,x)$, за $m=1, \ldots, N$, са ортогонални помежду си. В следващите разсъждения ще бъде показано, че функцията $wal_w(N,x)$ е ортогонална с всяка от функциите $wal_w(m-1,x)$, $m=1, \ldots, N$. За целта, при фиксирано m следва да се разгледат интегралите

$$\int_0^{\frac{1}{2}} wal_w(N,x).wal_w(m-1,x)dx \quad \text{и} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} wal_w(N,x).wal_w(m-1,x)dx.$$

След смяна на променливата $y=2x$ в първия интеграл и $y=2x-1$ във втория, съгласно лема 1 с точност до знак се получават интеграли от вида

$$\int_0^1 wal_w(n_1,x).wal_w(m_1,x)dx,$$

където $n_1 = \lfloor\frac{N}{2}\rfloor$ и $m_1 = \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ са по-малки от N. Съгласно индукционното предположение последният интеграл е равен на 0 при $n_1 \neq m_1$. Но n_1 и m_1 са равни, само ако $N=m$ и N е нечетно. Съгласно (11), (12), (13) и (14) в последния случай двата интеграла са с различни знаци и следователно сумата им е 0. С това индукционната стъпка е доказана.

Понеже всяка от функциите на Уолш има краен брой точки на прекъсване в интервала (0; 1), а в останалите точки приема стойности 1 и –1, то нейният квадрат е интегруем (по Риман) в интервала [0; 1], при което стойността на интеграла е 1. Следователно функциите на Уолш образуват ортонормирана система в $L^2[0; 1]$.

Ортонормираната система от функции на Уолш е затворена (пълна) в Хилбертовото пространство $L^2[0;1]$. Уолш показва този факт с помощта на функциите на Хаар. Това дава основание да се разглеждат съответни редове от тип Фурие и да се изследва сходимостта на такива редове [18], [3], [19], [20].

Дискретна трансформация на Уолш-Адамар

Нека n е естествено число. На всяко неотрицателно цяло число $u<2^n$ еднозначно се съпоставя векторът $\underline{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, където $u = u_0 2^{n-1} + u_1 2^{n-2} + \cdots + u_{n-1}$ е двоичното представяне на u.

Нека h функция, дефинирана за целите числа от 0 до 2^n-1. Таблицата от стойностите на функцията h е 2^n-мерен вектор стълб, който по аналогия с таблицата за истинност при булевите функции се означава с TT_h.

Дискретната трансформация на Уолш-Адамар от ред n за функцията h се дефинира с равенството

$$W_h(\omega) = \sum_{u=0}^{2^n-1} h(u).(-1)^{\langle \overline{u}, \overline{w} \rangle}, \qquad \omega = 0,1,\dots,2^n-1,$$

където $\langle x, y \rangle$ е скаларното произведение на векторите x и y. По-долу с W_h е означен векторът стълб с координати $W_h(\omega)$, за $\omega = 0,1,\dots,2^n-1$.

Трансформационните матрици са Адамарови от тип Силвестър и се дефинират индуктивно, както следва:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n > 1.$$

Теорема 1. Ако h е функция, дефинирана за целите неотрицателни числа, по-малки от 2^n, то $W_h = H_n \cdot TT_h$.

Доказателство: Индукция по n. При n=1, нека функцията h е дефинирана за числата 0 и 1. Тогава $TT_h = (h(0)\ h(1)\ )$, $u = \underline{u}$ и $\omega = \underline{\omega}$, където u=0, 1 и $\omega = 0, 1$. Така

$$W_h(0) = h(0).(-1)^{0.0} + h(1).(-1)^{1.0} = h(0) + h(1),$$
$$W_h(1) = h(0).(-1)^{0.1} + h(1).(-1)^{1.1} = h(0) - h(1).$$

Очевидно $W_h = H_1 \cdot TT_h$. Нека $n \geq 1$ и h е функция, дефинирана за целите неотрицателни числа, по-малки от 2^{n+1}, с таблица на истинност TT_h. Нека функциите h_{u_0} са дефинирани за целите неотрицателни числа, по-малки от 2^n, така че $h_{u_0}(u \bmod 2^n) = h(u)$, за u_0 =0, 1. Така TT_h може да се раздели на два 2^n-мерни вектора TT_{h_0} и TT_{h_1}. Съгласно индукционното предположение $W_{h_0} = H_n \cdot TT_{h_0}$ и $W_{h_1} = H_n \cdot TT_{h_1}$. Нека за удобство $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ и $\bar{\bar{u}} = (u_1, \dots, u_n)$, където $u = u_0 2^n + u_1 2^{n-1} + \dots + u_n$ е двоичното представяне на цялото неотрицателно число $u < 2^{n+1}$. Така $W_h(\omega)$, за $\omega = 0,1,\dots,2^{n+1}-1$, може да се пресметне чрез равенствата

$$W_h(\omega) = \sum_{u=0}^{2^{n+1}-1} h(u).(-1)^{\langle \underline{u}, \underline{\omega} \rangle} =$$
$$= \sum_{u=0}^{2^n-1} h(u).(-1)^{\langle \underline{u}, \underline{\omega} \rangle} + \sum_{u=2^n}^{2^{n+1}-1} h(u).(-1)^{\langle \underline{u}, \underline{\omega} \rangle} =$$
$$= \sum_{u=0}^{2^n-1} h_0(u).(-1)^{\langle \bar{\bar{u}}, \bar{\bar{\omega}} \rangle} + \sum_{t=0}^{2^n-1} h_1(t).(-1)^{\omega_0 + \langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{\omega}} \rangle} =$$
$$= \sum_{u=0}^{2^n-1} h_0(u).(-1)^{\langle \bar{\bar{u}}, \bar{\bar{\omega}} \rangle} + (-1)^{\omega_0} \sum_{t=0}^{2^n-1} h_1(t).(-1)^{\langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{\omega}} \rangle}.$$

Тогава

$$W_h(\omega) = \begin{cases} W_{h_0}(\omega) + W_{h_1}(\omega), & \text{за } \omega < 2^n, \\ W_{h_0}(\omega - 2^n) - W_{h_1}(\omega - 2^n), & \text{за } \omega \geq 2^n \end{cases}$$

с което индукционната стъпка е доказана.

Изчисляването на дискретната трансформация на Уолш-Адамар се свежда до умножение на матрица по вектор. Елементите на матрицата H_n са само 1 и –1. Така, при умножаването на ред от H_n с вектор е достатъчно да се извършва само събиране и изваждане. Това води до съответни алгоритми с по-малка сложност.

Има бърз алгоритъм за умножение на H_n с вектора v, който се базира на идеята в доказателството на теорема 1. С негова помощ за умножението се извършват $n.2^n$ аритметични операции (събиране и изваждане) вместо $2^n.2^n$ операции (умножение и събиране) при обичайното умножение на матрица с вектор.

Благодарности

Научното изследване е проведено като част от проекта „Изследване на приложението на нови математически методи за анализ на кардиологични данни“ № КП-06-Н22/5 от 07.12.2018 г., финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Република България.

References // Литература

[1] Ahmed, N.; Schreiber, H. H.; and Lopresti, P. V. (1973). “On notation and definition of terms related to a class of complete orthogonal functions”. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-15, no. 2, pp. 75-80, May 1973. DOI: https://doi.org/10.1109/TEMC.1973.303252

[18] Fine, N. J. (1949). “On the Walsh functions”. *Trans. Amer. Math. Soc. 65*, pp. 372-414, 1949. DOI: https://doi.org/10.2307/1990619

[2] Henderson, K. W. (1964). “Some notes on the Walsh functions”. IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. EC-13, no. 1, pp. 50-52, Feb. 1964. DOI: https://doi.org/10.1109/PGEC.1964.263835

[3] Kaczmarz, S. (1929). “Über ein orthogonalsystem”. In *Comptes Rendus du premier congrès des mathématiciens des pays slaves*, pp. 189-192, 1929.

[19] Paley, R. E. A. C. (1932). “A remarkable series of orthogonal functions”. *Proc. London Math. Soc. 34*, pp. 241-279, 1932. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-34.1.241

[20] Walsh, J. L. (1923). “A closed set of normal orthogonal functions”. *American J. of Math. 45*, 1, pp. 5-24, 1923. DOI: https://doi.org/10.2307/2387224

Received: 17-06-2023 Accepted: 29-06-2023 Published: 24-07-2023
Cite as:
Piperkov, P. (2023). “WALSH Functions and WALSH Transform. Mathematical Foundations and Some Applications”, Science Series “Innovative STEM Education”, volume 05, ISSN: 2683-1333, pp. 23-28, 2023. DOI: https://doi.org/10.55630/STEM.2023.0503